

Változó tömegű rendszerek mechanikája

Tartalomjegyzék

1.	A Mescserszkij-egyenlet	1
2.	A munkatétel	4
3.	A rakéta gyorsítása és lassítása erőmentes térben	6
4.	Az esőcsepp növekedése	9
5.	A változó tömegű bolygó	12
6.	A szállítószalag	15
7.	Az asztalról lecsúszó lánc	16
8.	Az egyik végén lehulló lánc	21
9.	A változó tömegű forgó test mozgásegyenlete	28
10.	A tűzoltóguriga	33
11.	A relativisztikus rakéta	38

1. A Mescserszkij-egyenlet

Tekintsünk egy inerciarendszerben nyugvó M tömegű testet, amelyet egy \mathbf{q} sebességű, infinitezimálisan kis $d\mu$ tömegű test talál el úgy, hogy benne is marad. A megnövekedett $(M + d\mu)$ tömegű test valamilyen $d\mathbf{v}$ sebességre tesz szert, amelyet az

$$(M + d\mu) \cdot d\mathbf{v} = d\mu \cdot \mathbf{q}$$

impulzusmegmaradásból számíthatunk ki. A továbbiakban a $d\mu$, $d\mathbf{v}$, dt infinitezimális mennyiségekben lineáris pontossággal kell számolnunk, ezért az előbbi egyenletből a meglökött test impulzusára az

$$M \cdot d\mathbf{v} = d\mu \cdot \mathbf{q}$$

kifejezést kapjuk. A meglökött test mozgási energiája az infinitezimális $d\mathbf{v}$ sebesség négyzetével arányos, és ezért a tárgyalt rendben nullával egyenlő. Az elnyelt test $\frac{1}{2}d\mu \cdot q^2$ mozgási energiája azonban elsőrendű mennyiség, amelyet figyelembe kell venni. Ez a kis $d\mu$ tömeg lefékeződésekor keletkezik és a test belső energiáját növeli (felmelegíti a testet).

Hasonlóan tárgyalható az az eset is, amikor a nyugvó M tömegű test egy \mathbf{q} sebességű infinitezimálisan kis $d\mu$ tömeget lök ki magából, miközben maga $d\mathbf{v}$ sebességre tesz szert. Az impulzusmegmaradás tétele ekkor

$$(M - d\mu) \cdot d\mathbf{v} + d\mu \cdot \mathbf{q} = 0,$$

amely első rendű pontossággal a korábbi képletre vezet azzal a különbséggel, hogy a jobboldalon megjelenik egy mínusz:

$$M \cdot d\mathbf{v} = -d\mu \cdot \mathbf{q}.$$

A két képletet azonban közös alakra hozhatjuk, ha bevezetjük a dM előjeles tömegváltozást a

$$dM = \begin{cases} d\mu & \text{ha a test tömege nő,} \\ -d\mu & \text{ha a test tömege csökken} \end{cases}$$

definícióval. Ekkor az

$$M \cdot d\mathbf{v} = dM \cdot \mathbf{q} \quad (1.1)$$

képlet mindkét esetre egyaránt érvényes. A továbbiakban ehhez a konvencióhoz tartjuk magunkat.

Ha a testre még valamilyen \mathbf{F} erő is hat, akkor (1.1)-ben az ebből származó erőlöketet is figyelembe kell venni. Az infinitezimálisan kis hatások additivitása alapján ezért

$$M \cdot d\mathbf{v} = \mathbf{F}dt + dM \cdot \mathbf{q}. \quad (1.2)$$

Tegyük fel most, hogy egy változó $\mathbf{v}(t)$ sebességű test folyamatosan vesz fel tömeget a környezetéből, vagy folyamatosan emittál. Ezt a folyamatot *tömegtranszfernek* (vagy *konvekciónak*) fogjuk hívni. A tömegtranszfer következtében a testnek időben változó $M(t)$ tömege lesz. A $(t, t + dt)$ infinitezimális intervallumban felvett tömeg legyen $dM(t)$. Ez lehet negatív is, amikor $|dM(t)|$ tömeg lökődik ki. A $(t, t + dt)$ -ben felvett vagy kilökött tömeg sebessége legyen $\mathbf{u}(t)$. Írjuk fel a változó tömegű test mozgásegyenletét!

Feltevés szerint a test valamilyen \mathcal{K} inerciarendszerben mozog $\mathbf{v}(t)$ sebességgel. Bármely adott t -hez tartozik egy \mathcal{K}_t inerciarendszer, amelyben a test az adott pillanatban éppen nyugalomban van (*pillanatnyi nyugalmi rendszer*). A \mathcal{K}_t nyilván a *konstans* $\mathbf{v}(t)$ sebességgel mozog \mathcal{K} -ban, és hozzá viszonyítva érvényes (1.2). Mivel azonban a newtoni fizikában a *sebességkülönbség* és az erő nem változik, amikor egyik inerciarendszerről egy másikra térünk át, a \mathbf{q} sebesség pedig definíció szerint független az inerciarendszer megválasztásától (hiszen az elnyelt vagy kilökött tömegnek mindig a testhez viszonyított sebességével egyenlő), ezért (1.2) valójában a \mathcal{K} -ban is érvényes. Legfeljebb arról lehet szó, hogy a \mathbf{q} -t a

$$\mathbf{q} = \mathbf{u} - \mathbf{v}. \quad (1.3)$$

egyenlet segítségével kifejezzük benne \mathbf{u} -n és \mathbf{v} -n keresztül¹.

Ezt a behelyettesítést elvégezve dt -vel történő osztás után az

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dM}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v})$$

egyenletre jutunk, amelyet

$$\frac{d(M\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dM}{dt}\mathbf{u}. \quad (1.4)$$

¹A relativitáselméletben a \mathcal{K}_t -ről a \mathcal{K} -ra történő áttérés nem ilyen egyszerű, mert a gyorsulás nem invariáns és a sebességösszeadás képlete is bonyolultabb, mint (1.3) (ld. a 11. fejezetet).

alakban is felírhatunk.

A mozgásegyenletnek ez az alakja akkor hasznos, amikor a \mathcal{K} -hoz viszonyított $\mathbf{u}(t)$ sebesség van megadva. Az olyan feladatokban azonban, amelyekben a testhez viszonyított $\mathbf{q}(t)$ sebesség az, ami ismert (mint például a rakétamozgásnál), akkor az (1.2)-ből kapható

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dM}{dt} \mathbf{q} \quad (1.5)$$

mozgásegyenlet használata célszerű. Az (1.4) és az (1.5) a *Mescserszkij-egyenlet* két különböző alakja.

Említsünk meg külön két speciális esetet. Amikor $\mathbf{u} = 0$, az (1.4) a

$$\frac{d(M\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} \quad (1.6)$$

alakra redukálódik. Ha az erő származtatható valamilyen V potenciálból, az (1.6) az

$$L = \frac{1}{2} M v^2 - V$$

Lagrange-függvényhez tartozó Euler-Lagrange egyenlet. A mozgás során a test energiája nem marad meg:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{1}{2} \dot{M} v^2 = -\frac{1}{2} \dot{M} q^2.$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy (1.3) és $\mathbf{u} = 0$ következtében $\mathbf{v} = \mathbf{q}$.

A másik speciális esetben $\mathbf{q} = 0$ és ezért $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Az (1.5) szerint a mozgásegyenlet ekkor

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (1.7)$$

Amikor a tömeg időben állandó, az (1.6) és az (1.7) nem különbözik egymástól, mindkettő a megszokott newtoni mozgásegyenlet. De ha a tömeg függ az időtől, a két egyenlet nem ugyanaz. Az (1.6)-tól eltérően (1.7) nem származtatható Lagrange-függvényből. A test energiáján a szokásos

$$E = \frac{1}{2} M v^2 + V$$

kifejezést értve ez a kifejezés az M időfüggése miatt nem marad meg. De ha a diffúzióban részt vevő környező anyag energiája megmarad, akkor ezt az energiát és a test E energiáját összeadva megmaradó mennyiséget kapunk. Az energia disszipációja ugyanis — mint láttuk, — a \mathbf{q} -val kapcsolatos, ami most zérus.

Az (1.4) és az (1.5) könnyen általánosítható arra az esetre, amikor a tömegtranszferben különféle sebességű tömegek vesznek részt. Amikor pl. az \mathbf{u} és a \mathbf{q} két különböző értéket vehet fel, ezek az egyenletek így módosulnak:

$$\frac{d(M\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dM_a}{dt} \mathbf{u}_a + \frac{dM_b}{dt} \mathbf{u}_b, \quad (1.8)$$

valamint

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dM_a}{dt} \mathbf{q}_a + \frac{dM_b}{dt} \mathbf{q}_b. \quad (1.9)$$

2. A munkatétel

Konstans tömegű test esetében munkatételen a

$$\frac{dK}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \quad (2.1)$$

képletet értjük, amelyben $K = mv^2/2$ a mozgási energia, és a jobboldalon a két vektor skalárszorzata áll. A tétel azt fejezi ki, hogy az erő teljesítménye a test mozgási energiájának növekedési rátájával egyenlő. Amikor $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} > 0$, az erőter végez munkát a testen (a kinetikus energia nő), amikor pedig $\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} < 0$, a test végez munkát az erőteren (a kinetikus energia csökken).

Ha az erőt V potenciálból származtathatjuk az $\mathbf{F} = -\nabla V$ képlet segítségével², akkor a munkatételt

$$\frac{dK}{dt} = -\mathbf{v} \cdot \nabla V$$

formában is felírhatjuk. Másrészt a $(t, t + dt)$ intervallumban a potenciál *teljes* — a test mozgásából és a potenciál explicit időfüggéséből — származó változási sebessége a következő:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x} v_x + \frac{\partial V}{\partial y} v_y + \frac{\partial V}{\partial z} v_z + \frac{\partial V}{\partial t} \equiv \\ &\equiv \mathbf{v} \cdot \nabla V + \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ha ebből az egyenletből kifejezzük a potenciál gradiensét tartalmazó tagot és a munkatételben ezt kihasználjuk, akkor a

$$\frac{d(K + V)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t}$$

egyenletre jutunk, amely szerint a test teljes $K + V$ energiája akkor marad meg, amikor a potenciál nem függ *expliciten* az időtől. Gravitációs térben mozgó változó tömegű test potenciális energiája³ például a tömeg változása következtében függ expliciten az időtől.

Hogyan módosul a munkatétel (2.1) egyenlete, amikor a tömeg nőhet ($dM > 0$)? Képzeljük el, hogy a testen állva figyeljük a tömegfelvétel folyamatát. A

²A továbbiakban többnyire a nabla vektort fogjuk használni a grad, a div és a rot helyett: $\text{grad } f = \nabla f$; $\text{div } \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V}$; $\text{rot } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V}$; $\text{div grad } f = \nabla^2 f$; $\text{div rot } \mathbf{V} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) \equiv 0$; $\text{rot grad } f = \nabla \times \nabla f \equiv 0$.

³A *potenciál* terminust a *potenciális energia* értelmében használjuk.

($t, t + dt$) intervallumban azt látjuk, hogy $\mathbf{q}(t)$ sebességgel mozgó $dM(t)$ tömeg fékeződik le és tapad hozzá a testhez, miközben mozgási energiája a test belső energiáját a

$$dU = \frac{1}{2}dM \cdot q^2 \quad (2.3)$$

mennyiséggel növeli meg. A kinetikus energia és a belső energia megnövekedését azonban most nem egyedül a külső erő munkájából kell fedezni, hanem hozzájárul az az $\frac{1}{2}dM(t)u^2$ energia is, amely konvekció útján növeli meg (vagy csökkenti le $dM < 0$ esetén) a test energiáját. A munkatétel tehát a következő⁴:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} + \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} u^2. \quad (2.4)$$

Ez a képlet a mozgásegyenlet alapján igazolható is. Szorozzuk (1.4)-t skalárisan \mathbf{v} -vel:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot \frac{d(M\mathbf{v})}{dt} - \frac{dM}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}).$$

A jobboldalon

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \frac{d(M\mathbf{v})}{dt} &= M\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dM}{dt}v^2 = \\ &= \frac{1}{2}M \frac{dv^2}{dt} + \frac{dM}{dt}v^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}Mv^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} v^2, \end{aligned}$$

és ennek következtében

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}Mv^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} v^2 - \frac{dM}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}).$$

Adjunk mindkét oldalhoz $\frac{1}{2} \frac{dM}{dt} u^2$ -t:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} + \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} u^2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}Mv^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2.$$

Az (1.3)-t kihasználva újra (2.4)-t kapjuk eredményül.

A munkatétel (2.4) egyenlete érvényben marad akkor is, amikor a tömeg csökken ($dM < 0$). Az (2.3) szerint a dU ekkor negatív. Ennek így is kell lennie, hiszen a nyugalmi rendszerből nézve a dM tömeg energiája most a test belső energiájának a *rovására* nulláról $\frac{1}{2}(-dM)q^2$ -re nő meg. Rakétánál például ez az energia a rakéta tömegének részét képező üzemanyag kémiai energiájából származik, párolgásnál pedig a test hőmérsékletének a csökkenésében jelentkezik.

Amikor két (vagy több) különböző \mathbf{u} is fellép, akkor (2.4) így módosul:

$$\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{F}_a + \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{F}_b + \frac{1}{2} \frac{dM_a}{dt} u_a^2 + \frac{1}{2} \frac{dM_b}{dt} u_b^2. \quad (2.5)$$

⁴ J. Copeland, Am. J. Phys **50**, 599 (1982)

Az eddigi képleteink alapján a baloldalon

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \left(\dot{M}_a q_a^2 + \dot{M}_b q_b^2 \right),$$

de az általános esetben az erők munkája és a beáramló mozgási energia a kinetikus energia helyett a belső energiához is adhatnak további járulékokat. A 8. fejezetben látunk majd erre példát.

Mikor az erő potenciális, megint alkalmazhatjuk az (2.2) képletet és a munkatételt a következő alakban írhatjuk fel:

$$\frac{d(K + V + U)}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} u^2. \quad (2.6)$$

A test teljes energiája tehát két okból változhat: A potenciál explicit időfüggése és a tömegtranszferből származó energia miatt.

Amikor a tömeg állandó és a potenciál nem függ explicit az időtől, akkor (2.6) az $E = K + V$ energia megmaradását fejezi ki, amely a mozgásegyenlet első integrálja és egy szabadsági fok esetében ezzel meg is adja a mozgásegyenlet megoldását. Változó tömeg mellett azonban a munkatételnek csak az energia-viszonyok tisztázásában van szerepe, a mozgásegyenletek integrálását általában nem segíti elő.

3. A rakéta gyorsítása és lassítása erőmentes térben

Ha az (1.1) képletet

$$d\mathbf{v} = \mathbf{q} \frac{dM}{M} \quad (3.1)$$

alakba írjuk, állandó \mathbf{q} kifúvási sebesség mellett egyszerű integrálással rögtön megtudhatjuk belőle, hogyan függ a sebesség a rakéta tömegétől:

$$\mathbf{v}(M) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{q} \ln \frac{M}{M_0}. \quad (3.2)$$

(*Ciolkovszkij-egyenlet*), ahol M_0 és \mathbf{v}_0 az indulási tömeg és sebesség. Az egyenletből látszik, hogy a rakéta sebességét (adott \mathbf{q} mellett) a tömegmegmaradás következtében egyedül a kifújt tömeg $m = M_0 - M$ mennyisége határozza meg függetlenül attól, hogy a kifúvás milyen ütemezésben történt (a kifúvás közben szünetelhet is).

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az üzemanyag felhasználása időben állandó:

$$M(t) = M_0 - kt \quad k = \text{konstans} > 0. \quad (3.3)$$

Korlátozódjunk egyenesvonalú mozgásra a z -tengely mentén pozitív irányban. Ekkor

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (0, 0, v) & (v > 0), \\ \mathbf{q} &= (0, 0, \pm q) & (q > 0). \end{aligned}$$

A felső előjelnél a hajtómű fékezi, az alsónál gyorsítja a rakétát.

Az (3.2) megoldás ekkor

$$v(t) = v_0 \pm q \ln \frac{M_0 - kt}{M_0} \quad (0 \leq t \leq t_{max}),$$

ahol t_{max} az üzemanyag elfogyásának a pillanat. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az űrhajó tömegének a túlnyomó részét az üzemanyag teszi ki, ezért $t_{max} = M_0/k$.

Számítsuk ki, mennyi utat tesz meg t idő alatt a rakéta, amikor a nyugalmi állapotból indul. Ehhez a $v(t)$ képletét kell az alsó előjel választása és $v_0 = 0$ mellett integrálnunk:

$$z(t) = -q \int_0^t dt' \cdot \ln(1 - t'/t_{max}).$$

Legyen

$$1 - t'/t_{max} = x, \quad dx = -dt'/t_{max}.$$

Akkor

$$z(t) = kt_{max} \int_1^{1-t/t_{max}} dx \cdot \ln x.$$

De

$$\int dx \cdot \ln x = \int d(x \cdot \ln x) - \int x \cdot d \ln x = \int d(x \cdot \ln x) - \int dx = x \cdot \ln x - x,$$

ezért

$$\begin{aligned} z(t) &= qt_{max} [x \cdot \ln x - x]_1^{1-t/t_{max}} = \\ &= qt_{max} / (1 - t/t_{max}) \ln(1 - t/t_{max}) + qt. \end{aligned}$$

Ebből a képletből nem látszik jól, hogy az indulás után közvetlenül ($t \rightarrow +0$) hogyan emelkedik a rakéta. Ha felhasználjuk a

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$

sorfejtést, rövid átalakítás után az

$$z(t) = \frac{q}{2t_{max}} t^2 + o(t^3)$$

képletre jutunk. A t_{max} idő alatt megtett távolságra pedig a $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = 0$ képlet következtében a

$$z(t_{max}) = qt_{max}$$

képletet kapjuk pontosan úgy, mintha a rakéta végig a konstans q sebességgel mozgott volna. Ez azért váratlan, mert ugyanakkor $v(t_{max}) = \infty$.

Térjünk át az (2.4) munkatételre, amelyben most $\mathbf{F} = 0$:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{k}{2}(q^2 - u^2), \quad (3.4)$$

ahol az (1.3) következtében

$$u = v - q$$

a kifújt üzemanyag sebessége. Ebből az egyenletből az a paradoxálsnak tűnő következtetés vonható le, hogy gyorsításnál, miközben a rakéta v sebessége folyamatosan nő, eleinte a mozgási energiája is nő, de a $v = 2q$ sebességnél elér egy maximális értéket, amely után elkezdi csökkenni. Valóban, $v = 2q$ -nál $u = q$, ezért (3.4) jobboldala nullával egyenlő. Amikor pedig $v > 2q$, a jobboldal negatívva válik.

A furcsa viselkedés magyarázata az, hogy a $\frac{k}{2}q^2$ mennyiség a belső energia csökkenési sebességével egyenlő (abszolút értékben), míg $\frac{k}{2}u^2$ a kilövellt égési gázok mozgási energiájának növekedési rátája. Mivel

$$q^2 - u^2 = q^2 - (v - q)^2 = v(2q - v),$$

$v > 2q$ -nál a hajtómű teljesítménye egyedül már nem fedezi a rögzített q mellett a kiáramló gázok energiájának a növekedését. A hiányt a rakéta mozgási energiájának csökkenése fedezi. Mivel azonban a rakéta közben tovább gyorsul, a mozgási energia csökkenése kizárólag a tömegcsökkenés következménye.

Lassításnál $q^2 - u^2 = q^2 - (v + q)^2 = -v(2q + v)$ negatív mennyiség, ezért a sebességgel együtt a rakéta mozgási energiája is folyamatosan csökken.

Térjünk ki végül egészen röviden a rakéta indítására a földfelszínről. A földfelszínre merőleges z -irányú mozgás leírására a mozgásegyenlet jobboldalán most figyelembe kell venni a súlyerőt is. A gravitációs teret homogénnek fogjuk tekinteni, ezért a súlyerő $-Mg$ -vel egyenlő, amelyben g konstans. Az alkalmazandó mozgásegyenlet ekkor (1.5), amely esetünkben a következő:

$$(M_0 - kt) \frac{dv}{dt} = -(M_0 - kt)g + kq.$$

Az egyenletből látszik, hogy a tolóerő nagysága kq , amelynek meg kell haladnia az M_0g indulási súlyt ahhoz, hogy a hajtómű indításának a pillanatában a rakéta megkezdje az emelkedést:

$$kq > M_0g. \quad (3.5)$$

Ha ez az egyenlőtlenség a kezdőpillanatban fennáll, akkor később csak javulhat, mivel a baloldal időben állandó, a jobboldal viszont monoton csökken. A rakéta ezért mindaddig egyre jobban gyorsul, amíg az üzemanyaga el nem fogy. Sőt, ha a kezdőpillanatban (3.5) nem teljesül, mert $M_0 > kq/g$, és ezért a hajtómű beindításakor a rakéta nem kezdi el az emelkedést, egy későbbi időpontban, amikor a rakéta tömege kq/g alá csökken, az emelkedés megkezdődik. Ez az irreális viselkedés a k üzemanyagfelhasználási ráta és a q kifúvási sebesség állandóságának

a következménye, amely a valóságban legfeljebb csak többé-kevésbé szűk időintervallumban tartható be. Sajnos az olyan reális feladatok tárgyalása, mint a Föld körül keringő úrhajó pályamódosítása, nagyon bonyolulttá válik, ha a tömegvesztésedet is figyelembe akarjuk venni.

4. Az esőcsepp növekedése

Abból a fizikai képből indulunk ki, hogy a nedves levegőben hulló esőcsepp folyamatosan növekszik a felületén lecsapódó pára következtében. A cseppre ható közegellenállást figyelembe kell vennünk, a hidrosztatikus felhajtó erőtől azonban eltekinthetünk. A csepp állapotát minden pillanatban (legalább) három időtől függő mennyiség írja le: Az $M(t)$ tömege, $r(t)$ sugara és $v(t)$ sebessége. Ezek között két egyszerű, de plauzibilis, összefüggést tételezünk fel úgy, hogy az ismeretlen függvények számát 1-re redukáljuk.

Feltesszük, hogy a csepp ρ sűrűsége állandó, ezért a tömeg és a sugár között fennáll az

$$M = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$$

összefüggés. Ezt differenciálva a

$$dM = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$$

képletre jutunk. Osszuk el ezt az egyenletet az előzővel:

$$\frac{dM}{M} = 3 \frac{dr}{r},$$

vagyis

$$\frac{\dot{M}}{M} = 3 \frac{\dot{r}}{r}. \quad (4.1)$$

A másik feltevésünk az lesz, hogy a dt intervallumban lecsapódott dM tömeg minden pillanatban arányos a gömb felszínével. Az arányossági tényezőt $k\rho$ alakban felvéve

$$dM = k\rho \cdot 4\pi r^2 dt.$$

A dM -re így van két kifejezésünk, amelyeket összehasonlítva a

$$\frac{dr}{dt} = k, \quad r = kt + r_0 \quad (4.2)$$

összefüggésekre jutunk (feltettük, hogy a $t = 0$ kezdőpillanatban a csepp sugara r_0). Az (4.1) alapján tehát

$$\frac{\dot{M}}{M} = 3 \frac{k}{r}. \quad (4.3)$$

Józan közelítő feltevésnek látszik, hogy a felületre lecsapódó anyag sebessége abban a (földfelszínhez rögzített) vonatkoztatási rendszerben, amelyben a vízcsepp pillanatnyi sebessége $v(t)$, nullával egyenlő: $u = 0$. Ebben az esetben a

mozgásegyenlet (1.4) alakját célszerű alkalmazni. A függőleges mentén a pozitív irányt lefelé mutatónak választva a mozgásegyenlet a következő:

$$\frac{d(Mv)}{dt} = Mg - 6\pi\eta rv$$

A jobboldal második tagja a nevezetes *Stokes-formula*, amely az r sugarú v sebességű gömbre ható fékezőerő az η dinamikai viszkozitású közegben.

A baloldalon elvégezzük a szorzat differenciálását és az egyenletet végigosztjuk $M = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$ -mal:

$$3\frac{\dot{r}}{r} + \dot{v} = g - \frac{9\nu}{2} \cdot \frac{v}{r^2}, \quad (4.4)$$

amelyben $\nu = \eta/\rho$ a közeg kinematikai viszkozitása. Itt nyilván célszerű az idő szerinti differenciálásról áttérni az r sugár szerinti differenciálásra. Az (4.2) alapján

$$\frac{d}{dt} = \frac{dr}{dt} \frac{d}{dr} = k \frac{d}{dr},$$

ezért rendezés és az $\alpha = 9\nu/2$ jelölés bevezetése után (4.4) átírható így:

$$\frac{dv}{dr} + \left(\frac{3}{r} + \frac{\alpha}{kr^2} \right) v = \frac{g}{k}. \quad (4.5)$$

Talán érdemes az r, v helyett bevezetni az x, y dimenziótlan változókat az

$$r = \frac{\alpha}{k}x, \quad v = \frac{g\alpha}{k^2}y \quad (4.6)$$

helyettesítéssel. Az új változóknak (4.5) a következő:

$$y' + \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) y = 1, \quad (4.7)$$

amelynek az $y(x_0) = 0$ kezdőfeltételhez tartozó megoldását az

$$x > x_0 = \frac{\alpha}{k}r_0$$

tartományban keressük.

Az (4.7) egy lineáris elsőrendű közönséges differenciálegyenlet, amely mindig megoldható. Az ilyen egyenletek általános alakja

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x). \quad (4.8)$$

Visszahelyettesítéssel könnyen igazolható, hogy az egyenlet $y(x_0) = 0$ kezdőfeltételhez tartozó megoldása a következő:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x P(x')dx'} \int_{x_0}^x dx' \cdot Q(x') e^{\int_{x_0}^{x'} P(x'')dx''}. \quad (4.9)$$

Esetünkben

$$P(x) = \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2},$$

tehát

$$\int_{x_0}^x P(x') dx' = 3 \ln \frac{x}{x_0} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right),$$

valamint $Q(x) = 1$. Ezeket az általános megoldó képletbe helyettesítve az

$$y(x) = \frac{1}{x^3} e^{1/x} \int_{x_0}^x x'^3 e^{-1/x'} \quad (4.10)$$

megoldást kapjuk.

Az x független változó az r sugárral, de (4.2) következtében az idővel is arányos. Vajon az (4.10) szerint a sebesség monoton növekvő függvénye-e az időnek, vagy esetleg van olyan időintervallum, amelyben a sebesség csökken? A kérdés azért jogos, mert a sugár növekedésével a csepp felülete, és vele együtt a közegellenállás is nő. A súly azonban a csepp térfogatával arányos, ezért gyorsabban nő, mint a közegellenállás. Ha még azt is figyelembe vesszük, hogy (4.7) szerint $x = x_0$ -nál $y' = 1 > 0$, ezért várható, hogy a sebesség az idő monoton növekvő függvénye legyen. Ezt a fejezet végéhez csatolt függelékben igazolni is fogjuk.

Amikor az x (és a t idő) a végtelenhez tart, az (4.10) megoldás lineárisan divergál. A pontos aszimptotikát úgy kapjuk meg, hogy (4.10)-ban a két exponenciális függvényt Taylor-sorba fejtjük és megkeressük $y(x)$ azon tagjait, amelyek $x \rightarrow \infty$ -nél nem tartanak nullához. Ezt kapjuk:

$$y(x) \sim \frac{1}{x^3} \cdot \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \sim \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{3} \right) \quad (4.11)$$

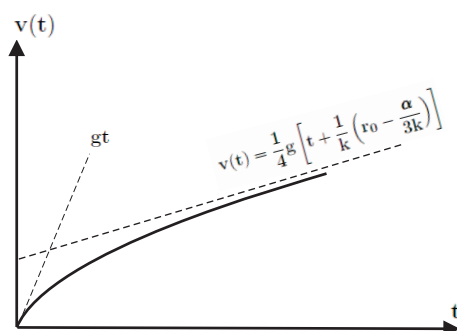
(a \sim jelzi, hogy aszimptotikus egyenlőségről van szó).

A dimenziótlan változókról az

$$x = \frac{k}{\alpha} r = \frac{k}{\alpha} (kt + r_0) \quad y = \frac{k^2}{g\alpha} v$$

képletekkel visszatérhetünk a t , v fizikai változókra. A $v(t)$ függvény menetét az 1. ábrán rajzoltuk fel:

A felületre lecsapódó pára növeli a csepp belső energiáját. A belső energia megnövekedése az (2.3) képlet segítségével számítható ki, amelyben most $u = 0$ következtében $v = q$: $\dot{U}(t) = \dot{M}v(t)^2/2$. A csepp hőmérséklete ennek következtében folyamatosan nő és feltehetően nem is egyenletes eloszlású a térfogaton belül. Ez ahhoz vezethet, hogy a k arányossági tényező időben változhat, és az M , r , v változók nem is elegendők a csepp pillanatnyi állapotának a jellemzéséhez. De a modell finomítása ebbe az irányba már kívül esik a mechanikán, amely



1. ábra.

ennek a jegyzetnek a tárgya. És nem világos a számomra, hogy a cseppnövekedés itt vázolt tárgyalási módja alkalmas kiindulópont-e a csapadékképződés reális elméleti vizsgálatához.

Függelék: A sebesség monotonitásának igazolása

Ha az (4.7) egyenlet (4.10) megoldása nem lenne monoton, akkor lenne olyan $x > x_0$, amelynél $y' = 0$. Az (4.7) szerint ennél az x -nél teljesülni kellene az

$$y = \frac{x^2}{3x + 1}$$

relációnak. Az (4.10) figyelembe vételével ez a feltétel így írható:

$$f(x) = g(x),$$

ahol

$$f(x) = \frac{x^5 e^{-1/x}}{3x + 1}, \quad g(x) = \int_{x_0}^x x'^3 e^{-1/x'} dx'.$$

Ha ez teljesül, az $y = f(x)$ és az $y = g(x)$ görbe metszi egymást az $x > x_0$ tartomány x pontjában. Mivel $g(x_0) = 0$ és $f(x_0) > 0$, ezért a metszéspontban az $y = g(x)$ -nek meredekebbnek kellene lennie, mint az $y = f(x)$, vagyis teljesülnie kellene a

$$g'(x) > f'(x)$$

egyenlőtlenségnek. De ha ide a két függvény deriváltját beírjuk, az $e^{-1/x}$ -szel lehet egyszerűsíteni és könnyen igazolható, hogy az $x > x_0$ tartományban az egyenlőtlenség sehohsem teljesül.

5. A változó tömegű bolygó

A Nap körül keringő bolygó tömegét a meteorok folyamatosan növelik. Ha feltesszük, hogy a meteorok sebessége átlagosan nulla ($u = 0$), akkor megint

(1.4)-et kell használnunk, amelyben azonban most a gravitációs vonzáson kívül más erő nem szerepel:

$$\frac{d(M\mathbf{v})}{dt} = -\frac{GMM_{\odot}}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

(M_{\odot} a Nap, M a bolygó tömege, G a gravitációs állandó, $\hat{\mathbf{r}}$ pedig a radiális egységvektor). Az előző fejezet esőcsepp példájához képest a lényeges különbség a közegellenállás hiánya, amely lehetővé teszi, hogy ezt az egyenletet az

$$L = \frac{M}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U, \quad U = -\frac{GMM_{\odot}}{r} \quad (5.1)$$

Lagrange-függvényhez tartozó Lagrange-egyenletnek tekintsük.

A tömegnövekedés következtében a bolygó E energiája változik. Az energia időderiváltját az

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (5.2)$$

általános képlettel számíthatjuk ki. Az L az M tömegben keresztül függ explicite az időtől, és mivel minden tagja arányos M -mel, ezért

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\dot{M}}{M}L = -\frac{\dot{M}}{M}(K - U). \quad (5.3)$$

Körpályán a centrifugális erő éppen ellensúlyozza a gravitációs vonzást:

$$\frac{Mv^2}{r} = \frac{GMM_{\odot}}{r^2}.$$

Ha ezt a képletet végigszorozzuk $r/2$ -vel, a kinetikus energiára a $K = -U/2$ képletet, a teljes energiára pedig ennek következtében az

$$E = +U/2 = -\frac{GMM_{\odot}}{2r} \quad (5.4)$$

képletet kapjuk. Így $L = K - U = -3U/2 = -3E$. Ezt az (5.3)-ba helyettesítve az

$$\dot{E} = 3\frac{\dot{M}}{M}E \quad (5.5)$$

képletre jutunk. Mivel $E < 0$, az M növekedésével az energia csökken.

Hogyan változik eközben a sugár? Deriváljuk (5.4)-et az idő szerint figyelembe véve, hogy az M is, az r -is függ az időtől:

$$\dot{E} = -\frac{GM_{\odot}}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{M}{r} \right) = E \frac{r}{M} \frac{d}{dt} \left(\frac{M}{r} \right) = E \left(\frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{r}}{r} \right).$$

Ha ezt a képletet (5.5)-tel összehasonlítjuk, azt látjuk, hogy

$$\dot{r} = -2\frac{\dot{M}}{M}r. \quad (5.6)$$

A tömeg növekedésével tehát a bolygópálya sugara csökken.

Határozzuk meg a sebesség változását is. Ez több módon is lehetséges. Induljunk ki az $l = Mrv$ impulzusmomentumból. Mivel az (5.1) Lagrange-függvény időfüggő tömeg esetében is forgásinvariáns, ezért az l impulzusmomentum megmarad:

$$\frac{\dot{l}}{l} = \frac{\dot{M}}{M} + \frac{\dot{r}}{r} + \frac{\dot{v}}{v} = 0.$$

Ha ide (5.6)-ot behelyettesítjük, a

$$\dot{v} = \frac{\dot{M}}{M}v \quad (5.7)$$

képletre jutunk: A sebesség a tömeggel együtt nő.

Ugyanerre a kaptafára megy az $\omega = v/r$ és a $T = 2\pi/\omega$ változásának a meghatározása is:

$$\dot{\omega} = 3\frac{\dot{M}}{M}\omega, \quad \dot{T} = -3\frac{\dot{M}}{M}T \quad (5.8)$$

Amikor a bolygópálya elliptikus az (5.3) érvényben marad, de a K és az U nem fejezhető ki benne minden további nélkül az energián keresztül. Ez már abból is látszik, hogy az energia mozgásállandó, a K és az U azonban nem az a pálya nyújtottsága miatt. Segítségünkre jön azonban a *virial tétel*, amely szerint az egy periódusra átlagolt \bar{K} és \bar{U} — amelyek már időben állandók — ugyanúgy fejezhető ki az E -n keresztül, mint a K és az U körpályáknál, ezért $\bar{K} - \bar{U} = -3E$.

Átlagoljuk ezért (5.3)-az egy periódusra:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\dot{M}}{M}(K - U).$$

A kinetikus és a potenciális energia változása egy perióduson belül jelentős, a relatív tömegváltozás azonban ennyi idő alatt feltehetően nagyon kicsi. Ezért az \dot{M}/M átlagolásától eltekinthetünk és ha ezután alkalmazzuk a virial tételt, újra az (5.5) képletet kapjuk eredményül. Ez a képlet tehát elliptikus bolygópályákra is érvényes.

Az a nagytengely és a b kistengely változását az ismert

$$a = \frac{GM M_{\odot}}{2(-E)} \quad b = \frac{l}{\sqrt{2M(-E)}}$$

képletek felhasználásával számíthatjuk ki a már ismert eljárással:

$$\dot{a} = -2\frac{\dot{M}}{M}a, \quad \text{és hasonlóan} \quad \dot{b} = -2\frac{\dot{M}}{M}b. \quad (5.9)$$

A periódusidő változására a $T = 2\pi Mab/l$ képlet alapján ugyanazt a $\dot{T} = -3\frac{\dot{M}}{M}T$ eredményt kapjuk, mint a körpályáknál.

Az elnyújtott ellipszispályán keringő üstökösök tömegvesztés következtében előálló pályamódosulása alighanem sokkal jelentősebb, mint a bolygóké a tömegfelvétel során. A tömegkibocsátási folyamat tárgyalása azonban nehezebb, mert az (1.5) képleten alapul, amelyben a \mathbf{q} kilövellési sebesség megválasztása külön feltevést igényel.

Talán jogos feltenni, hogy az anyag az üstökös Nap felé néző oldaláról szabadul fel, ezért valamilyen közelítésben $\mathbf{q} = -q\hat{\mathbf{r}}$. Ebben az esetben a mozgás megint tárgyalható Lagrange-módszerrel az

$$U = -\frac{GMM_{\odot}}{r} + q\dot{M}r \quad (5.10)$$

potenciál felhasználásával. A mozgásegyenletek a következők:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(M\dot{r}) - Mr\dot{\varphi}^2 + \frac{GMM_{\odot}}{r^2} + q\dot{M} &= 0 \\ \frac{d}{dt}(Mr^2\dot{\varphi}) &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenlet az $l = Mr^2\dot{\varphi}$ impulzusmomentum megmaradását fejezi ki. Ha innen $\dot{\varphi}$ -t az elsőbe behelyettesítjük, a

$$\frac{d}{dt}(M\dot{r}) - \frac{l^2}{Mr^3} + \frac{GMM_{\odot}}{r^2} + q\dot{M} = 0 \quad (5.11)$$

egyenletre jutunk. A $\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ képlet most is érvényes, de a jobboldal nem fejezhető ki egyszerű módon az M/M -en keresztül. Az (5.11) olyan nemlineáris egyenlet, amely az önkényesen megadható $M(t)$ -n keresztül explicite is tartalmazza a t független változót. Az üstökösmozgás tárgyalását ezen a ponton megszakítom egyrészt a mozgásegyenlet viszonylagos bonyolultsága miatt, másrészt pedig azért, mert egyáltalán nem vagyok biztos benne, hogy ez az egyenlet valamennyire is reális kiindulópont a tárgyaláshoz.

6. A szállítószalag

A vízszintesen egyenletes v sebességgel működő szállítószalagra egyenletesen hullik a homok $\dot{M} = \textit{konstans}$ kg/s ütemben. Milyen teljesítményt ad le a motor minimálisan⁵ (ha szerkezeti veszteségektől eltekintünk)?

A homok függőlegesen hullik rá a szalagra, amelyhez képest nyugalomba kerül, de az esés megállítása a motort nyilván nem veszi igénybe, hiszen akkor is bekövetkezne, ha a szalag állna. A motor ahhoz kell, hogy a vízszintes irányú sebességgel nem rendelkező homoknak ilyen irányú mozgást, vagyis másodpercenként $\frac{1}{2}\dot{M}v^2$ mozgási energiát kölcsönözzön. Azt gondolná az ember, hogy ez az a minimális teljesítmény, amit a motornak ki kell fejtenie, de nem így van: Legalább kétszer ekkora teljesítményt kell leadnia.

⁵ R. Resnick and D. Halliday, Physics (Wiley, New York, 1977), Part 1, p. 178

Ahhoz ugyanis, hogy a homok nyugalomba kerüljön a szalagon, nemcsak a függőleges irányú esését kell megállítani, hanem hatékony súrlódásra is szükség van a homok és a szalag között, különben a homok csúszna a szalagon anélkül, hogy részt venne a mozgásában. A szalag nyugalmi rendszeréből nézve $-v$ sebességgel mozgó homok fékeződik le a súrlódás következtében, miközben másodpercenként $\frac{1}{2}\dot{M}v^2$ hő szabadul fel. Ezt az energiát is a motornak kell fedeznie.

Ugyanerre az eredményre jutunk a (2.4) munkatétel alapján is, amelyben most $u = 0$ (ez a hulló homok vízszintes irányú sebessége) és $q = -v$:

$$vF = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}Mv^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{dM}{dt} q^2 = \dot{M}v^2.$$

Egy reális szállítószalag természetesen véges hosszúságú, ugyanannyi homok esik le róla a végén, amennyi hullik rá valahol az elején. A szalag végén történő folyamat azonban ideális esetben nem igényli a motor munkáját.

7. Az asztalról lecsúszó lánc

Egy kupac lánc áll egy súrlódásmentes asztallap szélén. Kis darabot lelógatunk belőle. Milyen időtörvény szerint csúszik le az asztalról?

A feladat azért érdekes, mert amikor elengedjük, a láncnak nem minden része jön egyszerre mozgásba: A lelógó darab mozgása csak a közeli láncszemeknek adódik át. Ebben szerepe lehet a láncszemek méretének csakúgy, mint a szemek súrlódásának egymáson (az asztallap súrlódásmentes). Elég nyilvánvaló, hogy emiatt a feladat ebben a formájában nincs jól definiálva, de talán idealizálható a következő radikális leegyszerűsítés árán: *Az asztal széle élesen elválasztja a lánc mozgásban lévő lelógó részét az asztalon fekvő nyugvó részétől.* Ebben a közelítésben tehát a láncnak azt a kupachoz tartozó rövid darabját, amely mozgásban van, pontszerűvé zsugorítjuk.

Egy másik határeset az, amikor a lánc egy egyenes mentén helyezkedik el, és az egész egyszerre jön mozgásba (ld. a 2. ábrát, amelyen a láncot szimbólikusan, túl nagy láncszemekkel rajzoltuk fel). Ez az egyszerűbb feladat, kezdjük ezért bemelegítésként ennek a megoldásával.

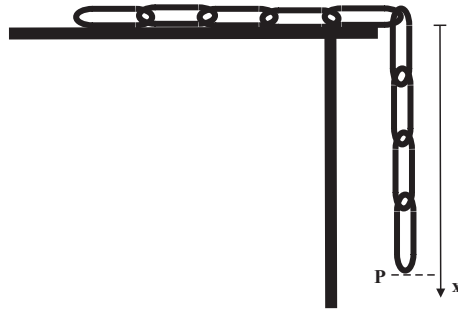
Legyen a lánc tömegsűrűsége ρ kg/m, a teljes hossza l , a lelógó rész hosszát (vagy — ha jobban tetszik — a P végpontnak az asztallaptól számított koordinátáját) jelöljük x -szel. A mozgásegyenlet nyilván $l\rho\ddot{x} = g\rho x$, azaz

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0 \quad \omega = \sqrt{g/l},$$

ami egy képzetes frekvenciájú („taszító”) matematikai inga egyenlete. Az általános megoldás

$$x = A \operatorname{ch} \omega t + B \operatorname{sh} \omega t. \quad (7.1)$$

Ha $t = 0$ -ban a lelógó rész hossza Δl és a sebesség nulla, akkor $x = \Delta l \operatorname{ch} \omega t$.



2. ábra.

A későbbiek kedvéért keressük meg a megoldást az energiamegmaradás alapján is, amely

$$\frac{1}{2}\rho l \cdot v^2 - \rho x \cdot g \cdot \frac{1}{2}x = \text{konstans.} \quad (7.2)$$

Egyszerűsítés után ez

$$v^2 - \omega^2 x^2 = \text{konstans}$$

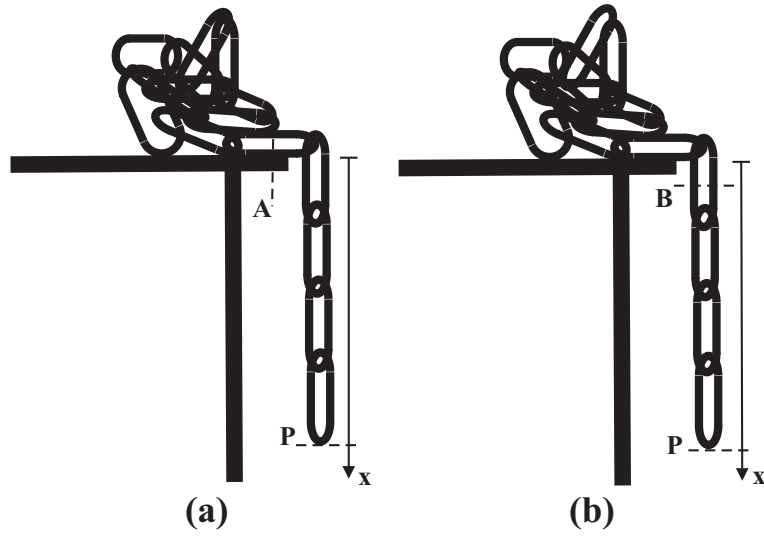
egy új konstanssal, amelynek a (7.1) természetesen eleget tesz.

Térjünk rá ezután a kupacba zsúfolt lánc lecsorgására. Kézenfekvőnek látszik, hogy ezt a feladatot is az energiamegmaradás alapján oldjuk meg. Ehhez csupán annyit kell tennünk, hogy (7.2) első tagjában az l -t x -re cseréljük. A sebességre ekkor a $v = \sqrt{gx}$ képletet kapjuk, amelyből $v = \frac{dx}{dt}$ behelyettesítése után integrálással megkaphatnánk a keresett $x(t)$ függvényt.

Azonban alaposabban meggondolva a dolgot arra a következtetésre kell jutnunk, hogy ebben a feladatban az energia semmiképpen se maradhat meg, mert a súrlódásnak lényeges szerepe van abban, hogy a lánc csak fokozatosan jön mozgásba. A feladatot ennek a szempontnak a figyelembevételével Arthur Cayley oldotta meg először 1857-ben.

A feladat fentebb már megfogalmazott erősen idealizált formájában a sebességváltozás egyetlen pontban, az asztal peremén következik be: Az A pontban a lánc még nyugszik, a B -ben már véges v sebességgel mozog (3. ábra), és ez a két pont infinitezimálisan közel lehet a peremhez (és egymáshoz). A lánc mozgásban lévő részét egyetlen változó tömegű testnek tekinthetjük, amelynek a helyzetét a P végpont x koordinátája jellemzi, de mivel az asztal peremén a sebesség határozatlan (az A pont felől közeledve a peremhez a sebesség nulla, a B pont felől közeledve pedig v), valójában két változatot kell elemeznünk: Az (a) változatban az AP , a (b)-ben a BP szakaszt azonosítjuk a testtel. A mozgás idealizálásának a jogosságát az támaszthatja alá, ha mindkét esetben ésszerű gondolatmenettel ugyanarra a mozgásegyenletre jutunk, amelyet persze ráadásul még a tapasztalatnak is igazolnia kell.

Kezdjük az (a) változattal. A „test” (vagyis a lánc AP szakasza) ekkor nyugvó tömeget (láncszemeket) vesz fel, ezért az 1. fejezet jelöléseiben az u



3. ábra.

sebesség nullával egyenlő. Ebben az esetben az (1.4) egyenletet kell használnunk, amely $u = 0$ és $M = \rho x$ figyelembe vételével a következő:

$$\frac{d}{dt}(\rho x v) = \rho g x,$$

azaz

$$x \dot{v} + v^2 = g x. \quad (7.3)$$

Mivel az egyenletben nem szerepel expliciten a t idő, célszerű áttérni az x független változóra:

$$\dot{v} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v' v,$$

$$x v' v + v^2 = g x,$$

$$\frac{1}{2} x \frac{dv^2}{dx} + v^2 = g x,$$

és végül

$$\frac{dv^2}{dx} + \frac{2}{x} v^2 = 2g. \quad (7.4)$$

Ez egy lineáris elsőrendű differenciálegyenlet v^2 -re, amelyben $P(x) = 2/x$ (ld. a (4.8)) képletet). Azt a megoldást keressük, amelyben $x = 0$ -nál (amikor a lánc lelógó vége még elhanyagolhatóan rövid) a sebesség nulla. A (4.9) megoldásban ekkor a $\int_0^x \frac{2}{x} dx$ integrál lép fel, amely az alsó határon divergál. Vegyük ezért a

kezdőpillanatban lelógó lánc hosszát valamilyen nullánál nagyobb ξ -nek. Ekkor

$$\int_{\xi}^x P(x') dx' = 2 \ln \frac{x}{\xi}.$$

A (4.9) megoldás tehát a következő:

$$v^2(x) = 2g \cdot e^{-2 \ln \frac{x}{\xi}} \int_{\xi}^x e^{2 \ln \frac{x'}{\xi}} dx'.$$

A $\ln a/b = \ln a - \ln b$ képlet következtében az exponensből a ξ kiesik és a maradék integrálban a ξ -t már vehetjük nullának:

$$v^2 = 2g \cdot \frac{1}{x^2} \int_0^x x'^2 dx' = \frac{2}{3} gx,$$

azaz

$$v = \sqrt{\frac{2gx}{3}}. \quad (7.5)$$

Az energiamegmaradás alapján hasonló képletet kaptunk a sebességre, de $2/3$ nélkül a gyök alatt. Ebből már következik, hogy jelen tárgyalásunkban a mechanikai energia nem marad meg.

Az $x(t)$ meghatározása innen már nagyon egyszerű:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sqrt{\frac{2gx}{3}}, \\ \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \sqrt{\frac{2g}{3}} dt, \end{aligned}$$

és mivel $t = 0$ -ban $x = 0$, ezért

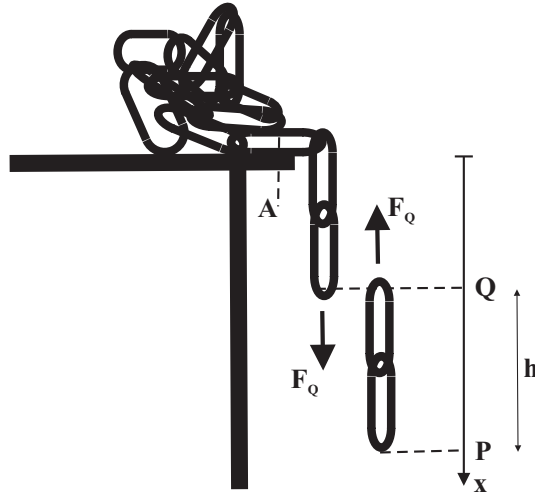
$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} &= \sqrt{\frac{2g}{3}} t \\ x &= \frac{g}{6} t^2, \end{aligned}$$

valamint

$$v = \frac{g}{3} t, \quad a = \frac{g}{3}. \quad (7.6)$$

Mekkora a hőkiválás sebessége? A (2.3)-ban most $q = v$, valamint $\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}(x\rho) = v\rho$, ezért

$$dU = \frac{1}{2} \rho v^3. \quad (7.7)$$



4. ábra.

Számítsuk ki még a rugalmas erőt, amely a lánc lelógó szárában hat (4. ábra). A Q pontban, amely a lánc végétől h távolságra van, válasszuk ketté gondolatban a láncot. A Q fölötti rész valamilyen F_Q rugalmas erővel hat a QP darabra. Az F_Q -nak különböznie kell nullától, mert ha nulla lenne, akkor ennek a lándarabnak g gyorsulással kellene esnie, márpedig (7.6) szerint a gyorsulása $g/3$ -mal egyenlő.

Ebből a feltételből ki is lehet számítani F_Q -t. A szakasz mozgásegyenlete ugyanis

$$h\rho a = h\rho g - F_Q,$$

és ha ide behelyettesítjük az $a = g/3$ -t, az

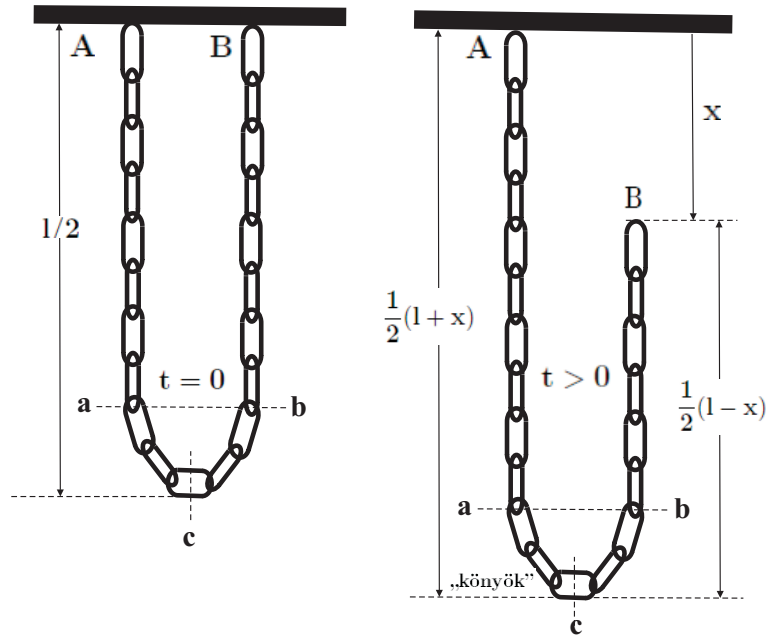
$$F_Q = \frac{2g\rho}{3}h \quad (7.8)$$

képletre jutunk.

A feladat tárgyalását az (a) felfogásban ezzel lezárhatjuk és áttérhetünk a (b) felfogásra. A mozgásegyenlet ebben az esetben is az (1.4) lesz, de az (a) felfogáshoz képest két változtatással. Egyrészt annak a láncrésznek (anyagnak) u sebessége, amelyet a „test” (a lánc BP szakasza) felvesz, most nem nulla, hanem megegyezik a lelógó szakasz sebességével: $u = v$. Másrészt a súlyerőn kívül még egy erő hat a testre: Az F_B rugalmas erő a B végpontban. A mozgásegyenlet tehát a következő:

$$\frac{d}{dt}(\rho xv) = \rho gx - F_B + \frac{d(\rho x)}{dt}v. \quad (7.9)$$

A jobboldal 2. és 3. tagja azonban kiejteti egymást. Valóban, (7.8) szerint $F_B = \frac{2g\rho}{3}x$, amelyet (7.5) figyelembe vételével ρv^2 alakban is írhatunk, és ez



5. ábra.

megegyezik a 3. taggal (7.9) jobboldalán. A (b) felfogás mozgásegyenlete ílymódon nem különbözik az (a) felfogás (7.3) mozgásegyenletétől. Mint mondtunk, ez az egyezés szükséges ahhoz, hogy idealizált modellünk értelmes legyen.

Megjegyezzük, hogy a $-F_B + \frac{d(\rho x)}{dt}v = 0$ egyenlőségre akkor is rájöttünk volna, ha a feladatot nem oldottuk volna meg előzetesen az (a) felfogásban. A $-F_B$ erő fizikai jelentése ugyanis negatív irányú impulzus pozitív irányú árama, *vagy* pozitív irányú impulzus negatív irányú árama. A lánc BP szakasza szempontjából az első jelentés a kifejezőbb, de az asztalon nyugvó kupac szempontjából a második. Mivel ez a kupac nyugalomban van, ezt az impulzus áramot a tömegtranszferből származó $\frac{d(\rho x)}{dt}v$ impulzus áramnak pontosan kompenzálnia kell.

8. Az egyik végén lehulló lánc

A feladatot, amelyet ebben a fejezetben tárgyalunk⁶, az 5.ábrán láthatjuk. A két végén felfüggesztett lánc B végpontjának a rögzítését megszüntetjük és engedjük, hogy szabadon essen. Milyen időtvény szerint nő a B végpont x koordinátája?

Az esés következtében a B végpont az A mellől az A alá kerül, ezért a B

⁶M. G. Calkin and R. H. March, Am. J. Phys **57**, 154 (1989)

mozgása nem pontosan függőleges. De tegyük fel, hogy az \overline{AB} „bázistávolság” olyan kicsi a lánc hosszához képest, hogy a mozgás vízszintes irányú komponensétől el lehet tekinteni. A B végpont sebessége ezért $v = \dot{x}$. A bázistávolság elhanyagolhatósága miatt a lánc teljes hosszát az 5. ábrán $l/2$ -vel jelölt távolság kétszeresének (l -nek) tekinthetjük.

A lánc ab metszet alatti szakasza a „könyök”, amelynek sebessége a c pont sebességével egyenlő:

$$v_c = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}(l+x) \right] = \frac{1}{2}\dot{x} = \frac{1}{2}v.$$

A feladat megoldását a könyök vizsgálatával célszerű elkezdni. Az esés során a lánc lehulló ágának a láncszemei sorban áthaladnak ezen az acb szakaszon és közben a sebességük v -ről nullára csökken. A b végponton keresztül láncszemek érkeznek a könyökbe, az a végponton keresztül pedig láncszemek távoznak belőle. Tekintsük az acb szakaszt (a könyököt) változó tömegű testnek és írjuk fel rá az (1.5) mozgásegyenletet, amely a könyökre adaptálva a következő:

$$M \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dM_a}{dt} \mathbf{q}_a + \frac{dM_b}{dt} \mathbf{q}_b.$$

Ennek a vektoregyenletnek csak az x -komponense az, amelyik fizikailag tartalmaz. Az \mathbf{F} három tagból áll: A súlyerőből és a lánc aA és bB szakasza által a könyökre kifejtett húzóerőkből („láncerőkből”). Ez utóbbiak irányítotttságát a 6. ábra mutatja, ezért

$$(\mathbf{F})_x = +g\rho M - F_a - F_b$$

(a ρ a lánc tömegsűrűsége).

A konvekciós sebességek a következők:

$$(\mathbf{q}_a)_x = -v_c = -\frac{1}{2}v, \quad (\mathbf{q}_b)_x = v - v_c = +\frac{1}{2}v,$$

a megfelelő tömegváltozások pedig

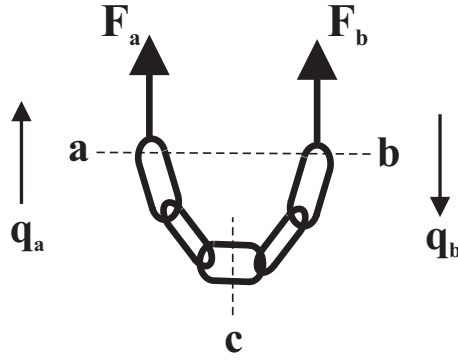
$$\begin{aligned} \frac{dM_a}{dt} &= -\frac{d}{dt} \left[\frac{l+x}{2} \rho \right] = -\frac{\rho}{2}v, \\ \frac{dM_b}{dt} &= -\frac{d}{dt} \left[\frac{l-x}{2} \rho \right] = +\frac{\rho}{2}v. \end{aligned}$$

Mindezt figyelembe véve a könyökre vonatkozó Mescserszkij-egyenlet a következő:

$$M \frac{dv_c}{dt} = g\rho M - F_a - F_b + \frac{\rho}{2}v^2. \quad (8.1)$$

A \overline{AB} bázistávolság elhanyagolásával összhangban a könyök M tömegét tekinthetjük nullának. Ha ezt a közelítést megtesszük, a következő feltételt kapjuk a húzóerők összegére:

$$F_a + F_b = \frac{\rho}{2}v^2. \quad (8.2)$$



6. ábra.

Fogjunk hozzá most a tulajdonképpeni feladatunkhoz, a bB szakasz mozgásának a vizsgálatához. Ez egy változó tömegű test, amelynek helyzetét az x koordináta jellemzi, és a mozgása a Mescserszkij-egyenletet elégíti ki. A bB szakaszból a tömeg nyilván ugyanazzal a v sebességgel távozik, mint amilyennel ez a szakasz éppen mozog, ezért $u = v$. Ebben az esetben a mozgásegyenlet (1.7) alakját használhatjuk, amely $M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$. Az egyenletben

$$M = \rho \frac{l-x}{2}, \quad \text{valamint} \quad F = g\rho \frac{l-x}{2} + F_b. \quad (8.3)$$

Ebben a bB szakaszra ható F erőben fellépő F_b a könyökre ható F_b erő ellenereje, ezért szerepel (8.1)-ben és (8.3)-ben ellentétes előjellel. Ezeknek a kifejezéseknek a birtokában a mozgásegyenletre a

$$\rho \frac{l-x}{2} \ddot{x} = g\rho \frac{l-x}{2} + F_b \quad (8.4)$$

képletet kapjuk. Ahhoz, hogy ebből meghatározhassuk a keresett $x(t)$ függvényt, meg kell mondanunk, hogyan függ F_b az x -től és az \dot{x} -től.

Az F_b megválasztásához induljunk ki abból a *feltevésből*, hogy a lánc bB szára szabadon esik g gyorsulással. A (8.4) szerint ez $F_b = 0$ -nál következik be, mert ekkor az egyenlet $\ddot{x} = g$ -re redukálódik. A feltevés helyességét nagy pontossággal lehet ellenőrizni az A felfüggesztési pontban kifejtett húzóerő időbeli változásának a mérésével. Ez a húzóerő a következő:

$$F_A = g\rho \frac{l+x}{2} + F_a. \quad (8.5)$$

A (8.2) alapján $F_b = 0$ következtében $F_a = \frac{\rho}{2}v^2$. A szabadesésben azonban $v^2 = 2gx$, ezért végeredményben

$$F_A = g\rho \frac{l+x}{2} + g\rho x = \frac{1}{2}g\rho(l+3x). \quad (8.6)$$

Az x helyébe behelyettesítve az $x = \frac{1}{2}gt^2$ képletet látjuk, hogy az F_A parabolikus (kvadratikus) törvény szerint nő az idővel, és az esés végpontjában — az l távolság megtételéhez szükség $t = \sqrt{2l/g} \equiv t_0$ pillanatban — kétszer akkora, mint a lánc $g\rho l$ összsúlya. Ebben a pillanatban ugyanis a lánc még éppen gyorsul, ezért haladhatja meg az F_A erő a lánc súlyát. Nyilvánvaló azonban, hogy a továbbiakban F_A nem marad meg ilyen nagynak, hanem megindul egy relaxációs folyamat, amelynek a végén F_A a lánc súlyának megfelelő $g\rho l$ értékre csökken. Világos, hogy a tárgyalásunk a folyamatnak erre a szakaszára nem terjed ki, sőt már akkor érvényét veszti, amikor a bB szakasz hossza megközelelti a könyök méretét. Ezzel a relaxációs szakasszal a továbbiakban ezért nem foglalkozunk.

A kísérlet azonban a $0 < t < t_0$ tartományban sem igazolja a (8.6) képletet, mert a mért F_A a folyamat végére egy nagyságrenddel meghaladja a lánc súlyát. A szabadesés hipotézisét ezért el kell vetnünk és új hipotézist kell keresnünk F_b -re.

Vizsgáljuk meg ezért az energia viszonyokat. A legegyszerűbben ezt úgy tehetjük meg, hogy a könyökre alkalmazzuk a (2.5) munkatételt. Mivel $\mathbf{v}_a = \mathbf{u}_a = 0$ és $\mathbf{v}_b = \mathbf{u}_b = v$, ezért

$$\frac{dK_c}{dt} + \frac{dU_c}{dt} = gMv_c - F_b v + \frac{1}{2}\dot{M}_b v^2.$$

Fentebb, amikor a Mescserszkij-egyenletet alkalmaztuk a könyökre, felhasználtuk, hogy a könyök tömege nullának tekinthető. Ezt most is megtesszük, ezért a gravitációs erő munkáját és a kinetikus energiát elhagyjuk az egyenletből. Az $\frac{1}{2}(\dot{M}_a q_a^2 + \dot{M}_b q_b^2)$ típusú járuléka a belső energiához most nulla, mert $q_a^2 = q_b^2 = (v/2)^2$ és $\dot{M}_b = -\dot{M}_a = \rho v/2$. Így végül a

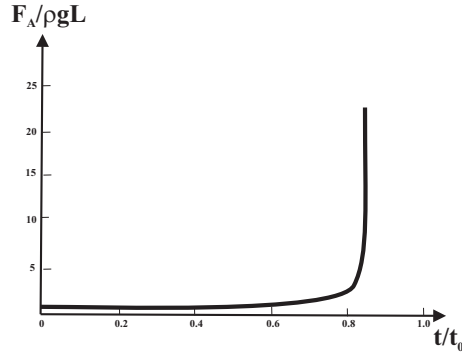
$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{4}\rho v^3 - F_b v. \quad (8.7)$$

egyenletre jutunk, amelynek a fizikai jelentése világos: A mozgó szálról konvekcióval beáramló energia növeli, a könyök által a mozgó szálon végzett munka csökkenti a könyök belső energiáját. Ez az energia végül hővé disszipálódik.

Ugyanezt az eredményt a mozgó és a nyugvó szál mechanikai energiájának az időderiválásával is megkaphatjuk, mert az energiamegmaradás tétele alapján a szálak mechanikai energiájának és a könyök energiájának az összege állandó. Jelöljük a szálak kinetikus és potenciális energiáját K -val és V -vel. Akkor

$$K = \frac{1}{2}\rho \frac{l-x}{2} \dot{x}^2 \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{2}\frac{l+x}{2} \left(\frac{l+x}{2} g\rho \right) - \left(x + \frac{1}{2}\frac{l-x}{2} \right) \left(\frac{l-x}{2} g\rho \right) = \\ &= -\frac{1}{4}g\rho(l^2 + 2lx - x^2). \end{aligned} \quad (8.9)$$



7. ábra.

Amikor $K + V$ időderiváltját számítjuk, megjelenik az \ddot{x} második időderivált, amelyet (8.4) alapján ki tudunk fejezni x -en és F_b -n keresztül. Ezt kapjuk

$$\frac{d(K + V)}{dt} = - \left(\frac{1}{4} \rho v^3 - F_b v \right) \quad (8.10)$$

a (8.7)-tel összhangban.

Tegyük fel azonban, hogy a láncok szerkezete olyan, hogy disszipáció nem történik: A könyökbe konvekcióval beáramló energia pontosan fedezi azt a munkát, amit a könyök a mozgó szálon végez. Ebben az esetben

$$F_b = \frac{\rho}{4} v^2 = F_a. \quad (8.11)$$

A második egyenlőség felírásánál (8.2)-t használtuk.

A kísérletileg vizsgálható húzóerőre vonatkozó (8.5) tehát a következő:

$$F_A = g\rho \frac{l+x}{2} + \frac{1}{4} \rho v^2. \quad (8.12)$$

Írjuk be $F_b = \frac{1}{4} \rho v^2$ -t a (8.4) mozgásegyenletbe:

$$\ddot{x} = g + \frac{\dot{x}^2}{2(l-x)}. \quad (8.13)$$

Az

$$\ddot{x} = \dot{v} = v' \cdot v = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx}$$

transzformációval ez az egyenlet átírható a

$$\frac{dv^2}{dx} + \frac{1}{x-l} v^2 = 2g$$

alakba, amely a (4.9) segítségével integrálható. Esetünkben

$$P(x) = \frac{1}{x-l}, \quad \text{és így} \quad \int_0^x P(x')dx' = \ln \frac{l-x}{l},$$

ezért

$$v^2 = 2g \cdot e^{-\ln \frac{l-x}{l}} \int_0^x e^{\ln \frac{l-x'}{l}} dx' = gx \frac{2l-x}{l-x}.$$

A sebesség-út összefüggés tehát a következő:

$$v = \sqrt{gx} \cdot \sqrt{\frac{2l-x}{l-x}}. \quad (8.14)$$

Ez a képlet megadja $F_A = \frac{\rho}{4}v^2$ -t és (8.5) segítségével a kísérletileg mérhető F_A -t az x függvényében:

$$\frac{F_A}{g\rho l} = \frac{2 + 2x/l - 3(x/l)^2}{4(1-x/l)}. \quad (8.15)$$

Mint látjuk, az esés végén, $x \rightarrow l$ -nél F_A végtelenhez tart a szabadeséses modell 2-jével szemben.

Az $x(t)$ függvényt (8.14) további integrálásával kapjuk meg implicit formában:

$$\frac{t}{t_0} = \sqrt{2} \int_0^{\sqrt{x/l}} \sqrt{\frac{1-\xi^2}{2-\xi^2}} d\xi, \quad (8.16)$$

amelyben — mint korábban — $t_0 = \sqrt{2l/g}$ az $x = l$ elérésének időtartama a szabadeséses modellben. Az integrál a jobboldalon elliptikus integrálokon keresztül fejleszhető ki. A T teljes esési idő a t_0 -nál *kisebbsnek* adódik:

$$\frac{T}{t_0} = \sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\xi^2}{2-\xi^2}} d\xi = 0.847213$$

Az F_A időfüggését (8.15) és (8.16) együtt határozza meg. A 7. ábra az elméleti görbét ábrázolja, amelyre a kísérleti pontok a $\frac{F_A}{g\rho l} \leq 25$ értékig kiválóan illeszkednek. Az esés végén F_A elvben végtelenhez tart, de — mint a szabadeséses modellel kapcsolatban már utaltunk rá, — az $x = l$ közelében a közelítéseink már nem teljesülnek. Az $F_A/g\rho l$ azonban így is egy nagyságrenddel meghaladja a szabadeséses modellben kapott 2 értéket.

* * *

A különféle láncokkal végzett kísérletek alapján elfogadhatjuk, hogy a lehulló szál helyes mozgásegyenlete a (8.4), amelyben F_b -t (8.11)-ből kell vennünk:

$$\rho \frac{l-x}{2} \ddot{x} = g\rho \frac{l-x}{2} + \frac{1}{4}\rho \dot{x}^2. \quad (8.17)$$

A gondolatmenet azonban, amellyel ezt a mozgásegyenletet megkaptuk, több okból bírálható.

(1) Az egyenletet a Mescserszkij-egyenlet (1.7) változata alapján írtuk fel, amely akkor érvényes, amikor a testből — a bB mozgó szárból — kilépő tömeg u sebessége megegyezik a test v sebességével. Az 1. fejezetben azonban a Mescserszkij-egyenlettel kapcsolatban hallgatólagosan mindig természetesnek tekintettük, hogy az a tömeg, amely a tömegtranszfer során a testből távozott, többé már semmilyen módon se hat a testre. Ezt azonban aligha állíthatjuk a mozgó szár azon láncszemeiről, amelyek éppen csak átlépték a csupán elképzelt ab egyenest.

(2) Nehezen fogadható el, hogy a szabadon eső szárban létrejöhessen nullától különböző F_b láncerő (feszültség). A szabadesés modellt, amelyben $F_b = 0$, a tapasztalat határozottan cáfolja, de azt nem lehet kizárni, hogy a (8.17) jobboldalán a második tag nem láncerő, hanem valamilyen más természetű járulék.

(3) Nem túl meggyőző az az érvelés, hogy a szabadeséses modell azért nem jó, mert energia disszipációval járna és a lánc struktúrája erre nem alkalmas. Természetesen tényállásként elfogadható, hogy — mint láttuk, — a tényleges mozgás során a könyökben nem disszipálódik energia, de annak az érvelésnek, hogy a lánc a disszipációt elkerülendő nem esik szabadon, van némi teleológiai színezete.

A meggyőzőbb fizikai interpretáció megtalálásához természetesen maga a (8.17) egyenlet nyújtja a legfontosabb segítséget azzal, hogy a tapasztalat igazolja. Nem nehéz észrevenni, hogy ezt az egyenletet láncerő feltételezése nélkül is megkaphatjuk, ha a Mescserszkij-egyenletnek nem az (1.7) változatából, hanem az (1.5)-ből indulunk ki, amely a következő:

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \dot{M}\mathbf{q}, \quad (8.18)$$

és a kilökött tömegről azt tesszük fel, hogy a könyököt alkotja. Mi lesz a q ? Az (1.3) szerint $q = u - v$, ahol u a kilökött tömeg sebessége, amely feltevésünk szerint a könyök $v_c = v/2$ sebességével egyenlő. Eszerint $q = v/2 - v = -v/2$. A tömegderivált pedig a következő:

$$\dot{M} = \dot{M}_b = \frac{d}{dt} \left[\rho \frac{l-x}{2} \right] = -\rho v/2.$$

Ha ezeket az értékeket, valamint a láncre ható súlyerőt behelyettesítjük (8.18) jobboldalába, pont a kívánt (8.17) mozgásegyenletet kapjuk eredményül. Vegyük észre, hogy ebben a felfogásban explicite figyelembe vesszük a mozgó szárlól leszakadó tömeg visszahatását a szál maradék részére.

Alkalmazzuk most (8.18)-at a nyugvó szárra. A baloldal ekkor természetesen nulla, az $\dot{M}\mathbf{q}$ változatlan, mert mindkét tényezője előjelet vált, az erő pedig

$$F = g\rho \frac{l+x}{2} - F_A.$$

Ha mindezt (8.18)-ba behelyettesítjük és az egyenletet F_A -ra rendezzük, a méréssel igazolt (8.4) képletet kapjuk vissza.

Szavakban ezt az elképzelést így foglalhatjuk össze: A mozgó szár a saját mozgásával ellentétes irányba lök ki tömeget és ezzel úgy gyorsítja a mozgását (a szabadeséshez képest) pozitív irányba, mint egy rakéta. Ez a kilőtt tömeg azonban ha lassabban is, mint az eső szál, még mindig pozitív irányban mozog, és amikor a nyugvó szál lefékezi, ezt is pozitív irányba rántja meg. Ez a rántás jelentkezik F_A -ban.

De miért egyenlő egymással a hulló szálat gyorsító erő és az F_A -ban a súlyon felül megjelenő járuléka? A könyök tartományában minden egyes láncszem 180° -os fordulatot tesz a pályájára merőleges tengely körül. A c pontban helyet cserél egymással az a két kapcsolódási pontja, amelyik a mozgó és a nyugvó szállal köti össze: Amelyik a c pont előtt felül volt, az alulra kerül és megfordítva. Ez azzal a következménnyel jár, hogy a c pont eléréséig az adott láncszem a mozgó, azután pedig a nyugvó szarát húzza. Minél kisebb a bázistávolság, annál szimmetrikusabb a két szál helyzete, annál pontosabban egyenlő egymással a láncszemek fékeződéséből származó erő a mozgó és a nyugvó szárra.

9. A változó tömegű forgó test mozgásegyenlete

A következő fejezetben egy olyan példát fogunk tárgyalni, amelyben a változó tömegű test a haladó mozgása közben forog is. Ebben a fejezetben az ehhez szükséges általános képleteket vezetjük le.

A tárgyalást végig egy inerciarendszerhez rögzített $OXYZ$ koordinátarendszerben végezzük. A tehetetlenségi- és a forgatónyomaték számításánál általában ennek a koordinátarendszernek az O origóját szokták vonatkoztatási pontnak tekinteni, de a következőkben célszerű lesz ezeket a nyomatékokat egy másik, az $OXYZ$ -hez képest tetszőlegesen mozgó O' -re vonatkoztatni. Mindenekelőtt egy egyszerű példán illusztráljuk, miért kell ezt jól meggondolni⁷.

A 8. ábrán egy $2R$ hosszúságú m tömegű ACB homogén rúd látható, amelynek a B végpontja súrlódásmentesen csúszik a talajon. Mekkora T idő alatt dől el a rúd, ha a kezdőpillanatban φ_0 szöget zár be a függőleges iránnyal?

A rúd C tömegközéppontjának a mozgásegyenlete

$$m\ddot{Z}_c = -mg + N, \quad (9.1)$$

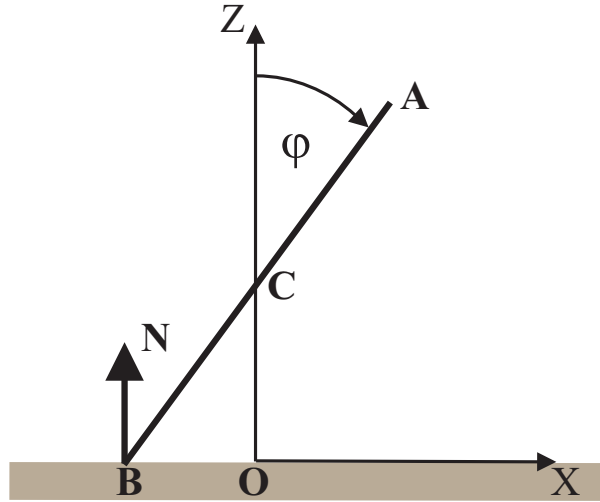
ahol N a talaj reakció-ereje. Ezt a reakció-erőt nem ismerjük, de talán könnyen meghatározhatjuk a következő gondolatmenettel.

Írjuk fel a forgatónyomaték Y -komponensére vonatkozó egyenletet mind a C , mind pedig a B pontra vonatkozólag:

$$I\ddot{\varphi} = R \sin \varphi \cdot N, \quad (9.2)$$

$$I'\ddot{\varphi} = mgR \sin \varphi. \quad (9.3)$$

⁷ F. S. Crawford, *Am. J. Phys* **57**, 177 (1989)



8. ábra.

A forgatónyomatékok a következők:

$$I = \frac{1}{3}mR^2, \quad I' = I + mR^2 = \frac{4}{3}mR^2.$$

Ha (9.2)-t elosztjuk (9.3)-vel, rögtön megkapjuk N értékét:

$$N = mg \frac{I}{I'}.$$

Helyettesítsük ezt (9.1)-be:

$$m\ddot{Z}_c = -mg + mg \frac{I}{I'} \equiv a = \text{konstans.}$$

A tömegközéppont tehát a konstans a gyorsulással esik. Mivel az $R \cos \varphi_0$ magasságból nulla kezdősebességgel indul, ezért a mozgás ideje

$$T = \sqrt{\frac{2R \cos \varphi_0}{a}}.$$

Eszerint a mozgási idő még abban az esetben is véges, amikor a rúd a kezdőpillanatban függőleges helyzetű ($\varphi_0 = 0$), ami nyilván képtelenség, hiszen ez egy instabil egyensúlyi helyzet, amelyhez közeledve az esési időnek exponenciálisan kellene a végtelenhez tartania. A gondolatmenetünkbe nyilván hiba csúszott. A (9.3) egyenlettel van baj, mert a $\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{K}$ forgatónyomaték egyenletet megfelelően általánosítani kellett volna, mielőtt a mozgó B vonatkoztatási pontra alkalmazzuk.

Ezt az általánosítást mindenképpen érdemes megtenni. A forgatónyomaték egyenlet számára ugyanis kétségtelenül B a legalkalmasabb vonatkoztatási pont,

mert az ismeretlen \mathbf{N} erőnek erre a pontra vonatkozóan nincs nyomatéka. Ebből az egyenletből az \mathbf{N} előzetes ismerete nélkül meg lehet határozni a $\varphi(0) = \varphi_0$ kezdőfeltételt kielégítő $\varphi(t)$ függvényt, amelynek ismeretében a $\varphi(T) = 0$ egyenletet megoldva kapjuk meg a T esési időt.

Legyen tehát O' egy tetszőlegesen mozgó pont a $OXYZ$ koordinátarendszerben. A $\mathbf{J} = \mathbf{K}$ egyenletnek azt az általánosítását keressük, amelyben az impulzusnyomaték is és a forgatónyomaték is az O helyett az O' -re van vonatkoztatva.

Mindenekelőtt megállapodunk egy célszerű konvencióban: Egy O' -re vonatkoztatott mennyiséget ugyanazzal a betűvel jelöljük, mint az O -ra vonatkoztatott párját, csak az első esetben kisbetűt, a másodikban nagybetűt használunk. A $\mathbf{J} = \mathbf{K}$ egyenletnek ílymódon már a felírasmódja mutatja, hogy a benne szereplő mennyiségek O -ra vonatkoznak, mert az O' -re vonatkoztatott impulzusnyomatékokat és forgatónyomatékokat (pontnélküli) \mathbf{j} -vel és \mathbf{k} -val jelöljük. Az O' pont O -hoz viszonyított helyzete $\mathbf{R}_{O'}$, míg az O pontnak az O' -höz viszonyított helyzetvektora $\mathbf{r}_O = -\mathbf{R}_{O'}$. Egy tetszőleges P pont O -hoz és O' -höz viszonyított helyzetvektora \mathbf{R}_P és $\mathbf{r}_P = \mathbf{R}_P - \mathbf{R}_{O'}$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{R}_O = \mathbf{r}_{O'} = 0$.

A testet, amelyre a csupa kisbetűt tartalmazó impulzusmomentum egyenletet fel akarjuk írni, bontsuk gondolatban olyan kis részekre, amelyek pontszerűnek tekinthetők, ezért a *saját tengelyük körüli* forgási energiájuk nulla. Ezeket a kis részeket görög betűvel indexeljük. Az O' -re vonatkoztatott impulzusmomentum definíciója a következő:

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{\alpha}), \quad (9.4)$$

amelyben

$$\mathbf{r}_{\alpha} = \mathbf{R}_{\alpha} - \mathbf{R}_{O'}, \quad \mathbf{v}_{\alpha} = \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} = \mathbf{V}_{\alpha} - \mathbf{V}_{O'}.$$

A (9.4) időderiváltja a következő:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{j}} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{\alpha}) + \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{v}}_{\alpha}) = \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{V}}_{\alpha}) - \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{V}}_{O'}), \end{aligned}$$

mert az első sor első tagja $\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \equiv \mathbf{v}_{\alpha}$ következtében nulla. A második sor első tagjában a Newton-egyenletek alapján

$$m_{\alpha} \dot{\mathbf{V}}_{\alpha} = \mathbf{F}_{\alpha} + \sum_{\beta} \mathbf{F}_{\beta \rightarrow \alpha}.$$

Itt $\mathbf{F}_{\beta \rightarrow \alpha}$ az az erő, amellyel a test β részecskéje hat az α részecskére ($\mathbf{F}_{\alpha \rightarrow \alpha} = 0$), a \mathbf{F}_{α} pedig az α -edik részecskére ható külső erő. Az $\sum_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha} \times \sum_{\beta} \mathbf{F}_{\beta \rightarrow \alpha})$ összegben azonban a belső erők kiejtik egymást,⁸ és így

$$\dot{\mathbf{j}} = \sum_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}) - \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{V}}_{O'}).$$

⁸ A belső erők ugyanis nem hozzátják forgásba a testet. Tekintsük pl. az $\alpha = 1$, $\beta = 2$ és

Az első tag itt \mathbf{k} , a második tagban pedig bevezethetjük a C tömegközéppont O' -re vonatkoztatott helyzetvektorát:

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{M} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha} \quad (M = \sum_{\alpha} m_{\alpha}). \quad (9.5)$$

Így végül

$$\mathbf{j} = \mathbf{k} - M(\mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{V}}_{O'}). \quad (9.6)$$

Ez az egyenlet érvényes akkor, amikor az O' vonatkoztatási pont tetszőleges mozgást végez. A jobboldal második tagja bizonyos speciális esetekben nulla:

$$\mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \text{amikor } O' = C, \text{ és/vagy } \mathbf{V}_{O'} = \text{konstans, és/vagy } \mathbf{r}_C \parallel \dot{\mathbf{V}}_{O'}. \quad (9.7)$$

Az elcsúszó rúdra egyik kivétel se vonatkozik (ld. a függelék a fejezet végén).

Amikor a tömeg változik, a $\mathbf{J} = \mathbf{K}$ egyenlet módosul. Az α -ik elem mozgásegyenlete ekkor az (1.4), amely esetünkre alkalmazva a következő:

$$\frac{d(m_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha})}{dt} = \mathbf{F}_{\alpha} + \sum_{\beta} \mathbf{F}_{\beta \rightarrow \alpha} + \frac{dm_{\alpha}}{dt} \mathbf{U}_{\alpha}. \quad (9.8)$$

A nagybetűk mutatják, hogy \mathbf{V}_{α} és \mathbf{U}_{α} az O -ra vonatkoztatott mennyiségek.

Szorozzuk (9.8)-t vektoriálisan \mathbf{R}_{α} -val. A baloldalon

$$\left(\mathbf{R}_{\alpha} \times \frac{d(m_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha})}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_{\alpha} \times m_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}) - m_{\alpha} \left(\frac{d\mathbf{R}_{\alpha}}{dt} \times \mathbf{V}_{\alpha} \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{R}_{\alpha} \times m_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}),$$

mert $\dot{\mathbf{R}}_{\alpha} \equiv \mathbf{V}_{\alpha}$ következtében a második tag zérussal egyenlő. Ha az \mathbf{R}_{α} -val vektoriálisan megszorított (9.8)-t α -ra összegezzük, a baloldalon $\dot{\mathbf{J}}$ -t kapjuk, a jobboldalon pedig a belső erők járuléka megint kiegyesítségűdik. Így végeredményben

$$\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{K} + \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} (\mathbf{R}_{\alpha} \times \mathbf{U}_{\alpha}). \quad (9.9)$$

A kisbetűs \mathbf{j} -t és \mathbf{k} -t tartalmazó egyenletre ugyanúgy kell áttérni, mint a konstans tömeg esetében, csak az átalakítások hosszadalmasabbak. A végeredmény a következő:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = \mathbf{k} - M(\mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{V}}_{O'}) + \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} (\mathbf{R}_{O'} \times \mathbf{U}_{\alpha}) + \\ + \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{U}_{\alpha}) - \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} (\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{V}_{O'}). \end{aligned} \quad (9.10)$$

az $\alpha = 2, \beta = 1$ tagokat. Mivel $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$, ezért

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1},$$

és ez zérus, mert a belső erők centrálisak.

Megjegyezzük még, hogy az erőknek önmagukban nincs vonatkoztatási pontjuk, ezért mindig ugyanazzal a betűvel kell jelölni őket.

Függelék: Az eldőlt bot mozgásegyenlete

A (9.6) alapján korrigálhatjuk a hibás (9.3) egyenletet. Az \mathbf{N} kiejtése érdekében a B pontot választjuk O' -nek. A (9.6)-nek az y -komponense az, ami számít:

$$\dot{j}_y = k_y - M(\mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{V}}_{O'})_y.$$

Itt

$$\dot{j}_y = I' \ddot{\varphi}, \quad k_y = mgR \sin \varphi,$$

ezért az egyenlet csak a jobboldal második tagja miatt különbözik (9.3)-tól. Ebben a tagban

$$\mathbf{r}_C = (x_C, y_C, z_C) = (R \sin \varphi, 0, R \cos \varphi)$$

$$\mathbf{R}_{O'} = (X_{O'}, Y_{O'}, Z_{O'}) = (-R \sin \varphi, 0, 0)$$

$$\mathbf{V}_{O'} = (\dot{X}_{O'}, \dot{Y}_{O'}, \dot{Z}_{O'}) = (-R \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}, 0, 0)$$

$$\dot{\mathbf{V}}_{O'} = (\ddot{X}_{O'}, \ddot{Y}_{O'}, \ddot{Z}_{O'}) = (-R(\cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2), 0, 0)$$

$$(\mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{V}}_{O'})_y = z_C \ddot{X}_{O'} = -R^2 \cos \varphi (\cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2).$$

A (9.3) javított változata tehát a következő:

$$I' \ddot{\varphi} = mgR \sin \varphi + mR^2 \cos \varphi (\cos \varphi \cdot \ddot{\varphi} - \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}^2).$$

Ezt az egyenletet csak numerikusan lehet integrálni, de ha tényleg szükségünk van numerikus eredményekre, az energiaintegrálból kell kiindulni. A honlapomon az *Elméleti mechanika* jegyzet 137. oldalán megtalálható a kinetikus energiának az a képlete, amely a tetszőleges mozgást végző O' -re vonatkoztatott mennyiségeket tartalmazza. Az elcsúszó botra alkalmazva ez a képlet a következő:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M V_{O'}^2 + \frac{1}{2} I' \dot{\varphi}^2 + M \mathbf{V}_{O'} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C),$$

amelyben

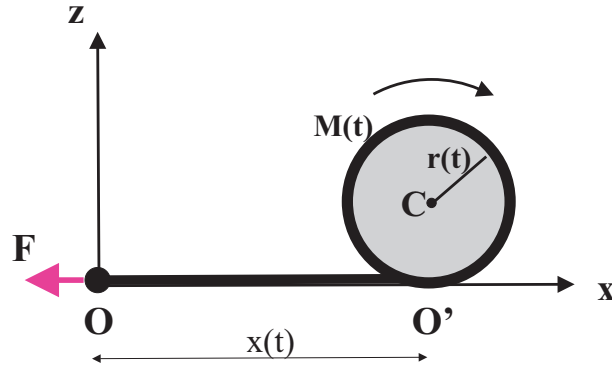
$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_X, \omega_Y, \omega_Z) = (0, \dot{\varphi}, 0).$$

Behelyettesítés és összevonás után a mozgási energiára az

$$E_{\text{kin}} = \frac{1 + 3 \sin^2 \varphi}{6} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

kifejezést kapjuk, míg a potenciális energia nyilván

$$E_{\text{pot}} = gmR \cos \varphi.$$



9. ábra.

10. A tűzoltóguriga

Ha egy feltekert tűzoltó tömlőt elgurítunk úgy, hogy a végét fixen tartjuk, letekeredik. Milyen időtvény szerint gurul el? Ez a *tűzoltó-guriga* néven ismert probléma⁹ (9. ábra).

A tömlő lefogott végére ható \mathbf{F} erőt nem ismerjük, ezért a forgatónyomaték egyenleten alapuló tárgyalásban a vonatkoztatási pontot valahol az x -tengelyen kell felvennünk. Az O' pontot választjuk, mert a tehetetlenségi nyomaték erre a pontra vonatkozóan a legegyszerűbb.

A feladatot (9.10) alapján készülünk megoldani. A tömlőt gondolatban elemekre bontjuk, amelyeket α -val indexelünk. Ezek az elemek egymás után válnak le a gurigáról és tapadnak a talajhoz. Nyilvánvaló, hogy (9.10) α -szerinti összegei minden pillanatban csak egy olyan tagot tartalmaznak, amelyben \dot{m}_α különbözik zérustól: azt, amelyik éppen leváló félben van a gurigáról. De ezekben a tagokban ugyanakkor $\mathbf{u}_\alpha = 0$, hiszen a leszakadó elem hozzátapad a talajhoz, és ennek következtében a sebessége nullával egyenlő. Másrészt nyilvánvaló, hogy ennek az elemnek az O' -re vonatkoztatott \mathbf{r}_α helyzetvektora nullával egyenlő. Végeredményben tehát az adott esetben (9.10) mindhárom α -összeget tartalmazó tagja zérussal egyenlő, és visszajutunk a (9.6) mozgásegyenlethez:

$$\mathbf{j} = -M(\mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{V}}_{O'}). \quad (10.1)$$

Az egyenlet jobboldalán a \mathbf{k} forgatónyomaték nullával egyenlő, mert az ismeretlen \mathbf{F} erő O' -re vonatkoztatott karja nulla. Descartes-komponensekben az egyenlet a következő:

$$\frac{dj}{dt} = -Mr\ddot{x}, \quad (10.2)$$

⁹ Gnädig Péter, Fizikai Szemle 1993/1

mert

$$j = (0, j, 0), \quad (10.3)$$

$$\mathbf{r}_C = (0, 0, r),$$

$$\dot{\mathbf{V}}_{O'} = (\ddot{x}, 0, 0), \quad (10.4)$$

$$(\mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{V}}_{O'}) = (0, r\ddot{x}, 0).$$

Emlékezzünk rá, hogy az előző fejezetben bevezetett jelölésmód szerint \mathbf{r}_C a guriga C középpontjának az O' -höz viszonyított helyzetvektora, $\mathbf{V}_{O'}$ pedig az O' pont sebessége O -hoz képest.

A (10.3) jobboldalán $j = I_{O'}\omega$. Mivel egyenlő az $I_{O'}$ tehetetlenségi nyomaték? Első pillanatra azt gondolnánk, hogy a Steiner-tétel szerint $I_{O'} = I_C + Mr^2$, ahol $I_C = \frac{1}{2}Mr^2$, de ez nincs így. Az O' ugyanis a gurigának nem egy rögzített, hanem folyton változó pontja.

Valójában az O' -re vonatkoztatott $I_{O'}$ tehetetlenségi nyomaték megegyezik a C centrumra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékkal, mert a két pontra vonatkoztatott perdületek egyelők egymással. A bizonyításhoz jelöljük a C -re vonatkoztatott mennyiségeket csillagozott kisbetűvel. Akkor

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha^* + \mathbf{r}_C,$$

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha^* + \dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{v}_\alpha^* + A\mathbf{r}_C,$$

mert $\dot{\mathbf{r}}_C$ párhuzamos magával \mathbf{r}_C -vel (mindkettő az O' -re vonatkoztatott mennyiség): $\dot{\mathbf{r}}_C = A\mathbf{r}_C$. Ennek következtében

$$j = \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{\alpha}^*),$$

ugyanis (9.5) figyelembe vételével

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha} \times \dot{\mathbf{r}}_C) = A \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{r}_C) = A \cdot M(\mathbf{r}_C \times \mathbf{r}_C) = 0.$$

Továbbá

$$\begin{aligned} j &= \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha} \times \mathbf{v}_{\alpha}^*) = \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\mathbf{r}_{\alpha}^* \times \mathbf{v}_{\alpha}^*) + \\ &+ \sum_{\alpha} m_{\alpha}(\mathbf{r}_C \times \mathbf{v}_{\alpha}^*) = j^* + \left(\mathbf{r}_C \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^* \right). \end{aligned} \quad (10.5)$$

Azonban

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}^* = M \mathbf{r}_C^* = 0,$$

mert a C középpont önmagához viszonyított helyzetvektora zérus. Deriváljuk az idő szerint ezt az egyenletet:

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}^* = - \sum_{\alpha} \dot{m}_{\alpha} \mathbf{r}_{\alpha}^*.$$

Az \dot{m}_α csak annál az elemnél különbözik nullától, amelyik éppen az O' pontban van. Erre az elemre

$$\mathbf{r}^*_\alpha = \mathbf{r}^*_{O'} = -\mathbf{r}_C.$$

Ha ezt (10.5) utolsó tagjában figyelembe vesszük, a bizonyítandó

$$j = j^* = \frac{1}{2}Mr^2 \cdot \omega \quad (10.6)$$

egyenlőségre jutunk.

A (10.2) tehát a következő:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mr^2\omega \right) = -mr\ddot{x}. \quad (10.7)$$

A tömlő vastagsága legyen Δ , a teljes hossza pedig L . A sugár a kezdőpillanatban legyen r_i . A $t = 0$ pillanatban a feltekert guriga egy olyan kör, amelynek a területét πr_i^2 -ként is, $L \cdot \Delta$ alakban is felírhatjuk, ezért

$$\Delta = \pi \frac{r_i^2}{L}. \quad (10.8)$$

Továbbá, ha a kezdő tömeg M_i , akkor

$$\frac{M}{M_i} = \frac{L-x}{L} \quad \text{valamint} \quad \frac{M}{M_i} = \frac{r^2}{r_i^2}.$$

Az első egyenletből

$$M = M_i(1 - x/L), \quad (10.9)$$

a másodikból pedig

$$r = r_i \sqrt{\frac{M_i}{M}} = r_i \sqrt{1 - x/L}. \quad (10.10)$$

A (10.7) bal- és jobboldalán tehát

$$Mr = M_i r_i (1 - x/L)^{3/2}, \quad (10.11)$$

míg a baloldalon még marad $r\omega = \dot{x}$. A (10.7) tehát a következő:

$$\frac{1}{2} \left[(1 - x/L)^{3/2} \cdot \dot{x} \right] = -(1 - x/L)^{3/2} \ddot{x}.$$

Ezt az egyenletet néhány lépésben¹⁰ a következő alakra lehet hozni:

$$\frac{d}{dt} [(1 - x/L)\dot{x}^2] = 0, \quad (10.12)$$

ahonnan

$$[(1 - x/L)\dot{x}^2] = V^2 = \text{konstans}. \quad (10.13)$$

¹⁰A Függelékben az átalakítást általánosabb esetre vonatkozóan részletezzük.

Mivel $t = 0$ -ban $x = 0$, a V konstans a guriga kezdősebessége A (10.13) egyenlet könnyen integrálható tovább:

$$(1 - x/L)^{3/2} = -\frac{3V}{2L}t - \frac{3\alpha}{2L},$$

amelyben α az újabb integrációs konstans. A kezdőfeltétel alapján $\alpha = -2L/3$. A keresett $x(t)$ függvény tehát a következő:

$$x = L \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{3V}{2L}t \right)^{2/3} \right]. \quad (10.14)$$

A teljes lecsavarodás ideje — mint látható, — $T = \frac{2L}{3V}$.

Az erőt, amellyel a tömlő végét tartani kell az O pontban, az (1.6) képlet alapján számíthatjuk ki. A (10.14) differenciálásával kapjuk a

$$\dot{x} = V \left(1 - \frac{3V}{2L}t \right)^{-1/3} \quad (10.15)$$

sebességet, míg (10.9) és a (10.14) alapján

$$M = M_i \cdot \left(1 - \frac{3V}{2L}t \right)^{2/3}.$$

Így

$$F = -\frac{M_i V^2}{2L} \cdot \left(1 - \frac{3V}{2L}t \right)^{-2/3}$$

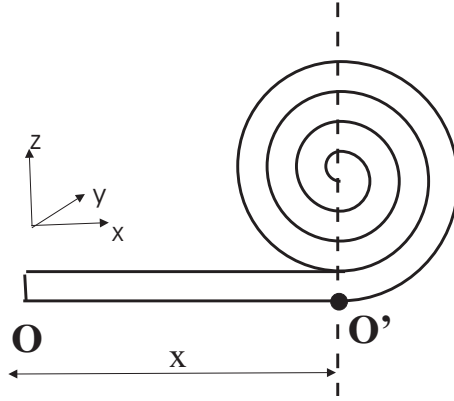
Ez az erő negatív, ahogy kell is. A gyorsulás mégis pozitív, mert (1.6) szerint

$$\ddot{x} = \frac{1}{M}(F - \dot{M}\dot{x}) = \frac{V^2}{L} \left(1 - \frac{3V}{2L}t \right)^{-2} > 0. \quad (10.16)$$

Emlékezzünk most vissza, hogy a feladatot (9.6) alapján tárgyaltuk, amelyben a \mathbf{k} forgatónyomatékokat nullának vettük. Az \mathbf{F} erőre vonatkozóan ez rendben is van, de a guriga némileg részletesebb, a tömlő vastagságát is figyelembe vevő rajza (10. ábra) azt sugallja, hogy az O' -n áthaladó függőlegesre nézve a tömegeloszlás nem egészen szimmetrikus, és ennek következtében a súlyerőnek is van valamekkora $+y$ irányú forgatónyomatéka. Az erőkart nem ismerjük, ezért ezt a forgatónyomatékokat vegyük fel $+\gamma \cdot \Delta \cdot Mg$ alakban, amelyben γ egységnyi nagyságrendű dimenziótlan konstans. Megmutatjuk, hogy $\gamma = \frac{3}{2\pi}$.

Egészítsük ki (10.7)-et az új forgatónyomatékkal:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m r^2 \omega \right) = \gamma \cdot \Delta \cdot Mg - m r \ddot{x}. \quad (10.17)$$



10. ábra.

A Függelékben megmutatjuk, hogy ezt az egyenletet a

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{3}{4} M \dot{x}^2 + \gamma \cdot \frac{2\pi}{3} g M r \right] = 0 \quad (10.18)$$

alakra lehet hozni.

A zárójel első tagja a guriga K mozgási (transzlációs + forgási) energiája, mert

$$K = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{4} M r^2 \omega^2 = \frac{3}{4} M \dot{x}^2.$$

A (10.17) tehát nem más, mint az energiamegmaradás tétele, és (10.13) ennek speciális esete, amikor a súlyerő forgatónyomatékát nem vesszük figyelembe. Következésképpen a (10.17) második tagjának a gravitációs potenciális energiával kell megegyeznie, ami a $\gamma = \frac{3}{2\pi}$ választásnál teljesül is.

Bizonyos feltételek mellett a potenciális energia elhanyagolható a mozgási energia mellett. Mivel a mozgás során a kinetikus energia nő, a potenciális energia pedig csökken, elegendő, ha ez az elhanyagolás $t = 0$ -ban megtehető: $\frac{3}{2} M_i V^2 \gg M_i g r_i$, azaz

$$V^2 / g r_i \gg 1. \quad (10.19)$$

Természetesen teljesülnie kell annak a feltételnek is, hogy (10.17) jobboldalán az első tag legyen elhanyagolható a második mellett:

$$\gamma \cdot \Delta \cdot M g \ll m r \ddot{x}. \quad (10.20)$$

A (10.15) megoldás alapján $r \ddot{x}$ -ra az

$$r \ddot{x} = \frac{r_i V^2}{L} \left(1 - \frac{3V}{2L} \right)^{-5/2}$$

képletet kapjuk. Ez az idő monoton növekvő függvénye, amely $t = 0$ -ban $\frac{r_i V^2}{L}$ -el egyenlő. A (10.20) tehát biztosan teljesül, hacsak

$$\gamma \cdot \Delta \cdot Mg \ll \frac{r_i V^2}{L}.$$

Ha ide behelyettesítjük Δ (10.8) kifejezését, újra a (10.19) feltételre jutunk.

Függelék: A (10.18) igazolása

Fejazzük ki (10.17)-ben Δ -t, M -t és Mr -t (10.8), (10.9) és (10.11) segítségével:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} M_i r_i (1 - x/L)^{3/2} \dot{x} \right] = \frac{\gamma \pi}{L} M_i g \cdot r_i^2 (1 - x/L) - M_i r_i (1 - x/L)^{3/2} \ddot{x}.$$

Egyszerűsítünk $M_i r_i$ -vel és elvégezzük a deriválást:

$$-\frac{3}{4L} (1 - x/L)^{1/2} \dot{x}^2 \frac{1}{2} (1 - x/L)^{3/2} \ddot{x} = \frac{\gamma \pi}{L} g r_i (1 - x/L) - (1 - x/L)^{3/2} \ddot{x}$$

$$\frac{3}{2} (1 - x/L)^{3/2} \ddot{x} - \frac{3}{4L} (1 - x/L)^{1/2} \dot{x}^2 - \frac{\gamma \pi}{L} g r_i (1 - x/L) = 0$$

$$2(1 - x/L) \ddot{x} - \frac{1}{L} \dot{x}^2 - \frac{4\gamma \pi}{3L} g r_i (1 - x/L)^{1/2} = 0 \quad \left| \cdot \dot{x} \right.$$

$$(1 - x/L) \frac{d\dot{x}^2}{dt} - \frac{1}{L} \dot{x}^3 - \frac{4\gamma \pi}{3L} g r_i (1 - x/L)^{1/2} \dot{x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[(1 - x/L) \dot{x}^2 + \frac{8\gamma \pi}{9} g r_i (1 - x/L)^{3/2} \right] = 0 \quad \left| \cdot \frac{3}{4} M_i \right.$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{3}{4} M_i (1 - x/L) \dot{x}^2 + \frac{2\gamma \pi}{3} g r_i M_i (1 - x/L)^{3/2} \right] = 0$$

Ha ebben az egyenletben (10.9) és (10.11) alapján bevezetjük M -t és Mr -t, a bizonyítandó (10.18)-at kapjuk eredményül.

11. A relativisztikus rakéta

A nemrelativisztikus rakéta mozgásproblémája egyetlen ismeretlen függvényt tartalmaz, a \mathbf{v} sebességet. Ennek kiszámításához elegendő egyetlen egyenlet — az (1.1) Mescserszkij-egyenlet —, amely az impulzusmegmaradást fejezi ki. A megfelelő relativisztikus feladatban azonban a \mathbf{v} -n kívül van még egy ismeretlenünk, a rakéta M tömege. Hiába adjuk meg ugyanis a hajtóanyagnak a pálya egy szakaszán kifújt Δm tömegét¹¹, ez nem egyenlő a rakéta ΔM tömegcsökkenésével, mert a relativitáselméletben nincs tömegmegmaradás. A mozgásegyenletekhez ezért az energiamegmaradás tételét is fel kell használnunk. E

¹¹ Feltesszük, hogy a kifújt anyag részecskéi nem hatnak kölcsön egymással, ezért a kilökött gáz tömege megegyezik az emittált részecskék tömegének az összegével.

két megmaradási törvényen kívül azonban más dinamikai feltevésre nem lesz szükségünk.

Két vonatkoztatási rendszerrel lesz dolgunk. Az egyik, amelyikhez a \mathcal{K} Minkowski-féle koordinátarendszer tartozik, az a vonatkoztatási rendszer, amelyben a rakéta az indulás előtt nyugszik, később pedig egyre növekvő v sebességgel mozog. A másik — a \mathcal{K}_0 , — a pálya egy általános pontjához tartozó pillanatnyi nyugalmi rendszer. Egyenesvonalú mozgásra korlátozódunk a két koordinátarendszer közös x -tengelye mentén. A kifúvás történjen negatív irányba, a rakéta ekkor pozitív irányban gyorsul.

A pálya valamely infintezimálisan rövid szakaszán, amelyen a sebesség v -vel egyenlő, a rakéta energiájának és impulzusának a megváltozását \mathcal{K}_0 -ban jelöljük dE_0 -lal és dP_0 -lal, a kifújt hajtóanyagét pedig $d\varepsilon_0$ -lal és dp_0 -lal. Az energia és az impulzus megmaradását \mathcal{K}_0 -ban a

$$dE_0 + d\varepsilon_0 = 0, \quad dP_0 + dp_0 = 0$$

egyenletek fejezik ki.

A $d\varepsilon_0$ és a dp_0 nagyságát az űrhajó automatikája (vagy parancsnoka) szabályozza a q kifúvási sebesség megválasztásával a relativitáselmélet

$$d\varepsilon_0 = \frac{c^2 dm}{\sqrt{1 - q^2/c^2}}, \quad dp_0 = -\frac{q dm}{\sqrt{1 - q^2/c^2}}$$

képletein keresztül. Az űrhajó energiájának és impulzusának megváltozása \mathcal{K}_0 -ban tehát a következő:

$$dE_0 = -\frac{c^2 dm}{\sqrt{1 - q^2/c^2}}, \quad dP_0 = +\frac{q dm}{\sqrt{1 - q^2/c^2}}, \quad (11.1)$$

ahol q a kifúvás sebességének a nagysága \mathcal{K}_0 -ban, dm pedig a kifújt üzemanyag tömege.

Az energia és az impulzus \mathcal{K} -beli dE , dP megváltozását a Lorentz-transzformáció segítségével fejezhetjük ki dE_0 -on és dP_0 -on keresztül. Mivel \mathcal{K} $-v$ sebességgel mozog \mathcal{K}_0 -hoz képest, ezért

$$dE = \frac{dE_0 + v dP_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad dP = \frac{dP_0 + v/c^2 dE_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (11.2)$$

Helyettesítsük be ide dE_0 -t és dP_0 -t (11.1)-ből:

$$dE = -c^2 \frac{1 - vq/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - q^2/c^2}} dm, \quad (11.3)$$

$$dP = \frac{q - v}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - q^2/c^2}} dm. \quad (11.4)$$

A mozgásegyenlet levezetésének a kiindulópontja a

$$v = \frac{c^2 P}{E} \quad (11.5)$$

képlet, amelynek differenciálja a következő:

$$dv = c^2 \frac{E dP - P dE}{E^2}.$$

A második tagban kihasználhatjuk (11.5)-öt:

$$\frac{E}{c^2} dv = dP - \frac{v}{c^2} dE. \quad (11.6)$$

A jobboldalra behelyettesítjük dE és dP (11.3) és (11.4) kifejezését. Átalakítás után ezt a képletet kapjuk:

$$\frac{E}{c^2} dv = q \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\sqrt{1 - q^2/c^2}} dm. \quad (11.7)$$

Fejazzük ki ebben az egyenletben E -t a v -n és az M -n keresztül. Ezt az úrhajó tömegét definiáló

$$E^2 - c^2 P^2 = c^4 M^2 \quad (11.8)$$

egyenlet alapján tehetjük meg. Vegyük ugyanis ennek az egyenletnek a differenciálját és használjuk ki benne (11.5)-öt. Átrendezés után a jól ismert

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (11.9)$$

egyenletre jutunk. Ha az energiát innen (11.7)-be helyettesítjük, a dv -re vonatkozó mozgásegyenletet

$$M dv = q \frac{1 - v^2/c^2}{\sqrt{1 - q^2/c^2}} dm \quad (11.10)$$

alakban kapjuk meg.

Szükségünk van még egy egyenletre, amely dM -et tartalmazza. Helyettesítjük be (11.9)-et az energiamegmaradást kifejező (11.3)-ba:

$$d \left(\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = -c^2 \frac{1 - vq/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - q^2/c^2}} dm.$$

A baloldali differenciált kifejtve megjelenik az $M dv$ kifejezés, amelyet (11.10)-zel helyettesítünk és a kapott egyenletet megoldjuk dM -re:

$$dM = - \frac{dm}{\sqrt{1 - q^2/c^2}}. \quad (11.11)$$

Ez az egyenlet csak invariánsokat tartalmaz, ezért \mathcal{K}_0 -ban ugyanebben az alakban érvényes. A (11.1)-gyel való összevetés mutatja, hogy a rakéta nyugalmi rendszerében a rakéta energiájának a megváltozása $dE_0 = c^2 dM$.

Az (11.10)-et és az (11.11)-et a rakéta sajátidejének $d\tau$ differenciáljával elosztva két egyenletet kapunk a két keresett $v(\tau)$ és az $M(\tau)$ függvényre. Az egyenletekben szereplő $\frac{dm}{d\tau}$ differenciáhányados és a q sebesség a sajátidő megadott függvényei, amelyet a rakéta parancsnoka tetszése szerint szabályozhat. A tömegre vonatkozó (11.11) egyenlet azonnal integrálható, mert a jobboldalán a sajátidő ismert függvénye áll. Ha ennek az egyenletnek a megoldását beírjuk a $d\tau$ -val elosztott (11.10)-be, a sebességre vonatkozó differenciál egyenletet kapjuk meg:

$$M \frac{dv}{d\tau} = q \frac{1 - v^2/c^2}{\sqrt{1 - q^2/c^2}} \frac{dm}{d\tau}. \quad (11.12)$$

Az (3.2) Ciolkovszkij-egyenlet azonban azt mutatja, hogy a nemrelativisztikus esetben célszerű a sebességet az idő helyett a rakéta tömegének a függvényében is vizsgálni. Ezt (11.10)-zel is megtehetjük úgy, hogy (11.11) segítségével dm -et dM -mel helyettesítjük benne:

$$\frac{dv}{1 - v^2/c^2} = -q \frac{dM}{M}. \quad (11.13)$$

Ez a (3.1) egyenlet relativisztikus általánosítása, mert esetünkben $\mathbf{q} = (-q, 0, 0)$.

Az (11.13) csak abban az esetben határozza meg a sebességet a tömeg függvényében, amikor q időben állandó. A két oldal ekkor könnyen integrálható:

$$\frac{c}{2} \ln \frac{1 + v/c}{1 - v/c} = q \ln \frac{M}{M_i}. \quad (11.14)$$

Ezt v -re rendezve a

$$v = c \frac{1 - \left(\frac{M}{M_i}\right)^{2q/c}}{1 + \left(\frac{M}{M_i}\right)^{2q/c}} \quad (11.15)$$

megoldást nyerjük, amely a $v(M_i) = 0$ kezdőfeltételnek tesz eleget.

A (11.15) a (3.2) Ciolkovszkij-egyenlet relativisztikus általánosítása. Nemrelativisztikus határesetben ugyanis, amikor $q/c \rightarrow 0$, a nevező 2-höz, a számláló pedig

$$1 - \left(\frac{M}{M_i}\right)^{2q/c} = 1 - \exp\left(\frac{2q}{c} \ln \frac{M}{M_i}\right) = -\frac{2q}{c} \ln \frac{M}{M_i} + o(1/c^2),$$

és ennek következtében $c \rightarrow \infty$ -nél

$$v = -q \ln \frac{M}{M_i},$$

ami a Ciolkovszkij-egyenlet.

Vizsgáljuk meg nemrelativisztikus közelítésben az energiaviszonyokat is. Az (11.3) a $dE + d\varepsilon = 0$ energiamegmaradást fejezi ki, ezért a jobboldalának a negatívja a kifűjt hajtóanyag energiájának a megnövekedésével egyenlő:

$$d\varepsilon = c^2 \frac{1 - vq/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sqrt{1 - q^2/c^2}} dm. \quad (11.16)$$

Ennek a dm tömegnek a \mathcal{K} -hoz viszonyított u sebességét a sebességösszeadás képletével lehet kiszámítani. Mivel \mathcal{K} $-v$ sebességgel mozog \mathcal{K}_0 -hoz képest, a kifűvás sebessége pedig \mathcal{K}_0 -ban $-q$, ezért

$$u = \frac{-q + v}{1 - vq/c^2}.$$

A relativitáselméletben jól ismert (és behelyettesítéssel könnyen igazolható), hogy az (11.16) jobboldalán álló tört $1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$ -val egyenlő, ezért

$$d\varepsilon = \frac{c^2 dm}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Ezt és (11.9)-t felhasználva az energiamegmaradás törvénye

$$d \left(\frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) + \frac{c^2 dm}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 0$$

alakban írható.

Nemrelativisztikus közelítésben ez a képlet a következő alakú:

$$d \left(Mc^2 + \frac{1}{2} Mv^2 \right) + c^2 dm + \frac{1}{2} dm u^2 = 0.$$

A relativitáselmélet szerint $c^2(dM + dm)$ a *belső energia* megnövekedésével egyenlő, amelyet a 3. fejezetben dU -val jelöltünk:

$$dU = c^2 dM + c^2 dm.$$

Ha ide beírjuk (11.11) $dM = -dm - \frac{q^2}{2c^2} dm$ nemrelativisztikus közelítését, a $dU = -dm \frac{q^2}{2}$ képletet kapjuk. A *belső energia* tehát – ahogy várható, — csökken. Az energiamegmaradást kifejező képlet ezért a következő:

$$dK - \frac{q^2}{2} dm + \frac{1}{2} dm u^2 = 0,$$

ahol $K = \frac{1}{2}Mv^2$. Ebben a képletben már kihasználhatjuk, hogy nemrelativisztikus közelítésben $dm = -dM$, mert az így elkövetett hiba q^2/c^2 , vagy v^2/c^2 nagyságrendű, amelyet a nemrelativisztikus közelítésben el kell hagyni. Így a

$$dK + \frac{1}{2}dM \cdot q^2 = \frac{1}{2}dM u^2$$

képletre jutunk, amely megegyezik (2.4)-gyel.

A (11.15) megoldásunk a fotonrakétára is érvényes. Ekkor $q = c$ és

$$v = c \frac{M_i^2 - M^2}{M_i^2 + M^2}. \quad (11.17)$$

Abban a realizisztikusabbnak tekinthető esetben, amikor $(M_i - M)/M_i \ll 1$, a sebesség egyszerűen arányos a relatív tömegcsökkenéssel:

$$v = c \frac{M_i - M}{M_i}.$$

A (11.17) képletnek ismeretes egy egyszerű levezetési módja is, amely azonban $q \neq c$ -nél nem alkalmazható. Jelöljük a pálya egy adott pontjában a rakéta négyesimpulzusát \mathbf{P} -vel. A \mathcal{K} -ban $\mathbf{P} = (E/c, P, 0, 0)$. Indulás előtt a rakéta négyesimpulzusa $\mathbf{P}_i = (M_i c, 0, 0, 0)$, a kiválasztott pont eléréséig kibocsátott elektromágneses sugárzás — az összes addig emittált foton — négyesimpulzusa pedig legyen \mathbf{P}_{em} .

A négyesimpulzusok nyelvén az energia és az impulzus megmaradását a $\mathbf{P}_{em} = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}$ egyenlőség fejezi ki. Vegyük mindkét oldal négyzetét (önmagával képzett négyes skalárszorzatát). Minden egyes foton négyesimpulzus négyzete nullával egyenlő, de fotonok halmazára ez csak akkor igaz, ha mindegyik foton impulzusa azonos irányú (vagy klasszikus sugárzást feltételezve az síkhullámnak tekinthető). Esetünkben ez a helyzet, ezért $\mathbf{P}_{em}^2 = 0$ és ennek következtében

$$0 = (\mathbf{P}_i - \mathbf{P})^2 = \mathbf{P}_i^2 + \mathbf{P}^2 - 2\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P} = M_i^2 c^2 + M^2 c^2 - 2M_i E.$$

Ha ide behelyettesítjük E -t a (11.9) alapján és a kapott egyenletet megoldjuk a sebességre, újra a (11.17) képletre jutunk.

Vizsgáljuk meg végül azt a kérdést, hogy tetszőleges q mellett hogyan függ a rakéta energiája a saját tömegétől.

Ha az energia (11.9) képletébe behelyettesítjük az (11.15) megoldást, rövid átalakítás után az

$$E = \frac{1}{2}M_i c^2 \left[1 + \left(\frac{M}{M_i} \right)^{2q/c} \right] \left(\frac{M}{M_i} \right)^{1-q/c} \quad (11.18)$$

képletet nyerjük az energiára. Abban az irreális, de fizikailag értelmes határesetben, amikor $M \rightarrow 0$, (11.15) szerint a $2q/c$ hatványkitevő pozitivitása miatt a rakéta sebessége a fénysebességhez tart. Az intuíció azt sugallja, hogy ekkor

az energiának is el kell tűnnie. A relativitáselmélet azonban megengedi véges energiájú nulla tömegű objektumok létezését, amelyeknek az energiája és impulzusa eleget tesz az $E = cP$ relációnak, ezért elvben nem lehet kizárni, hogy a tömeg eltűnése után a rakéta egy ilyen különös fizikai objektummá alakul át. Az (11.18) szerint azonban a tömeggel együtt az energia is nullához tart, és így a rakéta teljesen megsemmisül, *de csak akkor, ha $q < c$* . Fotonrakéta esetében az $M \rightarrow 0$ határesetben az energia a véges $\frac{1}{2}M_i c^2$ értékhez tart, tehát a tömeg eltűnése után elvben egy ilyen energiájú nulla tömegű objektumnak kell visszamaradnia.

Bármilyen meglepő is első hallásra ez a következtetés, elég könnyű meggyőzni magunkat róla, hogy nem is lehetne másképp. Egy rakéta elektromágneses kisugárzás következtében csak akkor tudja elveszíteni a teljes tömegét, ha tökéletesen semleges, vagyis minden egyes részecskéjével együtt tartalmazza annak antirészecskéjét is. Egy nagyméretű, szabályozott *annihiláció* zajlik tehát le, a pozitron-elektron annihiláció makroszkópikus változata. Az eredetileg nyugvó M_i tömegű objektumnak úgy kell átalakulnia elektromágneses sugárzássá, hogy a sugárzás teljes energiája legyen $M_i c^2$ -tel egyenlő, teljes impulzusa azonban legyen nulla. Ez csak úgy lehetséges, ha a sugárzás fele negatív, másik fele pozitív irányban terjed.

Ez az utóbbi követelmény az, ami gondot okoz, hiszen a rakéta hajtóműve végig negatív irányba emittálja a sugárzást, amely a rakéta sebességétől függetlenül mindig fénysebességgel terjed. Amikor a hajtóanyag q kiáramlási sebessége kisebb c -nél, ilyen probléma nem lép fel, hiszen miután a rakéta túllépi a q sebességet, a kilövellt hajtóanyag \mathcal{K} -ban már ugyanabban a (pozitív) irányban mozog, mint a rakéta, ezért nem nehéz megérteni, miért lehet a rakéta teljes megsemmisülése után a kiáramlott hajtóanyag összimpulzusa nulla. A fotonrakétánál is így kell lennie, de a „hogyan” kérdésére itt már nem lehet ilyen egyszerűen válaszolni. A tömeg elfogyása után visszamaradó $M_i c^2/2$ energiájú, $M_i c/2$ impulzusú „nulla tömegű objektum” minden valószínűség szerint egy elektromágneses hullámcsomag, de legalább gondolatkísérlet szintjén vizsgálható modell híján a probléma érdembeli analízise aligha lehetséges.