

1. ábra.

A relativitáselmélet alapjai

TARTALOM

Kiegészítések és megjegyzések	1. oldal
Gyakorló feladatok	20. oldal
Hibajegyzék	31. oldal

KIEGÉSZÍTÉSEK ÉS MEGJEGYZÉSEK

Az idődilatációhoz.

A $\gamma(V)$ interpretálását idődilatációként az 1.2 szakasz utolsó bekezdése tartalmazza. Ez túl tömörnek tűnik, ezért részletezzük.

A T/T_0 -ra a newtoni fizika alapján két különböző értéket kaptunk attól függően, hogy a vevő vagy az adó nyugszik. Az 1. ábrán ezeket a T/T_0 tengely baloldalán tüntettük fel. A $\gamma(V)$ bevezetésével a kettőt egyetlen közös értékre redukáltuk, amely a tengely jobboldalán szerepel. A felrajzolásnál kihasználtuk,

hogy¹

$$\frac{1}{1 - V/c} > \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} > (1 + V/c) > 1,$$

amit $\gamma^2(V) \cdot (1 + V/c) > \gamma(V) \cdot (1 + V/c) > (1 + V/c) > 1$ alakban is írhatunk.

Tegyük fel, hogy Adó és Vevő — két kísérletező fizikus — csak a newtoni fizikát ismeri és ellenőrizni akarja a Doppler-effektus képleteit. Hallgassuk meg, hogyan tárgyalnak egymással mobiltelefonon:

V: Te Adó! Abban állapotunk meg, hogy pontosan $T_0 = 1$ másodpercenként indítod a jeleket. A sebességed ismeretében a $T = T_0(1 + V/c)$ képlet szerint akkor nekem 1.2 másodpercenként kellene észlelnem őket. De ritkábban jönnek, 1.3 másodpercenként.

A: Pedig én mindig pontosan akkor indítok el egy jelet, amikor az előttem álló óra másodpercmutatója ugrik.

V: Biztos, hogy pontos az órád?

A: Egészen biztos. Vannak itt nálam kvarcórák, sőt atomórák is, mind szinkronban járnak az előttem álló órával. Sőt, az én pulzusom olyan, hogy mindig 60-t ver percenként. Ezzel is szinkronban vagyok.

V: Húha! Akkor nálad az idő lassabban telik, mint nálam. Biztosan azért, mert mozogsz. De persze ezt Te magad nem veszed észre.

A: Nem én mozgok, hanem Te! Várj csak, én is kiszámítom a $T = T_0/(1 - V/c)$ képlet alapján, hogy milyen időközönként kell észlelned a jeleimet. Nekem 1.5 másodperc jön ki. De akkor a Te órád is lassabban jár a kelletnél, hiszen állításod szerint két egymás utáni jel között nálad csak 1.3 másodperc telik el. Jól méred az időt?

V: Hát persze, én is felszerelkeztem mindenféle időmérő alkalmasítással.

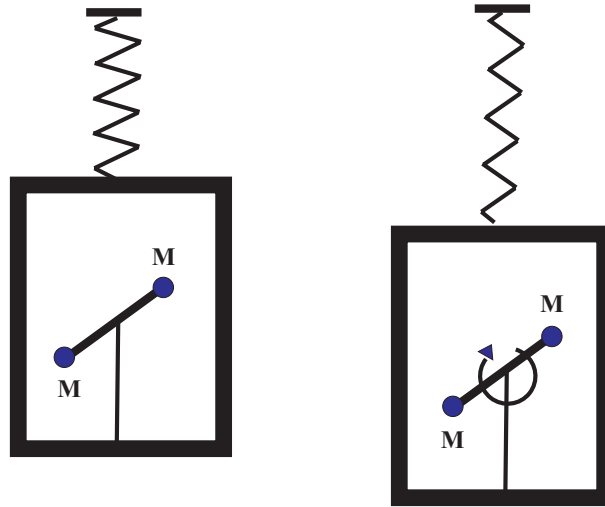
A: Akkor hát az idő nálad is lassabban telik, mint nálam. Biztosan azért, mert mozogsz.

V: Várj csak. Nálam is van egy adó, meg nálad is egy vevő. Helyezzük csak üzembe őket!... Most elkezdek jeleket küldeni feléd pontosan 1 másodpercenként. Milyen időközönként észleled őket?

A: Nahát! Nálam is 1.3 másodperc telik a Te jeleid között, ugyanúgy, mint nálad az én jeleim között. Akkor hát hibásan tanították nekünk, hogy a Doppler-effektus szempontjából nem mindegy, hogy az adó vagy a vevő mozog, hiszen azt tapasztaljuk, hogy ez teljesen közömbös, és csak a relatív mozgás számít!

Ez a naív kis beszélgetés történetileg persze egyáltalán nem realiztikus. Einstein előtt úgy gondolták, hogy a fény a nyugvó éterhez képest terjed minden irányban azonos sebességgel, és a Doppler-effektusra vonatkozó két képlet azért különbözik egymástól, mert az első esetben a vevő, a másodikban az adó nyugszik *az éterhez képest*. Ugyanezek a képletek érvényesek az akusztikában, ha az étert a hangterjedés közegével, a c -t pedig a hangsebességgel helyettesítjük. Az optikában a két képlet csak akkor mond ellent egymásnak, amikor

¹Az alábbi egyenlőtlenség középső tagja a két szélső mértani közepe. Ennek a matematikai ténynek a fizikai jelentését az 5. feladat világítja meg.



2. ábra.

abból a feltevésből *indulunk ki*, hogy az inerciarendszerek egyenértékűek, és ezért a fény mindegyikben ugyanazzal a c sebességgel terjed minden irányban. Einstein ebből indult ki, és erre a helyzetre vonatkozik a fenti párbeszéd.

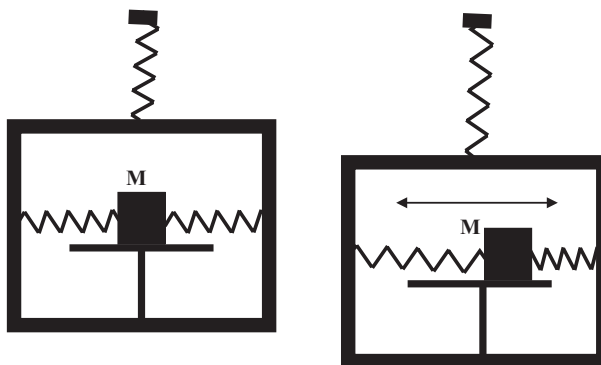
A relativisztikus tömegnövekedéshez.

Vető Balázs kolléga (ELTE) felhívta a figyelmemet a Berkeley Physics Course második kötetére (*Electricity and Magnetism*), amelyben a szerző *E. M. Purcell* (Nobel-díj 1952) a következő gondolat kísérlettel véli igazolni, hogy a tömegnövekedés valóságos jelenség.

Egy dobozban rögzített tengely körül tud forogni egy súlyzó, amelynek végén a két golyó tömege M -mel egyenlő, az őket összekötő rúd tömege pedig elhanyagolható. A baloldali ábrán a súlyzó nyugalomban van, a jobboldalin egyenletesen forog, ezért ezen az ábrán a golyók tömege valójában az $M/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ mozgási tömeggel egyenlő, tehát nagyobb, mint M . Ennek következtében a forgó súlyzót tartalmazó doboz súlyosabb, ezt mutatja a felfüggesztő rugó nagyobb megnyúlása. A súlykülönbséget okozó tömegkülönbség

$$2 \left(\frac{M}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - M \right) \quad (*)$$

-mel egyenlő, ahol V a súlyzó végén lévő tömegek sebessége. Purcell szerint ez a gondolat kísérlet igazolja, hogy a mozgás következtében fellépő tömegnövekedés valóságos jelenség, mert mérhető következménye van.



3. ábra.

A relativitáselmélet szerint a (*) tömegkülönbségnek megfelelő súlykülönbség valóban fellép a két doboz között. A korrekt értelmezés azonban az, hogy (1.9.3) figyelembevételével a (*) kifejezés $2K/c^2$ -tel egyenlő, amelyben $2K$ a golyók mozgási energiája. Ezzel a mozgási energiával nő meg a *doboz belső energiája*, amikor a súlyzót forgásba hozzuk, ezért lesz a *doboz* tömegváltozása $2K/c^2$. Ezt a tömegváltozást jelzi a *doboz* súlynövekedése, amely a rugó megnyúlását okozza.

A súlynövekedést mindkét interpretáció szerint a (*) tömegnövekedés okozza és ebből az a benyomás alakulhat ki, hogy csupán beszédmód kérdése, hogy a súlynövekedést a *két mozgó golyó*, vagy a *nyugvó doboz* tömegnövekedéseként értelmezzük. A gondolat kísérlet alábbi változata azonban egyértelműen bizonyítja, hogy csak a második értelmezés fogadható el.

Vegyük figyelembe, hogy a súrlódás következtében a súlyzó forgása lassul és egy idő után meg is szűnik, és tegyük fel, hogy a doboz falai hőszigetelők. A doboz belső energiája ekkor a forgás fokozatos megszűnése ellenére változatlanul $2K$ -val marad egyenlő, csak a formája változik: A súlyzó rendezett mozgási energiájából a hőmozgás energiájába megy át. A doboz súlya se változik, mert a tömege továbbra is $2K/c^2$ -tel lesz egyenlő. Ha azonban a súlynövekedést a golyók mozgási tömege okozná, a súlytöbbletnek meg kellene szűnnie.

Erre lehetne azt válaszolni, hogy a hőmozgás növekedése következtében a molekulák sebessége megnő, és a molekulák mozgási tömegének a megnövekedése fenntartja a súlytöbbletet. Ebből az érvelésből azonban legfeljebb annyi következik, hogy a molekulák mozgási tömege okoz *valamilyen* súlytöbbletet, de az nem, hogy ez a súlytöbblet *egyenlő* azzal, amit a súlyzó forgása okoz (ld. a 12. lábjegyzetet a könyv 51. oldalán). Könnyű továbbá úgy módosítani a gondolat kísérletet, hogy a hőmozgásnak egyáltalán ne legyen szerepe.

A dobozban egy M tömegű kocka vízszintes rezgéseket tud végezni egy (súrlódásmentes) asztalon. A baloldali ábrán a kocka nyugszik, mert a két rugó megnyúlása egyforma. A jobboldali ábrán rezeg — mondjuk — ν frekvenciával.

A mozgó kockát tartalmazó doboz súlya nagyobb, a tömegkülönbséget az

$$\frac{M}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - M \quad (**)$$

képlet adja meg, amelyben V a kocka sebessége a szimmetriapontban (vagyis a maximális sebesség). Egy perióduson belül a kocka kétszer veszi fel ezt a sebességet, kétszer pedig nyugalomba kerül. Ezért ha a súlynövekedés a kocka sebességéből adódó tömegváltozás következménye lenne, akkor a doboznak 2ν frekvenciával kellene le-föl ingadoznia. A relativitáselmélet szerint azonban ilyen ingadozás nem lép fel. A doboz tömegének a megváltozását ugyanis az oszcillátor *teljes energiájának* a megváltozása okozza, amely időben állandó, mert beleszámít a rugókban felhalmozott rugalmas energia is². A (**) nem más, mint ez a konstans energia-megváltozás, osztva a fénysebesség négyzetével.

Hogyan került be a fizikába az az elképzelés, hogy a tömeg esetleg függhet a sebességtől? Az 1880-as évek elején J. J. Thomson kezdte el alkalmazni a Maxwell-egyenleteket az anyag tulajdonságainak a vizsgálatára. A kutatásnak, amelybe sokan bekapcsolódtak, az egyik fontos következtetése az volt, hogy egy mozgó töltés elektromágneses terében annál nagyobb térimpulzus (és térenergia) van felhalmozva, minél gyorsabban mozog a test, és ez arra vezet, hogy egy töltött testet annál nehezebb gyorsítani, minél nagyobb a sebessége. Hamar szokásossá vált ezt az eredményt úgy fogalmazni, hogy a töltött testek tömege nő a sebességgel (noha valójában nem a tömeg, hanem a térenergia nőtt meg). A XIX. század utolsó éveiben J. Larmor és W. Wien mondta ki azt a hipotézist, hogy mivel az anyag elektromosan töltött alkotórészekből áll, a tömeg (az elektromosan semleges testek tömege is!) esetleg tisztán az elektromágneses térenergia hatásának a megnyilvánulása (*a tömeg elektromágneses elmélete*).

W. Kaufmann kísérleteit ezek az elképzelések inspirálták. A kísérletek igazolták, hogy az elektronokat annál nehezebb gyorsítani, minél nagyobb a sebességük, és a már megszokott (hibás) szóhasználatot ezt tömegnövekedésként fogták fel. A tömeg elektromágneses elméletéről azonban hamar kiderült, hogy nem tartható, mert az elektromágneses kölcsönhatás önmagában nem tud stabil anyagot létrehozni, a relativitáselmélet viszont természetes magyarázatot kínál Kaufmann eredményeire. Ez a magyarázat nem a tömegnövekedésen, hanem az idődilatación alapul. Ennek ellenére ma is sokan gondolják úgy, hogy a relativitáselmélet tömegnövekedésre vezet vissza azt, hogy a gyorsan mozgó elektronokat nehezebb tovább gyorsítani, mint a lassan mozgókat.

A helyzetet még bonyolítja, hogy az $E_0 = mc^2$ képletet, amely kizárólag a nyugalmi energiára vonatkozik, teljesen alaptalanul alkalmazni kezdték az $mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ teljes energiára is és ebből is azt a (téves) következtetést vonták le, hogy a mozgás növeli a testek tömegét. Ez azzal az eredménnyel járt,

²A felfüggesztő rugók energiájához társuló tömeg megzavarja a dobozok belső energiájának különbségéből származó tömegkülönbség pontos meghatározását. Ha azonban a baloldali dobozra addig helyezünk súlyokat, amíg a baloldali rugó megnyúlása meg nem egyezik a jobb-oldaliéval, a kiegyenlítéshez szükséges súly pontosan megegyezik a dobozok súlykülönbségével.

hogy az $E_0 = mc^2$ képlet eredeti levezetési módja, amelyet az 1.10 szakaszban ismertettünk, kihullott a fizikus köztudatból (de talán nem is volt ott soha), és az a benyomás keletkezett, hogy ez az összefüggés ugyanazt fejezi ki, mint a relativisztikus mozgásegyenlet: Minél gyorsabban mozog egy test, annál nehezebb tovább gyorsítani. Ez a körülmény nehezítette a képlet valódi jelentésének a felismerését, mert úgy látszott, hogy csupán átfogalmazása annak, amit a tömegnövekedésről már Einstein előtt is gondoltak. Erről a félreértésről árulkodik az a furcsaság, hogy annak, aki a forgó golyókat tartalmazó doboz példáját kitalálta a mozgási tömeg realitásának a demonstrálására, nem jutott azonnal eszébe az ellenpélda is, az oszcilláló tömeget tartalmazó doboz.

Pedig az $E_0 = mc^2$ képletnek valójában *semmiféle előzménye* sem volt. Soha senkise gondolt arra, hogy ha egy dobozban egy rugót megfeszítünk, ezzel növeljük a doboz tömegét. És a relativitáselmélet megjelenését megelőző évtizedben az sem jutott eszébe senkinek, hogy a radioaktív hő energiáját a tömeg csökkenése fedezi. Ez utóbbi következtetés első ízben a "Függ-e a testek tehetetlensége az energiataralmuktól" című Einstein-cikk végén jelent meg 1905 szeptemberében.

A tömegmegmaradásról.

Az $E_0 = mc^2$ képlet a testek *belső energiáját* kapcsolja össze a tömegükkel. Mivel a belső energia külön nem marad meg, ezért a tömeg sem megmaradó mennyiség. A belső energia továbbá azonos a nyugvó test energiájával, ezért invariáns mennyiség (nem egy négyesvektor null-komponense). Ennek következtében a tömeg is invariáns.

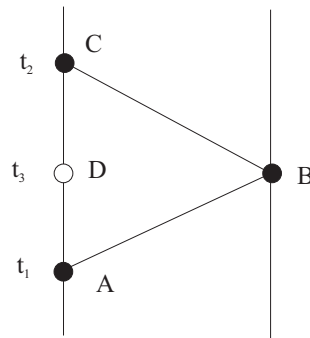
A 2.19 szakaszban vizsgáltuk a $Po^{210} \rightarrow Pb^{206} + A$ bomlást, amelyben a Po^{210} , a Pb^{206} és az alfa-részecske tömege M , m és μ . A tömeg nem marad meg, mert $M > m + \mu$. Az energia azonban megmarad:

$$Mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} + \frac{\mu c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (*)$$

ahol V az ólom-mag, v pedig az alfa-részecske sebessége. Ha c^2 -tel egyszerűsítünk és használjuk a mozgási tömeg fogalmát, ezt az egyenlőséget értelmezhetjük tömegmegmaradásként: a Po^{210} tömege egyenlő a Pb^{206} és az alfa-részecske mozgási tömegének összegével. Azonban semmilyen előnnyel sem jár, ha az energiamegmaradás tételét ezen a módon mesterkéltén tömegmegmaradás alakjában fogalmazzuk meg.

A newtoni fizikában a tömeget megmaradó mennyiségnek tekintjük. Ez addig jó közelítés, ameddig a testek belső energiájának a *változásai* elhanyagolhatóan kicsik a belső energiájukhoz viszonyítva.

A *tömeg* és az *anyag* két lényegesen különböző fogalom. A tömeg jól meghatározott jelentéssel bíró *terminus technicus*. Azt a paramétert jelöli, amely a Newton-egyenletekben a gyorsulást szorozza és a számértékét ezekből az egyenletekből kiindulva (vagy súlyméréssel) lehet meghatározni. Azonban a Newton-



4. ábra.

egyenletek nem vonatkoznak minden fizikai objektumra: Az elektromágneses mezőt például nem ők, hanem a Maxwell-egyenletek írják le, amelyekben nincs se gyorsulás, se tömeg. Ezek a tömeg nélküli objektumok azonban éppúgy *léteznek*, mint a tömegesek, ezért az „anyag” terminus — amely inkább filozófiai, mint fizikai fogalom, mert nem létezik mérési eljárás, amellyel a mennyisége számszerűsíthető — rájuk is vonatkozik.

A fénysebesség méréséről egy irányban.

E. Szabó László „A nyitott jövő problémája” c. könyvében (Typotex 2002) a 44-45. oldalon azt állítja, hogy „logikai lehetetlenség” a fény sebességét egy irányban megmérni a távoli órák előzetes szinkronizálása nélkül:

„Idézzük fel az egyidejűség standard definícióját. Jelölje A azt az eseményt, amikor az O_1 megfigyelő egy fényjelet indít el az O_2 megfigyelő felé. Legyen B az az esemény, amikor a fényjel megérkezik O_2 -hez, és O_2 azonnal egy másik jelet indít visszafelé O_1 -hez, akihez ez a C téridőpontban érkezik meg (ld. az ábrát). A kérdés az, hogy az O_1 megfigyelő világvonalán melyik az az esemény, amelyik egyidejű B -vel. Eléggé kézenfekvő, hogy ez az esemény valahol az A és a C között van a $t_3 = t_1 + \varepsilon(t_2 - t_1)$ időpontban, ahol $\varepsilon \in (0, 1)$. Azt gondolhatnánk, hogy ε értékét a fény oda- és visszafelé történő terjedésének sebessége meghatározza. Kiderül azonban, hogy ez nincs így. A

$$\frac{\vec{c}}{\overleftarrow{c}} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

hányadosból ε nem határozható meg, mert ennek a hányadosnak az értéke nem kevésbé konvencionális, mint magának az ε -nak az értéke. Nem lehetséges ugyanis a fény terjedésének egyirányú sebességét megmérni az egyidejűség előzetes fogalma nélkül. Ez egy egyszerű logikai tény, ha direkt módon a fény egyirányú terjedési sebességét akarnánk megmérni, hiszen ehhez a fényjel elindulásának és megérkezésének idejét kell összevetnünk. Számos olyan javaslat is volt az irodalomban, amely különböző indirekt módszerekre vonatkozott. E

javaslatok részletes analízise kimutatta, hogy nincs olyan trükkös mérési eljárás, amellyel lehetséges lenne a fény egyirányú terjedési sebességét meghatározni anélkül, hogy az eljárás maga ne tételezné fel az egyidejűség előzetes definícióját.”

A 2.2 szakasz mutatja, hogy E. Szabó gondolatmenete nélkülöz minden alapot, mert az egyirányú fénysebességet nagyon egyszerűen meg lehet mérni, nem kell hozzá „trükkös mérési eljárás”

A longitudinális és a tranzverzális tömegről.

A tömegpont mozgásegyenleteit nem-specializált erőterben a (2.18.3) képlet adja meg. Ezek az egyenletek egy vektoregyenlet három komponense, amelyek közül az első a mozgás pillanatnyi irányába, a második és a harmadik az erre merőleges irányba mutató komponens. Ez a geometriai jelentés sugallja, hogy az első egyenletben a gyorsulást szorzó tömegdimenziójú $m/(1-v^2/c^2)^{3/2}$ mennyiséget *longitudinális tömegnek*, a másik kettőben pedig az $m/(1-v^2/c^2)$ mennyiséget *tranzverzális tömegnek* nevezzük el. Ezt a konvenciót használja *Einstein* az 1905-ös dolgozatában.

A gyakorlatban azonban ezeket a mozgásegyenleteket szinte kizárólag elektromágneses térben mozgó ponttöltésekre alkalmazzák. Az egyenletek erre specializált alakját a (2.21.3) képletben írtuk fel. Mint látható, ebben a speciális esetben a második és a harmadik egyenletet célszerű $\sqrt{1-v^2/c^2}$ -vel végigszorozni. Ekkor az $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ mennyiség jelenik meg a gyorsulás szorzótényezőjeként, ezért a leggyakrabban ezt hívják tranzverzális tömegnek.

A téridő-diagramok egy matematikai tulajdonsága.

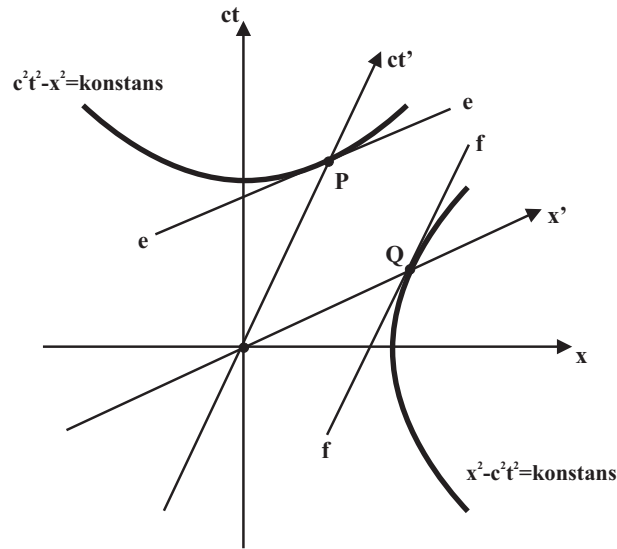
A 10. ábrán hallgatólagosan felhasználtuk a téridő-diagramok következő tulajdonságát: A ct' -tengely és a $c^2t^2 - x^2 = konstans$ hiperbola P metszéspontjában a hiperbola ee érintője párhuzamos az x' tengellyel, valamint az x' -tengely és az $x^2 - c^2t^2 = konstans$ hiperbola Q az 5. ábrát).

Amikor a vesszős rendszer (határesetben) egybeesik a vesszőtlenel, a tétel nyilvánvaló. A téridő-diagramot azonban úgy is felrajzolhatjuk, hogy nem az \mathcal{I} , hanem az \mathcal{I}' tengelyei merőlegesek egymásra, és ebből már sejthető, hogy a tétel valóban igaz. De formálisan sem nehéz belátni.

A $c^2t^2 - x^2 = konstans$ egyenlet differenciálja nyilván $2ct \cdot d(ct) = 2x \cdot dx$, ezért a hiperbola irántangese

$$\frac{d(ct)}{dx} = \frac{x}{ct}. \quad (*)$$

De a P pont a ct' tengelyen (vagyis az $x' = 0$ tengelyen) van, amelynek egyenlete



5. ábra.

a vesszőtlen tengelyekhez viszonyítva $x - Vt = 0$.

$$\left. \frac{d(ct)}{dx} \right|_P = \frac{V}{c}. \quad (\text{B})$$

Másrészt az x' tengely egyenlete a vesszőtlen tengelyekhez viszonyítva $t - \frac{V}{c^2}x = 0$, ezért ennek a tengelynek a ct/x iránytangense ugyancsak V/c -vel egyenlő, ahonnan következik a tétel első fele. A második igazolása ugyanígy történik.

A mozgásegyenlet származtatásához.

A tömegpont mozgásegyenletének a levezetése az 1.7 fejezetben olvasható. Gróf Andrea tanárnő hívta fel a figyelmemet arra, hogy a levezetésben a dv/dv_0 arány számításánál a dl mennyiség részletesebb magyarázatot igényel.

Amikor a gyorsulás nulla, az \mathcal{I}_0 -ban a dt_0 idő alatt az elmozdulás nulla: $dl_0 = 0$. Az \mathcal{I} -ben azonban az ennek megfelelő dt idő alatt az elmozdulás $v \cdot dt$ -vel egyenlő. Zérustól különböző gyorsulásnál dl_0 valamilyen véges érték, az \mathcal{I} -ben megtett út pedig a dl_0 -nak megfelelő dl értékkel *nagyobb*, mint $v \cdot dt$. A dl tehát *nem* az \mathcal{I} -ben dt idő alatt megtett teljes távolság, hanem annak csak a gyorsulással kapcsolatos része. Mivel dv_0 és dv is csak akkor különbözik nullától, amikor van gyorsulás, ezért

$$dv_0 = k_0 \frac{dl_0}{dt_0} \quad \text{és} \quad dv = k \frac{dl}{dt}.$$

Azonban elég egyszerűen látható, hogy $k = 2$. A dt infinitezimális időintervallumban az a gyorsulás konstansnak tekinthető, ezért

$$dl = \left(\frac{a}{2} dt^2 + v \cdot dt \right) - v \cdot dt = \frac{a}{2} dt^2 = \frac{1}{2} dv \cdot dt,$$

ahonnan valóban $k = 2$ következik. Ugyanez a gondolatmenet $v = 0$ -val is megy, ezért k_0 is 2-vel egyenlő. Így végül

$$dv : dv_0 = \frac{dl}{dt} : \frac{dl_0}{dt_0}.$$

Az ikerparadoxon az utazó testvér nézőpontjából.

A 2.12 fejezetben az ikerparadoxont az Alszeg és Felszeg között ingázó vonat példáján illusztráltuk. A tárgyalás megkönnyítése érdekében adjunk nevet az ikereknek: Legyen Adél az, aki végig Alszegen tartózkodik az Alszeg-Felszeg tartományhoz rögzített inerciarendszerben, Béla pedig az, aki Alszegegről Felszegre utazik és vissza. A két találkozásuk között Adél óráján T_A , Béla óráján T_B idő telt el. Az ikerparadoxon abban áll, hogy $T_B < T_A$. Mivel Adél nyugalmi rendszere inerciarendszer, Minkowski koordinátákat rögzíthetünk hozzá, feltehetjük, hogy a vasút a Minkowski-koordinátaidő szerint üzemel, és a vasútállomások órái mindenütt ezt az időt mutatják. Ekkor a menetrend ismeretében a (2.11.1) képlet segítségével a két időtartamot könnyen ki lehet számítani.

A 2.12 fejezetben azonban elsősorban azt vizsgáltuk, milyen „ütemben” alakul ki Béla órájának a késése. Adél inerciarendszerében történő leírásnál Béla minden közbelső állomáson összehasonlítja a saját óráját a vasútállomásával és megállapítja, hogy egyre jobban késik. Mire visszaér Alszegre, a késés $(T_B - T_A)$ -val egyenlő. Ez a késés tehát *egyenletesen* jön létre.

Adhatunk-e hasonlóan egyértelmű beszámolót arról, hogy milyen ütemben fog Adél órája *sietni* a vonat nyugalmi rendszerének koordinátaidejéhez képest? Mint már szó volt róla, az idődilatació *nagysága* invariáns, ezért ugyanazt az értéket kapjuk rá, akár Adél nyugalmi rendszeréhez rögzített t, x koordinátákban számoljuk (amelyben Adél az $x = 0$ pontban nyugszik), akár Béla nyugalmi rendszeréhez rögzített θ, ξ koordinátákban, amelyben Béla a $\xi = 0$ koordinátájú pontban ül (a vonathoz rögzített koordinátákat azért jelöltük görög betűvel, hogy kifejezzük: ez a koordinátarendszer nem Minkowski féle). A globális effektus ismerete azonban önmagában véve semmit sem mond arról, hogy hogyan alakul ki állomásról állomásra fokozatosan Adél óráján a sietés mértéke.

Mint a 2.12 fejezetben elmagyaráztuk, erre a kérdésre nincs egyértelmű válasz, mert gyorsuló vonatkoztatási rendszerben a koordinátaidő megválasztására nem áll rendelkezésre olyan egyértelműen kitüntetett eljárás, mint az inerciarendszerekben az Einstein-szinkronizálás. Ezért két speciális koordinátaidő választás példáján illusztráljuk az effektus fokozatos kialakulását.

Az elsőben a vonat óráit még az Alszegegről történő elindulása előtt az állomáson az Alszeg-Felszeg tartomány koordinátaidejének megfelelően állítjuk be.

Mivel a vonatot tekintjük nyugvónak, induláskor ez a tartomány indul el a vonathoz képest visszafele és Adél hasonlítja össze a saját órájának az állását, τ_A -t (sajátidő!) az egymás után következő vonati órák mutatóállásával θ -val (koordinátaidő!).

Tegyük fel, hogy a vonat $\xi = 0$ pontja, ahol Béla ül, a $t = 0$ pillanatban érkezik Felszetre, és ebben a pillanatban az egész vonat sebessége hirtelen előjelet vált. Egy ilyen összehangolt sebességváltás csak úgy valósítható meg, ha minden vasúti kocsi motorkocsi, amelyeknek a vezetői pontosan tájékozottak a t -időről mondjuk a pálya mentén sűrűn elhelyett órák segítségével, amelyek az egész környék helyes t koordinátaidejét mutatják.

A feladatunk annak meghatározása, hogy hogyan függ τ_A a θ -tól, vagyis a $\tau_A = f_1(\theta)$ képlet jobboldalán álló $f_1(\theta)$ függvényre vagyunk kíváncsiak, amelyen az 1 index a koordinátaidő (szinkronizálás) első módjára utal. Elég nyilvánvaló, hogy az adott esetben Adél órájának a sietése pontosan ugyanolyan fokozatossággal fog kialakulni, mint az előző esetben Béla órájának a késése. Erről nagyon könnyen meggyőzhetjük magunkat, ha az érvelést Adél inerciarendszerére alapozzuk. Ekkor ugyanis az egymás után Adél órája mellett elhaladó vonati órák egyre hosszabb utat tudnak maguk mögött és ezért egyre jobban késnek Adél órájához képest — ami természetesen megfogalmazható úgy is, hogy Adél órája folyamatosan egyre jobban siet hozzájuk képest. Amikor a vonat végig egyenletes V sebességgel halad és Felszetre érve azonnal ugyanazzal a sebességgel elindul visszafele, akkor tehát $f_1(\theta) = \frac{T_A}{T_B}\theta$ ahol $T_B = T_A\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Ez

az eredmény teljesen analóg Béla tapasztalatával, amely a $\tau_B = \frac{T_B}{T_A}t$ képletben foglalható össze.

Tanulságos lesz a vonati óráknak ezt a szinkronizálási módját összehasonlítani egy másikkal. Tegyük fel, hogy a θ koordinátaidőt a vonaton az Einstein-szinkronizálás segítségével választottuk, amikor a vonat már konstans V sebességgel haladt, de még nem ért el Alszege. Azt is tegyük fel, hogy Béla már ekkor rajta ült a vonaton, és amikor a vonat megállás nélkül haladt át Alszege, menet közben hasonlította össze az órájának a mutatóállását az állomáson várakozó Adél órájával. A sebességinverzó $\theta = 0$ -ban történt, amikor Béla éppen megérkezett a felszegei állomásra. A motorkocsik vezetői a hirtelen sebességváltást most a saját helyesen szinkronizált órájuk alapján hajtották végre.

Mivel Adél nyugalmi rendszere inerciarendszer, a (2.11.1) alkalmazható benne és a $T_B = T_A\sqrt{1 - V^2/c^2}$ relációra vezet. De most Béla nyugalmi rendszere is inerciális a Felszeg fele és a visszafele vezető úton egyaránt. Ezért a (2.11.1) az ő nyugalmi rendszerében is alkalmazható a mozgás mindkét fázisában, és a homlokegyenest ellentétes $T_A = T_B\sqrt{1 - V^2/c^2}$ képletre vezet. Ez biztosan hibás képlet, de hogyan lehetne kijavítani?

Ahhoz, hogy erre a kérdésre válaszolhassunk, rögzítsünk koordinátarendszert a vonathoz. Vegyük segítségül az \mathcal{I} inerciarendszert, amely $+V$ sebességgel mozog a töltéshez képest és válasszuk benne koordinátarendszerként a t, x Minkowski koordinátákat. A vonat bármely P pontjának pályáját ebben a

koordinátarendszerben az

$$x = \begin{cases} \xi & \text{if } t \leq 0, \\ \xi + Ut & \text{if } t \geq 0, \end{cases}$$

egyenletek írják le, amelyben ξ egy konstans és

$$U = \frac{-2V}{1 + V^2/c^2} \quad (\text{a})$$

a vonat \mathcal{I} -hez viszonyított sebessége a visszafele úton. Feltettük, hogy a sebességváltás a $t = 0$ pillanatban következett be.

A vonat minden infinitezimálisan kis darabja a ξ egy határozott konstans értékével jellemezhető, ezért ezt a ξ mennyiséget választhatjuk a vonathoz rögzített koordinátarendszer térbeli koordinátájának. Feltesszük, hogy Béla a $\xi = 0$ pontban ül.

Amikor a vonatot tekintjük nyugvónak és hozzá képest vizsgáljuk Adél mozgását, akkor a vonaton nyugvó órák töltik be azt a szerepet, amelyet a vasútállomások órái tölthetnek be, amikor Béla órájának a késését vizsgáltuk az utazása közben. Az állomások óráit valamikor szinkronizálták fényjelekkel, utána pedig a sajátidejüket mutatják. A vonati órákkal se lehet másképp. Az egyenes sebességgel mozgó vonaton még az Alszezen történő áthaladás előtt fényjelekkel szinkronizálták őket és ezután ők is a sajátidejüket mutatják. A nyugvónak képzelt vonathoz viszonyított számítás ennek következtében akkor a legegyszerűbb, ha a vonathoz rögzített koordinátarendszer θ koordinátaidejét egyenlőnek vesszük azzal az idővel, amelyet ezek az órák mutatnak. Ez a választás lehetővé teszi, hogy Béla órája is a pontos koordinátaidőt jelezze és még azt is, hogy a sebességváltás pillanatában ezek az órák nulla időt mutassanak.

Ezek a feltételek egyértelműen rögzítik a θ koordinátaidő és az \mathcal{I} segéd inerciarendszer t koordinátaideje közötti kapcsolatot:

$$\theta = \begin{cases} t & \text{if } t \leq 0, \\ t\sqrt{1 - U^2/c^2} & \text{if } t \geq 0. \end{cases}$$

Mindezek alapján a t , x és a θ , ξ koordináták között a kapcsolat a következő:

$$x = \begin{cases} \xi & \text{if } \theta \leq 0 \\ \xi + \frac{U\theta}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} & \text{if } \theta \geq 0 \end{cases} \quad t = \begin{cases} \theta & \text{if } \theta \leq 0 \\ \frac{\theta}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} & \text{if } \theta \geq 0 \end{cases} \quad (\text{b})$$

és

$$\xi = \begin{cases} x & \text{if } t \leq 0 \\ x - Ut & \text{if } t \geq 0 \end{cases} \quad \theta = \begin{cases} t & \text{if } t \leq 0 \\ t\sqrt{1 - U^2/c^2} & \text{if } t \geq 0. \end{cases} \quad (\text{c})$$

Ezekben a képletekben U -t ki kell fejezni a V -n keresztül az (a) segítségével. Ha a $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$ ívelemnégyszetben a differenciálokat (b) segítségével kifejezzük $d\theta$ -n és $d\xi$ -n keresztül, a következő képletet kapjuk:

$$ds^2 = \begin{cases} c^2 d\theta^2 - d\xi^2 & \text{if } \theta < 0 \\ c^2 d\theta^2 + \frac{4V/c}{1 - V^2/c^2} cd\theta \cdot d\xi - d\xi^2 & \text{if } \theta > 0 \end{cases} \quad (d)$$

amelyben az U -t már kifejeztük V -n keresztül.

A koordinátarendszer rögzítését a vonathoz ezzel elvégeztük. A következő feladat Adél pályájának meghatározása ebben a koordinátarendszerben. Amikor $t < 0$ (ami ugyanaz, mint $\theta < 0$) ez a pálya $\xi = -V(\theta + \theta_e)$ amelyben θ_e egy állandó. Mivel Béla a $\xi = 0$ pontban ül, első találkozása Adéllal a $\theta = -\theta_e < 0$ időpillanatban történik, vagyis amikor Béla órája $-\theta_e$ másodpercet mutat. Mivel a $\theta > 0$ időben (úton visszafele) a vonat ugyanolyan sebességgel halad, mint az odaúton, a testvérek második találkozása ott történik, ahol Béla órája $+\theta_e$ -t mutat (vagyis $T_B = 2\theta_e$). Adél pályáját tehát a³

$$\xi = \begin{cases} -V(\theta + \theta_e) & \text{if } \theta \leq 0 \\ +V(\theta - \theta_e) & \text{if } \theta \geq 0. \end{cases} \quad (e)$$

egyenlet írja le.

Most már integrálással meg tudjuk határozni a $\tau_A = f_2(\theta)$ függvény alakját:

$$\tau_A = \int_{-\theta_e}^{\theta} d\tau = \frac{1}{c} \int_{-\theta_e}^{\theta} \sqrt{ds^2} = \frac{1}{c} \int_{-\theta_e}^{\theta} \sqrt{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta.$$

A (d) képlet segítségével az integrandusra az

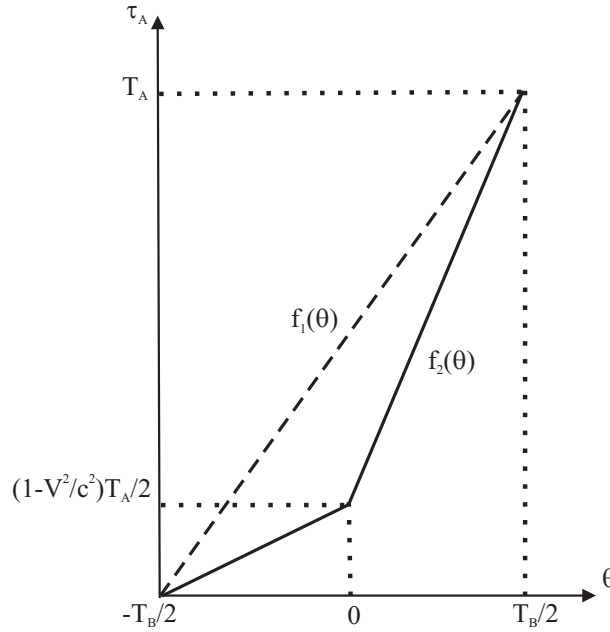
$$\frac{1}{c} \sqrt{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2} = \begin{cases} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2} & \text{if } \theta < 0 \\ \sqrt{1 + \frac{4V/c}{1 - V^2/c^2} \cdot \frac{1}{c} \frac{d\xi}{d\theta} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2} & \text{if } \theta > 0. \end{cases}$$

kifejezést kapjuk, amelynek első, illetve második sorában $\frac{d\xi}{d\theta} = \mp V$. Az integrandus ennek következtében konstans mindkét θ tartományban, ami az integrál-

³Adél sebességét $\theta > 0$ -nál közvetlenül (c) és (a) felhasználásával így kaphatjuk meg:

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{dx/dt - U}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} = \frac{-V - U}{\sqrt{1 - U^2/c^2}} = +V.$$

Kihasználtuk, hogy Adél $\frac{dx}{dt}$ sebessége a kisegítő \mathcal{I} -hez képest az egész $-\infty < t < \infty$ intervallumban $-V$ -vel egyenlő.



6. ábra.

lást triviálissá teszi. Némi algebrázás után a következő eredményre jutunk:

$$\tau_A = f_2(\theta) = \begin{cases} \sqrt{1 - V^2/c^2} \cdot (\theta + \theta_e) & \text{if } \theta \leq 0 \\ \frac{1 + V^2/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \theta + \sqrt{1 - V^2/c^2} \cdot \theta_e & \text{if } \theta \geq 0. \end{cases} \quad (\text{f})$$

Ez a második szinkronizációs eljárásra vonatkozó végformula, amely az első módszer $\tau_A = f_1(\theta) = (T_A/T_B)\theta$ képletének a helyébe lép. Ez utóbbi képletben $T_A/T_B = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$. Erre az arányra (f) is ugyanezt a eredményt adja mivel $T_A = f_2(\theta_e) = 2\theta_e/\sqrt{1 - V^2/c^2}$ és ahogy már láttuk, $2\theta_e = T_B$. Az $f_1(\theta)$ és az $f_2(\theta)$ függvény azonban különbözik egymástól (ld. a 6. ábrát)

A kérdésünkre ezzel megkaptuk a választ. A korábbi naív érvelésünkben a mozgás második fázisának a tárgyalásánál követtük el a hibát azzal, hogy a (2.11.1) képletet erre a szakaszra is érvényesnek gondoltuk. Az ugyan igaz, hogy a vonat a visszafele úton is inerciarendszer, azonban a hozzá rögzített koordinátarendszer ekkor már nem Minkowski, mert ez nem fér össze a vonathoz rögzített órák folyamatos működésével. Formálisan ez abban jelentkezik, hogy $\theta > 0$ -nál $ds^2 \neq c^2 d\theta^2 - d\xi^2$. Ezért nem alkalmazható a (2.11.1) a mozgásnak ebben a szakaszában.

A ds^2 alakjának megváltozása a $\theta = 0$ -ban bekövetkezett pillanatszerű sebesség-inverziónak a *remanens* (megmaradó) hatása. Az egyik következménye az, hogy

a nem rögzített testek a $\theta = 0$ pillanatban $-U = 2V/(1+V^2/c^2)$ sebességű mozgásba jönnek és ha nem lenne súrlódás, ez a mozgás örökké tartana. Egy kevésbé nyilvánvaló remanens hatás a vonathoz rögzített helyesen szinkronizált ideális órapárok *deszinkronizációja*. Tekintsünk két ilyen órát, amelyek a mozgás első fázisában (az odaúton) a helyes θ koordinátáidőt mutatják. Ha a segítségükkel megmérjük a fénysebességet azt találjuk, hogy pozitív és negatív irányban egyformán c -vel egyenlő. A menetirány megfordulása után, $\theta > 0$ -ban azonban már nem ez lesz a helyzet. A $\frac{d\xi}{d\theta}$ fénysebességet a $\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = 0$ feltételből kaphatjuk meg a $d\theta^2$ -tel végigosztott (d) felhasználásával. $\theta < 0$ -nál a várt $\frac{d\xi}{d\theta}_{\pm} = \pm c$ eredményt kapjuk, de a $\theta > 0$ tartományban a

$$\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)^2 - \frac{4V}{1-V^2/c^2} \left(\frac{d\xi}{d\theta}\right) - c^2 = 0$$

egyenletből különböző fénysebességet kapunk pozitív és negatív irányban:

$$\left(\frac{d\xi}{d\theta}\right)_{\pm} = c \frac{V/c \pm (1+V^2/c^2)}{1-V^2/c^2}.$$

Ez a különbség csak az órák deszinkronizálásának lehet a következménye, hiszen a vonat a visszafele úton is inerciarendszer, amelyben a fény mindkét irányban azonos sebességgel terjed. Ezt formálisan is igazolhatjuk oly módon, hogy θ, ξ helyett olyan t', x' koordinátarendszert vezetünk be, amely továbbra is rögzítve van a vonathoz, de benne az ívelemnégyszet már Minkowski alakú: $ds^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2$.

Az első lépés az, hogy a ξ pontbeli óra mutatóállását $\frac{2V/c^2}{1-V^2/c^2}\xi$ -vel előre visszük:

$$t' = \theta + \frac{2V/c^2}{1-V^2/c^2}\xi.$$

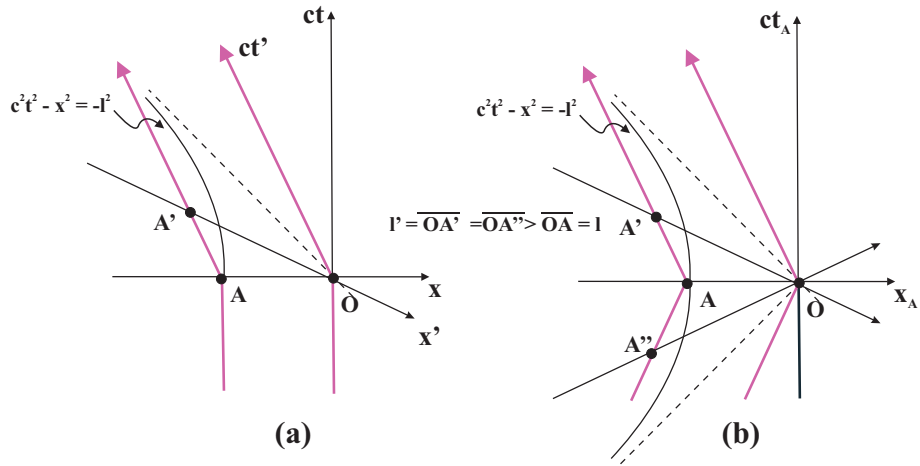
Ha ebből kifejezzük $d\theta$ -t dt' -n és $d\xi$ -n keresztül és ezt (d)-be írjuk, átalakítás után a

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - \left(\frac{1+V^2/c^2}{1-V^2/c^2}\right)^2 d\xi^2$$

egyenletre jutunk. A következő lépésben a ξ „nevű” órát x' -re kereszteljük (indexeljük) át az

$$x' = \frac{1+V^2/c^2}{1-V^2/c^2}\xi \quad (g)$$

egyenletnek megfelelően. Ezután a lépés után az ívelemnégyszet $ds^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2$ alakúvá válik. Az eljárás mutatja, hogy a (ct', x') koordinátarendszer is rögzítve van a vonathoz, mivel a vonat bármely adott infinitezimális darabjához a mozgás mindkét fázisában ugyanaz az x' koordináta tartozik. A vesszős rendszer Minkowski alakja mutatja, hogy a vonat valóban inerciarendszer.



7. ábra.

Tekintsük most a vonat két rögzített ξ és $\xi + \Delta\xi$ koordinátájú pontját. Mivel az odaúton (negatív időknél) a θ , ξ koordinátarendszer Minkowski, ezért a két pont közötti l távolság ekkor $|\Delta\xi|$ -vel egyenlő. Ugyanilyen alapon a visszaúton ugyanezen két pont távolsága $l' = |\Delta x'|$. Ugyanarról a pontpárról lévén szó ξ -t és az x' -t (g) kapcsolja össze, ezért arra a következtetésre jutunk, hogy a sebességinverzió következtében a vonat

$$l'/l = \frac{1 + V^2/c^2}{1 - V^2/c^2}$$

arányban megnyúlik, ha a tényleges rugalmas tulajdonságai ezt lehetővé teszik. Ez a megnyúlás a pillanatszerű gyorsulás harmadik remanens hatása.

A deszinkronizáció és a megnyúlás eredetét a 7a. ábra segítségével lehet megérteni. Ezen a két piros vonal egy-egy ideális óra világvonala, amelyek $t < 0$ -nál az \mathcal{I} inerciarendszerben, a (ct, x) Minkowski-koordinátákban nyugszanak és a t koordinátáidőt mutatják. Ezért ha a segítségükkel megmérjük a fénysebességet, mindkét irányban egyformának találjuk. A $t = 0$ pillanatban mindkét óra valamilyen konstans sebességgel mozogni kezd. Mivel a mutatóik állását a sajátidejük határozza meg, azért az azonos mutatóálláshoz tartozó pontjaik továbbra is ugyanazon a vízszintes (vagyis $t = konstans$) egyenesen helyezkednek el. Az új \mathcal{I}' nyugalmi rendszerük szempontjából ez deszinkronizálást jelent, hiszen ez utóbbiban csak akkor mutatnák a helyes koordinátáidőt, ha az azonos mutatóállású pontjaik az x' -tengellyel párhuzamos $t' = konstans$ egyeneseken feküdnenek. A deszinkronizáció tehát — némileg paradox módon kifejezve — annak következtében jön létre, hogy — mivel az órák ideálisak, — a gyorsulás pillanatában a szerkezetükkel „nem történik semmi”. Külön magyarázat nélkül is látható, hogy az ábra a megnyúlást is jól illusztrálja.

A 8. és a 9. ábra az ikerparadoxon időbeli menetének numerikus illusztrációját tartalmazza. Az ábrákat Bokor Nándor (BME) készítette és a következő

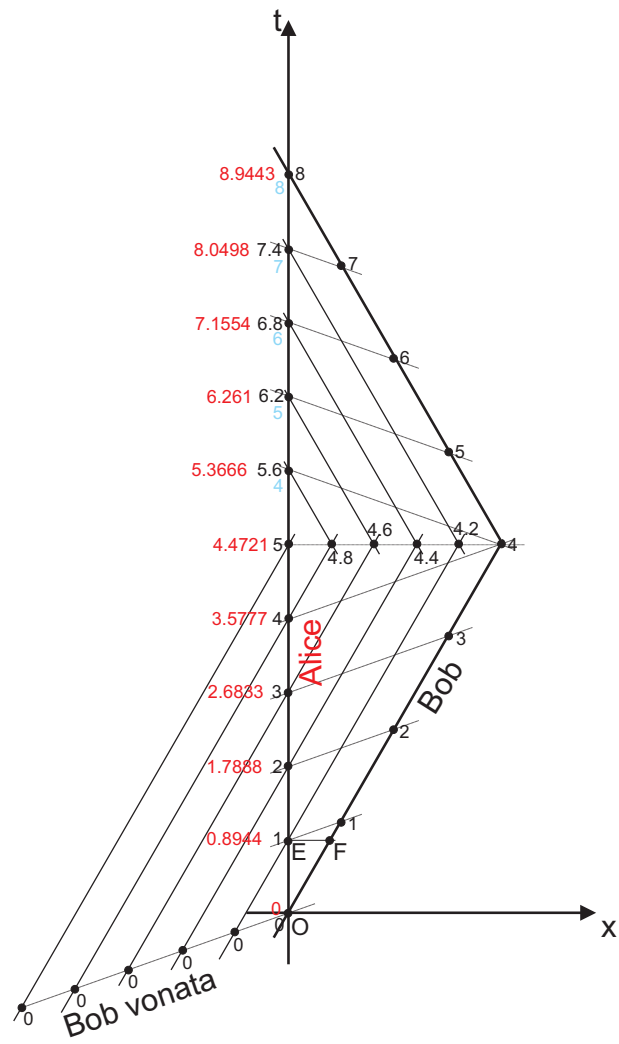
magyarázatot fűzte hozzájuk:

A fekete számok azt mutatják, hogy Bob vonatának különböző órái mit jeleznek. (Az egyszerűség kedvéért azt választottam, hogy Bob vonatának órái kezdetben szinkronizáltak.) A piros számok pedig az Alice óráján mutatott időpontok. Így az ábra függőleges tengelye mentén szereplő számok megmutatják, hogy mit lát Alice, amikor (1) a saját órájára néz (a piros számot), ill. amikor (2) Bob elszárguló vonatának a hozzá legközelebb eső órájára néz (a fekete számot). Úgy méreteztem az számokat, hogy a vonat akkor forduljon vissza, amikor Bob óráján 4 perc telt el, viszont a vonat hátulján levő óra 5 percet mutat (előzetes egyeztetés alapján a vonat egyes kocsijai Alice rendszerében fordulnak vissza egyszerre, hogy a vonat nyugalmi hossza változatlan maradjon⁴). Ez a két szám rögzíti a vonat sebességét és így az idődilataációs faktort, a következőképpen:

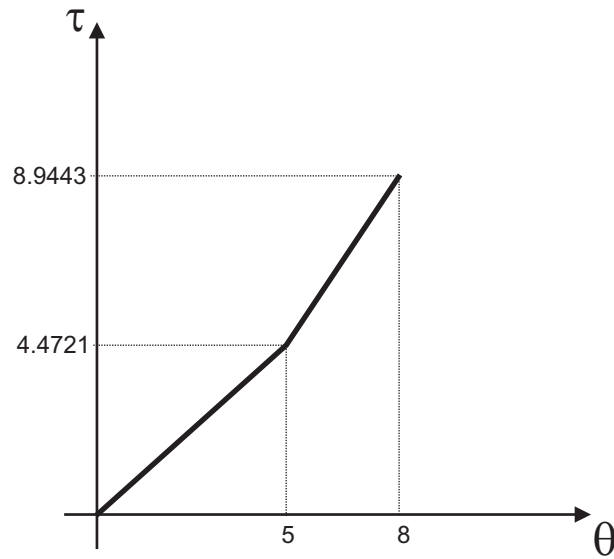
Az O és E események között Bob szerint 1 perc telik el, Alice szerint Δt , ahol $\Delta t = 1 \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$. (idődilatáció). Az O és F események között Bob szerint 0.8 perc telik el (hasonló háromszögek alapján), Alice szerint pedig Δt , ahol $0.8 = \Delta t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$ (idődilatáció). A két összefüggésből: $\Delta t = \sqrt{0.8} \approx 0.8944$ perc. Ennyi időnként találkozik Alice Bob vonatának egy-egy kocsijával (piros számok a t -tengelyen). Végigkövetve a számokat, egészen félútig normálisan viselkednek a dolgok, de a visszafordulás pillanata után (ez persze csak Alice számára egy pillanat, Bob vonata számára 1 percig tartó folyamat) Bob vonatának órái már nem lesznek a balra haladó rendszerben szinkronizáltak. (Viszont külön-külön minden vasúti kocsik órája zökkenőmentesen, ugyanolyan ütemben fog továbbra is járni. Ezt felhasználva írtam be az ábra felső felébe a fekete számokat.) Az ábra felső felében Alice, amikor összeveti óráinak piros számait az egymás után mellé érő vasúti kocsik által mutatott idővel, azt tapasztalja, hogy az így mutatott „fekete időt” az ő piros ideje fokozatosan leelőzi. (Persze a „fekete időnek” nincs fizikai tartalma, senkinek nem a valós időmúlása, csak egy balra haladó inerciarendszer szinkronizálatlan órái által mutatott számértékek.) Mire Bob visszaér Alice mellé, már Alice órája mutat többet.

Ha a fekete és kék számokkal jellemzett koordinátaidőt együtt tekintem θ -nak (az ábra alsó felében a feketéket, a felsőben a kékeket — nevezzük az így kapott koordinátaidőt θ' -nek), akkor θ' -t mindkét szakaszban szinkronizált órák mutatják. Ekkor viszont az a gond, hogy a $\tau(\theta')$ fgv. szakadós, mert a $\theta' = 4$ abszcisszánál a τ értéke ugrik egyet (3.5777-ről 5.3666-ra). Ekkor a fgv. két folytonos szakasza azonos meredekségű, azaz külön-külön működik rájuk az idődilataáció. De a teljes tartományra a szakadás miatt nem.

⁴Ezt a szituációt a 7b. ábra mutatja.



8. ábra.



9. ábra.

Befejezésül ismét hangsúlyoznunk kell, hogy az ikerparadoxon „időbeli lefutásának” — a $\tau = f(\theta)$ függvény alakjának — ez a tárgyalása, amelyet elég részletesen ismertettünk, semmiképpen sem az egyedüli lehetőség. A két találkozás között tapasztalható időkülönbséggel szemben, amely invariáns, a $\tau = f(\theta)$ függvény alakja *függ* attól, hogy hogyan választunk koordinátaidőt a mozgó vonaton, amely nem inerciarendszer. A koordinátaidő megválasztása valójában inerciarendszerekben is tetszőlegesen történhet, de ott az Einstein-szinkronizálás lehetősége miatt általában a Minkowski koordináták tekintendők standardnak, mert ehhez a koordinátarendszerhez kötődik a képletek fizikai interpretációja. Ezért engedhető meg, hogy inerciarendszerekhez viszonyítva a $d\tau = dt\sqrt{1 - V^2/c^2}$ összefüggést tekintsük az idődilatació képletének, noha ez csak akkor igaz, amikor a test mozgását, amelyen az idődilataciót számítjuk, Minkowski-koordinátákban adjuk meg. A fent részletesen tárgyalt feladatban valószínűleg a lehető legtermészetesebb módon választottuk meg a koordinátaidőt, de a $\tau = f_2(\theta)$ függvény mégis csak egy lehetőség. A fejezet igazi üzenete ezért a következő: Az a kérdés, hogy a két iker közötti időkülönbség a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben milyen ütemben alakul ki, mindaddig értelmetlen (hiányos), amíg a koordinátaidőt nem rögzítjük.

GYAKORLÓ FELADATOK.

1) Einstein vonatkísérletében az állomás nyugalmi rendszerében a vonat elején a robbanás később történik, mint a végén. Mennyivel? (A vonat nyugalmi hossza legyen l_0 , a sebessége pedig V .)

Megoldás: Az állomás \mathcal{I} vonatkoztatási rendszeréhez viszonyítva a fényjelek elindulásának pillanatában a vonat eleje és vége $\frac{1}{2}l_0\sqrt{1-V^2/c^2}$ távolságra van a fényjelektől. Ez a távolság a fényjel és a vonat eleje között $(c-V)$, a fényjel és a vonat vége közötti pedig $(c+V)$ ütemben csökken, ezért

$$\Delta t_e = \frac{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{2(c-V)}, \quad \text{illetve} \quad \Delta t_v = \frac{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{2(c+V)}$$

idő alatt egy el. Ennek a két időtartamnak a különbsége a Δt :

$$\Delta t = \Delta t_e - \Delta t_v = \frac{1}{2}l_0\sqrt{1-V^2/c^2} \cdot \left(\frac{1}{c-V} - \frac{1}{c+V} \right) = \frac{V \cdot l_0}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Ezt a képletet természetesen Lorentz-transzformációval is könnyű megkapni. Az állomás legyen a vesszőtlen, a vonat a vesszős rendszer. Mivel \mathcal{I}' -ben a két robbanás egyidejű ($\Delta t' = 0$), $\Delta x' = x'_v - x'_e = l_0$ távolságra történnek egymástól, és az \mathcal{I} inerciarendszer $(-V)$ sebességgel mozog \mathcal{I}' -hez képest, ezért a Lorentz-transzformáció képlete alapján a vonat elején a robbanás \mathcal{I} -ben

$$\Delta t = \frac{+\frac{V}{c^2}l_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \quad (\text{A})$$

idővel később történik, mint a végén.

2) Egy l_0 nyugalmi hosszúságú vonat elején és végén egy-egy jelzőlámpa villog. A vonat nyugalmi rendszerében a felvillanások periódusideje T_0 és a két jelzőlámpa felvillanásai pontosan szinkronban vannak egymással (mindkettő ugyanabban a pillanatban villan fel). Elképzelhető-e, hogy a villanások akkor is pontosan szinkronban legyenek egymással, amikor a vonat valamilyen sebességgel egyenletesen halad?

Megoldás: Amikor a vonat V sebességgel halad, a felvillanások egyidejűsége megszűnik. Amikor a sebesség kicsi, a vonat elején a felvillanás egy kicsit később a vonat végén történő megfelelő felvillanáshoz képest. A V növelésével a késés egyre nő és elképzelhető, hogy egy bizonyos V_1 sebességnél a felvillanás a vonat elején egyidejűvé válik azzal a vonat végén bekövetkező felvillanással, amelyik a neki megfelelő felvillanás *után* következik. Amikor ez megtörténik, a felvillanások a mozgó vonaton is egyidejűek. Mekkora ez a V_1 sebesség?

A fogalmazás egyszerűsítésére jelöljük a nyugalmi rendszerben egyidejű felvillanásokat azonos sorszámmal: A nyugvó vonaton az i -ik felvillanás a vonat végén egyidejű az i -ik felvillanással a vonat elején. A keresett V_1 az a sebesség, amelynél a vonat végén az i -ik felvillanás az $i+1$ -ik felvillanással egyenlő a vonat elején. Vagy kicsit másképpen fogalmazva: A $-V_1$ sebességgel mozgó inerciarendszerből nézve ez a két felvillanás válik egyidejűvé egymással. De akkor a 2.5 szakasz 3. pontja alapján ennek a két eseménynek térszerű eseménypárnak kell lennie, amelynek a feltétele a

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 < 0.$$

egyenlőtlenség teljesülése. Mivel ez a kifejezés invariáns, az értékét kiszámíthatjuk a vonat nyugalmi rendszerében, ahol $\Delta l = l_0$ és $\Delta t = T_0$. Vagyis ahhoz, hogy a V_1 sebesség egyáltalán létezzen, a

$$\Delta s^2 = c^2 T_0^2 - l_0^2 < 0 \quad \longrightarrow \quad l_0/T_0 > c \quad (*)$$

egyenlőtlenség szükséges (és elégséges). Ha ez teljesül, a 2.5 szakasz 3. pontja alapján a szóbanforgó két esemény — az i -ik felvillanás a vonat elején és az $i+1$ -ik a végén — akkor egyidejű, amikor a vonat $V_1 = c^2 \cdot T_0/l_0$ sebességgel halad. A (*) képlet következtében $V_1 < c$.

Hasonlóan látható, hogy az i -ik felvillanás a vonat elején és az $i+k$ -ik a végén akkor egyidejű egymással, amikor

$$V_k = c^2 \frac{kT_0}{l_0} \quad \text{hacsak} \quad l_0/kT_0 > c.$$

Ahhoz tehát, hogy a mozgó vonaton különböző sorszámú felvillanások egyidejűek lehessenek az l_0 -nak elég nagyoknak és/vagy a T_0 -nak elég kicsinek kell lennie.

3) Einstein vonat kísérlete fényjelek helyett pisztolygolyókkal is elképzelhető. Az l_0 nyugalmi hosszúságú V sebességgel haladó vonat középpontjából két azonos szerkezetű pisztolyból egyszerre adunk le egy-egy lövést a vonat eleje és vége irányában. A golyók sebessége természetesen kisebb mint c . Milyen időkülönbséggel csapódnak be a golyók a vonat végébe és elejébe az állomás vonatkoztatási rendszeréhez viszonyítva?

1.Megoldás: A két esemény a vonat vonatkoztatási rendszerében most is ugyanabban az időpontban egymástól l_0 távolságra történik, ezért a válasz ugyanaz, mint Einstein eredeti vonat kísérletében (ld.az 1.feladat (A) képletét):

$$\Delta t = \frac{l_0 V}{c^2 \sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (A)$$

2.Megoldás: A pisztolygolyók torkolatsebessége legyen v . A határozottság kedvéért tegyük fel, hogy $v > V$. A vonat eleje és vége felé repülő golyók

sebességének nagysága az állomás nyugalmi rendszeréhez viszonyítva

$$v_e = \frac{v + V}{1 + vV/c^2}, \quad \text{és} \quad v_v = \left| \frac{-v + V}{1 - vV/c^2} \right| = \frac{v - V}{1 - vV/c^2},$$

a repülési idejük pedig

$$\Delta t_e = \frac{l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}}{2(v_e - V)} \quad s \quad \Delta t_v = \frac{l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}}{2(v_v + V)}.$$

A nevezőkben

$$v_e - V = \frac{v(1 - V^2/c^2)}{1 + vV/c^2} \quad \text{és} \quad v_v - V = \frac{v(1 - V^2/c^2)}{1 - vV/c^2}.$$

A keresett Δt idő a Δt_e és a Δt_v különbsége:

$$\Delta t = \Delta t_e - \Delta t_v = \frac{l_0}{2\sqrt{1 - V^2/c^2}} \cdot \frac{1}{v} \cdot [(1 + vV/c^2) - (1 - vV/c^2)] = \frac{l_0 V}{c^2 \sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

az (A)-val összhangban.

A newtoni esetben a megfelelő képletek a következők:

$$v_e = v + V, \quad v_v = v - V, \\ \Delta t_e = \frac{l_0}{2(v_e - V)} = \frac{l_0}{2v}, \quad \Delta t_v = \frac{l_0}{2(v_v + V)} = \frac{l_0}{2v},$$

és $\Delta t = 0$, ahogy lennie kell.

4) Egy rablóbanda elhatározza, hogy kirabol egy kincsszállító vonatot. A terv alapja az, hogy a vonat áthalad egy alagúton. A banda az alagút két bejáratára titokban erős, kapuszerű sorompót szerel fel, amelyeket rádiójellel lehet lezárni. Az egyik bandatag az alagút két végétől egyenlő távolságra lévő pontban helyezkedik el a jeladóval és a bandavezértől azt a parancsot kapja, hogy amikor a vonat eltűnik az alagútban, hozza működésbe a sorompókat. Az alagútban rekedt vonatot azután a banda többi tagja elfoglalja és kifosztja.

A bandavezér azonban váratlan üzenetet kap a szerelvény összeállításában segédkező egyik vasutastól, aki a bűntársa. Eszerint a szerelvény hosszabb, mint amire számítottak, véletlenül pont olyan hosszú, mint az alagút, ezért az akciót le kell fűjni. A bandavezér azonban, aki főállásban elméleti fizikus, megnyugtatta az informátort: A Lorentz-kontrakció miatt a vonat teljes egészében el fog férni az alagútban, a terv tehát végrehajtható marad.

A vonat elindulása után a titkosszolgálat valahogy megneszeli a készülő rajtaütést és mobiltelefonon utasítja a vonatvezetőt, hogy azonnal állítsa le a vonatot. A vonatvezető azonban jó volt fizikából és megnyugtatta a titkosszolgálat

emberét: Az alagút a vonathoz képest Lorentz-kontrakciót szenved, a vonatnak legalább az egyik vége biztosan ki fog lógni az alagútból, ezért a jeladónál figyelő bandatagnak nem lesz alkalma beindítani a sorompók működését.

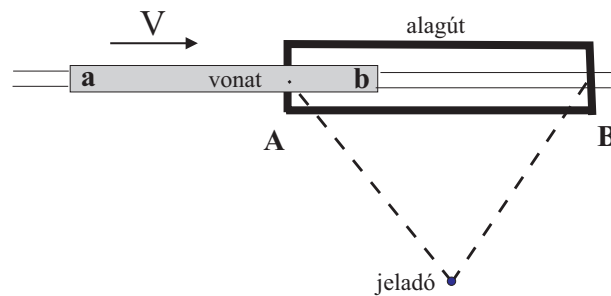
Kinek van igaza, a bandavezérnek vagy a vonatvezetőnek? És miben tévedett a másik?

Megoldás: A bandavezérnek van igaza. A jeladó szimmetrikus helyzetben nyugszik az alagút A és B végpontjához képest, ahol a sorompókat a banda felszerelte. Az alagút (vagyis a vasúti töltés) \mathcal{I} nyugalmi rendszerében ezért a sorompók zárása egyidőben történik. A vonat az \mathcal{I} -hez képest V sebességgel mozog, ezért Lorentz-kontrakciót szenved. A feladat szerint a nyugalmi hossza egyenlő az alagút nyugalmi hosszával, így a Lorentz-kontrakció következtében \mathcal{I} -ben rövidebb, mint az alagút: Amikor a vonat a vége eltűnik az alagút A bejáratánál, az eleje (b pontja) még nem éri el az alagút B kijáratát. Ezért ha a jeladót ebben a pillanatban működésbe hozzák, a vonat valóban bent ragad az alagútban, és a banda megrohanhatja.

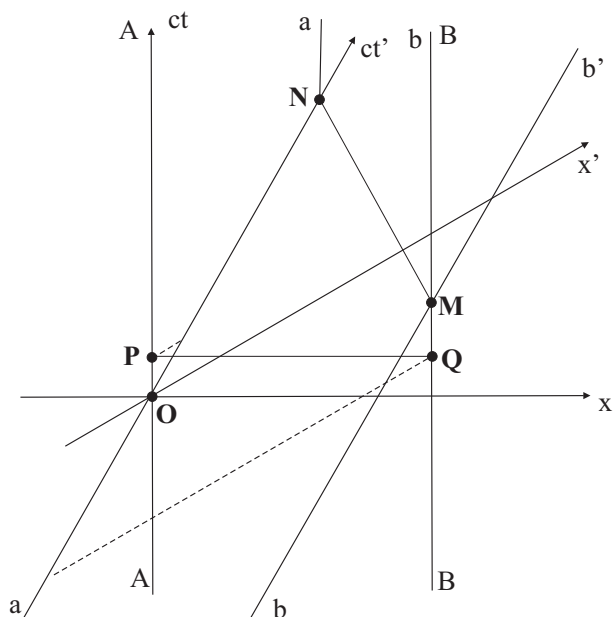
Természetesen jól fel kell szerelniük lángvágókkal, mert a B kijáratú kapuba történő beleütközés következtében a szerelvény hossza még a mozgási hosszánál is rövidebbre préselődik össze. A vonat elejének (b pontnak) a hirtelen lefékeződésénél keletkező "löket" ugyanis legfeljebb fénysebességgel haladhat végig a vonaton, és ennek következtében a vonat vége (az a pont) egy ideig még mozgásban marad a vonat elejének hirtelen leállása után is.

Miben tévedett a vonatvezető? Abban teljesen igaza volt, hogy a vonat nyugalmi rendszerében az alagút Lorentz-kontrakciót szenved, és ha nem jön közbe semmi, a vonatnak legalább az egyik vége mindig biztosan kilóg az alagútból. Azonban nem vette figyelembe az egyidejűség relativitását, amelynek következtében a vonat \mathcal{I}' nyugalmi rendszerében a sorompók működése nem egyidőben történik, és azt sem, hogy a hatások még a hétköznapi értelemben szilárd anyagokban sem terjedhetnek a félynél gyorsabban.

Mivel az alagút a vonathoz képest $-V$ irányban mozog, a jeladóból a B felé haladó rádiójel előbb zárja le a B sorompót, mint a másik rádiójel az A sorompót. Amikor a B -beli sorompó beleütközik a vonat b elejébe, a (\mathcal{I}' -ben nyugvó) vonat vége (az a pont) az alagút Lorentz-kontrakciója következtében még kilóg az alagútból és a lökés véges terjedési sebessége következtében egy



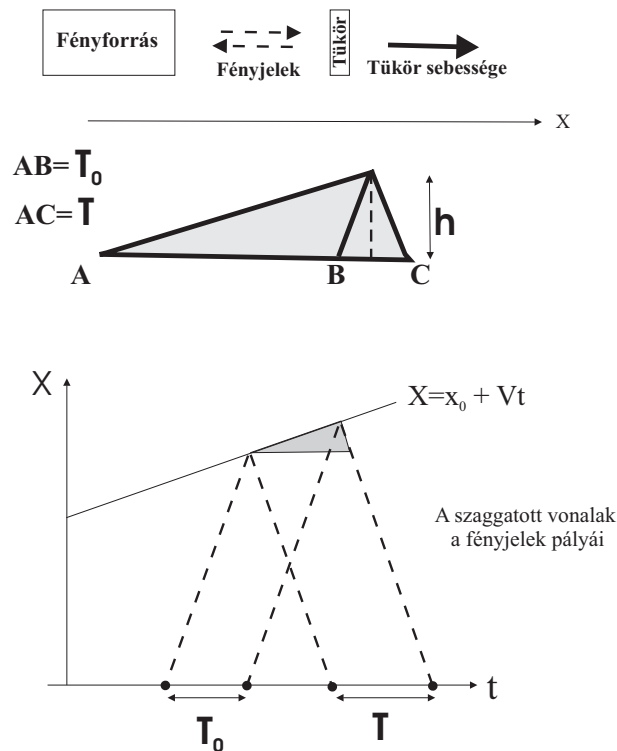
4.1 ábra



4.2 ábra

ideig még nyugalomban marad. Még akkor is nyugalomban lesz, amikor az A kapu áthalad rajta és az egész vonatot elnyeli az alagút, hiszen a jeladót csak közvetlen ezután hozzák működésbe. A vonat elejéből kiinduló lökés csak ezután éri el a vonat végét, ekkor veszi fel az egész vonat az alagút \mathcal{I}' -beli sebességét. Az alagúthoz viszonyítva nyugalomba került vonat hosszának a ronszolódás következtében még a mozgási hosszánál is rövidebbnek kell lennie, hiszen különben nem férne el a V sebességgel mozgó alagútban, amelynek mozgási hossza megegyezik a vonat \mathcal{I} -beli mozgási hosszával a leállítás előtt.

Ez a két forgatókönyv Lorentz-transzformáció segítségével igazolható, de ezzel egyenértékű, ha a tér-idő-ábrán demonstráljuk a helyességüket (4.2 ábra). A koordinátarendszer O origója az az esemény, amikor a vonat a végpontja és az alagút A bejárata éppen egybeesik. Az alagút az AA és a BB világvonalak közötti sávot foglalja el. Ha a sorompókat nem hozzák működésbe, a vonat a ct' tengely és a bb' egyenes közötti sávot foglalná el. A vonat és az alagút nyugalmi hosszának egyenlőségét az fejezi ki, hogy a BB egyenes és az x -tengely metszéspontja, valamint a bb' egyenes és az x' -tengely metszéspontja rajta van ugyanazon az $x^2 - c^2t^2 = l_0^2$ hiperbolán. A rajz mutatja, hogy \mathcal{I} -hez viszonyítva a vonat teljesen elfér az alagútban, az \mathcal{I}' -höz viszonyítva azonban az alagút fér el teljesen a vonat hosszán belül. Az alagút A sorompójának a bezárása a P , a B sorompójának bezárása pedig a Q esemény. Az alagút \mathcal{I} vonatkoztatási rendszeréhez rögzített vesszőtlen \mathcal{K} -ban ez a két esemény ugyanabban a pillanatban történik, ezért az őket összekötő egyenes párhuzamos az x -tengellyel. A sorompók működése következtében a vonat most az $aONa$ és a bMb sávot foglalja el. A vonat b elejének beleütközése a B sorompóba az M esemény. Ettől



5.1 ábra

kezdve a vonat eleje és az alagút B kijárata ugyanazon a (függőleges) világvonalon fekszik. Az ütközés által okozott hatás az $M \rightarrow N$ világvonalon terjed a vonaton visszafelé és az N pontban éri el a vonat elejét, amely ekkor áll meg. Az MN szakasz 45° -nál kisebb szöget zár be a ct tengellyel, mert a lökés terjedési sebessége c -nél kisebb.

A vonat sebességével mozgó \mathcal{I}' -hez rögzített vesszős \mathcal{K}' -ben a $ct' = konstans$ vonalak az x' tengellyel párhuzamos egyenesek. Ennek alapján jól látható, hogy a B sorompó zárása negatív t' -nél, az A kapu pedig pozitív t' -nél történik. Ezek közé esik a $t' = t = 0$ pillanat, amikor a vonat a vége is eltűnik az alagútban.

5) Egy fényforrás T_0 időközönként bocsát ki fényjeleket, amelyeket egy tőle V sebességgel távolodó tükör ver vissza. Milyen T időközönként érkeznek vissza a jelek a forráshoz a newtoni fizika és a relativitáselmélet szerint?

1. Megoldás: Végezzük el a számítást először a newtoni felfogás alapján. Jelöljük T' -vel két egymást követő jel tükörrre történő érkezése (és a róla való visszaverődése) között eltelt időt. Mivel a tükör mozog, a T' -t az adó nyugalmi

rendszerében érvényes (1.2.3) képlet segítségével számíthatjuk ki a T_0 alapján: $T' = T_0/(1 - V/c)$.

A visszavert jelek szempontjából a tükör az adó, ezért a T -t a T' alapján a vevő nyugalmi rendszerében érvényes (1.2.1) képlet segítségével kaphatjuk meg: $T = T'(1 + V/c)$. Ha ide T' -t az előző képletből behelyettesítjük, megkapjuk a feladat megoldását a newtoni felfogásban:

$$T = T_0 \frac{1 + V/c}{1 - V/c}. \quad (A)$$

A relativitáselmélet szerint ugyanez a gondolatmenet érvényes, csak mindkét esetben az (1.2.6) képletet kell alkalmazni:

$$T' = T_0 \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} \quad \text{és} \quad T = T' \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}}.$$

Ebből a két képletből ugyanazt az (A) eredményt kapjuk, mint előbb. Ez az eredmény összhangban van azzal, hogy a T_0 és a T kapcsolatában nincs szerepe az idődilataciónak, mivel mindkettőt mérhetjük ugyanazzal az órával (vagy két egymáshoz képest nyugvó órával). Az idődilatacióra csak a T' érzékeny, ezért a T' -re a newtoni és a relativisztikus számítás nem is adja ugyanazt az eredményt.

2. Megoldás: Az 5.1 ábra a tükör és a fénysugarak pályáját mutatja. A kirajzolt háromszögből

$$h = V \left(T_0 + \frac{T - T_0}{2} \right) = c \frac{T - T_0}{2}.$$

Ezt T -re megoldva kapjuk (A)-t. Mivel mindkét időtartamot ugyanazzal az órával (vagy két egymáshoz képest nyugvó órával) mérjük, ez a képlet a newtoni és a relativisztikus esetben egyformán érvényes.

6) Egy biciklista v sebességgel karikázik a vasúti töltés mentén. Szembe jön vele V sebességgel egy vonatszerelvény, amelynek nyugalmi hossza l_0 . Mennyi ideig halad a biciklista a vonat mellett a saját órája szerint a newtoni és a relativisztikus fizika alapján?

Megoldás: A newtoni fizikában a válasz nyilván $l_0/(V + v)$. A relativisztikus számítás a töltés \mathcal{I} nyugalmi rendszerében a legegyszerűbb. Amikor a vonat eleje elhalad a biciklista mellett, a vonat vége a biciklistától $l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}$ távolságra van. A közöttük lévő távolság $V + v$ sebességgel csökken, ezért koordinátaidőben mérve

$$\Delta t = l_0 \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{V + v}$$

idő alatt válik nullává. A bicikliző óráján ezalatt

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = l_0 \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}}{V + v} \quad (A)$$

idő telik el.

A számítás a vonat vagy a kerékpáros nyugalmi rendszerében valamivel bonyolultabb, de természetesen ugyanerre az eredményre vezet (a $\Delta\tau$ invariáns). A vonat \mathcal{I}' nyugalmi rendszerében például a biciklista sebessége a sebességösszeadás törvénye szerint

$$v' = \frac{v + V}{1 + vV/c^2}$$

-tel egyenlő. A vonat hossza itt l_0 , ezért a biciklista koordinátaidőben értve

$$\Delta t' = \frac{l_0}{v'}$$

ideig halad a vonat mellett, amelynek

$$\Delta\tau = l_0 \frac{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}{v'}$$

sajátidő felel meg. Ha ide v' fenti kifejezését behelyettesítjük, átalakítások után újra az (A) képletre jutunk.

7) Egy V sebességgel mozgó masszív (végtelen tömegűnek tekinthető) falról rugalmasan visszapattan egy ugyanolyan irányban $v = 2V$ sebességgel repülő labda. Mekkora lesz a labda u sebessége a visszapattanás után a newtoni és a relativisztikus fizika szerint?

Megoldás: Az az inerciarendszer, amelyben a feladat adatai érvényesek, legyen a vesszőtlen \mathcal{I} . A számítás alapja az, hogy a fal \mathcal{I}' nyugalmi rendszerében a labda sebességének nagysága a visszapattanásnál nem változik.

A newtoni fizika szerint \mathcal{I}' -ben a labda sebessége a visszapattanás előtt $v' = v - V = 2V - V = V$ -vel, a visszapattanás után pedig $-v' = -V$ -vel egyenlő. Az eredeti \mathcal{I} ($-V$) sebességgel mozog \mathcal{I}' -hez képest, ezért a visszapattanás után a labda sebessége \mathcal{I} -ben $u = (-v') - (-V) = 0$. A newtoni fizika szerint tehát a labda a visszapattanás után nyugalomban lesz.

A gondolatmenet a relativitáselméletben is ugyanez, csak a relativisztikus sebességösszeadás képletével kell számolnunk. A két számítás lépéseit a következő táblázat tartalmazza:

	GOLYÓ SEBESSÉGE	NEWTONI	RELATIVISZTIKUS
0.	\mathcal{K} -ban ütközés előtt	$2V$	$2V$
1.	\mathcal{K}' -ben ütközés előtt	$2V - V = V$	$\frac{2V-V}{1-2V \cdot V/c^2} = \frac{V}{1-2V^2/c^2}$
2.	\mathcal{K}' -ben ütközés után	$-V$	$-\frac{V}{1-2V^2/c^2}$
3.	\mathcal{K} -ban ütközés után	$-V - (-V) = 0$	$\frac{-\frac{V}{1-2V^2/c^2} - (-V)}{1 - \left(-\frac{V}{1-2V^2/c^2}\right)(-V)} = -2V \frac{V^2/c^2}{1-3V^2/c^2}$

A táblázat utolsó sora szerint tehát a relativisztikus esetben a labda sebessége a visszapattanás után

$$u = -2V \frac{V^2/c^2}{1-3V^2/c^2}$$

-tel egyenlő. Ez összhangban van a newtoni eredménnyel, mert a $c \rightarrow \infty$ határesetben a jobboldal nullához tart. A másik határeset az, amikor a labdát fényjellel, a falat pedig tükörrel helyettesítjük. Ekkor $V = c/2$, és a képletünk alapján $u = -c$, ahogy lennie is kell.

8) Egy egyenes autópálya minden pontján rövid $\Delta\tau$ időközönként halad át egy egyenletesen v sebességgel pozitív irányban haladó autó.

(1) Hány autót találunk átlagban az autópálya $l \gg v \cdot \Delta\tau$ hosszúságú \overline{AB} szakaszán?

(2) Hány autót találunk ugyanezen az \overline{AB} szakaszon abban az esetben, amikor a pályát egy $(-V)$ sebességgel mozgó inerciarendszerhez viszonyítjuk (amelyhez képest a pálya V sebességgel mozog pozitív irányban)?

Megoldás: Az első esetben az autók átlagszámát jelöljük N -nel. Mivel egy autó, miután áthaladt a szakasz A kezdőpontján, $T = l/v$ ideig tartózkodik \overline{AB} -n belül, és ezalatt az idő alatt $T/\Delta\tau$ autó lépi át az A pontot, ezért a pálya \mathcal{I} vonatkoztatási rendszerében

$$N = \frac{T}{\Delta\tau} = \frac{l}{v \cdot \Delta\tau} \gg 1. \quad (\text{A})$$

Az \mathcal{I}' mozgó inerciarendszerhez viszonyított számot jelöljük N'_+ -szal (a + alulindex arra utal, hogy az autók v sebessége és a pálya V sebessége \mathcal{I}' -ben ugyanolyan irányú). Első pillanatban azt gondolnánk, hogy N'_+ nem különbözhet N_+ -tól, de aztán rájövünk, hogy az egyidejűség relativitása miatt ez mégsincs így.

Ahhoz, hogy ez szembeűnő legyen, fogalmazzuk át egy kicsit az előző gondolatmenetet. Adjunk nevet a kiszemelt autónak: Legyen Autó₁. Az A kezdőponton áthaladó autókat addig számoljuk, míg Autó₁ eléri B -t. *Ebben a pillanatban az A -ban (gondolatban) lezárjuk a sorompót.* Az (A) képlet azoknak az autóknak a számát adja meg, amelyek *ebben a pillanatban az \overline{AB} szakaszon* találhatóak.

Az \mathcal{I}' -ben ugyanígy kell eljárunk. Azonban az \mathcal{I}' -ben egyidejű események \mathcal{I} -hez viszonyítva már nem történnek ugyanabban a pillanatban: Az A -beli esemény $\Delta t = V \cdot l' / \left(c^2 \sqrt{1 - V^2/c^2} \right)$ idővel később következik be, mint a B -beli. (Ld. az 1. feladatot. Az \mathcal{I}' felel meg a vonatnak, amely most negatív irányban halad.) A képletben azért szerepel az \overline{AB} szakasz \mathcal{I}' -beli l' hossza, mert most két \mathcal{I}' -ben egyidejű esemény \mathcal{I} -beli időkülönbségére vagyunk kíváncsiak. A Lorentz-kontrakció következtében $l' = l \sqrt{1 - V^2/c^2}$, ezért $\Delta t = V \cdot l/c^2$.

Az Autó₁ tehát nem $T = l/v$, hanem $T' = T + \Delta t$ ideig tartózkodik \overline{AB} -n belül. Ezalatt $T'/\Delta\tau$ autó halad át A -n, ezért

$$N'_+ = \frac{T'}{\Delta\tau} = \frac{1}{\Delta\tau}(T + \Delta t) = \frac{l}{v \cdot \Delta\tau} \cdot \left(1 + \frac{vV}{c^2} \right) = N \cdot \left(1 + \frac{vV}{c^2} \right). \quad (\text{B})$$

Ugyanezt az eredményt egy másik gondolatmenettel is megkaphatjuk, amelyből azonban nem látszik ilyen plasztikusan az egyidejűség relativitásának a szerepe. Az (A)-t úgy alakíthatjuk át az N'_+ -ra vonatkozó képletté, hogy figyelembe vesszük a Lorentz-kontrakciót ($l \rightarrow l \sqrt{1 - V^2/c^2}$), az idődilatációt ($\Delta\tau \rightarrow \Delta t = \Delta\tau / \sqrt{1 - V^2/c^2}$), és a sebességösszeadás törvényét, amely szerint az autók sebessége \mathcal{I}' -ben

$$u = \frac{v + V}{1 + vV/c^2}. \quad (\text{C})$$

Az Autó₁ és a B pont távolsága ($u - V$) sebességgel csökken, ez kerül (A) nevezőjében a v helyébe. Mindezeket (A)-ba írva rövid átalakítás után újra (B)-t kapjuk eredményül.

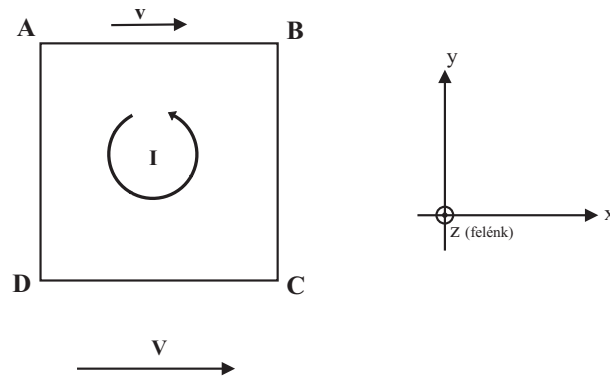
Amikor a v és a V iránya egymással ellentétes, akkor

$$N'_- = N \cdot \left(1 - \frac{vV}{c^2} \right). \quad (\text{D})$$

Ebben az esetben az \mathcal{I}' -beli egyidejűségnél \mathcal{I} -ben az A -beli esemény előbb történik, mint a B -beli, ez vezet az autók számának csökkenéséhez az \overline{AB} szakaszon.

Ennek a látszólag mesterkéltnak fontos fizikai alkalmazása van. Ahhoz azonban, hogy ehhez eljussunk, előbb egy paradoxonra kell rámutatnunk. Tegyük fel, hogy az utat fák szegélyezik, és \mathcal{I} -ben minden l hosszúságú szakaszon n fa található. Az \overline{AB} szakaszon tehát \mathcal{I} -ben minden fára N/n autó jut.

Az \mathcal{I}' -höz viszonyítva azonban más a helyzet. A fák száma az \overline{AB} szakaszon továbbra is n marad, az autók száma azonban N -ről N'_\pm -ra változik, tehát az egy



9.1 ábra

fára jutó autók száma a v és a V relatív irányától függően $(1 + vV/c^2)$ -szeresére nő, vagy $(1 - vV/c^2)$ -szeresére csökken. Ez azonban lehetetlen, mert se a fák, se az autók száma nem függhet attól, milyen inerciarendszerhez viszonyítjuk a pályát.

Ez a következtetés azonban csak ténylegesen végtelen hosszú autópályára érvényes, mert az nem lehetséges, hogy egy véges hosszúságú autópályára minden pontján azonosan $1/\Delta\tau$ gyakorisággal haladjon át egy autó. A paradoxon arra utal, hogy ebben a feladatban a pályát még idealizációként sem lehet végtelen hosszúnak tekinteni. Egy *önmagába záródó pályára* (hurokra) azonban ez a feltétel már teljesülhet. Ezért egészítsük ki az \overline{AB} szakaszt egy $ABCD$ négyzetté, amelynek minden pontján $\Delta\tau$ időközönként halad át egy autó. Abban az \mathcal{I} -ben, amelyben a pálya nyugszik, az (A) szerint a négyzet minden oldalán minden pillanatban átlagosan $N = l/(\Delta\tau \cdot v)$ autót találunk. Ahhoz az \mathcal{I}' -hez viszonyítva azonban, amelyhez képest a pálya V sebességgel mozog az AB oldalon haladó autókkal párhuzamosan, az autók átlagszáma az AB oldalon $N'_+ = N(1 + vV/c^2)$ -tel, a CD oldalon pedig $N'_- = (1 - vV/c^2)$ -tel egyenlő. A V -re merőleges BC és DA oldalakon az átlagszám megmarad N -nek, mert egy V -re merőleges szakasz végpontjaiban történő \mathcal{I} -ben egyidejű eseménypár \mathcal{I}' -ben is egyidejű marad.

A zárt $ABCD$ pályán található autók száma tehát mindig ugyanannyi, akármelyik inerciarendszerből figyeljük is meg. A pályának mint egésznek a mozgása ennek az adott autó-mennyiségnek az *átcsoportosítására* vezet a négyzet oldalai között. Ez az autók *mozgásának* a következménye. A pályát szegélyező fák száma ugyanis a négyzet oldalain külön-külön is változatlan marad, amikor a pályát különböző inerciarendszerekből szemléljük.

Helyettesítsük most az autópályát egy négyzet alakú fémkerettel, amelyben áram folyik. (Ld. a 9.1 ábrát; az áramforrást nem tüntetjük fel, azt is gondolhatjuk, hogy szupravezető keretünk van.) Az autók a mozgó elektronok, a fák a nyugvó pozitív ionok. A korábbi képleteink alapján az áramerősség

$$I = \frac{e}{\Delta\tau} = \frac{eNv}{l} \quad (\text{E})$$

-lel egyenlő, amelyben e a proton elektromos töltése (az elektron töltésének abszolút értéke). Az autók v sebessége az elektronok sebességével egyenlő. Mivel az elektronok töltése negatív, ezért az áram az autók sebességével ellentétes irányú.

Ez a köráram a saját \mathcal{I} nyugalmi rendszerében egy \mathbf{m} mágneses dipólnyomatékot hoz létre, amelynek csak a z -komponense különbözik zérustól (ld. az ábrát):

$$m_z = I \cdot l^2 = eNvl. \quad (\text{F})$$

Ahhoz az \mathcal{I}' -höz viszonyítva azonban, amelyben ez a mágneses dipól V sebességgel mozog x irányban, y irányú elektromos dipólnyomatékra tesz szert, amelynek nagysága

$$p_y = (-e) \cdot (N'_+ - N) \cdot l = -e \cdot \frac{vV}{c^2} N \cdot l = -\frac{V}{c^2} m_z \quad (\text{G})$$

-mel egyenlő, mert az AB szakaszon elektron többlet, a CD -n pedig ugyanakkora elektron hiány lép fel. Ha figyelembe vesszük, hogy V a \mathbf{V} sebesség-vektor x komponense, a (G) összefüggést a vektoriális szorzat felhasználásával felírhatjuk tetszőleges koordinátarendszerben érvényes alakban:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{V} \times \mathbf{m}). \quad (\text{H})$$

A mesterkéltnek látszó példa tehát arra a következtetésre vezetett, hogy *egy mozgó mágneses dipól elektromos dipólnyomatékra tesz szert*. Látjuk, hogy ez (is) az egyidejűség relativitásának a következménye.

HIBAJEGYZÉK

29.old. 5. sor: holdjáró **helyesen** marsjáró

30.old. 5. sor: egy egész időintervallum egyidejű, **helyesen** egy egész időintervallum lehet egyidejű

31.old. alulról az 5. sor: $\Delta\tau_a$ és $\Delta\tau_b$ **helyesen** $\Delta\tau_1$ és $\Delta\tau_2$

62.old. „...az érverése alapján állapította meg a mozgás idejét.” Ez nem egészen így történt. A *Matematikai érvelések és bizonyításokban* (Európa 1986, 196.oldal) ugyanis Salviati (Galilei) így számol be a kísérletről:

Kerestünk egy körülbelül tizenkét rőf hosszú, fél rőf széles, háromujjnyi vastag lécet, illetve deszkát, hosszában (az éle mentén) rendkívül egyenes, ujjnyi széles csatornát vájtunk, gondosan megtisztítottuk és megcsiszoltuk, majd a lehető legfinomabb, tökéletesen sima pergament enyveztünk bele; a csatornában pedig egy tökéletesen gömb alakú és sima bronzgolyót gurítottunk le. A léc egyik végét rögzítettük, a másikat pedig tetszésünk szerint egy- vagy kétrőfnyire a vízszintes fölé emeltük, és, mint említettem, hagytuk, hogy a golyó végigguruljon a csatornában; gondosan megmértük a teljes mozgáshoz szükséges időt (mindjárt

megmondom, hogyan); a kísérletet számtalanszor megismételve meggyőződünk róla, hogy a futási idők soha még a pulzusütés tizedrészével sem térnek el egymástól. Miután a kísérletet sokszor elvégeztük, és az eredmény mindig ugyanaz volt, úgy intéztük, hogy a golyó csupán a csatorna negyedrészen gurulhasson le; ismét megmértük a mozgáshoz szükséges időt, és megállapítottuk, hogy a lehető legpontosabban fele az előzőnek. A kísérleteket különböző részutakkal is elvégeztük, a teljes út megtételéhez szükséges időt előbb a fél, majd a kétharmad és a háromnegyed úthoz szükséges idővel hasonlítottuk össze, valamint más osztásokkal is; a méréseket legalább százszor megismételtük, és mindig az volt az eredmény, hogy a megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint az idők négyzetei, és ez igaz, akárhogyan rögzítjük is a sík, illetve a csatorna (ahol a golyó legurul) vízszintessel bezárt szögét... Az időt pedig a következő módszerrel mértük: felakasztottunk egy nagy, vízzel teli dézsát, amelyből a fenekébe illesztett csövecskén keresztül vékony sugárban csordogált a víz; a kicsorgó vizet poharakban fogtuk fel mindaddig, amíg a vizsgált mozgás (a teljes csatorna vagy annak egy része mentén) tartott; az így összegyűjtött vizet időről időre megmértük egy rendkívül pontos mérlegen, súlyaik különbségei és arányai megadták az időkülönbségeket és -arányokat, éspedig, mint említettem, olyan pontosan, hogy sok-sok mérés eredménye között nem volt tényleges eltérés.

Dávid Gábor fordítása

87.old. középen: nyilván nyilván **helyesen nyilván** nyilván

87.old.: A (számozatlan) képlet hibás. **Helyesen**

$$v_k = \frac{V}{1 - \sqrt{1 - V^2/c^2}} > c.$$

89.old. 2. sor: (9.ábra) **helyesen** (10.ábra)

126.old. 16. sor: testek is **helyesen** testek pályái is

133.old. 3. sor: m/sec **helyesen** m/s²