Idő és relativitás

ELTE doktori iskola 2019 őszi szemeszter

1. Bevezetés: Az idő két fajtája

A speciális relativitáselmélet magvát a fizikai idő fogalmának gondos analízise képezi. Az idő olyan tulajdonságainak a feltárásáról van szó, amelyek egyáltalán nem tűnnek fel a hétköznapi gondolkozás számára. És mivel a newtoni fizika átvette az időnek ezt a reflektálatlan, közkeletű fogalmát, észrevétlenül maradtak a klasszikus fizikában is.

Miről van szó? Amikor vonaton utazunk, a két állomás között eltelt időt legegyszerűbben a karóránk alapján állapíthatjuk meg, amelyről feltesszük, hogy *ideális*. De ha nincs saját óránk, elég kinézni a vasútállomások óráira, amelyekről leolvashatjuk, hogy mikor érkeztünk meg egy adott helységbe, és egyszerű kivonással ugyancsak megkaphatjuk, mennyi idő telt el két állomás között.

Azt gondolnánk, hogy a két eljárás teljesen egyenértékű, pedig van egy elég lényeges különbség közöttük — még akkor is, ha a vasútállomások óráit szintén ideálisnak tételezzük fel. Két állomás között ugyanis csak akkor telik el ugyanannyi idő a karóránk és az állomások órái alapján, ha ez utóbbiak *helyesen vannak szinkronizálva egymással*.

Hogyan lehet ezt elérni? A gyakorlatban a rádió pontos időjelzése alapján, de elvben, mivel az óráink ideálisak, azt is feltehetjük, hogy az ország összes vasútállomásának összes óráját egyetlen óragyárban készítették, és amikor mind elkészült, egy közös helyiségben délben pontosan ugyanabba a 12-s helyzetbe hozták a mutatóikat. Utána nyugodtan kiszállíthatták őket a végleges helyükre, mert – ideálisak lévén – megőrizték a pontos idejüket. De az is lehetséges, hogy valaki végigjárta az összes vasútállomást és a saját órája alapján állította be őket.

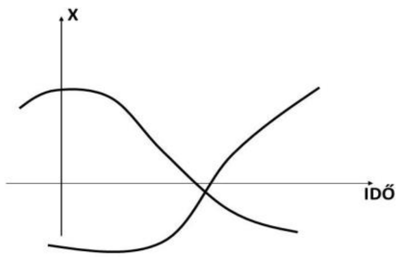
Figyeljük meg jól a különbséget! Ha ugyanazt az időtartamot egyetlen órán olvassuk le, nincs szükség semmiféle szinkronizálásra, elég, ha az óra pontos (ideális). Több órán történő leolvasásnál azonban még szinkronizálni is kell őket.

De mi teszi elkerülhetetlenné ezt a különbséget? A válasz nyilvánvaló: A karóránk csak azért tudott egyedül megbírkózni a feladattal, mert *mozgott*, míg az állomások órái folyamatosan egy helyben állnak.

Most mindjárt megvizsgáljuk, milyen következményekkel jár mindez a fizikában felmerülő feladatokra nézve, de előbb, hogy ne kelljen minden esetben hosszasan körülírni, melyik eljárásról van szó, adjunk nevet a két eljárásban kapható két időtartamnak.

Ha két adott pillanat (esemény) közötti időtartamot egyetlen órán olvassuk le, akkor az eltelt időtartamot *sajátidőnek* fogjuk nevezni és $\Delta\tau$-val fogjuk jelölni. A másik esetben, amikor ugyanazon két esemény közötti időt az események helyén nyugvó két különböző, helyesen szinkronizált óra alapján állapítjuk meg, a *koordinátaidő* elnevezést és a Δt jelölést használjuk.

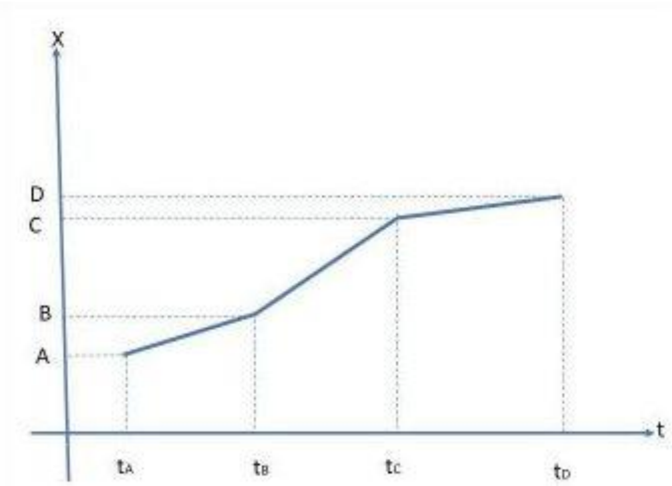
Gondoljuk most meg, mi következik mindebből a fizika — konkrétebben a kinematika — számára. Tekintsünk két tömegpontot, amelyek az *x*-tengely mentén mozognak és ábrázoljuk a mozgásukat szokásos módon:



Melyik idő-típusba tartozik a vízszintes tengelyen felvett idő?

A válaszhoz megint érdemes a vasúti közlekedéshez fordulni, mert a *menetrend* tulajdonképpen ilyen grafikonok összeségéből áll.

A vízszintes tengelyen nyilván az állomások óráin mutatott időt, vagyis a koordinátaidőt értjük, nem a mozdonyvezetők óráinak mutatóállását.



A *t* neve azért *koordinátaidő*, mert éppen úgy a koordináták egyike, mint *X,Y,Z*.

A fizikában sincs másképp. Gyakran kell egy grafikonon egyszerre ábrázolni több pályát, amelyekben *fogalmilag* a koordinátaidő az, ami közös. Az elektromos mező leírására pedig *kizárólag* a koordinátaidő alkalmas: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$, mert az $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\tau)$ képletnek ilyenkor nincs megfogható értelme.

Ugyanez igaz természetesen a Maxwell-egyenletekre, amelyeknek egyike

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + rot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0. \qquad (1)$$

Na jó, de *hol vannak az üres térben* a vasútállomások az óráikkal, amelyek a koordinátaidőt mutatják?

Csak hipotetikusan vannak ott, ezért ezeket az órákat *virtuálisaknak* hívjuk.

A koordinátaidő fizikai definíciója tehát a következő:

A koordinátaidőt a térben nyugvó sűrűn szétszórt helyesen szinkronizált ideális órák mutatnák, ha valóban ott volnának.

Egy tömegpont trajektóriáját tehát így adhatjuk meg:

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t). \tag{2}$$

Ez így értendő: Amikor a tömegpont helyén lévő virtuális óra mondjuk *t=5* másodpercet mutat, akkor a tömegpont éppen az $x = f(5), y = g(5), z = h(5)$ pontban tartózkodik.

Mennyi *sajátidő* telik el a tömegponton $\Delta t = 3$ másodpercnyi koordinátaidő alatt, miközben az $x = f(5), y = g(5), z = h(5)$ pontból az $x = f(8), y = g(8), z = h(8)$ pontba ér? A newtoni fizika (és a naív, általános időfogalom) alapján nyilván szintén 3 másodperc. Általában:

$$\Delta\tau = \Delta t. \qquad (newtoni) \tag{3}$$

Ez az egyenlőség annyira mélyen beépült a szemléletünkbe, hogy nem is figyelünk fel rá: A sajátidő és a koordinátaidő intervallum két egymástól különböző módon értelmezett időtartam, ezért a fogalmukból egyáltalán nem következik, hogy – amikor mindkettőnek van értelme, — egyenlőnek *kell* lenniük egymással.

A relativitáselmélet lényege a kétfajta időfogalom világos megkülönböztetése és a különbözőségükből adódó lehetőségek következetes kihasználása. Úgy gondolom, hogy az elmélet ebből a nézőpontból építhető fel a legegyszerűbben. Az elkövetkező előadásokban ezt próbálom majd meg demonstrálni.

Foglaljuk ezért össze mégegyszer, hogyan értendő a kétfajta idő.

1) Amit egy óra mutat, az az ő sajátideje. Egy tömegpontnak is van sajátideje, amelyet a gondolatban hozzá erősített ideális óra mutat. A Föld felszínének egyes pontjain eltelt sajátidőt az abban a pontban nyugvó (valóságos vagy csak elképzelt) ideális óra mutatja.

   Ha két esemény között egy adott órán (vagy adott tömegponton) $\Delta\tau$ sajátidő telik el, akkor az minden nézőpontból változatlanul maradó *tény*. Másképpen kifejezve ugyanezt: a sajátidő intervallum *invariáns*.

2) A koordinátaidőt mutató órák is a „saját sajátidejüket" mutatják, de a koordinátaidő lényege az, hogy ezek az egyedi sajátidők valamilyen *rendszeridőbe* illeszkednek, amely az órák megfelelő *szinkronizációjának* a következménye. Két különböző helyen történő pillanatszerű esemény között eltelt Δt koordinátaidő intervallum függ a szinkronizálás konkrét módjától és ezért *nem szükségképpen invariáns*.
   A koordinátaidőt mutató órák ezenkívül általában virtuálisak, bár ha szükséges, realizálhatunk közülük néhányat.

Ez az einsteini időfogalom sokkal strukturáltabb, mint a newtoni, amelyről a *Principiában* a következő lakonikus megállapítás olvasható:

Az abszolút, valóságos és matematikai idő önmagában véve és lényegének megfelelően, minden külső vonatkozás nélkül egyenletesen múlik[1]…

[1] Absolute, true and mathematical time, of itself, and from its own nature flows equably without regard to anything external...

A newtoni szemlélet szerint az óráknak az a funkciója, hogy ezt az abszolút időt mutassák. A relativitáselméletben viszont azt tekintjük időnek, amit az (ideális) órák mutatnak[2]. A hangsúlynak ez a (pozitivista jellegű) áthelyezése teszi lehetővé az időfogalomnak a newtoninál részletesebb analízisét.

Ideális órán egyébként a

homokóra és vízóra → gátlóműves kerekes óra → ingaóra →

→ kronométer → kvarcóra → atomóra → …

fejlődési lánc hipotetikus végpontját értjük. A koordinátaidő fogalmában ezeket az órákat csak elképzeljük, de nagyon lényeges, hogy szükség esetén *realizálhatók* legyenek. Ezért számíthatunk arra, hogy amikor az elméletet olyan kisméretű térbeli tartományokra alkalmazzuk, amelyekben ez a realizálhatóság már illuzórikussá válik, az elmélet érvényét veszti hasonlóan ahhoz, ahogy a newtoni fizika nagy sebességeknél már nem használható. Jelenleg azonban az elméletnek a mikroszkópikus méreteknél várható korlátairól még semmit se tudunk – vagy nem vettük észre őket[3].

2. A relativitáselmélet első posztulátuma[4]

Az előzményekkel kezdjük. Maxwell több éves próbálkozás után írta fel az egyenleteit egy bonyolult *mechanikai étermodell* alapján, amely az „éterrészecskék” egymásra gyakorolt mechanikai hatásán alapult. Meglepődve konstatálta, hogy a forrásokat nem tartalmazó egyenletrendszernek olyan hullámmegoldásai vannak, amelyek a fény akkor már régóta jól ismert sebességével terjednek minden irányban.

Ez durva különbség a newtoni mozgásegyenlethez képest, amely adott erők hatására csak a testek *gyorsulását* határozza meg, nem tüntet ki semmilyen konkrét sebességet, és ezért minden inerciarendszerben egyformán érvényes.

A Maxwell-egyenletek ezt az elvet (az inerciarendszerek ekvivalenciáját) súlyosan megsértik, mert csak abban az egyetlen inerciarendszerben lehetnek érvényesek, amelyben a fényhullámok minden irányban ugyanazzal a *c* sebességgel terjednek (vagyis amelyik nyugszik az éterben).

Magát Maxwell *mechanikai* étermodelljét a 19. század végére elvetették, mert az egyenletek anélkül is sikeresnek bizonyultak. De mivel továbbra is az következett belőlük, hogy a fénysebesség minden irányban *300 000 km/s*, attól a következtetéstől nem lehetett megszabadulni, hogy megsértik az inerciarendszerek ekvivalenciáját: Igazából csak abban az egyetlen (abszolút) inerciarendszerben lehetnek pontosan érvényesek, amely (a mechanikai szerkezetétől megszabadított) éterben nyugszik. De melyik ez a rendszer?

A Michelson-Morley kísérletben azt kellett volna tapasztalni, hogy a fénysebesség a laboratóriumukban nem lehet az év minden napján izotróp, mert a Föld keringése miatt a laboratórium nem lehet folyamatosan nyugalomban a feltételezett abszolút inerciarendszerhez (az éterhez) képest (hacsak a Föld nem ragadja magával az étert, amit az aberráció léte kizárt). Ez a

---

[2] Természetesen kizárólag a fizikai időről van szó. A pszichológiai idő nem tartozik a tárgyunkhoz.
[3] A kvantumelmélet szerint a hidrogénatomban az elektronnak *nincs határozott pályája*, ami a $\Delta p \cdot \Delta x \sim \hbar$ bizonytalansági reláció következménye. Ehhez hozzájárulhatna a koordinátaidő fogalmának az alkalmazhatatlansága is ilyen kis méretű pályákra, de a kvantumelméletben erre jelenleg nem utal semmi.
[4] Hagyományosan ezt másodiknak szokták venni.

kísérleti eredmény tehát abba az irányba mutatott, hogy a fénysebesség nem csak egyetlen kitüntetett vonatkoztatási rendszerben izotróp.

Einstein másfajta érv alapján vélte úgy, hogy az inerciarendszerek ekvivalenciája valahogy mégis teljesül a Maxwell-féle elektrodinamikában is. Mozogjon egy vezető egy állandó mágnes közelében egyenletes sebességgel. A vezetőben meghatározott elektromotoros erő jön létre, amely a Maxwell-egyenletek alapján kiszámítható. De melyik inerciarendszerben kell alkalmazni ezeket az egyenleteket? Abban, amelyikben a mágnes nyugszik, vagy abban, amelyikben a vezetődarab?

A két eset teljesen különbözőnek látszik. Amikor a mágnes nyugszik és a vezető mozog, mozgási indukcióval jön létre áram a vezetőben anélkül, hogy a térben elektromos mező, azaz elektromos térenergia jelenne meg. Amikor azonban a mágnes mozog és a vezető nyugszik, a mágnes változó tere elektromos mezőt indukál, amelyben térenergia van felhalmozódva, és ez a mező hozza létre az áramot a vezetőben.

A számítás ugyan mindkét esetben a Maxwell-egyenletek alapján történik, de a részleteket tekintve nagyon különböznek egymástól, ám csodák-csodájára ugyanarra az eredményre vezetnek: A két számítás szerint az ampermérőn (galvanométeren) mindkét esetben ugyanazt az áramot olvashatjuk le.

Ennek az egybeesésnek a legtermészetesebb interpretációja az lenne, hogy a műszer mutatója azért áll mindkét esetben ugyanazon a számon, mert ugyanazt a jelenséget számítjuk egyszer a mágnes, egyszer pedig a vezető inerciarendszerében és ez a két inerciarendszer ekvivalens. De ha a Maxwell egyenletek csak a nyugvó éterben igazak, akkor ez a megfogalmazás hibás, és azt kell mondanunk, hogy a két számítás abban különbözik egymástól, hogy egyszer a mágnes, másszor a vezető nyugszik az éterben. De akkor csupán a véletlenen múlik, hogy ugyanakkora áram jön ki mindkét esetben.

Einstein ezt nem tudta elfogadni és a célja a Galilei-féle relativitási elvnek (az inerciarendszerek ekvivalenciájának) a kiterjesztése volt az elektrodinamikára (de valójában a fizika egészére). Ezt tíz évi töprengés után végül a koordinátaidő és a sajátidő megkülönböztetése tette lehetővé a számára.

Az inerciarendszereket képzeljük olyan vasúti kocsiknak, amelyek párhuzamos síneken különféle sebességgel egyenletesen haladnak. Kinézni nem lehet belőlük, de bent bármilyen fizikai kísérletet el lehet végezni, így pl. fénysebesség mérését a fizikában elfogadott eljárásokkal (pl. Foucault forgótükrös, vagy Fizeau forgótárcsás mérését[5]). Feltételezte, hogy mindegyik kocsiban ugyanakkora *c=300 000 km/s* fénysebességet mérnének minden irányban.

Ezekben a kísérletekben a fényforrás nyugszik az adott vasúti kocsiban, de olyan kísérleteket is lehet végezni (főleg mozgó tükrökkel), amelyekben mozog. Einstein azt is feltételezte, hogy a mozgó forrás által kibocsátott fény is *c* sebességgel terjedne[6], hiszen a Maxwell-egyenletek alapján ezt kell várnunk.

Sebességmérésről lévén szó, mindegyik kísérletben időt is kell valahogy mérni, tehát biztosan lesznek (ideálisnak feltételezett) órák a vasúti kocsikban. De se Foucault, se Fizeau kísérletében nem találunk órákat. Akkor használtak *egyetlen egy* órát, amikor a tükröt, ill. a fogazott tárcsát forgató

[5] Ezekben a kísérletekben oda-vissza úton határozzák meg a fénysebességet. Mivel a Michelson-Morley kísérlet negatív eredményéből tudjuk, hogy ez a sebesség izotróp, ezért az oda-vissza úton meghatározott fénysebesség mindkét irányban külön-külön érvényes.

[6] Michelson a múlt század tízes éveiben valóban elvégzett ilyen mozgó tükrös kísérletet, amelyben igazolta a fénysebesség függetlenségét a fényforrás sebességétől.

motor szögsebességét bekalibrálták. Az idő tehát, amelyet ezekben a kísérletekben mértek, sajátidő volt, ezért a koordinátaidőre jellemző szinkronizálás szükségessége fel se merült.

Ezeket a gondolatkísérleteket a gyorsan mozgó vasúti kocsikkal azonban technikai okokból nem lehet realizálni, mert csak akkor lehetne meggyőzően ellenőrizni Einstein feltételezését, ha ezek a laborok a *c*-t megközelítő sebességgel is képesek lennéne haladni. Erre azonban semmi lehetőség, ezért a kísérletek általa várt eredményét Einstein a következő posztulátum formájában mondta ki:

A relativitáselmélet 1. posztulátuma:

A fénysebesség minden inerciarendszerben minden irányban ugyanakkora és nem függ a fényforrás sebességétől.

Célszerűnek tűnik az 1. posztulátumba beleérteni azt is, hogy a fénysebesség a természetben előforduló maximális sebesség. Ezt ugyanis nem lehet szigorúan belátni a relativitáselméleten belül (tachionok), de valószínűleg igaz.

3. A relativisztikus szinkronizálás

Az 1. posztulátum szerint ha a technikai lehetőségek engednék, akkor a tapasztalat azt mutatná, hogy a fény minden inerciarendszerben minden irányban ugyanazzal a *c* sebességgel terjed.

Ez a lehetőség azonban ellentmond a sebesség hétköznapi fogalmának, *ezért* nem gondolt rá korábban senki.

Legyen *K* és *K′* két inerciarendszer. A *K′* mozogjon *K*-hoz képest konstans *V* sebességgel, amelynek az iránya legyen a közös *X* és *X′* tengelyirány. Akkor az ebben a közös irányban mozgó fényjel trajektóriájának az egyenlete a newtoni felfogás szerint

$$K:\ x = ct, \qquad K':\ x' = (c - V)t, \tag{4}$$

vagyis a fényjel sebessége az adott irány mentén csak a *K*-ban *c*, a *K′*-ben ennél kisebb.

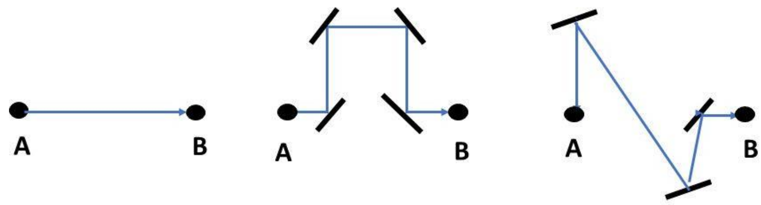
Az ellentmondás feloldásának a kulcsa az, hogy a (4) a fényjel pályáját írja le, és korábban megállapítottuk, hogy az ilyen egyenletekben a koordinátaidő szerepel. Márpedig a koordinátaidő tartalmaz egy flexibilis elemet, a különböző helyen nyugvó virtuális órák szinkronizációját.

Az első posztulátum megalapozásául szolgáló kísérletekben csak a sajátidőnek van szerepe, szinkronizálásról itt szó sem lehet. Mivel ezek a kísérletek (feltevés szerint) egyértelműen igazolnák, hogy a fényjelek minden inerciarendszerben minden irányban ugyanazzal a *c* sebességgel terjednek, ezért a koordinátaidőt rögzítő szinkronizációt minden inerciarendszerben meg *lehet* úgy választani (sőt, úgy célszerű választani), hogy (4) helyett a

$$K:\ x = ct, \qquad K':\ x' = ct' \tag{5}$$

egyenlet teljesüljön, amelyben *t* a *K*-beli, *t′* pedig a *K′*-beli koordinátaidő (*einsteini szinkronizáció*).

Röviden vázoljuk az eljárást. A *B* pontban nyugvó virtuális órát akarjuk szinkronizálni at *A*-ban nyugvó óra járásával. Ennek érdekében a t_A pillanatban fényjelet indítunk *A*-ból egyenesen *B*-felé, ahogy a baloldali ábrán látjuk.



A *B*-beli óra akkor jár szinkronban az *A*-beli órával, ha a fényjel beérkezésének pillanatában éppen $t_B = t_A + {}^{s_{AB}}/_{c}$ időt mutat (s_{AB} a két pont közötti távolság[7]). Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor $t_A + {}^{s_{AB}}/_{c}$ ismeretében az órát a szükséges mértékben előre vagy hátra tekerve szinkronba hozhatjuk az *A*-beli órával.

Nyilvánvaló, hogy ennek az eljárásnak csak akkor van értelme, ha az eljárást más fényutakkal megismételve[8] (az ábrán két példát láthatunk tükrökkel megvalósított másfajta fényutakra) a $t_B = t_A + {}^{s_{AB}}/_{c}$ feltétel a *megváltozott* s_{AB} -val már *automatikusan teljesül*. Nyilvánvaló, hogy ez csak akkor lesz így minden inerciarendszerben, ha a fénysebesség mindegyikben minden irányban *c*-vel egyenlő, amit az 1. posztulátum garantál.

Ezzel az eljárással az összes többi *C, D, E,…* virtuális órát is szinkronizálni lehet *A*-val, és az 1. posztulátum következtében az előző bekezdésben mondottak alapján az *A*-n keresztül ezek egymással is automatikusan szinkronizálva lesznek[9].

***

Foglalkozzunk most egy kicsit a koordinátaidőt mutató virtuális óra-halmazok tulajdonságaival.

A newtoni fizikában éppúgy, mint a relativitáselméletben, az egymáshoz képest mozgó inerciarendszerek cipelik magukkal a bennük sűrűn széttelepített virtuális órákat, amelyek a koordinátaidőt mutatják.

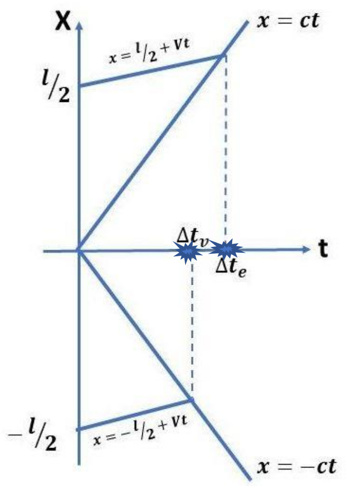
---

[7] Az Einstein által leírt szinronizációs eljárásban a *B*-pontban egy tükör visszatükrözi a fényjelet *A*-ba. Ennek az az előnye, hogy a szinkronizáláshoz nem szükséges ismerni az s_{AB} távolságot. Ha ui. a *B*-ből történő visszatürözőödésének időpontja nem egyenlő az *A*-ból történő indítás és az oda visszaérkezés időpontjainak átlagával, akkor a *B*-beli órát ennek megfelelően kell átállítani.
[8] Ide azt is beleértjük, hogy bármelyik ábra szerint a fényjelet *B*-ből indítva *A*-ba a szinkronizáltság automatikusan fenn fog állni.
[9] Lehet találkozni olyan nézettel, hogy a fénysebesség állandósága nem fizikai törvény, hanem az einsteini szinkronizációval *kényszerítjük ki*. Ez az álláspont azonban, mint látható, a helyzet teljes félreértésén alapul: A koordinátaidőt mutató órák azért szinkronizálhatók *ellentmondásmentesen* fényjelekkel, *mert* a fénysebesség minden inerciarendszerben minden irányban ugyanazzal a *c*-vel egyenlő.

A newtoni időfelfogás szerint a *K'-ben és* a *K*-ban az a két virtuális óra, amelyik éppen egymás felett tartózkodik, mindig ugyanazt az időt mutatja[10], mert, mint már idéztük, a *Principia* szerint *„az abszolút, valóságos és matematikai idő önmagában véve és lényegének megfelelően, minden külső vonatkozás nélkül egyenletesen múlik"*. Az einsteini szinkronizáció esetében ez nincs így, a *K*-val, *K'*-vel, *K''*-vel stb. együtt „utazó" virtuális órák közül azok, amelyek éppen ugyanott vannak („fedik egymást"), mind különböző időt mutatnak.

Később majd kissé részletesebben is leírjuk ezt a különbséget, de azt hiszem, igazából lehetetlen képzeletben egyszerre nyomon követni, hogy a *K*-ban nyugvó és a *K'*-ben utazó egymást éppen fedő virtuális órák halmazán leolvasható idő milyen viszonyban áll egymással. De erre nincs is szükség, mert ha tisztában vagyunk a koordinátaidő és a sajátidő fogalmával, általában egyszerű képletek segítenek minden konkrét feladat megoldásában. Lássunk is mindjárt egyet!

Feladat: Egy *V* sebességgel mozgó l hosszúságú vasúti kocsi középpontjából fényjelet indítunk a kocsi két vége felé, ahol azok egy-egy robbanást inicializálnak. Mennyi idő telik el a két robbanás között a vonat *K'* és a pályatest *K* vonatkoztatási rendszerében?



A *K*-ból szemlélve az eseményeket (ld. az ábrát) azt látjuk, hogy a vonat eleje *V* sebességgel rohan az előre menő fényjel elől, a vége pedig V sebességgel közeledik a hátrafele mozgó fényjel felé. Mivel a fényjel *K*-ban (is) *c* mindkét irányban, ezért a vonat eleje és a fényjel közötti távolság *(c-V)* sebességgel, a vonat vége és a fényjel közötti távolság pedig *(c+V)* sebességgel csökken. Ha a vonat hossza l, akkor ennek alapján a fényjel

$$\Delta t_e = \frac{l/2}{c - V} \quad \text{és} \quad \Delta t_v = \frac{l/2}{c + V} \tag{6}$$

koordinátaidő alatt éri el a vonat elejét és végét.

A (6)-ból azt látjuk, hogy a pályatest nyugalmi rendszerében a két robbanás között

$$\Delta t = \Delta t_e - \Delta t_v = \frac{l \cdot {V}/{c^2}}{1 - {V^2}/{c^2}} \tag{7}$$

---

[10] Az a kijelentés azonban, hogy pl. a *K*-n belüli virtuális órák egyszerre mind ugyanazt az időt mutatják, csak a newtoni fizika abszolút időfelfogása alapján értelmes. A relativitáselméletben azonban tautológia, mert az „egyszerre" jelző éppen a virtuális órák által definiált egyidejűséget jelenti.

szekundum telik el úgy, hogy a vonat elején történik a robbanás később.

Ezek a következtetések a fenti ábráról olvashatók le, amelyen a fényjelek, valamint a vasúti kocsi két végpontjának a trajektóriája van felrajzolva. Ebből világosan következik, hogy a (6)-ban és (7)-ben valóban *koordinátaidő* intervallumok szerepelnek.

A *K'*-ben nyilván egyidejűek a robbanások ($\Delta t' = 0$), mert a fénysebesség *K'*-ben (is) mindkét irányban ugyanaz a *c*, és a robbanás a vonat közepén történt.

Az egyidejűség feltétele csak a koordinátaidő segítségével fogalmazható meg. Az 1. posztulátumhoz fűzött kiegészítés szerint ugyanis semmise mozoghat a fénynél gyorsabban, márpedig a *K'*-ből szemlélve az eseményeket nyilvánvaló, hogy a két robbanás időpontját egyetlen órán csak akkor olvashatnánk le, ha az végtelen sebességgel mozogna (a két esemény *térszerű* [11]). Térszerű eseménypárok között csak a koordinátaidő-különbségnek van értelme.

Konklúzió: A relativitáselmélet szerint ha két pillanatszerű *különböző helyen* történő esemény valamelyik inerciarendszerben egyidejű, akkor az összes többiben különböző időpontban történik. Röviden: A természetben a távoli események egyidejűsége nem az eseménypár belső, abszolút tulajdonsága (az egyidejűség *relatív*).

Mivel két térszerű esemény időbeli sorrendjének a megállapítására *nem létezik* más módszer, mint az események helyén lévő órák szinkronizációja, amely inerciarendszer-függő eljárás, ezért ha minden inerciarendszerben ugyanazt a szinkronizációs eljárást követjük, akkor az egyidejűség relativitása nem mond ellent az inerciarendszerek ekvivalenciájának[12].

Kétely: Hangsúlyoztuk, hogy a koordinátaidőt mutató órák virtuálisak, csak gondolatban „vannak ott". De akkor hogyan lehet kísérletileg igazolni, hogy az egyidejűség *tényleg* relatív?

Afelől, hogy a vonathoz képest a robbanások egyidejűek, szimmetriaokokból igazából nem kételkedhetünk. De az már kevésbé nyilvánvaló, hogy hogyan lehet ellenőrizni a (7) teljesülését az állomás nyugalmi rendszerében.

Egy ilyen kísérlet nyilván három elemet tartalmaz:

1. A Δt meghatározásához néhány koordinátaidőt mutató óra elhelyezése a sínek mellett,
2. a vonat *V* sebességének a meghatározása, és
3. a mozgó vonat l hosszának a megmérése.

Elvben mindhárom mérést nagyon egyszerű végrehajtani.

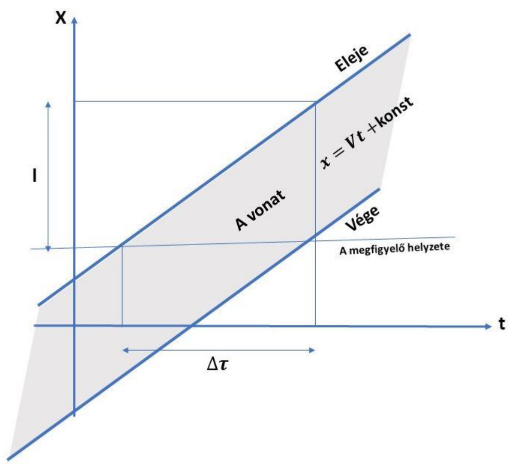
Helyezzünk el sűrűn órákat a pályatestnek azon a szakaszán, amelyen belül bekövetkeznek a robbanások és szinkronizáljuk őket fényjelekkel. A Δt-t és a *V* sebességet ezután már triviális feladat megmérni. A mozgó vonat hosszát pedig úgy kapjuk meg, hogy megmérjük, mekkora $\Delta\tau$ idő alatt haladt el az egyik nyugvó ideális óra mellett és ezt a sajátidőt megszorozzuk a sebességgel:

$$l = V \cdot \Delta\tau. \tag{8}$$

[11] A fényjellel összeköthető eseménypárokat *fényszerűnek*, a fénynél lassabban mozgó testekkel (pl. órákkal) összeköthetőket pedig *időszerűeknek* nevezzük.

[12] De ellentmond az idő newtoni felfogásának, amely szerint két távoli esemény akkor egyidejű, ha azonos helyet foglalnak el az abszolút időben. A relativitáselmélet rendkívüli teljesítőképessége azonban bizonyítja, hogy az „abszolút idő" fogalma üres, semmi se felel meg neki a természetben.

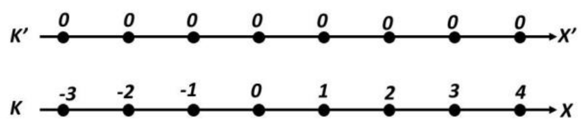
Ilyen távolságra lesz ugyanis a vonat eleje a kiválasztott órától *abban a t pillanatban*, amikor a vége elhalad az óra mellett (ld. az ábrát). Az egyidejűség relativitása következtében ezért a vonat hossza nem lehet ugyanakkora az egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerekhez viszonyítva. Az egyidejűség relativitásának ezt a következményét – a Lorentz-kontrakciót, — a 7. fejezetben tárgyaljuk majd.



Ezeknek az eljárásoknak a birtokában a (7) képlet minden eleme meghatározható és a képlet érvényessége ellenőrizhető.

Gondoljuk végig mégegyszer, hogyan látnánk *a földről nézve* az eseményeket. A két robbanást nem egyidejűnek észlelnénk, a vonat végén előbb történik a robbanás, mint az elején. Nyugodtan feltehetjük, hogy a vonat végén történő robbanás helyén lévő vonati és földi óra véletlenül éppen azonos időt mutat, mondjuk nulla másodpercet. Mit fog mutatni a vonat elején történő robbanás helyszínén található, egymást „fedő” vonati és földi óra? A vonati óra nyilván nulla másodpercet, mert a vonaton a két robbanás egyidejű. A földi óra azonban többet, mondjuk +1 másodpercet.

A *K* nyugszik, a *K′* egyenletes sebességgel mozog jobb felé. A számok az éppen fedésben lévő virtuális órákon látható időpontok. A felső sor órái *K′*-ben, az alsó soré *K*-ban nyugszanak.



Általánosabb formában (lényegében a *K′* nézőpontjából) ezt a tényt így fogalmazhatjuk meg: *Egy mozgó inerciarendszer virtuális órái a nyugvó rendszer egy adott időpillanatában mozgásirányban csökkenő időt mutatnak.*

A newtoni időfelfogás szerint ilyen helyzet nem fordulhatna elő, hiszen ebben a felfogásban a különböző inerciarendszerekkel „utazó” virtuális órák mindig ugyanazt az időt mutatják, amikor éppen fedik egymást, ezért „abszolút” a newtoni idő.

De marad még (legalább) egy megválaszolandó kérdés: Hol téved az intuíció, amikor azt várja, hogy ha a *K*-ban az *x* irányú fénysebesség *c*, akkor *K′*-ben *c-V*?

Ott, hogy az intuíciónk csak olyan *v* sebességekre működik jól, amelyek sokkal kisebbek *c*-nél: $v \ll c$. *Ekkor*, ha egy test sebessége *K*-hoz viszonyítva v, a *K'*-höz viszonyított v'sebessége $v' = v - V$ (a relatív sebesség newtoni képlete). A relativitáselmélet szerint azonban annak következtében, hogy a v'-t és a v-t *különböző virtuális órahalmazok alapján* határozzuk meg, a $v' = v - V$ képlet így módosul:

$$v' = \frac{v - V}{1 - {}^{vV}\!/_{c^2}} \tag{9}$$

(a relatív sebesség relativisztikus képlete). Majd adunk egy egyszerű levezetést erre a képletre, de az értelme így is világos, és $vV \ll c^2$-nél valóban a newtoni formulába megy át. Amikor azonban $v = c$, akkor v' is *c*, ahogy ezt (5)-ben feltételeztük.

***

Az egyidejűség relativitásának van egy katasztrofális következménye: A newtoni fizika sikerágazata, az égi mechanika alól kirántja a talajt.

Egy kettős csillag mozgását meghatározó Newton-egyenletek egyike

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1(t) = \frac{Gm_2}{|\boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{r}_1(t)|^3}\big(\boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{r}_1(t)\big).$$

Az egyenlet szerint az 1. csillagra ható erőt a 2. csillag helyzete határozza meg *ugyanabban a pillanatban* (távolhatás). Az egyidejűség relativitása következtében a relativitáselméletben ez az egyenlet biztosan nem tartható.

A megoldás útját az elektrodinamika mutatja meg, amelyben ez a probléma nem lép fel, mert a *t*-ben egy ponttöltésre ható erőt *a töltés helyén* lévő elektromos és mágneses mező *t*-beli értéke határozza meg (*közelhatás*), és két *ugyanazon a helyen* történő esemény[13] egyidejűsége invariáns.

Az általános relativitáselmélettel Einstein a gravitációs kölcsönhatás problémáját hasonló módon oldotta meg, mert ebben az elméletben a gravitáció az elektrodinamikához hasonlóan közelhatásként jelenik meg.

4. A relativitáselmélet második posztulátuma

Tekintsük át a helyzetet! Mit tudunk? A tapasztalat szerint (1. posztulátum) a fény minden inerciarendszerben minden irányban ugyanazzal a *c* sebességgel terjed. Ez a tény lehetővé és célszerűvé teszi a koordinátaidő einsteini megválasztását (szinkronizálási módját), amely szerint a fénysugarak egyenlete minden inerciarendszerben *x=ct*, vagy általánosabban

$$x = l \cdot c \cdot t \qquad y = m \cdot c \cdot t \qquad z = n \cdot c \cdot t \qquad \left(\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 1\right), \tag{10}$$

ahol *l,m,n* a fénysugár iránykoszinuszai.

Ezzel elhárul az akadály azelőtt, hogy a Maxwell-egyenletek minden inerciarendszerben azonos alakúak legyenek, hiszen nem kerülünk ellentmondásba az egyenleteknek azzal a következményével, hogy a fény minden irányban *c* sebességgel terjed. Az (1)-ben példaként felírt Maxwell-egyenletet tehát így egészíthetjük ki:

[13] A két esemény a ponttöltés és az elektromos mező ottléte.

$$K: \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + rot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0 \leftrightarrow K': \frac{\partial \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{r}',t')}{\partial t'} + rot\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}',t') = 0. \qquad (1')$$

Ezt a kapcsolatot fejezi ki a 2. posztulátum általános formában:

A relativitáselmélet 2. posztulátuma:

A fizika törvényei minden inerciarendszerben azonos alakban érvényesek.

A Michelson-Morley kísérlet negatív eredménye ezzel magyarázatot nyer. Einstein indukciós gondolatkísérletében is értelmessé válik, hogy mindkét módszerrel ugyanazt az elektromotoros erőt kapjuk a vezetőben, hiszen ugyanazokat a Maxwell-egyenleteket alkalmazhatjuk akár a mágnes, akár a vezető nyugalmi rendszerében (mert mindkettő inerciarendszer). Ez a gondolatkísérlet arra is rávilágít, hogy az $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ térmennyiségek változnak, amikor egyik inerciarendszerről egy másikra térünk át (a mágnes nyugalmi rendszerében $\boldsymbol{E} = 0$, a vezetőében $\boldsymbol{E} \neq 0$). A térmennyiségek pontos transzformációs szabályát Einstein már az első cikkében megtalálta[14]. Az $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t} \rightarrow \boldsymbol{r}', \boldsymbol{t}'$ átszámítás a Lorentz-transzformáció segítségével történik (ld. a 13. fejezetet).

Fontos megjegyzés a két posztulátum viszonyáról:

Kérdés: A 2. posztulátumból következik, hogy a Maxwell-egyenletek minden inerciarendszerben egyformán érvényesek, tehát a fénysebesség minden inerciarendszerben minden irányban *c*-vel egyenlő. Miért van akkor szükség az 1. posztulátumra, amely ugyanezt mondja ki?

Válasz: Az 1. posztulátum leszögez egy *tapasztalati tényt*, amely független attól, hogy képesek vagyunk-e azt elméletileg értelmezni. Nincs okunk ugyanis eleve feltételezni, hogy az evolúció olyan agyvelővel ruházott fel, amely alkalmas a mindennapos tapasztalattól egyre távolabb eső fizikai jelenségek elméleti, predikciókra is képes megértésére. A fénysebesség tapasztalati állandóságát Einstein − neves kortársaival, H. Lorentz-cel, M. Abraham-mal ellentétben — nem megmagyarázni akarta, hanem olyan *útmutatásként* fogta fel, amely rávilágít a sajátidő és a koordinátaidő különbözőségére. Ez a megkülönböztetés tette lehetővé, hogy a relativitáselmélettel Maxwell elektrodinamikájának olyan értelmezését adja, amely összhangban van a fénysebesség állandóságával és nagyszámú — sok esetben meglepő — predikcióra képes. A 2. posztulátum a fénysebesség tapasztalt állandóságának erre *az értelmezésére* vonatkozik.

5. A sajátidő és a koordinátaidő kapcsolata

Ezt a kapcsolatot *az optikai Doppler-effektus* felhasználásával fogjuk megállapítani. Célszerű lesz úgy képzelni, hogy az adó szabályos időközönként éles fényimpulzusokat indít a vevő felé, amely egyenletes sebességgel mozog[15]. A Doppler-effektus abban áll, hogy két egymás utáni impulzus

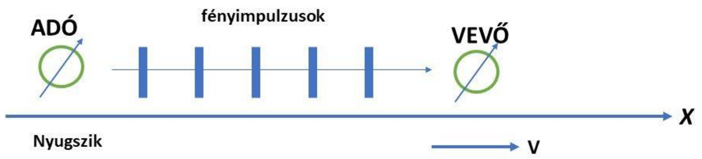
[14] Maxwell és Lorentz a térmennyiségek transzformációját csak pontatlanul ismerte.
[15] Az alább következő gondolatmenet csak akkor értelmes, ha a vevő relatív sebessége az adóhoz képest kisebb *c*-nél, ezért a (21) eredmény is csak ebben az esetben érvényes.

között különböző idő telik el a vevőn, mint az adón (nagyobb, ha távolodnak egymástól, kisebb, ha közelednek egymáshoz).

Doppler aránynak (DA) a vevő által észlelt és az adó által kibocsátott két egymás utáni jel között eltelt idő arányát nevezzük:

$$DA=\frac{\text{A VEVŐ ÁLTAL ÉSZLELT JELEK KÖZÖTTI IDŐ}}{\text{AZ ADÓ ÁLTAL KIBOCSÁTOTT JELEK KÖZÖTTI IDŐ}}$$

Számítsuk ki *DA*-t az adó nyugalmi rendszerében, amelyben a vevő sebessége *v<c.*



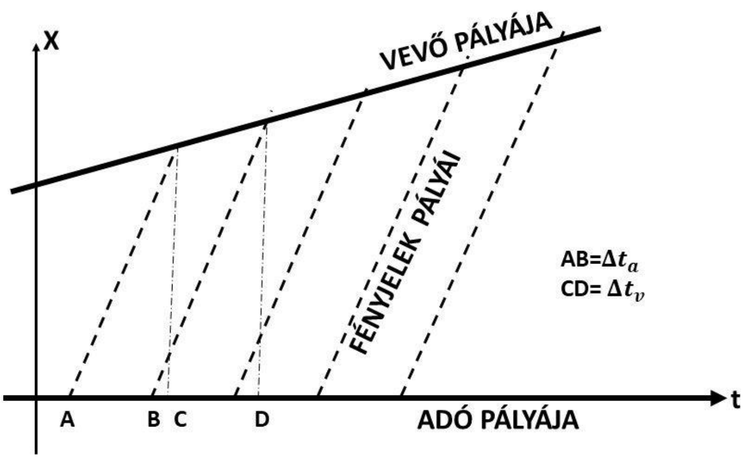
Ha a vevő nyugodna, akkor Δt_v egyenlő lenne Δt_a-val. De két jel között $v \cdot \Delta t_v$-vel távolabb kerül az adótól, ezért

$$\Delta t_v = \Delta t_a + \frac{v}{c}\Delta t_v, \tag{11}$$

azaz

$$\frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \frac{1}{1 - {}^{v}/_{c}}. \tag{12}$$

Az adó által kibocsátott Δt_a, és a vevő által észlelt Δt_v azért *koordinátaidő* különbség két egymás utáni jel között, mert a (11) egyenlet az adó, a vevő és a fényjelek pályáit ábrázoló grafikonon a megfelelő metszéspontok vízszintes távolságára vonatkozik:



A *DA* számlálójában és nevezőjében azonban nem ezek a koordinátaidő különbségek, hanem a nekik megfelelő *sajátidő* különbségek szerepelnek, amelyeket az adóhoz és a vevőhöz tartozó óra mutat:

$$DA = \frac{\Delta\tau_v}{\Delta\tau_a}. \tag{13}$$

A Doppler-arány kiszámításához tehát ismernünk kellene a koordinátaidő és a sajátidő kapcsolatát, vagyis a $\Delta\tau = F(\Delta t, v, c)$ képletben szereplő *F* függvényt. Az *F*-nek *sec* dimenziójúnak kell lennie, ami csak úgy lehetséges, ha *F* arányos Δt-vel, az arányossági tényező pedig a ${v^2}/{c^2}$ tört függvénye:

$$\Delta\tau = F(\Delta t, v, c) = \Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \Delta t. \tag{14}$$

A nyugvó órára $\Delta\tau = \Delta t$, ezért $\Phi(0) = 1$, és mivel a kétfajta idő kapcsolata nem függhet a mozgás irányától, ezért Φ csak a sebesség négyzetét tartalmazhatja.

Helyettesítsük ezt a képletet (13)-ba:

$$DA = \frac{\Delta\tau_v}{\Delta\tau_a} = \frac{\Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \Delta t_v}{\Phi(0) \cdot \Delta t_a} = \Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \frac{1}{1 - {v}/{c}}. \tag{15}$$

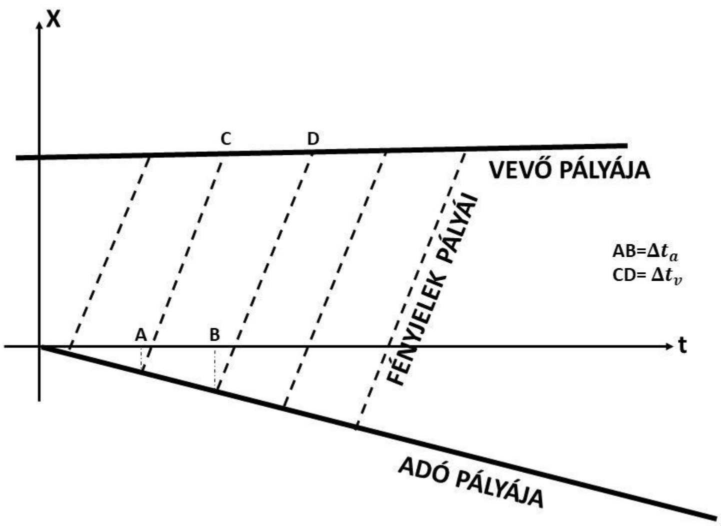
A Φ egyváltozós függvényt azonban nem ismerjük, de kiszámíthatjuk, ha *DA* képletét *a vevő nyugalmi rendszerében* is felírjuk és egyenlítjük (15)-tel. Mivel a fénysebesség a vevő nyugalmi rendszerében is ugyanazzal a *c*-vel egyenlő, mint az adóéban, ezért a vevő nyugalmi rendszerében

$$\Delta t_v = \Delta t_a + \frac{v}{c}\Delta t_a, \tag{16}$$

és innen

$$\frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = 1 + {v}/{c}. \tag{17}$$

Ez az összefüggés az alábbi ábra alapján is megkapható, ezért ez is koordinátaidőre vonatkozik:



Ekkor tehát

$$DA = \frac{\Delta\tau_v}{\Delta\tau_a} = \frac{\Phi(0) \cdot \Delta t_v}{\Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \Delta t_a} = \frac{1}{\Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right)} \cdot \frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \frac{1}{\Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right)} \cdot (1 + {v}/{c}). \tag{18}$$

A (15) és a (18) egyenlítéséből megkapjuk a

$$\Phi = \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}} \tag{19}$$

függvényt, amelynek segítségével a *DA* akár (15)-ből, akár (18)-ból kiszámítható[16]:

$$DA = \sqrt{\frac{1 + {v}/{c}}{1 - {v}/{c}}}. \tag{20}$$

De igazából nem is a *DA*, hanem a koordinátaidő és a sajátidő kapcsolata az ami érdekel. A (14) és a (19) alapján ez a következő:

$$\boxed{\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} \tag{21}$$

Mint látni fogjuk, egyedül ebből az egyenletből már következik a relativitáselmélet összes nevezetes kinematikai következménye a Lorentz-transzformációt is beleértve. A (21) levezetésében a Doppler-effektus hatékonyságának az a magyarázata, hogy a koordinátaidő és a sajátidő fogalmi megkülönböztetésén kívül csupán azt kellett kihasználni, hogy a fénysebesség mind az adó, mind a vevő nyugalmi rendszerében ugyanakkora. Ez a feltevés viszi be implicite a gondolatmenetbe az Einstein-szinkronizálást.

***

A Doppler-effektus lehetőséget nyújt a relatív sebesség (9) képletének nagyon egyszerű levezetésére is.

A *relatív sebesség* fogalma szerint a vevő relatív sebességén az adóhoz képest a vevőnek az adó nyugalmi rendszerében mért sebességét értjük. Ezt jelöltük v-vel. Hasonlóan, az adó relatív sebessége a vevő nyugalmi rendszerében $-v$ -vel egyenlő. A *DA* invariáns, akármelyik vonatkoztatási rendszerből nézve határozzuk meg az értékét, ugyanazt kell kapnunk. Ebből a követelményből kiindulva kaptuk meg (21)-t.

Ha a *DA*-t egy *általánosan mozgó* vonatkoztatási rendszerben számítjuk ki és egyenlítjük (20)-szal, akkor a relatív sebesség képletét olvashatjuk le az eredményből.

Tekintsük azt a (balra mozgó) *K* vonatkoztatási rendszert, amelyben az adó és a vevő sebessége $0 < v_a < v_v < c$. Ekkor, mivel az adó v_a sebességgel *közeledik* a vevőhöz a vevő pedig v_v sebességgel *távolodik* tőle , (11) és (16) analogonja a következő:

$$\Delta t_v = \Delta t_a - \frac{v_a}{c}\Delta t_a + \frac{v_v}{c}\Delta t_v, \tag{22}$$

ahonnan[17]

$$\frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \frac{1 - {v_a}/{c}}{1 - {v_v}/{c}}, \tag{23}$$

[16] A Doppler-effektust inkább a frekvenciák hányadosával szokás jellemezni, ami a (20) inverze.

[17] A vevő nyugalmi rendszerében $v_v = 0, v_a = -v$, ezért visszakapjuk (17)-t.

Ennek következtében

$$DA = \frac{\Delta\tau_v}{\Delta\tau_a} = \frac{\Phi\left(\frac{v_v^2}{c^2}\right)\cdot\Delta t_v}{\Phi\left(\frac{v_a^2}{c^2}\right)\cdot\Delta t_a} = \frac{\sqrt{1-{v_v^2}/{c^2}}}{\sqrt{1-{v_a^2}/{c^2}}}\cdot\frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \frac{\sqrt{(1+{v_v}/{c})(1-{v_a}/{c})}}{\sqrt{(1-{v_v}/{c})(1+{v_a}/{c})}}. \tag{24}$$

Ha a gyökjel alatti szorzásokat elvégezzük és a számlálót és a nevezőt $\left(1-{v_v v_a}/{c^2}\right)$-tel végigosztjuk, akkor pontosan a (20) képletre jutunk, amelyben

$$v = \frac{v_v - v_a}{1-\frac{v_v v_a}{c^2}}. \tag{25}$$

Mivel *a* (20) értelme szerint v a vevő relatív sebessége az adóhoz képest, ezért ez a formula valóban *a relatív sebesség* általános képlete.

A *sebességösszeadás* képletét (25) átrendezésével kapjuk:

$$v_v = \frac{v + v_a}{1+\frac{v v_a}{c^2}}. \tag{25'}$$

Ezzel a képlettel lehet kiszámítani a vevő sebességét *K*-ban, amikor ismerjük az adó sebességét *K*-ban és a vevő relatív sebességét az adóhoz képest.

Miért különbözik (25) jobboldala a naív $v = v_v - v_a$ képlettől? Definíció szerint a vevő relatív sebessége az adóhoz képest a vevőnek az adó nyugalmi rendszerében észlelt sebessége. A (25) nevezője azt veszi figyelembe, hogy a vevő nyugalmi rendszerében a koordinátaidő más, mint abban a vonatkoztatási rendszerben, amelyben a vevő v_v sebességgel mozog. A (25) és a (25') természetesen meghatározza két *tetszőleges test K*-beli mozgási sebességének és relatív sebességüknek a kapcsolatát.

6. Az idődilatáció

A (3)-t helyettesítő (21) szerint egy konstans *V* sebességgel mozgó tömegponton (órán) a sajátidő lassabban telik („megnyúlik", „dilatál"), mint a koordinátaidő. Ha speciálisan a tömegpont trajektóriája $x = Vt$, akkor az $x_1 = Vt_1$ és a későbbi $x_2 = Vt_2$ pontok között az órán eltelt $\Delta\tau$ sajátidő kisebb, mint $\Delta t = t_2 - t_1$. Ez a jelenség az *idődilatáció*.

Mindenekelőtt vizsgáljuk meg, mi következik ebből a koordinátaidőt mutató virtuális órákra nézve. Tekintsük a *K'* koordinátarendszert, amely konstans *V* sebességgel mozog a nyugvó *K*-hoz képest a közös *X*-tengely mentén. Mindkettő „tele van szórva" virtuális órákkal, amelyek a *t'*, illetve a *t* koordinátaidőt mutatják.

A newtoni időfogalom szerint két egymást éppen fedő virtuális óra mindig ugyanazt az időt mutatja. A 10. oldal ábrájával kapcsolatban már láttuk, hogy a relativitáselméletben ez nincs így: A *t=0* pillanatban például — vagyis amikor mindegyik *K*-beli óra mutatója a nullán áll, — az őket fedő *K'*-beli órák az *X*-növekedésével csökkenő időt mutatnak.

Az idődilatáció egy másik típusú kérdésre ad választ. Szemeljünk ki egy *K'*-beli *Ø '* virtuális órát, amely „a kiválasztás pillanatában" éppen annyi időt mutat, mint a vele fedésben lévő *K*-beli óra. Azt fogjuk tapasztalni, hogy a mozgása során az $\mathcal{O}'$-n leolvasható idő az idődilatáció következtében fokozatosan lemarad a vele éppen fedésben lévő *K*-beli virtuális órákon leolvasható időhöz képest. Mivel azonban a *K* és a *K′* két egyenértékű inerciarendszer, ugyanezt fogjuk tapasztalni akkor is, ha egy *K*-ban nyugvó $\mathcal{O}$ mutatóállását vetjük össze azoknak a *K′*-beli virtuális óráknak a mutatóállásával, amelyek mellett éppen elhalad.

Az egymáshoz képest mozgó koordinátarendszerekhez tartozó virtuális óráknak ezek a paradoxális tulajdonságai logikailag egyáltalán nem mondanak ellent egymásnak, de képzeletben egyidejűleg szemlélni (követni) őket — ez biztosan kívül esik az átlagember szellemi képességeinek a határán.

***

A newtoni fizikában a Doppler-effektus oka az adó és a vevő közötti távolság folyamatos változása (*longitudinális Doppler-effektus)*. A relativitáselméletben ehhez hozzájön még az idődilatáció hatása. Az idődilatáció következtében azonban akkor is fellép Doppler-effektus, amikor a vevő körpályán kering (egyenletes v sebességgel) az adó körül, és így a távolság egyáltalán nem változik közöttük (*tranzverzális Doppler-effektus)*. Ekkor $\Delta t_v = \Delta t_a$ és[18]

$$DA = \frac{\Delta\tau_v}{\Delta\tau_a} = \frac{\Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\cdot\Delta t_v}{\Phi(0)\cdot\Delta t_a} = \Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right) = \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}\,. \tag{26}$$

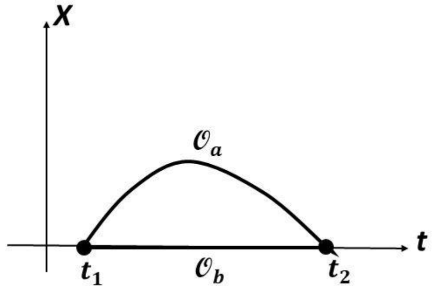
***

Idődilatáció változó sebességű mozgásoknál is fellép. A $(t, t + dt)$ infinitezimális koordinátaidő intervallumban $v(t)$ sebességgel mozgó test sajátidejének megnövekedése a (21) alapján

$$d\tau = dt\cdot\sqrt{1 - {v^2(t)}/{c^2}} \tag{27}$$

-tel egyenlő.

Az *óraparadoxon* (vagy *ikerparadoxon*) ennek a képletnek a következménye.



Tekintsük az $\mathcal{O}_a$ és az $\mathcal{O}_b$ órát, amelyek a t_1 pillanat előtt és a későbbi t_2 után egy inerciarendszerben egymás mellett az *X=0* pontban tartózkodnak és a t_1 időpont előtt szinkronban járnak. A két időpont között az $\mathcal{O}_a$ „utazásra indul” az $X = x(t)$ trajektórián, amelyen a sebessége $\dot{x}(t) = v(t)$. A (27) alapján az utazása alatt

$$\Delta\tau_a = \int_{t_1}^{t_2} d\tau_a = \int_{t_1}^{t_2} dt\cdot\sqrt{1 - {v^2(t)}/{c^2}} \tag{28}$$

[18] Ez a képlet (28)-ból következik, mert egyenletes körmozgásnál a $v(t) = v = konstans$.

sajátidő telik el rajta. Az $\mathcal{O}_b$-n, amely a (t_1, t_2) intervallumban nyugalomban maradt, ezalatt nyilván $\Delta\tau_b = t_2 - t_1$ sajátidő telt el. Mivel

$$\Delta\tau_a = \int_{t_1}^{t_2} d\tau_a = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \sqrt{1 - {v^2(t)}/{c^2}} < \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 = \Delta\tau_b, \tag{29}$$

ezért a t_2 után, amikor már újra azonos ritmusban járnak, nem lesznek szinkronban egymással, hanem $\boldsymbol{\mathcal{O}_a}$ késni fog $\boldsymbol{\mathcal{O}_b}$-hez képest. Ez a jelenség az óraparadoxon.

Általános következtetés: Ha két adott eseményt több különböző pályán haladó óra is érint, akkor az események között általában különböző sajátidő különbséget mérnek. A sajátidő különbség azon az órán a leghosszabb, amelyik a két esemény között nem szenvedett gyorsulást.

***

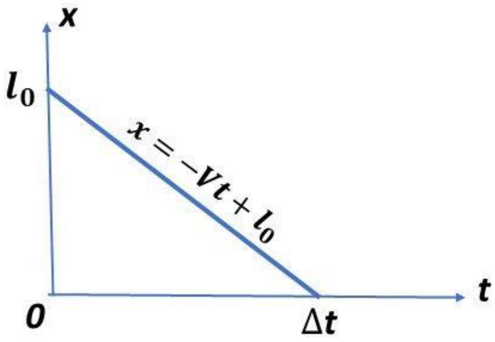
A *Bevezetés*ben említettünk néhány eljárást, amelyekkel az állomások (koordinátaidőt mutató) óráit szinkronizálni lehet egymással. Lényegében ezek azok a módszerek, amelyek a newtoni fizikában rendelkezésünkre állnak a newtoni koordinátaidőt mutató virtuális órák szinkronizálására. A newtoni fizikában hallgatólagosan feltették, hogy az egyidejűség abszolút jellege garantálja ezeknek az eljárásoknak a helyességét. A rádiójellel történő szinkronizációt azonban a következetes newtoni felfogásban nem lehet használni, mert csak a nyugvó éterben érvényes. Ha pedig egyetlen körbehordozott órához szinkronizáljuk a többit, vagy az összes óra mutatóállását egy központi helyen hozzuk azonos állásba és azután helyezzük szét az órákat, akkor az idődilatáció (az óraparadoxon) az, ami megakadályozza az egyértelműséget. Ezzel szemben az einsteini szinkronizáció az 1. posztulátum következtében teljesen egyértelmű eredményre vezet *minden inerciarendszerben*, mert az órákat még a fényjelekkel történő szinkronizáció *előtt* rögzítjük a végleges helyükön és ezzel eleve kiküszöböljük az idődilatáció torzító hatásait

7. A Lorentz-kontrakció

A 3. fejezetben láttuk, hogyan lehet egy mozgó vonat hosszát megmérni. Egy töltésen álló megfigyelőnek meg kell mérnie, mekkora $\Delta\tau$ idő alatt halad el előtte a vonat. Ezután az $l = V \cdot \Delta\tau$ képlet segítségével könnyen kiszámíthatja a mozgásban lévő vonat hosszát.

A vonatban[19] ülők eközben azt látják, hogy a pályatesten álló megfigyelő megjelenik a vonat elején és *V* sebességgel mozog a vonathoz képest mindaddig, amíg a vonat végén el nem tűnik. Ha az *X*-tengelyt úgy veszik föl, hogy a pozitív irány rajta megegyezzen a menetiránnyal, akkor a megfigyelő pályáját a következő grafikonnal ábrázolhatják:

[19] Az egyszerűség kedvéért úgy képzeljük, hogy a vonat egyetlen hosszú motorkocsiból áll.



A grafikonon l_0 a vasúti kocsi hossza, amit az utasok méterrúd segítségével állapítanak meg, a Δt pedig az a koordinátaidő intervallum, amely alatt a megfigyelő a kocsi mellett elhalad, és amelyet az utasok elvben a kocsiban sűrűn elhelyezett helyesen szinkronizált virtuális órákról olvasnak le.

Semmi okunk sincs eleve feltételezni, hogy $l_0 = l$. Nem is egyenlők egymással, mert

$$l = V \cdot \Delta\tau = V \cdot \Delta t \cdot \sqrt{1 - {V^2}/{c^2}} = l_0 \cdot \sqrt{1 - {V^2}/{c^2}} \tag{30}$$

Felhasználtuk (21)-t és azt, hogy a grafikon alapján $l_0 = V \cdot \Delta t$.

A (30) szerint a vonat hossza rövidebb abból az inerciarendszerből nézve, amelyhez képest mozog, mint ahhoz képest, amelyben nyugszik. Ez a jelenség a *Lorentz-kontrakció*, amelyet – mint azt a 3. fejezetben hangsúlyoztuk, — az egyidejűség relativitása tesz lehetővé.

***

A mozgásra merőleges méretek (a vonat magassága és szélessége) nem változnak a különböző sebességgel mozgó inerciarendszerekhez képest. Képzeljünk el egy kaput, amelynek a belső méretei majdnem pontosan megegyeznek a nyugvó vonat magasságával és szélességével úgy, hogy az álló vonat éppen elfér benne. Ha a mozgó testek tranzverzális méretei változnának – mondjuk kontrahálódnának —, akkor a kapu nyugalmi rendszeréből nézve a mozgó vonat könnyen áthaladhatna a kapun, a vonat nyugalmi rendszeréből nézve azonban a kapu beleütközne a vonatba, ezért a két inerciarendszer nem lenne egyenértékű egymással. Az inerciarendszerek ekvivalenciája tehát megköveteli, hogy a tranzverzális méretek ne változzanak, amikor különböző inerciarendszerekre vonatkoztatjuk őket.

Egy majdnem ugyanilyen paradoxon azonban a Lorentz-kontrakcióval kapcsolatban is megfogalmazható. Képzeljünk el egy alagutat, amelyik pontosan ugyanolyan hosszú, mint egy vasúti szerelvény nyugalmi hossza. Ebben az esetben az alagút nyugalmi rendszeréből nézve a mozgó vonat egy időre teljesen eltűnik az alagútban, a vonat nyugalmi rendszerében viszont legalább az egyik vége mindig kilóg belőle. Miért nem tekintjük ezeket is egymásnak ellentmondó eseményeknek, amelynek alapján a Lorentz-kontrakciót is el kellene vetnünk?

A „tranzverzális kontrakció” a két egymáshoz képest egyenletes mozgást végző inerciarendszerből nézve két egymástól teljesen különböző *eseményláncot* indítana be. Ebből az következne, hogy a két inerciarendszer nem egyenértékű egymással. Ha tehát ezt az ekvivalenciát fenn kívánjuk tartani, fel kell téteteleznünk, hogy a Lorentz-kontrakciónak a tranzverzális irányú méretek vonatkozásában nincs analogonja.

A Lorentz-kontrakcióval kapcsolatos „vonat-alagút” paradoxon[20] azonban csupán az egyidejűség relativitásának egy speciális megnyilvánulása, nem jár együtt két különböző eseménylánc beindításával, ezért éppúgy összefér az inerciarendszerek ekvivalenciájával, mint az egyidejűség relativitása. A 2017-es kurzus 3. feladata azt illusztrálja, hogy ha a „vonat-alagút” paradoxonnál a két nézőpontból mégis két különböző eseménylánc bekövetkeztét akarjuk kicsikarni, akkor az egyikre vezető érvelés biztosan hibás, mert nem veszi számításba az egyidejűség relativitását.

8. Egy összefoglaló feladat

Egy kerékpáros v sebességgel hajt egy országút egyenes szakaszán. Az országúttal párhuzamos vasúti töltésen l_0 nyugalmi hosszúságú vonat jön vele szembe, amelynek a sebessége V. Mennyi idő alatt halad el a kerékpáros a vonat mellett a saját karórája szerint?

A newtoni fizika szerint $\frac{l_0}{V+v}$ idő alatt, ugyanis a vonat végpontja és a kerékpáros közötti ***s*** távolság $V+v$ sebességgel csökken.

A relativitáselmélet szerinti megoldáshoz először válasszunk koordinátarendszert. Legyen ez a vasúti töltéshez rögzített *K*.

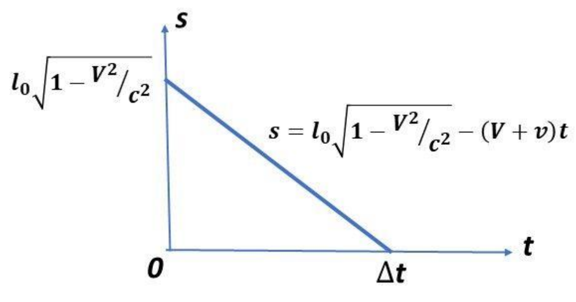
Milyen messze van a vonat vége a biciklistától, amikor ez éppen eléri a vonatot? A vonat Lorentz-kontrakciója miatt $l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ távolságra.

Mennyi idő alatt csökken ez a távolság nullára?

$$\frac{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{V+v}$$

másodperc alatt[21].

Ez sajátidő vagy koordinátaidő intervallum?



Az ábra mutatja, hogy koordinátaidő:

$$\Delta t = \frac{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{V+v}.$$

A biciklista karórája azonban az ő sajátidejét mutatja, ezért a feladat megoldása

---

[20] Pajta-rúd paradoxonnak is hívják.

[21] Ennek a képletnek a nevezőjében azért nem (25)-t vagy (25’)-t használjuk, mert nem valamilyen test sebességét kell kiszámítanunk a relatív sebesség alapján, hanem két test távolságának változási *ütemét* egy adott koordinátarendszeren belül.

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}} = \frac{l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{V+v}. \tag{31}$$

Most oldjuk meg ugyanezt a feladatot a vonat *K'* nyugalmi rendszerében is. A *K'*-ben a biciklista sebességét jelöljük v'-vel.

Nyilvánvaló, hogy a biciklista

$$\Delta t' = {l_0}/{v'}$$

koordinátaideig teker a vonat mellett. Ezalatt a karóráján

$$\Delta\tau = \Delta t' \cdot \sqrt{1 - {v'^2}/{c^2}} = l_0 \frac{\sqrt{1 - {v'^2}/{c^2}}}{v'} \tag{32}$$

sajátidő telik el.

A biciklista karóráján eltelt idő azonban nem függhet attól, hogy a vasúti töltés vagy a vonat nyugalmi rendszerében végezzük a kiszámítását. Ezért nem tettünk a (32)-ben vesszőt a $\Delta\tau$-ra. A (31) és a (32) jobboldalát tehát át *kell* tudnunk alakítani egymásba.

A feladat nyilván az, hogy (32)-ben a v'-t ki kell fejeznünk v-n keresztül. A newtoni fizika szerint $v' = v + V$. A relativitáselméletben ez megváltozik. A (25') szerint[22]

$$v' = \frac{v+V}{1 + {vV}/{c^2}}. \tag{33}$$

Helyettesítsük (33)-t (32) *nevezőjébe* és szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt $\left(1 + {vV}/{c^2}\right)$-tel:

$$\Delta\tau = l_0 \frac{\sqrt{\left(1 + {vV}/{c^2}\right)^2 \left(1 - {v'^2}/{c^2}\right)}}{v+V}. \tag{34}$$

Mivel $\left(1 + {vV}/{c^2}\right)^2 v'^2 = (v+V)^2$, ezért

$$\Delta\tau = l_0 \frac{\sqrt{\left(1 + {vV}/{c^2}\right)^2 - {(v+V)^2}/{c^2}}}{v+V} = l_0 \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{V+v},$$

ami valóban azonos (31)-gyel.

A koordinátaidő intervallumok azonban nem egyenlők egymással: $\Delta t' \neq \Delta t$. Ez nem baj, mert nincs olyan óra (még virtuális sem), amely a koordinátaidő *különbséget* mutatná két különböző helyen.

9. A gyorsulás

A relativitáselméletben a gyorsulásnak két fajtája van, a *sajátgyorsulás* és a *koordinátagyorsulás*, amelyek párhuzamba állíthatók a sajátidővel és a kordinátaidővel.

[22] Legyen a biciklista sebessége a pozitív irány. Akkor a biciklista sebessége a vonathoz képest (v') = a biciklista sebessége a pályatesthez képest (v) + a pályatest sebessége a vonathoz képest (V). A (33) ezt fejezi ki relativisztikusan.

Mozogjon egy (pontszerűnek tekinthető) űrhajó a *K* inerciarendszerben az *X*-tengely mentén. Az űrhajó a_0 sajátgyorsulásán azt a gyorsulást értjük, amelyet az űrhajón lévő gyorsulásmérő (akcelerométer) mutat (és az űrhajós érzékel). Mivel a gyorsulásmérő mutatóállása éppen olyan nézőponttól független tény, mint az űrhajón lévő óra mutatóállása, ezért a sajátgyorsulás éppen úgy invariáns, mint a sajátidő.

Az űrhajó koordinátagyorsulásán az *X* koordinátatengelyhez viszonyított *K*-beli gyorsulását értjük:

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{35}$$

Ha csak gyorsulást mondunk, azon csaknem mindig a koordinátagyorsulást értjük.

Most meg kell keresnünk a kétfajta gyorsulás kapcsolatát, a (21) analogonját.

Az egyenletes sebességgel mozgó űrhajó akcelerométere a nullán áll. Ha az űrhajós a saját órája szerint egy infinitezimálisan rövid $d\tau$ sajátidőre konstans intenzitással bekapcsolja a hajtóművet, az akcelerométere a_0-ra ugrik, majd a hajtómű kikapcsolása után visszaáll nullára. Ebből az űrhajós megállapíthatja, hogy a sebessége

$$dv_0 = a_0 \cdot d\tau \tag{36}$$

-val nőtt meg a gyorsítás előtti sebességéhez képest, amely természetesen az ő nyugalmi rendszerében nullával volt egyenlő.

A K-beli külső szemlélő számára ez a sebesség növekedés v-ről $v + dv$-re történt, amely (25') alapján a következő:

$$v + dv = \frac{v + dv_0}{1 + \frac{vdv_0}{c^2}}. \tag{37}$$

A gondolatmenetünk infinitezimálisan kis $d\tau$-ra, dv_0-ra és dv-re vonatkozik, ezért (37) jobboldala a dv_0-ban csak lineáris pontossággal érvényes. A $-vdv_0/c^2$ kvóciensű végtelen geometriai sor összegképlete alapján

$$\frac{1}{1 + \frac{vdv_0}{c^2}} = 1 - \frac{vdv_0}{c^2} + \left(\frac{vdv_0}{c^2}\right)^2 - \cdots \cong 1 - \frac{vdv_0}{c^2} \qquad \left(\frac{vdv_0}{c^2} \ll 1\right).$$

Ha ezt (37) jobboldalába behelyettesítjük, a két binomot összeszorozzuk és a v-n kívül csak a dv_0-ban lineáris tagokat tartjuk meg, akkor a

$$dv = \left(1 - {v^2}/{c^2}\right) dv_0 \tag{38}$$

egyenletre jutunk.

A (36) és a (27) alapján azonban

$$dv_0 = a_0 \cdot d\tau = a_0 \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}} \cdot dt.$$

Ha ezt behelyettesítjük (38) jobboldalába és felhasználjuk (35)-t, megkapjuk az összefüggést a sajátgyorsulás és a koordinátagyorsulás között:

$$a = \left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{3/2} a_0. \tag{39}$$

A koordinátagyorsulás mindig kisebb a sajátgyorsulásnál. Ez a tulajdonság a *gyorsulásdeficit*[23]. A gyorsulásoknak nyilván pont ilyen típusú kapcsolata szükséges ahhoz, hogy a példabeli rakétánk sohase (még konstans a_0 mellett se) érhesse el *K*-ban a fénysebességet. A ${v^2}/{c^2} \ll 1$ newtoni határesetben $a = a_0$, *ezért* nem szükséges a kétféle gyorsulás megkülönböztetése a klasszikus mechanikában.

A figyelmes hallgató (olvasó) bizonyára észreveszi, hogy a gondolatmenetünk egy nagyon speciális kikötéssel kezdődött: Feltettük, hogy az űrhajó csak egy infinitezimálisan rövid ideig gyorsul, előtte és utána a sebessége állandó. Ez a kép azonban csak a könnyebb megértést szolgálta, valójában egyetlen lépésünkben sem használtuk ki, ezért (39) tetszőlegesen változó sebességű mozgásra is alkalmazható.

Van egy nagyon jól használható fogalmi eszközünk*,* amely lehetővé teszi, hogy az érvelésünk rögtön tetszőlegesen gyorsuló objektumra legyen érvényes. Ez a *pillanatnyi nyugalmi rendszer* fogalma.

Mozogjon egy tömegpont tetszőlegesen változó **v**(t) sebességgel a térben. Válasszunk ki egy tetszőleges t_0 pillanatot, és azt az *inerciális koordinátarendszert*, amely a *konstans* **v**(t_0) sebességgel mozog, jelöljük K_0-al. Mivel a test a $t=t_0$ pillanatban a K_0-ban nyugszik, ezt a koordinátarendszert nevezzük (a t_0-beli) pillanatnyi nyugalmi rendszernek. A K_0 az a vonatkoztatási rendszer, amelyben a gyorsulás az a_0 sajátgyorsulással egyenlő, és az ehhez viszonyított sebességnövekedést adja meg a (36) képlet[24].

***

Mindeddig a *relativisztikus kinematika* tárgykörébe eső kérdésekkel foglalkoztunk. Maradt még egy fontos kinematikai feladat, a Lorentz-transzformáció származtatása. Ezt azonban későbbre halasztjuk és áttérünk a *relativisztikus dinamika* alapjainak ismertetésére.

10. A relativisztikus mozgásegyenlet

Einstein már az 1905 júniusi alapcikkében megmutatta, hogyan kell megtalálni a newtoni fizika ***ma=F*** mozgásegyenletének relativisztikus általánosítását. Abból kell kiindulni, hogy a newtoni mozgásegyenlet kis sebességeknél (amikor $v \ll c$) nagyon jó közelítés. Ezt a követelményt úgy lehet pontosan megfogalmazni, hogy *nyugvó* testre (vagyis a K_0 pillanatnyi nyugalmi rendszerben) változatlan formában teljesül: $m_0\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{F}_0$. Ezután már csak annyit kell tenni, hogy ebben az egyenletben a pillanatnyi nyugalmi rendszerre vonatkozó nulla indexű mennyiségeket *kifejezzük* abban a *K*-ban érvényes mennyiségeken keresztül, amelyben a test az aktuális v sebességgel mozog.

A jobboldal megfelelő átírása attól függ, hogy milyen erőről van szó. A fizikus gyakorlatban csak a gravitáció és az elektromágneses erő következtében jöhet létre olyan nagysebességű mozgás, amely relativisztikus tárgyalást igényel. Az általános relativitáselmélet szerint azonban a gravitáció

---

[23] A *sajátgyorsulás*, a *koordinátagyorsulás* és a *gyorsulásdeficit* (proper acceleration, coordinate acceleration, acceleration suppression) nem általánosan használt elnevezések, de jó lenne, ha elterjednének.

[24] Azt a fontos esetet azonban, amikor a sebesség és a gyorsulás nullától különböző szöget zár be egymással (a gyorsulásnak van *tranzverzális* komponense is) időhiány miatt nem tárgyalhatjuk.

valójában nem erő és a hatását nem a (41) egyenlet írja le helyesen. Az elektromágneses mezőben *nyugvó* ponttöltésre pedig csak a Coulomb-erő hat, ezért praktikusan (41) jobboldalán mindig $\boldsymbol{F}_0 = Q\boldsymbol{\mathcal{E}_0}$ áll (a pillanatnyi nyugalmi rendszerben lehet $\boldsymbol{B_0}$ mágneses indukció is , de az nem gyakorol erőt az éppen nyugvó töltésre).

A baloldalon az $\boldsymbol{a_0}$ sajátgyorsulást az $\boldsymbol{a}$ koordinátagyorsuláson keresztül kell kifejezni. Az erre szolgáló (39) képlet azonban csak egyenesvonalú mozgásra érvényes, ezért a továbbiakban erre az esetre korlátozódunk. Ekkor

$$a_0 = \frac{a}{\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{3/2}}. \tag{40}$$

Ha ezt a kifejezést behelyettesítjük a *K₀*-ban érvényes egydimenziós mozgásegyenlet $m_0 a_0 = F_0$ képletébe, akkor az

$$m_0 \frac{a}{\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{3/2}} = F_0 \tag{41}$$

egyenletre jutunk, amelyben $F_0 = Q\mathcal{E}_0$.

Most azt kell eldöntenünk, hogy van-e különbség a nyugvó test m_0 és a mozgó test m tömege között. Einstein azt tételezte fel, hogy a relativitáselméletben a tömeg a testnek ugyanolyan mozgástól független konstans paramétere, mint a newtoni fizikában, vagyis[25]

$$m_0 = m. \tag{42}$$

Ha a (41)-ben ezt kihasználjuk, akkor (41) helyett ezt írhatjuk:

$$m \frac{a}{\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{3/2}} = F_0.$$

A jobboldalon azonban még mindig a K_0-beli $F_0 = Q\mathcal{E}_0$ erő áll, amelyet szintén a *K*-beli mennyiségeken keresztül kell kifejezni. A *Q* töltésről természetesen feltesszük, hogy minden vonatkoztatási rendszerben ugyanakkora, de mi a helyzet az $\mathcal{E}_0$-lal?

A 4. fejezetben már volt szó róla, hogy a különböző inerciális koordinátarendszerek közötti áttérés során az elektromágneses mező nem marad változatlan, és *K*-ban általában megjelennek a Coulomb- és a Lorentz-erőnek olyan komponensei is, amelyek a töltést a feltételezett egyenes irányból eltérítik. *Abban a speciális esetben azonban*, amikor a ponttöltés homogén elektromos mezőben mozog a térerősséggel párhuzamosan, az elektromos mező *K*-ban ugyanaz marad, mint amilyen K_0-ban volt: $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} = konstans$. Ennek következtében a töltés gyorsul vagy lassul, de a mozgása egyenesvonalú marad. Ekkor

---

[25] Az elterjedt hibás felfogás szerint a tömeg az

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} \qquad (nem\ igaz)$$

képletnek megfelelően annál nagyobb, minél nagyobb a test sebessége. Ezt a nemlétező jelenséget nevezik „relativisztikus tömegnövekedésnek”. Ha (42) helyett ez a képlet lenne igaz, akkor a mozgásegyenletből a 3/2 hatványkitevő hiányozna (1 állna helyette). A tapasztalat – és egyébként a relativitáselmélet egész struktúrája – azonban (43)-at igazolja.

$$ma = \left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{3/2} F, \tag{43}$$

amelyben $F = Q\mathcal{E}$. A (43) relativisztikus mozgásegyenlet jobboldalán a jellegzetes $\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{3/2}$ tényező a gyorsulásdeficit egyenes következménye. Azt eredményezi, hogy *egy adott erő annál kevésbé tud gyorsítani egy testet, minél közelebb van a sebessége a fénysebességhez*, és ennek következtében a sebesség tetszőlegesen megközelítheti, de sohase érheti el a fénysebességet[26].

Az impulzus relativisztikus képletét az impulzus általános definíciója alapján a mozgásegyenlet segítségével kell megkeresnünk. A *p* impulzus az a mennyiség, amelyet az erőlöket megváltoztat[27]: $dp = F \cdot dt$. A newtoni fizikában $F \cdot dt = ma \cdot dt = d(mv)$, amelyből az impulzusra a $p = mv$ képletet kapjuk. A relativitáselméletben (43) következtében ez a gondolatmenet így módosul:

$$F \cdot dt = \frac{ma \cdot dt}{\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{m \cdot dv}{\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{3/2}} = d\left(\frac{mv}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}\right). \tag{44}$$

Ebből látható, hogy az impulzus képlete a relativitáselméletben a következő:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}}. \tag{45}$$

Érdemes még eltűnődni azon, hogy mit célszerű érteni pontosan egy test tehetetlenségén. Az ${F}/{a} = {QE}/{a}$ mennyiség látszik a legalkalmasabbnak, hiszen a tehetetlenség annál nagyobb, minél nagyobb erő szükséges egy adott gyorsulás megvalósításához (vagy egy adott erő minél kisebb gyorsulást okoz). A (43) alapján a tehetetlenség eszerint az $m/(1 - v^2/c^2)^{3/2}$ aránnyal lenne egyenlő. Ebben a kifejezésben azonban a nevező, amely a gyorsulásdeficit következménye, nem a testnek magának a tulajdonsága, hanem a koordinátarendszer megválasztásától függ. Márpedig egy test tehetetlenségét belső (invariáns) tulajdonságnak képzeljük el. Ezért célszerű a tehetetlenség mértékén a *nyugvó* testre vonatkozó ${F_0}/{a_0}$ arányt, vagyis egyszerűen a test *m* tömegét érteni a relativitáselméletben ugyanúgy, mint a newtoni dinamikában.

11. A mozgási energia

Egy *V* sebességű test *K mozgási energiája* azzal a munkával egyenlő, amit a testre ható erő végez, miközben a kezdetben nyugvó testet *V* sebességre gyorsítja fel. A newtoni fizikában ez a definíció a jól ismert $K = \frac{1}{2}mV^2$ képletre vezet:

$$K = \int_0^S F ds = \int_0^T Fv \cdot dt = m\int_0^T a \cdot v \cdot dt = m\int_0^T \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot dt = m\int_0^V dv \cdot v = \frac{1}{2}mV^2 \tag{46}$$

---

[26] Teljesen hibás az a gyakran hallható érv, hogy a fénysebesség elérését a fentebb már említett „relativisztikus tömegnövekedés” akadályozza meg, amely valójában nem létezik, mert nyilvánvalóan ellentmond az alapvető (42) egyenlőségnek.

[27] Már Newton így értelmezte az erő és az impulzus kapcsolatát a *Principia*-ban.

Ugyanez a definíció a relativitáselméletben a

$$K = \int_0^S F ds = \int_0^T Fv \cdot dt = m \int_0^T \frac{a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \cdot v \cdot dt =$$

$$= m \int_0^V \frac{dv \cdot v}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Big|_0^V = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - mc^2 \qquad (47)$$

képletet szolgáltatja a mozgási energiára.

A newtoni és a relativisztikus formula különbözőségének eredete a jellegzetes $(1 - v^2/c^2)^{3/2}$ nevező, amiről tudjuk, hogy a gyorsulásdeficit következménye.

Amikor $\mathrm{V} \rightarrow c$, a relativitáselméletben a mozgási energia végtelenhez tart. A gyorsulásdeficit tehát növeli a mozgási energiát, mert az adott sebességet hosszabb úton lehet csak elérni, mint amikor a gyorsulásdeficit nulla, és a hosszabb úton az erő több munkát végez. Ez az oka annak, hogy az adott *V*-hez tartozó mozgási energia a relativitáselméletben nagyobb, mint a newtoni fizikában.

Mint látjuk, a newtoni fizikában a mozgási energia egytagú képlet, a relativitáselméletben azonban két tagból áll. Ebből azonban egyáltalán nem következik, hogy a két tagnak külön-külön is lenne önálló fizikai jelentése. Csupán arról van szó, hogy a határozatlan integrál értéke az alsó határon a newtoni fizikában nulla, a relativitáselméletben pedig különbözik nullától. Az 1905 júniusi cikkében Einstein nem is fűz ehhez a kéttagúsághoz semmiféle megjegyzést. Három hónappal később azonban egy teljesen független gondolatkísérlet elemzése útján[28] megmutatja, hogy az mc^2 kifejezés a test E_0 *belső energiájával* egyenlő.

12. A tömeg-energia reláció

Az E_0 belső energián a nyugvó testben felhalmozott különböző természetű (hő, kémiai, elektromágneses, nukleáris, szubnukleáris, stb) energiák összegét értjük. Ezért az E_0-t nyugalmi energiának is nevezzük. Ennek a definíciónak az alapján azonban E_0-t nem tudjuk se kiszámítani, se megmérni, mert ehhez túl keveset tudunk az anyag szerkezetéről. Legfeljebb a belső energia ΔE_0 megváltozásáról tehetünk határozott kijelentéseket abban az esetben, ha elég jól ismert energia fajtával (pl. hőenergiával) kapcsolatos.

Ezt a helyzetet változtatja meg gyökeresen az

$$E_0 = mc^2 \qquad (48)$$

tömeg-energia reláció.

1905 szeptemberében Einstein a *Függ-e egy test tehetetlensége az energiatartalmától* című rövid dolgozatában a következő gondolatkísérlet segítségével jutott el ehhez a képlethez.

Nyugodjon a *K* inerciarendszerben egy test, amelynek a belső energiája E_0, a tömege pedig m. Egy adott pillanatban a test két teljesen egyforma elektromágneses jelet (hullámcsomagot) emittál

[28] A (47) levezetésénél a belső energiáról hallgatólag feltettük, hogy a gyorsító erő munkája nem változtat rajta, tehát a tömeghez hasonlóan független a test sebességétől. Arról azonban, hogy a tömeg és a belső energia esetleg kapcsolatban lehet egymással, a mozgási energia képletéből nem tudhatunk meg semmit.

egymással pontosan ellentétes irányban. A két jel által elvitt összimpulzus nyilván nullával egyenlő, ezért a jelek kibocsátása után a test nyugalomban marad *K*-ban.

A belső energiája azonban E_0-ról lecsökken valamilyen $\bar{E}_0$-ra. Ha *K*-ban a jelek energiája egyenként $^{\epsilon}/_{2}$-vel egyenlő, akkor a *K*-beli energiamegmaradás következtében

$$E_0 = \bar{E}_0 + \epsilon. \tag{49}$$

Szemléljük most *ugyanezt a folyamatot* egy olyan *K′*-ből, amely *K*-hoz képest konstans v sebességgel mozog. Nyilvánvaló, hogy a test *K′*-ben végig egyenletes v sebességgel halad ellenkező irányban, azonban se a test, se a hullámcsomagok energiája *K′*-ben nem lesz ugyanaz, mint amilyen *K*-ban volt. A júniusi dolgozatában Einstein már kiszámította egy tetszőleges irányban mozgó hullámcsomag energiájának a megváltozását a *K*-ból a *K′*-be történő áttérés során. Ezt a képletet a két ellentétes irányban mozgó hullámcsomagra alkalmazva azt kapta, hogy a két csomag *K′*-beli összenergiája $\epsilon/\sqrt{1-v^2/c^2}$-tel egyenlő. A testnek pedig a belső energiája mellett lesz még a (47) szerinti kinetikus energiája is.

A következő lépés a *K′*-beli energiamegmaradás felírása. Az első próbálkozás után kiderül[29], hogy a *K′*-beli energia csak akkor maradhat meg, ha az emisszió során a test tömege megváltozik. Ha ezt a megváltozott tömeget $\bar{m}$-mel jelöljük, akkor az energiamegmaradás tétele *K′*-ben a következő:

$$E_0 + K(v,m) = \bar{E}_0 + K(v,\bar{m}) + \frac{\epsilon}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{50}$$

A $K(v,m)$ és a $K(v,\bar{m})$ a test mozgási energiája az emisszió előtt és után, amelynek képletét Einstein a júniusi dolgozatában már levezette. A (47) képletről van szó, amelyet behelyettesíthetünk (50)-be:

$$E_0 + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 = \bar{E}_0 + \frac{\bar{m}c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \bar{m}c^2 + \frac{\epsilon}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

A (49) alapján ϵ-t energiakülönbséggel helyettesítjük és a kapott összefüggést átrendezzük:

$$(m-\bar{m}) \cdot c^2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right] = (E_0 - \bar{E}_0) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right].$$

A zárójeles kifejezéssel nyilván egyszerűsíthetünk, és az $E_0 - \bar{E}_0 = \Delta E_0$, valamint a $\Delta m = m - \bar{m}$ jelölések bevezetése után a

$$\Delta E_0 = \Delta m \cdot c^2 \tag{51}$$

képletre jutunk, amely a (48) tömeg-energia reláció *differenciális alakja*: A tömeg *megváltozása* arányos a belső energia *megváltozásával*.

Einstein azonban bizonyosra vette, hogy a képlet az eredeti (48) nemdifferenciális alakban is érvényes, vagyis a tömegnek nincs olyan része, amelyhez ne tartozna energia. A későbbi évtizedekben ez a meggyőződése fontos kísérletekben teljes mértékben igazolódott[30], de

[29] Ha (50) jobboldalán a mozgási energia ugyanazt az *m* tömeget tartalmazná, mint a baloldalán, akkor ezzel a taggal lehetne egyszerűsíteni és ellentmondásba kerülnénk (49)-cel.

[30] Az $E_0 = mc^2$ relációt például a nyugvó pozitrónium $(e^-e^+) \to 2\gamma$ annihilációja bizonyítja.

már sokkal hamarabb világossá vált, hogy *a (48) nemdifferenciális törvény az, amely harmonikusan illeszkedik a relativitáselmélet struktúrájába*.

Legyen E a szabadon mozgó test *teljes* (mozgási plusz belső) energiája. A (48) következtében

$$E \equiv K + E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{52}$$

Amikor ütközésük vagy bomlásuk következtében részecskék alakulnak át egymásba, *ez* az az energia, ami megmarad. Ha pedig a (45) alapján figyelembe vesszük az impulzus komponenseit is, akkor (21)-t felhasználva némi próbálkozás után[31] rájövünk, hogy[32]

$$\left(E/c\,, p_x, p_y, p_z\right) = m\left(\frac{\Delta(ct)}{\Delta\tau}, \frac{\Delta x}{\Delta\tau}, \frac{\Delta y}{\Delta\tau}, \frac{\Delta z}{\Delta\tau}\right). \tag{53}$$

Ez a *négyesimpulzusnak* nevezett mennyiség, amely alapvető szerepet játszik a relativitáselméletben, a nemdifferenciális (48) tömeg-energia reláció következménye.

Az $E_0 = mc^2$ nemdifferenciális tömeg-energia reláció az általános relativitáselméletben nyer elméleti igazolást[33]. Az általános relativitáselmélet, amely a gravitáció relativisztikus elmélete, 1915-ben kapott végleges alakot. De azt Einstein már 1908-ban bebizonyította, hogy ha (48) igaz a *tehetetlen tömegre*, amely a mozgásegyenletben a gyorsulást okozza, akkor a *súlyos tömegre* is érvényes, amely rugós mérleggel határozható meg.

***

Mivel egy bomlási vagy ütközési folyamatban csak a teljes energia az, ami megmarad, a részecskék belső energiája külön-külön nem, ezért a relativitáselmélet szerint – tehát a fizikában általában – nincs tömegmegmaradás. Abban a jelenségkörben azonban, amely a newtoni fizika alapjául szolgál, a testek belső energiája vagy egyáltalán nem változik (pl. az égi mechanikában), vagy ha változik is, a tömegváltozás elhanyagolhatóan kicsi a résztvevő tömegekhez képest. Ezért ekkor a tömeg nagy pontossággal (de csak közelítően!) megmarad.

Az elektron m_e tömegét jól ismerjük, mert ismerjük a töltését, valamint a mozgását elektromágneses térben: energiaegységben kifejezve $m_e \approx$ 0.5 MeV. A pozitron az elektron antirészecskéje, ezért a tömege egyenlő az elektronéval. A pozitrónium tömege eszerint m≈1 MeV.
A pozitrónium E_0 nyugalmi energiája a két gamma-foton energiájával egyenlő, amely jól mérhető.
A két független kísérletben kapható *m* és E_0 eleget tesz az $E_0 = mc^2$ relációnak (vagyis a két gamma-foton összenergiája is kb. 1 MeV).

[31] Például $m\,{}^{\Delta x}/_{\Delta\tau} = m \cdot {}^{\Delta x}/_{\Delta t} \cdot {}^{\Delta t}/_{\Delta\tau} = {}^{mv_x}\Big/\sqrt{1-{}^{v^2}/_{c^2}} = p_x$. Az (53) egyenletes egyenesvonalú mozgásra vonatkozik. Általános esetben egyszerűen el kell végezni a $\Delta \rightarrow d$ helyettesítést.

[32] A *c*-ket úgy helyeztük el, hogy egy négykomponensű mennyiség minden komponensének ugyanaz legyen a fizikai dimenziója.

[33] Gyakran lehet olvasni, hogy a tömeg-energia tételre elsőként Planck adott pontos bizonyítást 1908-ban. Aki ezt állítja, biztosan nem olvasta Planck cikkét. Ld. erről a Fizikai Szemle 2017/3 számában megjelent dolgozatomat itt a honlapomon.

A lemondás a tömegmegmaradásról sokak számára nem fogadható el talán azért, mert a tömeg fogalmát azonosítják az anyag fogalmával; pedig ez két különböző fogalom. Azt gondolják, hogy ha a tömeg nem marad meg, akkor veszélybe kerül az a tétel, hogy „az anyag nem vész el, csak átalakul”.

A tömeg *terminus technicus,* azzal a mennyiséggel egyenlő, amely a Newton-egyenletben a gyorsulást szorozza. Az elektromágneses mezőhöz pl. nem rendelhető tömeg, mert a Maxwell-egyenletekben nem fordul elő gyorsulás. Ennek ellenére az elektromágneses mezőt is az anyag egy formájának tekintjük. Az $(e^- e^+) \to 2\gamma$ elektron-pozitron annihilációban pl. tömeges anyag alakul át tömeg nélküli elektromágneses sugárzássá. Mindkét objektum anyagi természetű, de csak az egyik rendelkezik tömeggel: az anyag nem vész el, csak átalakul.

***

Fontos megjegyzés: A (48) tömeg-energia reláció minden tömeggel rendelkező testhez meghatározott belső energiát rendel, de *nem rendel minden fajta energiához tömeget*. Mivel a belső energia a *nyugvó* test energiájával egyezik meg, ezért például egy elektromágneses hullámcsomagra vagy egy fotonra nem alkalmazható, mert ezeknek nincs nyugalmi rendszerük[34]. A (48) egy mozgásban lévő test *K* kinetikus, vagy *E* teljes energiájára se alkalmazható, tehát se ${K}/{c^2}$, se ${E}/{c^2}$ nem egyenlő a mozgó test tömegével, amely a (42)-nek megfelelően mindig egyszerűen csak m.

13. A Lorentz-transzformáció

Az előző három fejezetben a relativisztikus dinamika alapjait ismertettük. Most visszakanyarodunk a kinematikához, és utolsó pontként a korábbi eredményeink felhasználásával megkeressük a Lorentz-transzformáció képleteit.

Induljunk ki a következő feladatból:

Egy $l_0 \equiv \Delta x_0$ nyugalmi hosszúságú vonat (nyugalmi rendszere K_0) halad *V* sebességgel a pályatesten (*K*). A vonat végén v_0 sebességű pisztolygolyót lövünk ki a vonat eleje felé, amely Δt_0 idő alatt éri el a vonat elejét. A pályatestről nézve a golyó Δt ideig repül és közben Δx utat tesz meg. Mi a kapcsolat a $\Delta x_0, \Delta t_0$, valamint a $\Delta x, \Delta t$ párok között?

Kezdjük a mérettel! A newtoni fizikában nyilván $\Delta x = \Delta x_0 + V \cdot \Delta t$. Hogyan módosul ez a képlet a relativitáselméletben?

A Lorentz-kontrakció következtében $\Delta x_0 \to \Delta x_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}$, ezért $\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - V^2/c^2} + V \cdot \Delta t$, tehát

$$\Delta x_0 = \frac{\Delta x - V \cdot \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{54}$$

Ez a képlet fejezi ki Δx_0-t a $\Delta x, \Delta t$ páron keresztül.

Ugyanezt kell tennünk Δt_0-lal is. Ehhez nyilván szükség lesz a golyó sebességére, amely a vonathoz képest v_0, a pályatesthez képest v: $v_0 = \frac{\Delta x_0}{\Delta t_0}$, $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Az (54) segítségével

[34] Az a gyakori állítás, hogy egy ν frekvenciájú foton tömege ${h\nu}/{c^2}$-tel egyenlő, teljesen alaptalan.

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta x_0}{v_0} = \frac{\Delta x - V \cdot \Delta t}{v_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{55}$$

Ide be kell helyettesíteni a relatív sebesség

$$v_0 = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} = \frac{\Delta x - V \cdot \Delta t}{\Delta t - \frac{V}{c^2} \cdot \Delta x} \tag{56}$$

képletét. A $(\Delta x - V \cdot \Delta t)$-vel lehet egyszerűsíteni, ezért

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2} \cdot \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{57}$$

Az (54) és az (57) képlet-pár szolgáltatja a feladat megoldását. Ezek a Lorentz-transzformáció képletei, amelyeket kiemelt jelentőségük miatt általános formában is megfogalmazunk.

A *K′* mozogjon *K*-hoz képest *V* sebességgel a közös *x* irány mentén. Történjen két esemény, amelyek koordináta- és időkülönbsége *K*-ban Δx és Δt. Akkor a két esemény koordináta- és időkülönbségét *K′*-höz képest a Lorentz-transzformáció[35]

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V \cdot \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad \Delta y' = \Delta y, \qquad \Delta z' = \Delta z \tag{58}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2} \cdot \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{59}$$

képletei határozzák meg. Az (58) második és harmadik képlete azt fejezi ki, hogy – mint a 7. fejezetből tudjuk, – a mozgásra merőleges méretek a $K \to K'$ áttérésnél változatlanok maradnak.

Ezeket a képleteket azonban egy olyan feladat megoldásaként kaptuk meg, amelyekben a két esemény – a pisztoly eldördülése és a lövedék becsapódása, – nyilván időszerű eseménypár, mert a fénynél lassabban mozgó objektum (a jelen esetben a pisztolygolyó) „köti össze” őket (ld. a 3. fejezetet). De vajon érvényesek maradnak-e, ha a pisztolygolyót fényjellel helyettesítjük (fényszerű eseménypár), vagy ha csak a fénynél gyorsabban haladó jellel lehetne összekötni őket (térszerűek)?

Az első esetben $\Delta x = c \cdot \Delta t$, az (58) és az (59) alapján pedig

$$\Delta x' = \frac{c - V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Delta t, \qquad \Delta t' = \frac{1 - \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Delta t,$$

[35] A newtoni fizika megfelelő képlete a

$$\Delta t' = \Delta t, \qquad \Delta x' = \Delta x - V \cdot t, \qquad \Delta y' = \Delta y, \qquad \Delta z' = \Delta z,$$

Galilei-transzformáció ,amely a Lorentz-transzformációból a $V \ll c$ határesetben kapható meg.

ahonnan $\Delta x' = c \cdot \Delta t'$. Az (58), (59) Lorentz-transzformáció tehát összhangban van a fénynek azzal a tulajdonságával, hogy a *K*-ban és a *K'*-ben egyaránt *c* sebességgel terjed[36].

Azt, hogy térszerű eseménypárra is érvényesek, Einstein vonatos kísérletével (3. fejezet) illusztráljuk. Ha *K'* a vonat, *K* pedig a töltés nyugalmi rendszere, akkor ebben a kísérletben $\Delta t' = 0$ és $\Delta x' = l_0$. Ha ezeket beírjuk (58) első egyenletébe és (59)-be, majd a két egyenletből kizárjuk Δx-et, akkor rövid átalakítás után a

$$\Delta t = \frac{l_0 \cdot V/_{c^2}}{\sqrt{1 - V^2/_{c^2}}} \tag{60}$$

képletre jutunk, amely a (30) Lorentz-kontrakció figyelembevételével azonos (7)-tel.

***

A Lorentz-transzformáció összhangban van a sajátidő invarianciájával.

Tegyük fel, hogy a *K'*-ben a két eseményt konstans $\left(\frac{\Delta x\prime}{\Delta t\prime}, \frac{\Delta y\prime}{\Delta t\prime}, \frac{\Delta z\prime}{\Delta t\prime}\right)$ sebességű „óra” köti össze egymással. Az órán a két esemény között

$$\Delta\tau' = \Delta t' \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta y'}{\Delta t'}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta z'}{\Delta t'}\right)^2} \tag{61}$$

sajátidő telik el. Ha a jobboldalon az (58) és az (59) Lorentz-transzformáció segítségével a vesszős differenciákat vesszőtleneken keresztül fejezzük ki, akkor rövid átalakítás után a

$$\Delta\tau'^2 = \Delta t'^2 - \frac{1}{c^2}\left(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2\right) = \Delta t^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = \Delta\tau^2 \tag{62}$$

egyenlőségre jutunk, ami bizonyítja a sajátidő intervallumok függetlenségét a koordinátarendszer megválasztásától. A sajátidő „vesszőzése” ezért valójában szükségtelen és félrevezető.

A (62) igazolásánál nem használjuk ki azt a tényt, hogy a

$$\Delta t^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \tag{63}$$

kvadratikus kifejezés értéke – mivel feltevés szerint időszerű eseménypárra vonatkozik – pozitív. A kifejezés invarianciája ezért akkor is igaz, amikor az értéke nulla (az eseménypár fényszerű), vagy negatív (az eseménypár térszerű). Amikor az előjel nem pozitív, akkor persze (63)-t nem nevezhetjük sajátidőnek. Ezért vezették be rá – pontosabban a c^2-szeresére, — a *négyestávolság négyzet* elnevezést és a Δs^2 jelölést:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2). \tag{64}$$

***

[36]Az Olvasó könnyen igazolhatja, hogy ez a tulajdonság akkor is érvényben marad, amikor a fény terjedési iránya nullától különböző szöget zár be az *x*-tengellyel. A sebesség iránya ekkor megváltozik, de a nagysága *c* marad.

A $\Delta\tau$ valamint a tömeg invarianciája miatt (53) következtében $K \rightarrow K'$ koordinátarendszer váltásnál a tömegpontok teljes energiája és impulzusa is a Lorentz-transzformáció szerint változik meg[37]:

$$E' = \frac{E - Vp_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad p'_x = \frac{p_x - \frac{V}{c^2}E}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad p'_y = p_y, \qquad p'_z = p_z.$$

***

A Lorentz-transzformációhoz konkrét fizikai jelenségek (Doppler-effektus, Lorentz-kontrakció) vizsgálatán keresztül jutottunk el, de ez a transzformáció lehetővé teszi, hogy ezeket a kinematikai tényeket általánosabb, *geometriai* nézőpontból interpretáljuk.

A közös *X* tengely mentén egymáshoz képest egyenletes mozgást végző *K* és *K'* mindegyike viszi magával a *t* illetve *t'* koordinátaidőt mutató virtuális órák halmazát. Az Einstein-szinkronizálás következtében két egymást „fedő" óra különböző koordinátaidőt mutat, és – mint többször is hangsúlyoztuk, — lehetetlen (és valójában szükségtelen) szemlélettel folyamatosan követni és összehasonlítani az éppen azonos helyet elfoglaló *összes* órapáron a mutatóállásokat. A legtöbb amit tehetünk az, hogy egyetlen egy kiválasztott órapárra, amelyek egy pillanatra fedésbe kerülnek egymással előírjuk, hogy a fedésük pillanatában mutassanak mondjuk $t=t'=0$ pillanatot.

A legcélszerűbb azt az órapárt választani, amely a két koordinátarendszer origójában nyugszik. Ekkor az az E_0 esemény, amely a *K*-ban az $x_0=y_0=z_0=t_0=0$ koordinátákkal rendelkezik, a *K'*-ben is ugyanilyen, csupa nulla komponensű lesz: $x_0'= y_0'= z_0'= t_0'=0$. Ha *E* egy tetszőleges másik esemény, amelynek a koordinátái *x,y,z,t* és *x',y',z',t'*, akkor erre a két eseményre (58)-ban és (59)-ben az összes Δ elhagyható, mert pl. $\Delta x = x - x_0' = x$. Ekkor

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z. \tag{65}$$

A Lorentz-transzformációt leggyakrabban ebben a formában írják fel. Mi a jelentése? Tegyük fel, hogy a *K* rögzített koordinátarendszer, amelyben egy adott *E* esemény *téridő koordinátái t, x, y* és *z*. Képzeljünk el egy csomó *K'* koordinátarendszert, amelyek abban különböznek egymástól, hogy más és más *V* sebességgel mozognak *K*-hoz képest, de az origójukhoz rögzített virtuális órák mind fedik egymást, amikor éppen nullát mutatnak. A (65) azt mutatja meg, hogy az *E* milyen téridő koordinátákkal rendelkezik ezekben a különböző sebességgel mozgó *K'*-kben.

A Δs^2 invarianciája következtében a vesszős és a vesszőtlen koordináták eleget tesznek a

$$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2 \tag{66}$$

feltételnek. Ez a (65) alapján is könnyen ellenőrizhető.

A következő egyszerű példa segít jobban megérteni, miről van itt szó. Képzeljünk el egy rögzített $\mathcal{K}$ Descartes-koordinátarendszert a háromdimenziós térben, amelyhez képest egy tetszőleges $\mathcal{E}$ pont koordinátái *x,y* és *z*. Jelöljük $\mathcal{K}'$-vel azokat a Descartes-rendszereket, amelyek különböző φ szöggel vannak elforgatva $\mathcal{K}$-hoz képest a *z*-tengely körül (ezért az origóik is közösek). Akkor az

[37] Az (53) alapján a helyettesítés szabálya (58)-ban és (59)-ben nyilván $\Delta(ct) \rightarrow E/c$ (vagyis $\Delta t \rightarrow {}^{E}/_{c^2}$), $\Delta x \rightarrow p_x$ stb.

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \quad y' = y\cos\varphi + x\sin\varphi, \quad z' = z \tag{67}$$

egyenletből számítható ki, hogy milyen Descartes-koordinátákkal rendelkezik az $\mathcal{E}$ pont a különböző $\mathcal{K}'$-kben. A (66) feltételnek itt az $\mathcal{E}$ pont origótól mért távolságának a változatlansága felel meg:

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2. \tag{68}$$

A háromdimenziós analógia alapján, amely remélhetően önmagáért beszél, a Lorentz-transzformáció a négydimenziós téridőben elképzelt derékszögű koordinátarendszer *(ct,x)* tengelyeket tartalmazó síkjának az „elforgatásaként" fogható fel, amelynek mértékét a különböző *K'*-k *V* sebessége határozza meg. Az idézőjelet a megfelelő képletekben található előjelkülönbség magyarázza: A Lorentz-transzformációt pontosabban *hiperbolikus forgatásnak* nevezzük.

Két egymás utáni φ_1 majd φ_2 szögű elforgatás maga is egy (67) elforgatás $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ szöggel. Ugyanebben az értelemben két egymás utáni V_1 majd V_2 sebességű Lorentz-transzformáció szintén egy (65) Lorentz-transzformáció a (25') alapján kiszámítható

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + {V_1 V_2}/{c^2}}$$

sebességgel.

***

A speciális relativitáselmélet Einsteinig visszamenő hagyományos tárgyalásának az egyes lépései a következők:

1. A fénysebesség posztulált állandóságából következik, hogy ha a (64)-ben definiált Δs^2 négyestávolság négyzet valamelyik inerciális koordinátarendszerben nullával egyenlő, akkor minden inerciarendszerben nulla.
2. A Δs^2=0 invarianciáját általánosítják olyan eseménypárokra, amelyekhez nullától különböző (pozitív vagy negatív) Δs^2 tartozik. A körültekintő általánosítás egyáltalán nem egyszerű, ld. például a Landau-Lifsic sorozat *Klasszikus erőterek* kötetének elején a 2. fejezetet.
3. Az egyenletesen mozgó koordinátarendszerre történő áttérés szabályát − a Lorentz-transzformációt — azzal a *lineáris* transzformációval azonosítják, amely biztosítja a Δs^2 invarianciáját.
4. A kinematikai következményeket (idődilatáció, Lorentz-kontrakció, sebességösszeadás, a gyorsulás transzformációja) ezután a Lorentz-transzformációból dedukálják.

Ebben a kurzusban fordított eljárást követtünk. A posztulátumokból először a kinematikai következményeket származtattuk le, majd ezek ismeretében egyszerűen fel tudtuk írni a Lorentz-transzformáció képletét. A módszertani egyszerűségen kívül ennek az eljárásnak komoly pedagógiai előnye, hogy közben folyamatosan szem előtt kell tartani a sajátidő és a koordinátaidő közötti különbséget, amelynek pontos megértése segít elkerülni a relativitáselmélettel kapcsolatos gyakori félreértéseket.

Hraskó Péter

Függelék: A vizsgafeladatok és megoldásaik

1. Tekintsük az optikai Doppler-effektusnak azt a különleges esetét, amikor az adó és a vevő egymás mellett nyugszik, és az adó által kibocsátott jeleket egy V sebességgel távolodó tükör veri vissza a vevőhöz. Vezessük le a DA képletét erre a speciális esetre, és diszkutáljuk a kapott képletet!

A feladat a jegyzet 5. fejezete alapján oldható meg.

Észre kell venni, hogy az adó és a vevő közös nyugalmi rendszerében

$$DA = \frac{\Delta\tau_v}{\Delta\tau_a} = \frac{\Phi(0)\cdot\Delta t_v}{\Phi(0)\cdot\Delta t_a} = \frac{\Delta t_v}{\Delta t_a},$$

ezért akár sajátidővel, akár koordinátaidővel dolgozunk, ugyanazt a *DA*-t kapjuk.

Ha a tükör által visszavert impulzusok periódusidejét Δt_m-mel[38] jelöljük, akkor

$$\Delta t_v = \Delta t_m + \frac{V}{c}\Delta t_m, \qquad \Delta t_m = \Delta t_a + \frac{V}{c}\Delta t_m,$$

és a két egyenletből Δt_m-et kizárva kapjuk a megoldást:

$$DA = \frac{1 + {}^{V}/_{c}}{1 - {}^{V}/_{c}}. \qquad (*)$$

A képlet diszkusszióját nyilván azzal az észrevétellel lehet kezdeni, hogy $(*)$ pont a jegyzet (20) formulájának a négyzete. Miért?

Egyrészt a tükörre tekinthetünk úgy is, hogy az egy tökéletes adó-vevő berendezés, amely az adóból érkezett jelet azonnal továbbítja a vevő felé. Másrészt *DA* egy *arány*, ezért a vevőre és az adóra vonatkozó $DA \equiv DA_{va}$, amit ki kell számítanunk, a tükörre (mint vevőre) és az adóra vonatkozó DA_{ma}, valamint a tükörre (mint adóra) és a vevőre vonatkozó DA_{vm} Doppler-arányok *szorzatával* egyenlő:

$$DA = \frac{\Delta\tau_v}{\Delta\tau_a} = \frac{\Delta\tau_{mv}}{\Delta\tau_a}\cdot\frac{\Delta\tau_v}{\Delta\tau_{ma}} = \frac{\Delta\tau_m}{\Delta\tau_a}\cdot\frac{\Delta\tau_v}{\Delta\tau_m} \equiv DA_{ma}\cdot DA_{vm}.$$

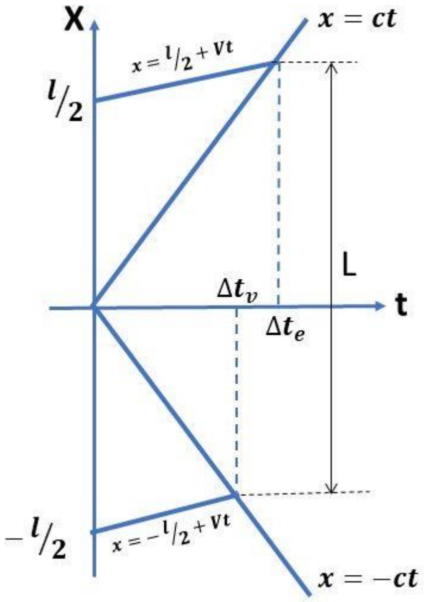
Az első tényező a *DA* abban az esetben, amikor az adó nyugszik és a vevő (a tükör) mozog *V* sebességgel, a második tényező pedig a *DA* akkor, amikor – megfordítva, — a vevő nyugszik és az adó (a tükör) mozog *V* sebességgel. Ezeket a Doppler-arányokat csak a relativisztikus (20) képlet segítségével lehet kiszámítani, mert a tükör nem ugyanabban a vonatkoztatási rendszerben van nyugalomban, mint az adó és a vevő. A relativisztikus Doppler-arány azonban mindkét esetben a jegyzetnek ugyanazzal a (20) képletével egyenlő, amelynek tehát a *négyzete* a $(*)$.

[38] Az *m* index a tükörre utal a tükör angol neve (*mirror*) alapján.

2. Einstein vonatos gondolatkísérletében egymástól milyen távol történt a két robbanás a töltés nyugalmi rendszerében, ha a vasúti kocsi nyugalmi hossza l_0-lal egyenlő? Diszkutáljuk a távolságra kapott képletet!

Ez a feladat a jegyzet 3. és 7. fejezete segítségével oldható meg.

Jelöljük a keresett távolságot *L*-lel. Ha a (6) két képletét megszorozzuk *c*-vel, akkor megkapjuk azt az utat, amelyet a töltés nyugalmi rendszerében (*K*-ban) az előre és a hátra haladó fényjel megtesz a vasúti kocsin belül. Az *L* ennek a két távolságnak az összegével egyenlő (ld. az ábrát, amely a jegyzet 8. oldalán található ábra kiegészített változata):



Képletben:

$$L = c \cdot (\Delta t_e + \Delta t_v) = c \cdot \left(\frac{l/2}{c - V} + \frac{l/2}{c + V} \right) = \frac{l}{1 - V^2/_{c^2}} = \frac{l_0}{\sqrt{1 - V^2/_{c^2}}}. \qquad (**)$$

Felhasználtuk, hogy a mozgó vonat l hossza a töltés nyugalmi rendszerében az l_0 nyugalmi hossz Lorentz-kontraháltja : $l = l_0\sqrt{1 - V^2/_{c^2}}$.

Diszkusszió: A $(**)$ képlet a Lorentz-kontrakcióra jellemző $l_0 = L\sqrt{1 - V^2/_{c^2}}$ formában is felírható. Ez persze nem véletlen. Ha a vonatot tekintjük nyugvó rendszernek (vagyis áttérünk a *K'*-be, amelyben $\Delta t'_e = \Delta t'_v$), akkor a pályatestet látjuk *V* sebességgel mozogni. A feladat szerint az *L a pálytest* egy jól meghatározott szakaszának a nyugalmi hossza, amelynek két végpontja a *K'*-ben ugyanabban a pillanatban (a robbanások pillanatában) van éppen a vonat végpontjaiban. Az l_0 tehát a *L* nyugalmi hosszúságú, *V* sebességgel haladó szakasz kontrahált mozgási hossza a vonathoz képest, és ezért valóban $l_0 = L\sqrt{1 - V^2/_{c^2}}$.

Az l az l_0 Lorentz-kontraháltja, az l_0 pedig az L-é. Ezért $l < l_0 < L$, és $\sqrt{l \cdot L} = l_0$.

Megjegyzés: Majdnem mindenki rájött, hogy a feladat megoldását a $c \cdot (\Delta t_e + \Delta t_v)$ összeg kiszámításával kapjuk meg, melyben Δt_e és Δt_v a jegyzet (6) képletéből vehető. Ezt meg is tették, de úgy, hogy a képletben szereplő l-t (két kivétellel) l_0-lal helyettesítették feltehetően azért, mert a feladatban a vonat hosszaként nem az l mozgási hossz, hanem az l_0 nyugalmi hossz volt megadva. Ezt azonban nem lett volna szabad megtenni, hiszen a (6) két összefüggése csak akkor igaz, ha a *mozgó vonat* l hosszúsága szerepel bennük. Ezt a tényt is figyelembe véve a feladat feltételeinek úgy lehet eleget tenni, hogy az l-t az $l = l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$ képlet segítségével l_0-n keresztül *fejezzük ki*.