

# Szimmetriaposztulátum, izospin, analóg állapotok<sup>1</sup>

## 1. Az izospin és az analóg állapotok

Ebben a részben az izospin és az analóg állapotok fogalmát tárgyaljuk közvetlenül a kvantumelmélet szimmetriaposztulátuma alapján. A fizikai jelentés világossá tétele érdekében a töltéskoordinátákat és az izospin formalizmust, amelyek a matematikai apparátus részei, csak a következő fejezetben vezetjük be.

Kezdjük egy  $Z$  protonból és  $N$  neutronból ( $Z + N = A$ ) álló rendszer Hamilton-operátorának vizsgálatával. A Hamilton-operátor három részből áll: nukleáris, elektromágneses és kinetikus részből:

$$H(x_1, \dots, x_A) = H^n(x_1, \dots, x_A) + H^c(x_1, \dots, x_A) + K(x_1, \dots, x_A),$$

ahol  $x_i \equiv \mathbf{r}_i, s_i$ . Az első  $Z$  koordinátát tekintjük protonkoordinátának, az utolsó  $N$ -et neutronkoordinátának.

Ha felteszük, hogy a nukleáris kölcsönhatás minden nukleon-párra azonos (töltésfüggetlenség), akkor

$$H^n(x_1, \dots, x_A) = \sum_{i < j} U(x_i, x_j) \quad U(x_i, x_j) = U(x_j, x_i),$$

ahol az  $U$  függvény alakja minden nukleon-párra azonos. Ebből következik, hogy  $H^n(x_1, \dots, x_A)$  a változók szimmetrikus függvénye (permutációs skalár), a koordináták értékétől függetlenül teljesül a

$$H^n(x_1, x_2 \dots x_A) \equiv H^n(x_2, x_1 \dots x_A) \equiv \dots$$

azonosság.

Az elektromágneses kölcsönhatás operátorát olyan közelítésben írjuk fel, amely szerint minden nukleon egy átlagos  $U^c$  sztatikus elektromos potenciálban mozog. Ekkor

$$H^c(x_1, \dots, x_A) = \sum_{i=1}^Z U^c(\mathbf{r}_i).$$

Ez a függvény az első  $Z$  és az utolsó  $N$  változóban (ez utóbbiaktól valójában nem függ) külön-külön szimmetrikus, az összes változóban azonban nem; a  $H^c(x_A, x_2, \dots, x_1) = H^c(x_1, x_2, \dots, x_A)$  egyenlőség pl. csak abban a speciális esetben igaz, amikor  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_A$ , nem pedig azonosan. A  $H^c$ -ből azonban kiválasztható egy  $H_0^c$  szimmetrikus rész:

$$\sum_{i=1}^Z U^c(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^A U^c(\mathbf{r}_i) \right] + \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^Z U^c(\mathbf{r}_i) - \sum_{i=Z+1}^A U^c(\mathbf{r}_i) \right] \equiv H_0^c + H_1^c.$$

<sup>1</sup>Előadások magfizikai iskolán valamikor a 60-as évek második felében.

A kinetikus energia operátora

$$K = -\frac{\hbar^2}{2m_p} \sum_{i=1}^Z \nabla_i^2 - \frac{\hbar^2}{2m_n} \sum_{i=Z+1}^A \nabla_i^2.$$

Ez szintén nem szimmetrikus. Feltesszük azonban, hogy a proton és a neutron tömege közötti különbség elhanyagolható ( $m_p = m_n$ ), és ekkor  $K$  már szimmetrikus lesz. Ílymódon

$$H = H_0 + H_1^c, \quad \text{ahol} \quad H_0 = H^n + H_0^c + K,$$

amelyben  $H_0(x_1, \dots, x_A)$  szimmetrikus az *összes* koordináta felcserélésével szemben.

Ésszerű feltevés, hogy  $H_1^c$  hatása  $H_0$  szerepéhez képest elhanyagolható, vagy legalább is gyenge, ezért célszerű a  $H_0$  sajátfüggvényeit tekinteni olyan bázisnak, amely szerint  $H$  állapotait sorbafejthetjük.

Legyen  $\varphi$  a  $H_0$ -nak  $E$  sajátértékhez tartozó sajátállapota:

$$H_0\varphi = E\varphi. \quad (1)$$

Legyen továbbá  $P_{ij}$  az  $x_i, x_j$  koordináták permutációs operátora:

$$P_{ij}\varphi(\dots x_i \dots x_j \dots) = \varphi(\dots x_j \dots x_i \dots).$$

A  $\varphi$  mellett nyilván  $P_{ij}\varphi$  is ugyanahhoz az  $E$ -hez tartozó sajátállapot. Valóban, hassunk (1) mindkét oldalára mondjuk  $P_{12}$ -vel:

$$P_{12}H_0(x_1, x_2, \dots)\varphi(x_1, x_2, \dots) = EP_{12}\varphi(x_1, x_2, \dots),$$

$$H_0(x_2, x_1, \dots)\varphi(x_2, x_1, \dots) = E\varphi(x_2, x_1, \dots).$$

A  $H_0$  szimmetriája miatt azonban

$$H_0(x_1, x_2, \dots)\varphi(x_2, x_1, \dots) = E\varphi(x_2, x_1, \dots),$$

tehát  $\varphi(x_2, x_1, \dots) = P_{12}\varphi(x_1, x_2, \dots)$  valóban ugyanazon  $E$ -hez tartozó sajátállapot, a  $\varphi$ -t és a  $P_{12}\varphi$ -t ugyanaz az energia-kvantumszám jellemzi. Ugyanígy lehet belátni, hogy ha  $\varphi$  a  $J$ , az  $M$  és a  $\pi$  (paritás) kvantumszámokkal jellemezhető, akkor  $P_{ij}\varphi$ -hez is ugyanezek a kvantumszámok tartoznak.

Az így kapható rengeteg sajátállapotból azonban egyik se fogja automatikusan kielégíteni a Pauli-elvet (szimmetriaposztulátumot), azaz nem lesz antiszimmetrikus az első  $Z$  és az utolsó  $N$  koordinátában. Az előzőekből azonban következik, hogy ha  $\varphi$ -t egyszerűen antiszimmetrizáljuk az első  $Z$  és az utolsó  $N$  koordinátában, akkor újra az  $E$  energiához tartozó sajátállapotot kapunk. Az antiszimmetrizálás ugyanis nem más, mint a  $P_{ij}$ -k alkalmazása (egyszer vagy többször) és lineárokombinálás.

Az antiszimmetrizálás eredménye azonban lehet azonosan nulla, ami azt mutatja, hogy  $E$  ugyan sajátértéke a Schrödinger-egyenletnek, de ellentmond

a Pauli-elvnek, és ezért nem valósulhat meg. Ellenkező esetben egy véges hullámfüggvényt kapunk, amelyet normalunk és  $\psi$ -vel jelölünk:

$$H_0\psi = E\psi.$$

Ez a  $\psi$  az  $E$  energiához tartozó megvalósuló állapot.

A  $\psi$ -n indexben kifejezésre juttathatjuk, hogy az első  $Z$  és az utolsó  $N$  koordinátában antiszimmetrikus, tehát az  ${}^A_Z\mathbf{Y}_N$  mag hullámfüggvénye. Ennek érdekében a  $T_3 = \frac{N-Z}{2}$  indexet írjuk hozzá, amely  $A$ -val együtt meghatározza  $Z$ -t és  $N$ -t:

$$Z = \frac{1}{2}A - T_3, \quad N = \frac{1}{2}A + T_3.$$

Így

$$\psi \longrightarrow \psi_{T_3}(x_1, \dots, x_A), \quad H_0\psi_{T_3} = E\psi_{T_3}.$$

Nem nehéz észrevenni, hogy ebből a  $\psi_{T_3}$ -ból kiindulva permutációval és lineárkombinálással képezhető olyan hullámfüggvény, amely az első  $Z+1$  és az utolsó  $N-1$  koordinátában antiszimmetrikus, tehát a  ${}^A_{Z+1}\mathbf{Z}_{N-1}$  magra vonatkozik, és olyan is, amely az első  $Z-1$  és az utolsó  $N+1$  koordinátában antiszimmetrikus, ezért az  ${}^A_{Z-1}\mathbf{X}_{N+1}$  mag hullámfüggvénye. Ezek képzése egyedül permutációval és lineárkombinálással történik, amely műveletekkel szemben a  $H_0$  mellett az impulzusmomentum és a paritás operátora is invariáns, ezért ezek az állapotok ugyanolyan  $EJM\pi$  kvantumszámokkal fognak rendelkezni, mint a kiinduló  $\psi_{T_3}$  állapot, csak éppen az indexük lesz más:

$$\begin{aligned} &{}^A_{Z+1}\mathbf{Z}_{N-1} \text{ esetében } \psi_{T_3-1}, \quad \text{mert } \frac{(N-1) - (Z+1)}{2} = T_3 - 1 \\ &{}^A_{Z-1}\mathbf{X}_{N+1} \text{ esetében } \psi_{T_3+1}, \quad \text{mert } \frac{(N+1) - (Z-1)}{2} = T_3 + 1. \end{aligned}$$

Könnyen megszerkeszthető az az operátor, amely a  $\psi_{T_3} \longrightarrow \psi_{T_3\pm 1}$  átmenetet létesíti. Nézzünk erre egy példát. Legyen  $A = 5$ ,  $Z = 2$ ,  $N = 3$ ,  $T_3 = 1/2$ . Ekkor a kiinduló  $\psi_{1/2}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,)$  antiszimmetrikus az első kettő és az utolsó három argumentumban, tehát a  ${}^5_2\mathbf{He}_3$  mag hullámfüggvénye. Határozzuk meg ebből kiindulva a  ${}^5_3\mathbf{Li}_2$  mag  $\psi_{-1/2}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,)$  hullámfüggvényét, amelyre  $Z = 3$ ,  $N = 2$ . Az eljárás az, hogy a  $\psi_{1/2}$ -t antiszimmetrizáljuk az első három (azaz  $Z+1$ ) argumentumban, ami elég egyszerű feladat, mert az első kettő (azaz  $Z$ ) argumentumban már antiszimmetrikus:

$$\begin{aligned} \psi_{-1/2}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ) &\sim \psi_{1/2}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ) - \psi_{1/2}(x_3, x_2, x_1, x_4, x_5, ) - \\ &-\psi_{1/2}(x_1, x_3, x_2, x_4, x_5, ) = \left[ 1 - \sum_{i=1}^2 P_{i3} \right] \psi_{1/2}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ). \end{aligned}$$

Ebből a példából világos az általános eljárás:

$$\psi_{T_3-1} = \frac{1}{\sqrt{M}} \left( 1 - \sum_{i=1}^Z P_{i,Z+1} \right) \psi_{T_3}.$$

Az  $M$  normálási együtthatóra azért van szükség, mert az antiszimetrizálási eljárás nem vezet automatikusan normált hullámfüggvényre.

Teljesen hasonlóan

$$\psi_{T_3+1} = \frac{1}{\sqrt{M'}} \left( 1 - \sum_{i=Z}^A P_{Z-1,i} \right) \psi_{T_3}.$$

Ezekből a képletekből jól látszik, hogy  $\psi_{T_3-1}$ ,  $\psi_{T_3}$  és  $\psi_{T_3+1}$  permutálással és lineárkombinálással kapható egymásból, tehát az  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  mag azonos  $EJM\pi$  kvantumszámú állapotai. Ezért ezeket az állapotokat ugyanazon *izobár multiplettbe* tartozó *analóg állapotoknak* nevezzük.

Egy  $\psi_{T_3}$ -ből kiindulva képezhetjük  $\psi_{T_3+1}$ -et, majd  $\psi_{T_3+2}$ -t s.i.t., azaz növelhetjük a magban a neutronok számát. Ez az eljárás legfeljebb addig tarthat, amíg az összes nukleont neutronná nem változtatjuk ( $N = A$ ), azaz  $T_3 = A/2$  nem lesz. Általában azonban már egy korábbi lépésnél megakadunk: Eljutunk valamilyen  $T_3 = T < A/2$ -ig, ami után  $\psi_{T+1}$ -re azonosan nullát kapunk.

Ha  $\psi_{T+1} = 0$ , akkor  $T$  a vizsgált izobár multiplettire jellemző maximális  $T_3$  érték:  $(T_3)_{\max} = T$ .

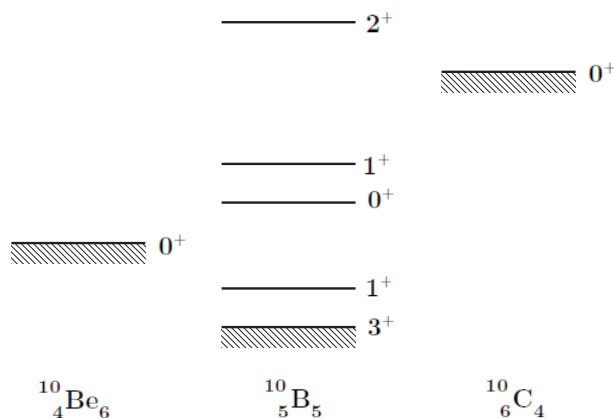
Ugyanílyen módon eljuthatunk egy minimális  $T_3$ -hoz is. Belátható, hogy  $(T_3)_{\min} = -T$ , tehát  $A/2 \geq T \geq |T_3|$ .

A  $T$  ílymódon meghatározza a vizsgált izobár multiplettbe tartozó analóg állapotok számát (amely nyilván  $2T + 1$ ) és a multiplettet mint egészet jellemzi. Azt mondjuk, hogy a multiplett minden állapota  $T$  *izospin*<sup>2</sup> és ezt a kvantumszámot az állapottfüggvényen fel is tüntetjük:

$$\psi_{T_3} \longrightarrow \psi_{TT_3}.$$

Áttérünk a kvantumszámok fizikai jelentésére. A  $T_3$ -é világos: Ez minden izotópra egy megadott, könnyen kiszámítható szám, amely egy adott mag minden állapotára ugyanaz. A  $T$  azonban nem azonos egy konkrét atommag minden állapotára, mert csak az  $A/2 \geq T \geq |T_3| = |N - Z|/2$  kritériumnak kell eleget tennie és így állapotról állapotra változhat. Ha azonban sikerül meghatározni, hogy az adott  $EJ\pi$  kvantumszámokkal rendelkező állapot hány izobárban fordul elő, akkor ebből meghatározható  $T$  értéke. Egy példa az 1. ábrán látható.

<sup>2</sup>Ez az elnevezés a permutációs csoport és a forgáscsoport (pontosabban az  $SU_2$ ) matematikai kapcsolatát tükrözi, amelyről a következő fejezetben lesz szó.



1. ábra

Ha figyelembe vesszük, hogy egy adott multiplettben az állapotok energiái a Coulomb-energiában (és csak ebben) különböznek egymástól, akkor a  $T$ -hözrendelés az 1. ábra nívósémájában nem okoz nehézséget: A  $0^+$  állapotokra  $T = 1$ , a többire  $T = 0$ . Az alapállapotú izospin minhárom magra a lehető legalacsonyabb  $T_{\text{ground}} = \left\lfloor \frac{N-Z}{2} \right\rfloor$ . Ez (kevés kivételtől eltekintve) mindig így van, például ebben a táblázatban is:

Mag	p	n	d	$^3\text{H}$	$^3\text{He}$	$\alpha$
$T_{\text{ground}}$	1/2	1/2	0	1/2	1/2	0

E klasszifikációs funkció mellett bemutatjuk a  $T$  egy másik jelentését is. Határozzuk meg egy adott állapotban a szimmetrikus nukleon párok átlagos számát, amelyet az

$$n_s = \left( \psi_{TT_3}, \frac{1}{2} \sum_{i < j} [1 + P_{ij}] \psi_{TT_3} \right) = \left( \psi_{TT_3}, \frac{1}{2} \left[ \frac{A(A-1)}{2} + \sum_{i < j} P_{ij} \right] \psi_{TT_3} \right)$$

képlet definiál. Megmutatható, hogy

$$n_s = \frac{1}{2} \left[ \frac{A}{2} \left( \frac{A}{2} + 1 \right) - T(T+1) \right]. \quad (2)$$

Amikor az izospin az  $A/2$  lehetséges legnagyobb értékű, akkor  $n_s = 0$ , a hullámfüggvény egyáltalán nem tartalmaz szimmetrikus nukleon-párokat. Ennek így is kell lennie, mert  $T = A/2$ -nél az állapotfüggvény az *összes változóiban* antiszimmetrikus, akárhogy van is felosztva az  $A$  koordináta proton- és neutronkoordinátákra (akármekkora a  $T_3$  értéke a  $(-T, T)$  intervallumban). Páros  $A$ -nál, amikor  $Z = N = A/2$ , a szimmetrikus párok (átlagolt) száma a  $T = 0$  állapotban maximális, de nem lehet nagyobb a különböző neutron-proton párok

számánál, azaz  $Z \cdot N = A^2/4$ -nél. A (2) képlet szerint ez valóban így is van (ha  $A > 2$ ).

Annak érdekében, hogy a multipllettbe tartozó hullámfüggvények szerkezetébe is betekintést nyerjünk vizsgáljuk a szülő- és (első) leány-állapot hullámfüggvényét héjmodellben (*szülő-állapotnak* az adott multipllett legmagasabb  $T_3$ -mal rendelkező állapotát, azaz  $\psi_{TT}$ -t nevezzük, az első *leány-állapot* pedig a  $\psi_{T,T-1}$ ). A héjmodell-állapotok építőkövei determinánsok, amelyeknek tömör jelölésére az  $A$ -szimbólumot vezetjük be a következő definícióval:

$$A \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ \mu_1 & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \varphi_{\mu_1}(x_1) & \varphi_{\mu_2}(x_1) & \dots & \varphi_{\mu_n}(x_1) \\ \varphi_{\mu_1}(x_2) & \varphi_{\mu_2}(x_2) & \dots & \varphi_{\mu_n}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{\mu_1}(x_n) & \varphi_{\mu_2}(x_n) & \dots & \varphi_{\mu_n}(x_n) \end{vmatrix}$$

Mint ismeretes, az  $A$   $n$  független azonos fermionból álló rendszer hullámfüggvénye, amely eleget tesz a Pauli-elvnek. Ha a benne szereplő egyrészesecske hullámfüggvények ortonormáltak, akkor  $A$ -t  $1/\sqrt{n!}$ -ral való szorzással lehet 1-re normálni.

Legyen

$$\psi(x_1, \dots, x_A) = \frac{1}{\sqrt{N!Z!}} A \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_Z \\ \mu_1 & \dots & \mu_Z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_{Z+1} & \dots & x_A \\ \mu_1 & \dots & \mu_N \end{pmatrix}, \quad (N > Z).$$

Belátjuk, hogy ez a szülő-állapot hullámfüggvénye. Világos, hogy  $\psi$  az első  $Z$  és az utolsó  $N$  argumentumában antiszimmetrikus, tehát jellemezhető a  $T_3 = \frac{N-Z}{2}$  kvantumszámmal. Annak, hogy  $T = \frac{N-Z}{2}$ -vel is jellemezhető legyen, két feltétele van. Az egyik az, hogy az

$$\left( 1 - \sum_{i=Z}^A P_{Z-1,i} \right) \psi$$

kifejezés legyen zérus. Ez teljesül is. Az antiszimmetrizálás hatására ugyanis a  $\psi$ -ből olyan lineárkombináció jön létre, amelynek a tagjai

$$A \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_{Z-1} \\ \mu_{i_1} & \dots & \mu_{i_{Z-1}} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_Z & x_{Z+1} & \dots & x_A \\ \mu_{i_Z} & \mu_{i_{Z+1}} & \dots & \mu_{i_A} \end{pmatrix}$$

típusú szorzatokat tartalmaznak. Ahhoz, hogy ez ne legyen zérus az szükséges, hogy az  $N+1$  darab  $\mu_{i_Z}, \dots, \mu_{i_A}$  mind különbözőn egymástól. Ez azonban nem lehetséges, mert a kiinduló  $\psi$ -ben csak  $N$  különböző  $\mu_i$  van.

Hasonló módon igazolható a másik feltétel is, amely azt követeli, hogy a hullámfüggvényt legfeljebb csak az első  $N$  változóban lehessen a változók felcserélésével és lineárkombinálással antiszimmetrizálni.

Ezzel beláttuk, hogy

$$\psi = \psi_{TT} = \frac{1}{\sqrt{N!Z!}} A \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_Z \\ \mu_1 & \dots & \mu_Z \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_{Z+1} & \dots & x_A \\ \mu_1 & \dots & \mu_N \end{pmatrix}, \quad (N > Z).$$



Az egyes „betöltési sémák” a megfelelő 1-re normált  $A$ -szimbólumot reprezentálják és ortogonálisak egymásra. Ez indokolja a  $\sqrt{N-Z-1}$  faktort az utolsó sorban. Ennek a rövidítésnek a felhasználásával

$$\psi_{T,T-1} = \sqrt{\frac{1}{N-Z}} \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \end{array} + \sqrt{N-Z-1} \begin{array}{c} \bullet \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \circ \end{array} \right\}$$

A  $\square$  „törzsre” az alapállapot izospinje  $T_0 = \frac{(N-1)-Z}{2}$ , ezért

$$\psi_{T,T-1} = \sqrt{\frac{1}{2T_0+1}} \left\{ \begin{array}{c} \bullet \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \end{array} + \sqrt{2T_0} \begin{array}{c} \bullet \\ \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \\ \circ \end{array} \right\}$$

Világos, hogy a szülő és a leány állapot hullámfüggvénye nem azonos. Ez mutatja, hogy az analóg állapotok hullámfüggvényei különböznek egymástól. A héjmodellben az bennük a közös, hogy ugyanazon egyrészecske állapotokból épülnek fel.

A héjmodellben két szomszédos analóg állapot energiája egy proton Coulomb-energiájában és a neutron-proton tömegkülönbségben tér el egymástól. Ez az energia különbség jó közelítésben független attól, hogy a proton melyik egyrészecske állapotban van és a

$$\Delta E_C = 1.444 \frac{\bar{Z}}{A^{1/3}} - 1.13 \text{MeV}$$

képlettel adható meg ( $\bar{Z}$  a szomszédos izotópok átlagos  $Z$ -je). Az állapottól való nagymértékű függetlenségnek az az oka, hogy egyrészt a Coulomb-potenciál a magban konstansnak vehető, másrészt a proton-hullámfüggvény nagyrészt a magon belülre korlátozódik.

A héjmodell állapotok azonban közelítőek, hiszen a részecske-lyuk kölcsönhatás a  $\psi_{T,T-1}$  állapotban jelentős lehet. Valóban jelentős is, aminek közvetlen kísérleti bizonyítéka, hogy az E1 bomlások mátrixeleme a héjmodell-értéknél a korrelációk következtében lényegesen kisebb. Ez abból következik, hogy a részecske-lyuk kölcsönhatás ebben az esetben ugyanannak a részecske-lyuk kölcsönhatásnak egy másik izotóp-komponense, amely az optikai dipól-rezonancia energiáját jelentősen megváltoztatja a héjmodell-energiához képest. Ez a részecske-lyuk kölcsönhatás járulékot ad a szülő és leány állapot energiakülönbségéhez. Úgy tűnik tehát, hogy a „realisztikusabb” modell alapján ez az energia különbség eltérhet  $\Delta E_C$ -től.

Ez azonban hibás következtetés. Egyrészt cáfolja a tapasztalat, másrészt elméleti szempontból sem korrekt. Az az állítás ugyanis, hogy két szomszédos



analóg állapot energiája csak a Coulomb-energiában különbözik egymástól a magerók töltésfüggetlenségéből következik és a héjmodellnél, vagy a részecske-lyuk kölcsönhatást is tartalmazó realiztikusbb modellnél sokkal általánosabb.

A gondolatmenetnek az a hibája, hogy a protonrészecske-neutronlyuk kölcsönhatás számításba vétele mellett figyelmen kívül hagyott egy ezzel egyenlő nagyságrendű effektust, a neutron egyrészecske nívók eltolódását a proton egyrészecske nívókhoz képest. Ha ezt is figyelembe vesszük, akkor a szülő és a leány állapot energia különbsége három járulékból áll össze: A  $\Delta E_C$  Coulomb-energiából, a részecske-lyuk kölcsönhatásból és az azonos kvantumszámú proton-neutron nívók energia különbségéből. Töltésszimmetria esetén a két utóbbi járulék pontosan kompenzálja egymást.

## 2. Az izotópspin-formalizmus

Az előző fejezetben a permutációs szimmetria alapján bevezettük és értelmeztük az izotópspin fogalmát. Az így nyerhető fizikai kép egyszerű. Amikor azonban mennyiségi összefüggésekről volt szó (pl. az  $n_s$ , az  $M$  és az  $M'$  kiszámításáról), szisztematikusan a „belátható, hogy” (vagy ezzel ekvivalens) formulát kell alkalmaznunk. Ennek az az oka, hogy a permutációs szimmetrián alapuló megfontolások ugyan a lényegre mutatnak rá és fogalmilag egyszerűek, matematikailag azonban a permutációs csoport szerkezetének bonyolultsága következtében elég komplikáltak. Ezért kívánatos az izotópspin leírására olyan formát találni, amelyben a számítások egyszerűsödnek.

Ilyen a standard izotópspin formalizmus, amely a töltésváltozók és a rájuk ható operátorok bevezetésén alapul. Ebben a formalizmusban az izotópspinre vonatkozó feladatok a forgáscsoporttal kapcsolatos feladatokká alakulnak át. Mivel a forgáscsoport egyszerűbb és a fizikusok jobban ismerik, mint a permutációs csoportot, a módszer előnyei nyilvánvalók. Azonban már most megjegyezzük, hogy korántsem az összes izotópspinnel kapcsolatos feladat alakítható át forgáscsoport problémává. Majd rámutatunk, milyen típusú feladatoknál van szükség továbbra is a permutációs szimmetria közvetlen alkalmazására.

### A) Töltésváltozók, töltésfüggvények.

A standard izotópspin formalizmusban a nukleonok töltését szabadsági foknak tekintjük, amelyet a  $\xi$  töltésváltozóval jelölünk. A  $\xi$  a  $\nu$  (neutron) vagy a  $\pi$  (proton) jelentést veheti fel. Célszerű a  $\nu = 1/2$  és a  $\pi = -1/2$  választás. Ha egy nukleon töltés-hullámfüggvénye (vagy izospin-hullámfüggvénye)  $\chi(\xi)$ , akkor ez a nukleon  $|\chi(\pi)|^2$  valószínűséggel proton,  $|\chi(\nu)|^2$  valószínűséggel pedig neutron. A normalizációs feltétel a következő:

$$1 = |\chi(\pi)|^2 + |\chi(\nu)|^2 = \sum_{\xi} \chi^*(\xi)\chi(\xi) = (\chi, \chi).$$

Amikor a nukleon bizonyosan proton (állapotban van), akkor töltésállapotát a  $\chi_{\pi}(\xi) = \delta_{\pi\xi}$ , ha pedig bizonyosan neutron (állapotban van), akkor  $\chi_{\nu}(\xi) = \delta_{\nu\xi}$  az állapot-függvénye.

**B) A spinnel való analógia.**

A töltés-hullámfüggvény analóg a feles spinű részecskék spin-hullámfüggvényével. A neutronállapot megfelel a felfelé, a protonállapot a lefelé mutató spinnek (ez a konvenció azért kényelmes, mert a magban  $N \geq Z$ , ezért  $T_3 \geq 0$ ). Az analógia formális kiterjesztése érdekében a  $\chi(\xi)$ -t egy hipotetikus háromdimenziós térben, az ún. *töltéstérben* lévő részecske spin-hullámfüggvényének tekintjük.

A töltés-hullámfüggvények a spin-hullámfüggvények mintájára oszlopvektor alakban is felírhatók:

$$\chi(\xi) = \begin{pmatrix} \chi(\nu) \\ \chi(\pi) \end{pmatrix},$$

tehát

$$\chi_\nu(\xi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_\pi(\xi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Az így felírt hullámfüggvényekre ható operátorok  $2 \times 2$ -es mátrixok, amelyek kifejezhetők a Pauli-mátrixokkal analóg

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

operátorok és az egységoperátor kombinációjaként. Használatosak még a

$$\tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

„növelő” és „csökkentő” operátorok, valamint a

$$\tau_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

neutron- ill. proton-projekciós operátorokat.

Legyen  $\tau$  bármelyik a felírt operátorok közül. Ha ez hat egy  $\chi$  töltésfüggvényre, akkor egy másik  $\eta$  töltésfüggvényt kapunk:  $\eta = \tau\chi$ , azaz  $\eta(\xi) = \sum_{\xi'} (\xi|\tau|\xi')\chi(\xi')$ , vagy még részletesebben

$$\begin{pmatrix} \eta(\nu) \\ \eta(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\nu|\tau|\nu) & (\nu|\tau|\pi) \\ (\pi|\tau|\nu) & (\pi|\tau|\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi(\nu) \\ \chi(\pi) \end{pmatrix}.$$

Ha pl.  $\tau = \tau_3$ , akkor innen látható, hogy

$$(\nu|\tau_3|\nu) = -(\pi|\tau_3|\pi) = 1, \quad (\nu|\tau_3|\pi) = (\pi|\tau_3|\nu) = 0,$$

azaz

$$(\xi|\tau_3|\xi') = (\delta_{\nu\xi} - \delta_{\pi\xi}) \delta_{\xi\xi'}.$$

Hasonlóan írható fel a többi  $\tau$  operátor általános mátrixeleme is:

$$\begin{aligned} (\xi|\tau_+|\xi') &= \delta_{\xi\nu}\delta_{\xi'\pi} & (\xi|\tau_-|\xi') &= \delta_{\xi\pi}\delta_{\xi'\nu} \\ (\xi|\tau_n|\xi') &= \delta_{\xi\nu}\delta_{\xi'\nu} & (\xi|\tau_p|\xi') &= \delta_{\xi\pi}\delta_{\xi'\pi}. \end{aligned}$$

A nukleont a töltéstérben egy kétkomponensű mennyiség írja le. Ezért ha az izospint a töltéstérbeli spin nagyságával azonosítjuk (a továbbiakból világos lesz, hogy az így értelmezett izospin azonos az előző fejezetben tárgyalt izospinnel), akkor a nukleon izospinjé  $1/2$ . A nukleon izospin operátora pedig — az  $\mathbf{s} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$  spinoperátor mintájára — a következő:

$$t_\alpha = \frac{1}{2}\tau_\alpha, \quad \text{vagy „vektorosan”} \quad t \sim \frac{1}{2}\tilde{\tau}.$$

A  $\sim$  jelzi, hogy a megjelölt mennyiség a töltéstérben *vektor*.

A szférikus komponensek definíciója a következő:

$$t_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(t_1 \pm it_2) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_\pm.$$

Több nukleonból álló rendszer izospin-operátora az  $\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{s}^{(i)}$  spinoperátor mintájára

$$\hat{T} \sim \sum_{i=1}^A \tilde{t}^{(i)}, \quad \hat{T}_\pm = \sum_{i=1}^A t_\pm^{(i)}.$$

A töltéshullámfüggvény  $\hat{T}_3$ -nak és  $\hat{T}^2$ -nek lehet közös sajátfüggvénye, ezért  $TT_3$ -mal indexelhető:

$$\hat{T}^2 \chi_{TT_3}(\xi_1, \dots, \xi_A) = T(T+1) \chi_{TT_3}(\xi_1, \dots, \xi_A)$$

$$\hat{T}_3 \chi_{TT_3}(\xi_1, \dots, \xi_A) = T_3 \chi_{TT_3}(\xi_1, \dots, \xi_A)$$

$$\hat{T}_\pm \chi_{TT_3}(\xi_1, \dots, \xi_A) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(T \mp T_3)(T \pm T_3 + 1)} \chi_{TT_3 \pm 1}(\xi_1, \dots, \xi_A).$$

### C) A Hamilton-operátor.

A Hamilton-operátor az izospin formalizmusban szimmetrikus az  $x_i \xi_i$  változó párok felcserélésével szemben. Ezt a tényt példán mutatjuk be.

Korábban felírtuk a Hamilton-operátort  $H = H_0 + H_1^c$  alakban, amelyben

$$H_1^c(x_1, \dots, x_A) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^Z U^c(\mathbf{r}_i) - \sum_{i=Z+1}^A U^c(\mathbf{r}_i) \right].$$

Az izospin formalizmusban az ennek megfelelő operátort felülhúzzuk. Így

$$\bar{H}_1^c(x_1\xi_1 \dots, x_A\xi_A) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A U^c(\mathbf{r}_i) [\delta_{\xi_i\pi} - \delta_{\xi_i\nu}].$$

Vegyük észre, hogy itt  $\tau_3^{(i)}$  mátrixelemei lépnek fel, ezért operátorosan

$$\bar{H}_1^c(x_1 \dots, x_A) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^A U^c(\mathbf{r}_i) \tau_3^{(i)}.$$

Legyen pl.  $Z = N = 1$ . A  $H_1^c$  nem szimmetrikus

$$H_1^c(x_1, x_2) = -H_1^c(x_2, x_1) \neq H_1^c(x_1, x_2),$$

de  $\bar{H}_1^c$  az:

$$\bar{H}_1^c(x_1\xi_1, x_2\xi_2) = \bar{H}_1^c(x_2\xi_2, x_1\xi_1), \quad \text{vagy operátorosan} \quad \bar{H}_1^c(x_1, x_2) = \bar{H}_1^c(x_2, x_1).$$

Ezt a gondolatmenetet nyilván tetszőleges  $N, Z$  mellett alkalmazhatjuk, ezért  $\bar{H}_1^c(x_1\xi_1 \dots, x_A\xi_A)$  vagy (izospin operátoros írásmódot feltételezve)  $\bar{H}_1^c(x_1 \dots, x_A)$  szimmetrikus két *tetszőleges* nukleon koordinátájának felcserélésével szemben annak ellenére, hogy  $H_1^c(x_1 \dots, x_A)$  *nem rendelkezik* ezzel a tulajdonsággal.

Térjünk át  $H_0$ -ra. Feltevés szerint  $H_0(x_1 \dots, x_A)$  töltésfüggetlen, ami azt jelenti, hogy független a töltéskoordinátáktól:

$$\bar{H}_0^c(x_1\xi_1 \dots, x_A\xi_A) = H_0(x_1 \dots, x_A).$$

Mint korábban láttuk,  $H_0$  szimmetrikus az  $x_i$ -kben, ezért  $\bar{H}_0$  is szimmetrikus az  $x_i\xi_i$ -kben.

Ezzel beláttuk, hogy egy *általános* (nem töltésfüggetlen)  $\bar{H}_1^c(x_1\xi_1 \dots, x_A\xi_A)$  az  $x_i\xi_i$  változópárok szimmetrikus függvénye.

#### D) Az általánosított Pauli-elv.

Megköveteljük, hogy a teljes (töltéskoordinátákat is tartalmazó) *hullámfüggvény* legyen antiszimmetrikus az  $x_i\xi_i$  változópárokban.

Nézzük például a

$$\bar{H}\Omega = E\Omega$$

Schrödinger-egyenletet, amelyben  $\Omega$  a töltéskoordinátáktól is függő teljes hullámfüggvény.

Ha  $\Omega$  egy megoldás, akkor  $\bar{H}$  szimmetriája következtében  $P_{ij}^x P_{ij}^\xi \Omega$  is megoldás, és ennek következtében az  $\Omega$  antiszimmetrizálható, miközben továbbra is  $E$  energiájú sajátállapot marad. Ha az antiszimmetrizált állapot nem azonosan nulla, akkor a szóban forgó  $E$  megvalósuló energia.

**E)** Adott  $TT_3$ -hoz tartozó teljes hullámfüggvény.

Eddig az izospin formális tárgyalási módjáról volt szó. A következőkben adunk tartalmat ennek a formalizmusnak azzal, hogy kapcsolatba hozzuk az 1. fejezetben bevezetett izospinnel.

Legyen

$$\bar{H}_0 \Omega = E \Omega.$$

Mivel  $\bar{H}_0$  nem függ  $\xi$ -től, az  $\Omega$  felírható egy  $x$ -ektől és egy  $\xi$ -ktől függő hullámfüggvény szorzataként, vagy ilyenek lineárkombinációjaként:

$$\Omega(x_1 \xi_1 \dots, x_A \xi_A) = \sum_i \varphi_i(x_1 \dots, x_A) \chi^i(\xi_1 \dots, \xi_A). \quad (3)$$

Ha ezt beírjuk a Schrödinger-egyenletbe és figyelembe vesszük, hogy  $\bar{H}_0 = H_0$ , akkor nyilván

$$H_0 \varphi_i = E \varphi_i. \quad (4)$$

Ezt az egyenletet elégítik ki a (3)-ban szereplő  $\varphi_i$ -k.

Térjünk most vissza az 1. fejezethez. Tegyük fel, hogy az ott ismertetett gondolatmenet segítségével megmutattuk, hogy az adott  $E$  sajátértékhez tartozó  $\varphi_i$  hullámfüggvények mind a  $T$  izospinnel jelezhetőek. Ezen kívül attól függően, hogy melyik izobárról van szó, az állapot  $T_3 = \frac{N-Z}{2}$ -vel is indexelhető. Így (4)-ben a  $\varphi_i$  olyan  $\psi_{TT_3}(x_1 \dots x_A)$  sajátfüggvény, amely az első  $Z$  és az utolsó  $N$  argumentumában antiszimmetrikus.

Megmutatjuk, hogy  $\psi_{TT_3}$ -nak kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy  $\Omega_{TT_3}$  teljes hullámfüggvény.

**Egyrészt:** Adott  $\psi_{TT_3}(x_1 \dots, x_A)$ -nak megfelelő  $\Omega_{TT_3}(x_1 \xi_1 \dots, x_A \xi_A)$  hullámfüggvényt úgy kapjuk, hogy a (3)-ban az összes  $\chi^i(\xi_1 \dots, \xi_A)$ -t azonos  $TT_3$  kvantumszámhoz tartozónak vesszük, azaz

$$\Omega_{TT_3}(x_1 \xi_1 \dots, x_A \xi_A) = \sum_i \varphi_i(x_1 \dots, x_A) \chi_{TT_3}^i(\xi_1 \dots, \xi_A).$$

Belátható, hogy ilyen és csakis ilyen módon választott  $\chi^i$ -kkel képezhető az általános Pauli elvet kielégítő teljes hullámfüggvény, és megfordítva, az általánosított Pauli-elv megkövetelését éppen ez az egyértelműség indokolja. A különböző  $i$  indexhez tartozó  $\chi_{TT_3}^i$ -k abban különböznek egymástól, hogy az  $A$  darab feles izospin különböző, egymástól független módokon csatolódik össze bennük  $TT_3$  eredővé. Például  $A = 3$ ,  $T = 1/2$  esetében két lineárisan független  $\chi_{TT_3}^i$  képezhető:

$$\chi_{1/2T_3}^1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [[\chi(\xi_1)\chi(\xi_2)]_0 \chi(\xi_3)]_{1/2T_3}$$

$$\chi_{1/2T_3}^2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [[\chi(\xi_1)\chi(\xi_2)]_1 \chi(\xi_3)]_{1/2T_3}.$$

A deuteron esetében  $T = 0$  vagy  $T = 1$  lehet, és mindkét esetben egyetlen  $\chi_{TT_3=0}^i$ -t kapunk:

$$\Omega_{T_0}(x_1 \xi_1, x_2 \xi_2) = \varphi(X_1, x_2) [\chi(\xi_1)\chi(\xi_2)]_{T_0}.$$

Mint hogy  $S = 1, L = 0$ , a  $\varphi$  szimmetrikus, ezért  $[\chi(\xi_1)\chi(\xi_2)]_{T_0}$ -nak antiszimmetrikusnak kell lennie. Ez  $T = 0$ -nál teljesül: a deuteron izospinje zérus.

**Másrészt:** Keressük most egy adott  $\Omega_{TT_3}$ -hoz tartozó  $\psi_{TT_3}$ -t. Azt állítjuk, hogy normálás erejéig

$$\psi_{TT_3}(x_1 \dots, x_A) = \Omega_{TT_3}(x_1\pi \dots, x_Z\pi, x_{Z+1}\nu \dots, x_A\nu). \quad (5)$$

Valóban,

- Az  $\Omega_{TT_3}$  antiszimmetriája következtében (5) jobboldala antiszimmetrikus az első  $Z$  és az utolsó  $N$  argumentumban;
- Az (5) jobboldala (3) segítségével így írható:

$$\sum_i C_{TT_3}^i \varphi(x_1 \dots, x_A); \quad C_{TT_3}^i = \chi_{TT_3}^i(\underbrace{\pi \dots, \pi}_Z, \underbrace{\nu \dots, \nu}_N), \quad (6)$$

tehát kielégíti a

$$H_0 \Omega_{TT_3}(x_1\pi \dots, x_Z\pi, x_{Z+1}\nu \dots, x_A\nu) = E \Omega_{TT_3}(x_1\pi \dots, x_Z\pi, x_{Z+1}\nu \dots, x_A\nu)$$

egyenletet  $E$  sajátértékkel;

- (6)-ból látható, hogy  $2T + 1$  lehetséges  $T_3$  érték van, amelyekre  $C_{TT_3}^i \neq 0$ . Ezért az adott  $E$  energia  $2T + 1$  izobárban fordul elő.

Pontosan ezeknek a feltételeknek tett eleget  $\psi_{TT_3}(x_1 \dots, x_A)$ .

**F)**Példa arra, hogy a számításokat hogyan egyszerűsíti az izospin formalizmus.

Felírjuk a megengedett  $\beta^+$  bomlás Fermi-mátrixelemét izospin-formalizmus használata nélkül:

$$M_F = \sqrt{Z(N+1)}(\psi_{T, T_3-1}, \psi_{TT_3})$$

(a  $\sqrt{Z(N+1)}$  megjelenésének oka az, hogy a kezdeti  $Z$  proton bármelyike bomolhat a végmag  $N+1$  neutronjának bármelyikébe). A skalárszorzat kiszámítása bonyolult. Izospin formalizmusban ugyanez a mátrixelem a következő:

$$M_F = (\Omega_{TT_3+1}, \sum_{j=1}^A \tau_+^{(j)} \Omega_{TT_3}) = -\sqrt{2}(\Omega_{TT_3+1}, T_+ \Omega_{TT_3}).$$

Felhasználva, hogy

$$\begin{aligned} T_+ \Omega_{TT_3} &= \sum_i \varphi_i T_+ \chi_{TT_3}^i = \sum_i \varphi_i \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(T-T_3)(T+T_3+1)} \right] \chi_{T, T_3+1}^i = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(T-T_3)(T+T_3+1)} \Omega_{TT_3+1} \end{aligned}$$

azt találjuk, hogy

$$M_F = \sqrt{(T - T_3)(T + T_3 + 1)}.$$

**G)**Két független rendszer közös teljes hullámfüggvénye.

Legyen

$$\Omega_{TT_3}^A(x_1\xi_1 \dots, x_A\xi_A) \quad \text{és} \quad \Omega_{T'T'_3}^{A'}(x_{A+1}\xi_{A+1} \dots, x_{A+A'}\xi_{A+A'})$$

egy  $A$  és egy  $A'$  tömegszámú mag hullámfüggvénye, amelyeket a  $TT_3$  és a  $T'T'_3$  kvantumszámok jellemeznek. A két független mag rendszerének, mint egésznek, a hullámfüggvénye nem lehet az  $\Omega_{TT_3}^A$  és az  $\Omega_{T'T'_3}^{A'}$  szorzata, mert ez a szorzat nem elégíti ki az általánosított Pauli-elvet. Arra gondolhatnánk, ennek az az oka, hogy a szorzat nem határozott izospinű, ezért a határozott  $\mathcal{T}\mathcal{T}'_3$  izospinű kombinációkat kell felírni:

$$\Omega_{\mathcal{T}\mathcal{T}'_3}^{A+A'} = \sum_{T_3T'_3} (TT_3T'T'_3|\mathcal{T}\mathcal{T}') \Omega_{TT_3}^A \Omega_{T'T'_3}^{A'}.$$

Azonban — sajnos — ez a kombináció se elégíti ki az általánosított Pauli-elvet, ugyanis például  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_3 = T + T'$  esetében  $\Omega_{\mathcal{T}\mathcal{T}'_3}^{A+A'} = \Omega_{TT_3}^A \Omega_{T'T'_3}^{A'}$  nyilván nem antiszimmetrikus. Az általánosított Pauli-elvet kielégítő hullámfüggvény felírásához további antiszimmetrizálás szükséges.

Ha tehát egy rendszer állapotait két független alrendszer állapotaiból akarjuk felépíteni, akkor nem elegendő a vektorösszeadási szabály alkalmazása. Ez az a feladat-típus, amelyet a töltésváltozók bevezetése nem redukál teljes forgáscsoport feladattá. Annyi azonban igaz, hogy a teljes rendszer  $\mathcal{T}$  izospinje kielégíti a  $|T - T'| \leq \mathcal{T} \leq T + T'$  egyenlőtlenséget.

**H)**Izotenzor operátorok.

Legyen adva  $2T+1$  darab  $\Theta_{TT_3}$  ( $-T \leq T_3 \leq T$ ) operátor, amelyek kielégítik a

$$[\hat{T}_\pm, \Theta_{TT_3}] = \mp \sqrt{\frac{(T \mp T_3)(T \pm T_3 + 1)}{2}} \Theta_{TT_3 \pm 1}$$

$$[\hat{T}_3, \Theta_{TT_3}] = T_3 \Theta_{TT_3}$$

relációkat. Az ilyen tulajdonságú  $\Theta_{TT_3}$  egy  $T$ -ed rendű irreducibilis izotenzor operátor  $T_3$  komponense. Példák:

- A  $H_0$  nem függ a  $\xi_i$ -ktől, az összes izospin-operátorral felcserélhető, ezért  $\Theta_{00}$  típusú irreducibilis tenzoroperátor(izoskálár).

- Tekintsük a következő három operátort:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^A U^c(\mathbf{r}_i) t_-^{(i)} \\
& - \sum_{i=1}^A U^c(\mathbf{r}_i) t_3^{(i)} = \bar{H}_1^c \\
& - \sum_{i=1}^A U^c(\mathbf{r}_i) t_+^{(i)}.
\end{aligned}$$

A  $[t, t_3] = it_3$  stb. reláció alkalmazásával belátható, hogy ezek egy izovektor ( $T = 1$ ) operátor komponensei. A  $\bar{H}_1^c$  a  $\Theta_{00}$  típusú komponens.

- A  $\hat{T}_+$ ,  $\hat{T}_3$ ,  $\hat{T}_-$  maguk egy izovektor operátor komponensei.

Az irreducibilis izotenzor operátorok mátrixelemeire érvényes a *Wigner-Eckart tétel*:

$$\langle TT_3\alpha | \Theta_{T\mathcal{T}_3} | T'T'_3\alpha' \rangle = (T'T'_3\mathcal{T}\mathcal{T}_3 | TT_3) \langle T\alpha | | \Theta_{\mathcal{T}} | | T'\alpha' \rangle. \quad (7)$$

A tétel értelme az, hogy a  $T_3T'_3\mathcal{T}_3$  vetületektől való függés egy Clebschbe foglalható.

Példaként keressük meg az izospin operátor redukált mátrixelemét. Legyen (7)-ben  $\Theta_{00} = \hat{T}_3$ . Minthogy

$$\hat{T}_3 | T'T'_3\alpha' \rangle = T_3 | T'T'_3\alpha' \rangle$$

azt találjuk, hogy

$$T'_3 \delta_{TT'} \delta_{T_3T'_3} \delta_{\alpha\alpha'} = (T'T'_3 10 | TT_3) \langle T\alpha | | \hat{T} | | T'\alpha' \rangle,$$

azaz

$$\langle T\alpha | | \hat{T} | | T'\alpha' \rangle = \delta_{TT'} \delta_{T_3T'_3} \delta_{\alpha\alpha'} \frac{T_3}{(T'T'_3 10 | TT_3)} = \sqrt{T(T+1)} \delta_{TT'} \delta_{T_3T'_3} \delta_{\alpha\alpha'}.$$

Mint látjuk, a redukált mátrixelem  $TT'$ -ben diagonális. Ez speciálisan az izospin operátor mátrixelemére igaz, egy tetszőleges izovektor operátor mátrixelemére már nem.

Összefoglalóan megállapíthatjuk, hogy a *magfizikában* az izotópspin pusztán technikai szerepet játszik: Megkönnyíti annak a követelménynek a teljesítését, hogy az atommag hullámfüggvénye legyen antiszimmetrikus külön a protonok és külön a neutronok tér-spin koordinátáinak felcserélésével szemben.



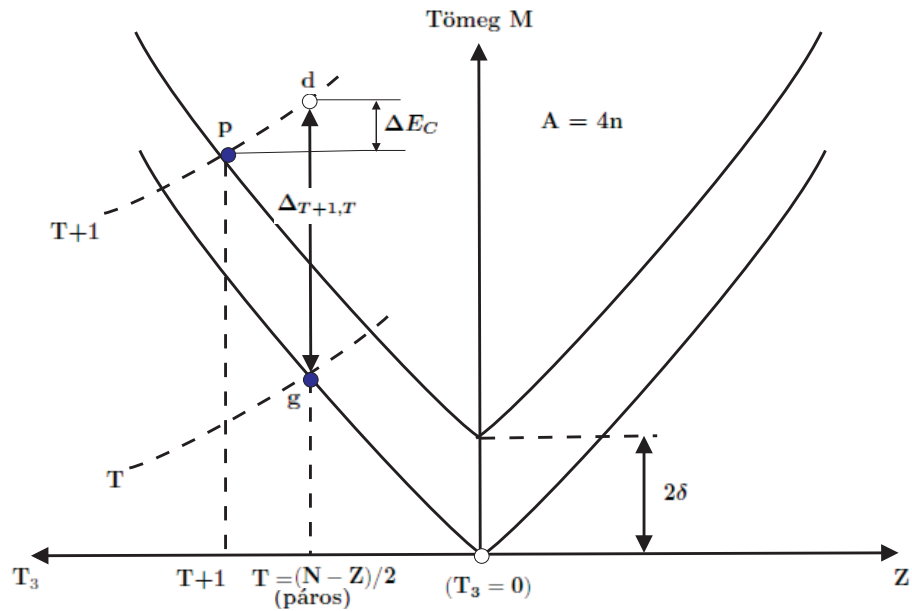
### 3. Az állapotok gerjesztési energiája

Egy adott  $ANZ$  izotóp alapállapota és alacsonyan fekvő nívói a tapasztalat szerint normál izospinűek:

$$T = T_3 = \frac{N - Z}{2}.$$

Egy bizonyos gerjesztési energiánál, amelyet  $\Delta_{T+1,T}$ -vel jelölünk, megjelenik az első  $T + 1$  izospinű állapot. Fejezzük ki  $\Delta_{T+1,T}$ -t a félempirikus tömegformula segítségével!

Rajzoljuk fel a stabil izotópok görbéjét:



2. ábra

A félempirikus tömegformula szerint alapállapotra  $M = M_0 - B$ , ahol  $M_0$  szabad nukleonok tömege, a

$$B = B_t + B_f + B_c + B_s + B_p$$

pedig a kötési energia, amelyben

$$\left. \begin{array}{l} B_t \text{ a térfogati} \\ B_f \text{ a felületi} \\ B_c \text{ a Coulomb} \\ B_s \text{ a szimmetria} \\ B_p \text{ a pairing} \end{array} \right\} \text{járulék a kötési energiához.}$$

A kötést növelő járulékok pozitívak, ezért  $B_t$  pozitív,  $B_p$  jelváltó, a többi negatív:

$$B_t = fA$$

$$B_f = -gA^{2/3}$$

$$B_c = -C \frac{Z^2}{A^{1/3}} = -C \frac{\left(\frac{1}{2}A - \frac{N-Z}{2}\right)^2}{A^{1/3}} = -C \frac{\left(\frac{1}{2}A - T_3\right)^2}{A^{1/3}}$$

$$B_s = a \frac{\left(\frac{N-Z}{2}\right)^2}{A} = -a \frac{T_3^2}{A}$$

$$B_p = \left\{ \begin{array}{l} +\delta \text{ ps-ps magokra} \\ -\delta \text{ ptl-ptl magokra} \\ 0 \text{ páratlan magokra} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} [1 + (-1)^A] (-1)^{\frac{1}{2}A - T_3} \delta,$$

ui.  $\frac{1}{2}A - T_3 = Z$ .

A félempirikus tömegformula az alapállapotokra — a 2. ábrán  $p$ -re és  $g$ -re — érvényes. Azonban lehet úgy általánosítani, hogy az alapállapotokkal analóg állapotok energiáját is megadja. Ez úgy történik, hogy  $B_s$  és  $B_p$  kifejezésében  $T_3$ -at  $T$ -vel helyettesítjük. Ez az eljárás empirikus nézőpontból teljesen indokolt: Ha Coulomb-kölcsönhatás nem lenne, akkor az így értelmezett tömegképlet egy izomultipletten belül azonos tömegeket adna. A tömegfelhasadásért a  $B_c$ , valamint az  $M_0$  a felelős. Ezért ha a tömegekre az  $M(A, T, T_3)$  jelölést használjuk, akkor

$$\Delta_{T+1, T} = M(A, T+1, T) - M(A, T, T) = [B_s(A, T) + B_p(A, T)] - [B_s(A, T+1) + B_p(A, T+1)],$$

ahol kihasználtuk, hogy  $B_p$ ,  $B_f$ ,  $B_c$  nem függ  $T$ -től.

Természetesen definiálhatunk egy általános  $\Delta_{T, T'}$  mennyiséget, amely az első  $T$  izospinű és az első  $T'$  izospinű állapot energia-különbségével egyenlő:

$$\Delta_{T, T'} = [B_s(A, T') - B_s(A, T)] + [B_p(A, T') - B_p(A, T)].$$

Mivel

$$B_s(A, T) = -a \frac{T^2}{A}, \quad (8)$$

és

$$B_p = \frac{1}{2} [1 + (-1)^A] (-1)^{\frac{1}{2}A - T} \delta,$$

azt találjuk, hogy

$$\Delta_{T, T'} = \frac{a}{A} [T^2 - T'^2] + \frac{1}{2} [1 + (-1)^A] \left[ (-1)^{\frac{1}{2}A - T'} - (-1)^{\frac{1}{2}A - T} \right] \delta.$$

Célszerűnek látszik ezt két pontban általánosítani:

1. A  $B_s$ -re megengedünk (8)-nál valamivel általánosabb  $T$ -függést:

$$B_s(A, T) = -a \frac{T(T+b)}{A}.$$

A  $b$  értékéről több feltevés is forgalomban van, ezekre alább majd kitérünk.

2. Megengedjük, hogy  $A$ ,  $b$  és  $\delta$  símán függjenek  $A$ -tól:

$$\begin{aligned} \Delta_{TT'} &= \frac{a(A)}{A} [T(T+b(A)) - T'(T'+b(A))] + \\ &+ \frac{1}{2} [1 + (-1)^A] \left[ (-1)^{\frac{1}{2}A - T'} - (-1)^{\frac{1}{2}A - T} \right] \delta(A). \end{aligned}$$

Mint látjuk,  $\Delta_{TT'}$  két járulékból tevődik össze. Létezik egy pairing járulék (a képlet második sora). Ha ugyanis  $A$  páros, akkor a  $p$  és a és a  $g$  magok közül az egyik ps-ps, a másik ptl-ptl, ezért az  $M_p - M_g$  különbséghez a pairing-energia járulékot ad. Hoha  $p$  és  $d$  közül is az egyik ps-ps, a másik ptl-ptl, az ő energiájuk csak a Coulomb-energiában különbözik egymástól. Ezért a pairing járulék „átöröklődik” az  $M_d - M - g$  különbségbe.

A  $\Delta_{TT'}$  első tagja a szimmetria-energiából származó járulék. A  $b(A)$  kísérletileg a következő módon vizsgálható. Legyen

$$R_{TT'} = \frac{\Delta_{T+2,T}}{\Delta_{T'+2,T'}}.$$

Ha a  $\Delta_{TT'}$ -ben  $T$  és  $T'$  páros számban különböznek egymástól, akkor a pairing nem ad járulékot  $\Delta_{TT'}$ -höz, ezért

$$\begin{aligned} \Delta_{T+2,T} &= \frac{a(A)}{A} [(T+2)(T+2+b(A)) - T(T+b(A))] = \\ &= \frac{a(A)}{A} [4T + 4 + 2b(A)], \end{aligned}$$

tehát

$$R_{TT'} = \frac{2T + 2 + b(A)}{2T' + 2 + b(A)}.$$

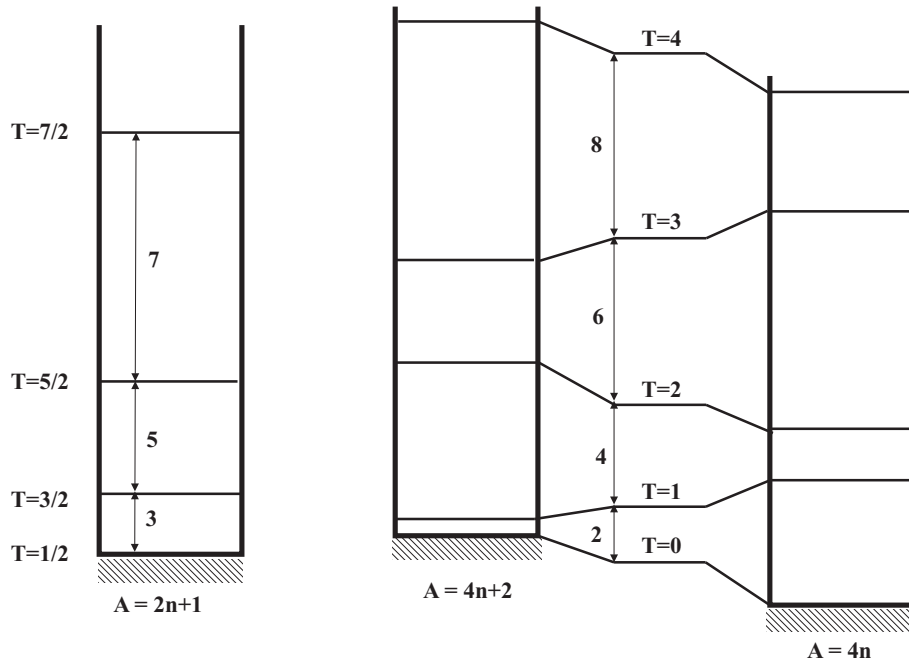
Az  $A < 100$  tartományban  $R_{10}$ -t,  $R_{21}$ -t és  $R_{20}$ -t lehetett analizálni. Az eredmény az volt, hogy  $R_{TT'}$  nagy pontossággal  $A$ -tól független konstans minden adott  $TT'$  pár mellett. Ebből következik, hogy  $b$  nem függ  $A$ -tól. A  $b$  értékére vonatkozóan a következő hipotézisek léteznek:

$$b = \begin{cases} 0, \text{ az eredeti félempirikus tömegformula} \\ 4, \text{ Blatt-Weisskopf könyv; az } SU(4) \text{ szimmetria egy változata} \\ 2.5, \\ 1, \text{ Talmi-de Shalit könyv; töltésszimmetrikus párkölcsonhatás Hecht-modellje.} \end{cases}$$

A kísérlet a  $b = 1$  értéket favorizálja. Ezt elfogadva

$$\Delta_{TT'} = \frac{a(A)}{A} [T(T+1) - T'(T'+1)] + \frac{1}{2} [1 + (-1)^A] \left[ (-1)^{\frac{1}{2}A - T'} - (-1)^{\frac{1}{2}A - T} \right] \delta(A).$$

Szembetűnő a rotációs sáv jelleg:



3. ábra

A  $b = 1$  értékre eljuthatunk a következő egyszerű gondolatmenet alapján. Láttuk, hogy egy  $T$  izospinű állapotban a szimmetrikus párok átlagszáma

$$n_s = \frac{1}{2} \left[ \frac{A}{2} \left( \frac{A}{2} + 1 \right) - T(T+1) \right].$$

Mint hogy az összes párok száma  $A(A-1)/2$ , annak valószínűsége, hogy egy adott pár szimmetrikus állapotban legyen

$$p_s = \frac{2}{A(A+1)} n_s(A, T).$$

Ha kiválasztunk egy nukleont, ezzel csak olyan nukleonok hatnak kölcsön, amelyek  $\sim r_0$  távolságon belül vannak. Ezek száma a mag inkompresszibilitása miatt

állandó. Ha feltesszük, hogy a kötéshez ezek közül csak azok adnak járulékot, amelyek a kiválasztott nukleonnal szimmetrikus párt képeznek, akkor az egy nukleonra eső kötési energiának  $p_s$ -sel kell arányosnak lennie, azaz a teljes kötési energia

$$B \sim AP_s \sim \frac{1}{A-1} n_s(A, T).$$

Az  $A$  mellett elhagyható az 1, a  $T$  mellett azonban nem, ezért

$$B \sim \frac{1}{A} \left[ \frac{A^2}{4} - T(T+1) \right]$$

tehát

$$B = \frac{\alpha}{4} A - \frac{\alpha}{A} T(T+1).$$

Az azonosítás nyilvánvaló:

$$\frac{\alpha}{4} A = B_T = fA, \quad -\frac{\alpha}{4} T(T+1) = B_s = -\frac{a}{4} T(T+1),$$

ahonnan  $a = 4f$ . Minthogy  $a \approx 80 \text{ MeV}$ ,  $f \approx 16 \text{ MeV}$ , ez igazán jól teljesül, ha a gondolatmenet teljesen kvalitatív jellegére tekintettel vagyunk. A  $\Delta_{T+1, T}$  energiakülönbség tehát feltehetően kapcsolatos a szimmetrikus párok átlagos számával, ezért „izotóp gap”-nek nevezhetjük.

Térjünk ki még az ún. *inverzió* jelenségére. Inverzióról akkor beszélünk, ha az alapállapot izospinje nem a lehető legkisebb  $\frac{N-Z}{2} = T$  érték, hanem  $\frac{N-Z}{2} + 1$ . Ez a jelenség akkor következik be, amikor  $\Delta_{T+1, T} < 0$ . Minthogy  $\Delta_{T+1, T}$ -hez a szimmetriaenergia járuléka mindig pozitív, az inverzió szükséges feltétele az, hogy a pairing járulék negatív legyen, ami csak ptl-ptl magoknál fordul elő. Ebben az esetben az inverzió feltétele

$$\Delta_{T+1, T} = \frac{2a(A)}{A} (T+1) - 2\delta(A) < 0,$$

azaz

$$\delta(A) > \frac{a(A)}{A} (T+1).$$

Ez a feltétel  $T$  (és  $A$ ) növelésével egyre nehezebben teljesíthető, ezért invertált magok praktikusán csak  $T = 0$ -nál fordulnak elő. Ezek a következők:  $^{34}\text{Cl}$ ,  $^{42}\text{Sc}$ ,  $^{46}\text{V}$ ,  $^{50}\text{Mn}$ ,  $^{54}\text{Co}$ . Csekély számuk ellenére a jelentőségük nagy, mert csak ezekben az esetekben fordul elő, hogy két szomszédos mag alapállapota azonos izobár multipléttbe tartozik (a  $T = 1/2$  tükrömágok ilyenek még).

## 4. Az állapotok izospin tisztasága

Először az alapállapot izospin tisztaságának becslésére vezetünk le képletet. Legyen — mint korábban —  $H^c$  a Coulomb-kölcsönhatás operátora, amely

egyrészecske közelítésben  $r_i < R$  esetén

$$H^c = \sum_{i=1}^A \frac{3Ze^2}{2R} \left(1 - \frac{r_i^2}{3R^2}\right) \left(\frac{1}{2} - t_3^{(i)}\right).$$

Ezt a következő három részre bontjuk:

$$H_0^c = \sum_{i=1}^A \frac{3Ze^2}{2R} \left(1 - \frac{r_i^2}{3R^2}\right) \cdot \frac{1}{2},$$

valamint

$$\left. \begin{aligned} V_3 &= -\frac{3Ze^2}{2R} \hat{T}_3 \\ U_3 &= \frac{Ze^2}{2R^3} \sum_i r_i^2 t_3^{(i)} = \frac{Ze^2}{2r_0^3 A} \sum_{i=1}^A r_i^2 t_3^{(i)} \end{aligned} \right\} V_3 + U_3 = H_1^c.$$

A  $H_0^c$  izoszkalár, ezért a Wigner-Eckart tétel értelmében a mátrixelemei a  $T$ -ben diagonálisak. Így  $H_0^c$  nem járul hozzá az izospin tisztaság sérüléséhez. A  $V_3$  és az  $U_3$  izovektorok (pontosabban egy-egy izovektor harmadik komponensei). Egy izovektor operátor redukált mátrixeleme általában nem diagonális  $T$ -ben, tehát az izovektor operátor képes izospin tisztátalanságot előidézni. A  $V_3$  azonban  $\hat{T}_3$ -mal arányos, és azt megmutattuk, hogy speciálisan a teljes izospin operátor mátrixelemei diagonálisak  $T$ -ben. Ezért  $V_3$  nem ad járulékot az izospin keveredéshez (de a  $\Delta E_C$  Coulomb-energiához ad járulékot, ezért nem kell feltétlenül meglepődni azon, hogy egy izobár multiplett állapotainak energiafelhasadása nagy annak ellenére, hogy az állapotok nagymértékben izospin tiszták). A teljes Hamilton-operátort ezért így bontjuk fel:

$$H = H'_0 + U_3, \quad \text{ahol} \quad H'_0 = H_0 + V_3.$$

A  $H'_0$  sajátállapotait  $|\rangle$ -vel, a  $H$  sajátállapotait  $|\rangle$ -vel jelöljük. A  $|\rangle$  állapotoknál a  $TT_3$  kvantumszámot külön feltüntetjük.

Legyen  $|\alpha\rangle$  a mag valódi alapállapota és  $|\alpha, T, T_3\rangle$  az az állapot, amely az  $U_3$  perturbáció hatására átmegy  $|\alpha\rangle$ -ba. Így első rendben

$$|\alpha\rangle = |\alpha TT_3\rangle + \sum_{\beta} x_{\beta} |\beta, T, T\rangle + \sum_{\gamma} x_{\gamma} |\gamma, T + 1, T\rangle.$$

Az izospin keveredés mértéke

$$P = \sum_{\gamma} |x_{\gamma}|^2 = \sum_{\gamma} \frac{|(\gamma, T + 1, T | U_3 | \alpha TT)|^2}{(E_{\gamma} - E_{\alpha})^2},$$

ahol

$$H'_0 |\gamma, T + 1, T\rangle = E_{\gamma} |\gamma, T + 1, T\rangle \quad H'_0 |\alpha TT\rangle = E_{\alpha} |\alpha, TT\rangle.$$

Legyen  $|\gamma_1\rangle$  a legalacsonyabb energiájú  $T + 1$  izospinű állapot. Ha

$$H|\gamma_1\rangle = \varepsilon_{\gamma_1}|\gamma_1\rangle, \quad H|\alpha\rangle = \varepsilon_\alpha|\alpha\rangle,$$

akkor

$$\varepsilon_{\gamma_1} - \varepsilon_\alpha = \Delta_{T+1,T} \approx \frac{2a}{A}(T + 1).$$

Perturbatív tárgyalásról lévén szó írhatjuk, hogy

$$E_\gamma - E_\alpha \geq E_{\gamma_1} - E_\alpha \approx \varepsilon_{\gamma_1} - \varepsilon_\alpha \approx \frac{2a}{A}(T + 1).$$

Ezért

$$P \leq \left[ \frac{A}{2a(T + 1)} \right]^2 \sum_\gamma |(\gamma, T + 1, T | U_3 | \alpha TT)|^2.$$

Beírva ide  $U_3$  konkrét alakját

$$P \leq \left( \frac{e^2}{4r_0^3 a} \right)^2 \left( \frac{Z}{T + 1} \right)^2 \sum_\gamma |(\gamma, T + 1, T | \sum_i r_i^2 t_3^{(i)} | \alpha TT)|^2.$$

A  $|\gamma, T + 1, T\rangle$  állapotok izospinje  $T + 1$ . Ez a szomszédos („baloldali”) mag izospinje. Legyen  $|\gamma, T + 1, T + 1\rangle$  a  $|\gamma, T + 1, T\rangle$  analogonja a szomszédos magban:

$$T_- |\gamma, T + 1, T + 1\rangle = \sqrt{T + 1} |\gamma, T + 1, T\rangle.$$

Ezt beírva

$$P \leq \left( \frac{e^2}{4r_0^3 a} \right)^2 \left( \frac{Z}{T + 1} \right)^2 \frac{1}{T + 1} \sum_\gamma |(\gamma, T + 1, T + 1 | T_+ \sum_i r_i^2 t_3^{(i)} | \alpha TT)|^2.$$

Használjuk ki, hogy  $T_+ t_3^{(i)} = t_3^{(i)} T_+ - t_+^{(i)}$  és  $T_+ \alpha TT = 0$ :

$$P \leq \left( \frac{e^2}{4r_0^3 a} \right)^2 \left( \frac{Z}{T + 1} \right)^2 \frac{1}{T + 1} \sum_\gamma |(\gamma, T + 1, T + 1 | \sum_i r_i^2 t_+^{(i)} | \alpha TT)|^2.$$

A  $\gamma$  szerinti összegzés a szomszédos mag normál,  $T + 1$  izospinű állapotaira terjed ki. De  $\sum_i r_i^2 t_+^{(i)}$  izovektor jellege miatt a többi állapotra a mátrixelem a Wigner-Eckart tétel miatt zérus. Ezért az összegzés kiterjeszhető az összes  $|\gamma T' T + 1\rangle$  állapotra. A teljesség kihasználásával

$$P \leq \left( \frac{e^2}{4r_0^3 a} \right)^2 \left( \frac{Z}{T + 1} \right)^2 \frac{1}{T + 1} |(\alpha TT | (\sum_i r_i^2 t_+^{(i)})^+ (\sum_i r_i^2 t_+^{(i)}) | \alpha TT)|^2.$$

Most célszerű másodkvantált alakra áttérni:

$$\sum_i r_i^2 t_+^{(i)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{ab} (a | r^2 | b) \eta_a^+ \eta_b^p$$

$$\left( \sum_i r_i^2 t_+^{(i)} \right)^+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{a'b'} (b' | r^2 | a') \eta_{b'}^+ \eta_{a'}^p.$$

Ekkor

$$P \leq \left( \frac{e^2}{4r_0^3 a} \right)^2 \left( \frac{Z}{T+1} \right)^2 \frac{1}{2(T+1)} \sum_{aba'b'} (a|r^2|b)(b'|r^2|a') (\alpha TT | \overset{+}{\eta}_b^p \overset{+}{\eta}_a^n \overset{+}{\eta}_a^p \overset{+}{\eta}_b^n | \alpha TT).$$

A becslés érdekében feltesszük, hogy  $|\alpha TT\rangle$  Hartree-Fock alapállapot:

$$\begin{aligned} (\alpha TT | \overset{+}{\eta}_b^p \overset{+}{\eta}_a^n \overset{+}{\eta}_a^p \overset{+}{\eta}_b^n | \alpha TT) &= (\alpha TT | \overset{+}{\eta}_b^p \overset{+}{\eta}_b^p \overset{+}{\eta}_a^n \overset{+}{\eta}_a^n | \alpha TT) = \\ &= (\alpha TT | \overset{+}{\eta}_b^p \overset{+}{\eta}_b^p | \alpha TT) (\alpha TT | \overset{+}{\eta}_a^n \overset{+}{\eta}_a^n | \alpha TT) = n_b^p \delta_{b'b} [\delta_{a'a} - n_a^n \delta_{a'a}] = \delta_{a'a} \delta_{b'b} n_b^p (1 - n_a^n). \end{aligned}$$

Így

$$P \leq \left( \frac{e^2}{4r_0^3 a} \right)^2 \left( \frac{Z}{T+1} \right)^2 \frac{1}{2(T+1)} \sum_{ab} |(a|r^2|b)|^2 n_b^p (1 - n_a^n).$$

Az  $a, b$  kvantumszámok teljesen kiírva a következők:  $\nu l j m$ . Zárt héjakat feltételezve

$$P \leq \left( \frac{e^2}{4r_0^3 a} \right)^2 \left( \frac{Z}{T+1} \right)^2 \frac{1}{2(T+1)} \sum_{\nu\nu'lj} (2j+1) |(\nu'lj|r^2|\nu l j)|^2 n_{\nu l j}^p (1 - n_{\nu'l j}^n).$$

„Ránézésre” is valószínű, hogy  $A, Z$  növelésével  $P$  csökken, hiszen az alapállapotokra  $T = \frac{N-Z}{2}$  gyorsabban nő, mint  $Z$ . Továbbá, a mátrixelemhez járulékot adó állapotok egyre „ortogonálisabbak” egymásra, ami az  $r^2$  lassan változó függvény mátrixelemét is lényegesen lecsökkenti. Valóban, pl. a <sup>208</sup>Pb esetén

$$n_{\nu l j}^p = \begin{cases} 1 & \text{ha } \nu \leq 4 \quad (\text{negyedik oszcillátor héj}) \\ 0 & \text{ha } \nu > 6, \end{cases}$$

$$1 - n_{\nu'l j}^n = \begin{cases} 1 & \text{ha } \nu' \geq 6 \quad (\text{hatodik oszcillátor héj}) \\ 0 & \text{ha } \nu' < 6. \end{cases}$$

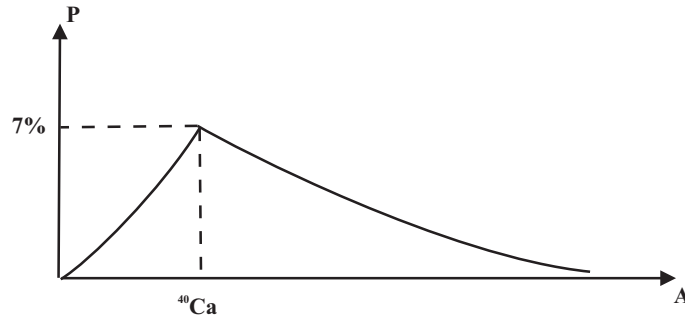
A legnagyobb járulékot adó  $\nu = \nu'$  mátrixelem nem lép fel.

Ebben az értelemben mondhatjuk, hogy  $P$  kicsiségének az oka a nagy neutrontöbblet.

A kapott képlet lényegében a *Szliv-Haritonov formula*<sup>3</sup>. A képlet alapján végzett numerikus számítás eredményét a 4. ábra mutatja. Megjegyezzük, hogy a becslés csak alapállapotra lehet jó, amikor az  $r_i > R$  tartomány járuléka kicsi (Szliv és Haritonov ezt a járulékot a százalék tört részének találták).

<sup>3</sup>L. A. Sliv and Yu. I. Charitonov, Phys. Lett. 16 **176**, (1965)





4. ábra

A kísérleti ellenőrzés a  $\Delta T = 1$  megengedett  $\beta$ -átmenetek  $M_F$  Fermi-mátrix-elemének mérése útján történhet. Ha ugyanis az állapotok izospin tiszták, akkor

$$M_F = (\alpha TT|T_-|\gamma_1, T+1, T+1) = (T+1, T+1, 1, -1|TT)(T||\hat{T}||T+1) = 0.$$

Az  $M_F$  zérustól való eltéréséből a  $P$ -re lehet következtetni. A mérések szerint ez valóban százalék nagyságrendű.

Térjünk most át a kontinuumbeli állapotok, vagyis a *rezonanciák* izospin tisztaságára. A szokásoknak megfelelően az alapállapot izospinjére (a normál izospinre) a  $T_<$  jelet használjuk. A  $T_< + 1$  anomális izospin jele  $T_>$ .

Mindenekelőtt a kérdésfeltevést kell pontosítani. Nem a rezonanciaenergiánál vett teljes szórási hullámfüggvény izospin tisztaságáról van szó, hanem a  $T_>$  anomális izospinű rezonanciának megfelelő  $R$ -mátrix állapot izospin tisztaságáról. Mint látni fogjuk, ez az izospin tisztaság bizonyos mértékben a rezonanciaállapot definíciójától függ, azaz tartalmaz bizonyos önkényt.

Sokan (mint pl. *D. Robson*<sup>4</sup> használják azt a közelítő feltevést, hogy a rezonanciához tartozó  $R$ -mátrix állapot izospinje tiszta, azaz nincs un. *belső mixing*. Ennek a hipotézisnek az a következménye, hogy a rezonanciaállapotnak megfelelő  $E_>$  energiánál (de csak ebben a matematikai pontban) a belső hullámfüggvény tisztán  $T_>$  izospinű. Ez több következménnyel jár.

1. Ha feltesszük, hogy  $\sigma_{pp}$  fluktuációi a  $T_<$  állapotokból erednek, akkor a fluktuációknak egy bizonyos energián el kell tűnniök. Ezt az „eltűnést” a rezonancia közepe táján valóban megfigyelhetjük.
2. A  $(p, n)$  reakció alapállapothoz közeli végállapot esetén csak a  $T_<$  állapotokon keresztül történhet. Valóban, ha a targetmag izospinje  $T_0$ , akkor az ilyen  $(p, n)$  reakcióban a végmag izospinje  $T_0 - 1$ . Az analóg rezonancia izospinje  $T_> = T_0 + 1/2$ . Ez neutronbomlással csak  $T_0$  izospinű állapotba mehet át. A  $T_< = T_0 - 1/2$  állapotok viszont bomolhatnak neutronnal  $T_0 - 1$  izospinű állapotra. Ezért belső mixing hiánya esetén a  $(p, n)$  reakció hatáskeresztmetszetének is el kell tűnnie egy, a rezonancia tartományba eső pontban. Ezt a jellegzetességet is megfigyelték, bár a Robson-elmélettel nincs mindig kvantitatív egyezés.

<sup>4</sup>Phys. Rev. **137B** 535 (1965)

3. Teljesen hasonló a helyzet a  $^{37}\text{Cl}(p, \alpha_0)^{34}\text{S}$  reakcióval. Itt a  $^{37}\text{Cl}$  izospinje  $T_0 = 3/2$ , tehát  $T_> = 2$ ,  $T_< = 1$ . A  $^{34}\text{S}$  izospinje  $T = 1$ . Minthogy az  $\alpha$  izospinje zérus, a reakció csak a  $T_<$  állapotokon keresztül történhet. A hatáskeresztmetszet jellegzetes eltűnését itt is megtalálták.

A felsorolás mutatja, hogy az a hipotézis, hogy belső mixing nincs, legalább is nem mond ellent a tapasztalatnak, ezért munkahipotézisként elfogadható. A hipotézis tulajdonképpen két feltevésre bontható:

- a) a Hamilton operátor a különböző izospinű  $R$ -mátrix állapotokat nem keveri észrevehető mértékben;
- b) az  $R$ -mátrix állapotokra vonatkozó határfeltételek megengednek tiszta izospinű állapotokat.

Ez utóbbi kritériumot vizsgáljuk meg részletesebben! Legyen  $|T = T_>, T_3 = T_< \rangle \equiv |T_> T_< \rangle$  egy  $R$ -mátrix állapot a kontinuumban, amely egy analóg rezonanciának felel meg. Az állapot bomlási csatornáit közül válasszuk ki a következő kettőt:

$$\begin{array}{l}
 |T_> T_< \rangle \begin{cases} \nearrow |T_> - 1/2, T_> - 1/2 \rangle + p \equiv |T_0 T_0 \rangle + p \dots \dots C_1 \\ \searrow |T_> - 1/2, T_> - 3/2 \rangle + n \equiv |T_0 T_0 - 1 \rangle + n \dots \dots C_2 \end{cases}
 \end{array}$$

A  $C_1$  csatorna az, amelyen keresztül előállítjuk a  $|T_> T_< \rangle$  analóg állapotot, tehát ez a csatorna nyitott. Ugyanakkor az esetek zömében a  $C_2$  töltéskicserélő csatorna teljesen vagy majdnem teljesen zárt. A két csatorna hullámfüggvénye ezért a csatornatartományban erősen különböző, következésképpen nagyon különbözik az  $S_c + iP_c$  logaritmusos derivált is. Ahhoz viszont, hogy a belső hullámfüggvény izotópspin szempontból tiszta legyen, a  $C_1$  és a  $C_2$  csatorna kijáratánál azonos határfeltételt kell kielégítenie. Ezt a határfeltételt a belső hullámfüggvényre előírt  $B_c$  logaritmusos derivált tartalmazza minden csatornára. Ha megköveteljük, hogy ne legyen belső mixing, akkor  $B_{c_1} = B_{c_2}$ -t kell választanunk.

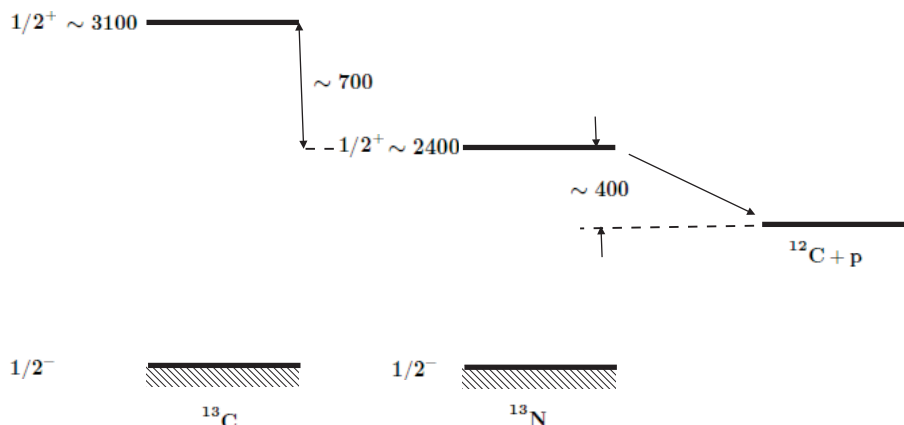
Ez azonban azzal a következménnyel jár, hogy nívóeltolódás jön létre. Valóban, az  $R$ -mátrix elmélet szerint két csatorna esetén a nívóeltolódás

$$\Delta_\lambda = -(S_{C_1} - B_{C_1})\gamma_{\lambda C_1}^2 - (S_{C_2} - B_{C_2})\gamma_{\lambda C_2}^2.$$

Minthogy a  $C_1$  csatorna nyitott, a  $C_2$  pedig zárt (vagy alig nyitott),  $S_{c_1}$  és  $S_{c_2}$  általában lényegesen különbözik egymástól. Ha a  $B_{c_1} \neq B_{c_2}$  választás meg lenne engedve, akkor  $B_{c_i} = S_{c_i}$  ( $i = 1, 2$ ) választással  $\Delta_\lambda = 0$  elérhető volna. Ekkor azonban a rezonanciaállapot izospinje nem lenne tiszta, és az izospintisztaságból következő esetleges egyszerűsítések nem lennének végrehajthatók. Ha viszont megköveteljük az izospintisztaságot, akkor mondjuk  $B_{c_1} = B_{c_2} = S_{c_2}$ -t választva azt találjuk, hogy

$$\Delta_\lambda = -(S_{c_1} - B_{c_2})\gamma_{\lambda c_1}^2.$$

Ezt a nem eltüntethető nívóeltolódást *Thomas-Ehrmann shiftnek* nevezik. Thomas és Ehrmann ugyanis ezzel magyarázták a  $^{13}\text{C}$  és a  $^{13}\text{N}$  első gerjesztett állapotai közötti eltolódást:



A két alapállapot és az első gerjesztett állapotok egy-egy izomultipllett elemei, ezért azt várjuk, hogy energiáik a proton Coulomb energiájától eltekintve egyezzenek meg egymással. Minthogy a proton Coulomb-energiája gyakorlatilag ugyanaz az alapállapotban és az első gerjesztett állapotban, ezt a járulékot az alapállapotok egy szinten történő ábrázolásával gyakorlatilag kiküszöböltük. Azt várnánk tehát, hogy a töltésfüggetlenség következtében az első gerjesztett állapotok is egy szinten legyenek.

Ehhez azonban valójában még az is szükséges, hogy a belső hullámfüggvényekre vonatkozó határfeltételek *megengedjenek* azonos izospinű állapotokat, vagyis a határfeltételek maguk is „töltésfüggetlenek” legyenek. Az adott esetben ez azt jelenti, hogy a  $^{13}\text{C}$  gerjesztett állapot hullámfüggvényének meghatározásánál a  $^{12}\text{C} + n$  zárt csatornában előírt  $B_2$  határfeltétel egyezzen meg a  $^{13}\text{N}$  mag hullámfüggvényére vonatkozó  $^{12}\text{C} + p$  csatornában érvényes  $B_1$  határfeltétellel, azaz legyen  $B_1 = B_2$ .

Az első gerjesztett állapotok nívóeltolódása a  $^{13}\text{C}$ -ban és az  $^{13}\text{N}$ -ban így

$$\Delta_1 = -(S_1 - B_1)\gamma_1^2$$

$$\Delta_2 = -(S_2 - B_2)\gamma_2^2$$

A két nívó  $\Delta$  relatív eltolódása  $B_2 = B_1 = S_2$  választás mellett  $\Delta_N$ -nel azonos:

$$\Delta = \Delta_1 = -(S_1 - S_2)\gamma_1^2.$$

Az  $S_1$  és az  $S_2$  annyira különbözik egymástól, hogy Thomas és Ehrmann becslése szerint  $\Delta$  elérheti a tapasztalt  $700 \text{ keV}$  nagyságot.

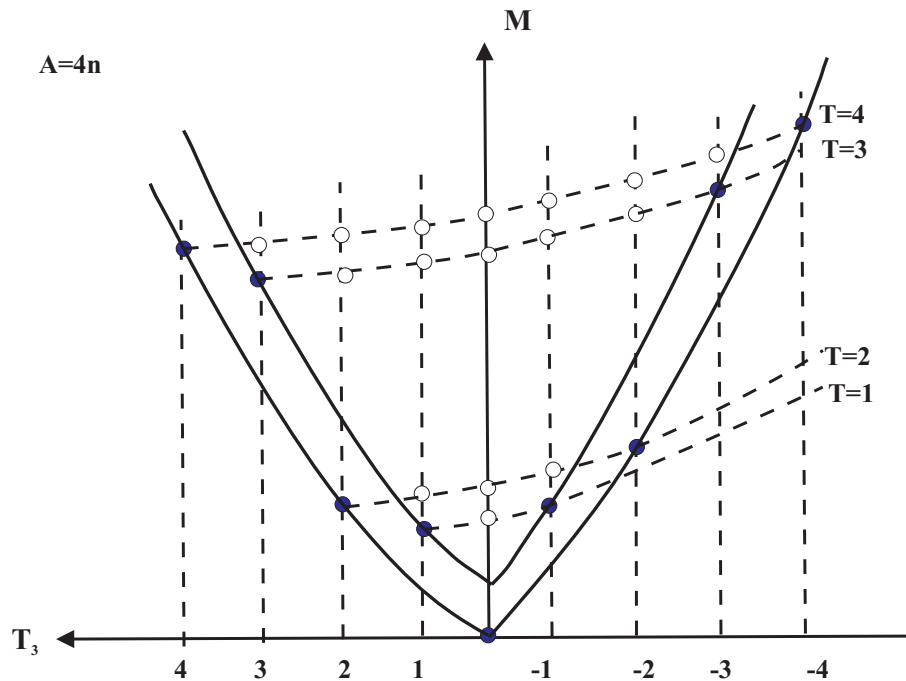
Aláhúzzuk, hogy a  $B_1 = B_2$  kikötés azért volt kötelező, mert feltettük, hogy nincs belső mixing. Ha belső mixinget megengedünk, akkor  $B_1 = S_1$ ,  $B_2 = S_2$

választással  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta = 0$  és nívóeltolódás nem lép fel. A tapasztalt 700 keV-es nívóeltolódás persze nem marad megmagyarázatlanul, mert a belső hullámfüggvény most nem lesz tiszta izospinű és ezért nincs okunk elvárni, hogy a megfelelő gerjesztett állapotok energiái megegyezzenek egymással.

Ez a példa világosan mutatja, milyen önkényt tartalmazhat a kontinuumbeli  $R$ -mátrix állapotok izospin tisztasága. Megjegyezzük azonban, hogy a belső mixing teljes „eltüntetése” csak akkor lehetséges, ha az erők töltésfüggetlenek. Ellenkező esetben belső mixing mindig fellép.

## 5. A kvadratikus tömegformula

Rajzoljuk fel újra a stabil izotópok görbéjét, de ezúttal tüntessük fel az ábrán az analóg állapotokat is:



5. ábra

A stabil izotópoknak (pontosabban alapállapotoknak) megfelelő  $\bullet$  pontok a félempirikus tömegformula által leírt két párhuzamos parabolán helyezkednek el. Ezeken a görbéken  $T \neq konstans$ . A  $\circ$  pontok a (gerjesztett) analóg állapotokat jelzik. Ezek a  $T = konstans$  görbéken helyezkednek el, és az állítás az, hogy amennyiben az állapotok izospin tiszták, ezek a görbék a  $T_3$  függvényében parabolák, tehát legfeljebb kvadratikusan függenek  $T_3$ -tól.

A bizonyítás: Az állapotokról feltesszük, hogy határozott (tiszta) izospinűek, és a tömegszámmal, valamint az izospinnel indexeljük őket. Egy izomultipletlen

belül a feltevésünk következtében az állapotok energiái csak a Coulomb-energia változása miatt különböznek egymástól, ezért a teljes tömeg kiszámítása helyett elegendő azt belátnunk, hogy az

$$E_C(ATT_3) = \langle ATT_3 | H^c | ATT_3 \rangle = -B_C(AT_3)$$

Coulomb-energia a  $T_3$  kvadratikus függvénye.

A Coulomb kölcsönhatás operátorát eddig mindig egyrészesceke operátorral közelítettük. A pontosabb alak a következő:

$$H^c = \sum_{i < k} e^2 \frac{(1 - \tau_3^{(i)}) (1 - \tau_3^{(k)})}{4r_{ik}} = \sum_{i < k} \frac{e^2}{r_{ik}} \left\{ 1 - (\tau_3^{(i)} + \tau_3^{(k)}) + \tau_3^{(i)} \tau_3^{(k)} \right\}.$$

A  $\tau_3^{(i)} \tau_3^{(k)}$  az  $R_{\alpha\beta} = \tau_\alpha^{(i)} \tau_\beta^{(k)}$  izotenzor 33 komponense. Ez az izotenzor azonban nem irreducibilis, mert a spurja nem zérus. Az irreducibilis kombináció a következő:

$$\tau_\alpha^{(i)} \tau_\beta^{(k)} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} (\tau_\sim^{(i)} \cdot \tau_\sim^{(k)}).$$

A  $H^c$ -t ezért célszerű így felírni:

$$\begin{aligned} H^c &= \sum_{i < k} \frac{e^2}{4r_{ik}} \left( 1 + \frac{1}{3} \tau_\sim^{(i)} \cdot \tau_\sim^{(k)} \right) - \sum_{i < k} \frac{e^2}{4r_{ik}} (\tau_3^{(i)} + \tau_3^{(k)}) + \\ &+ \sum_{i < k} \frac{e^2}{4r_{ik}} \left( \tau_3^{(i)} \tau_3^{(k)} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} (\tau_\sim^{(i)} \cdot \tau_\sim^{(k)}) \right) \equiv H_{00}^c + H_{10}^c + H_{20}^c. \end{aligned}$$

Ezért

$$E_C(ATT_3) = \langle ATT_3 | H_{00}^c | ATT_3 \rangle + \langle ATT_3 | H_{01}^c | ATT_3 \rangle + \langle ATT_3 | H_{02}^c | ATT_3 \rangle.$$

A  $T_3$  függés a Wigner-Eckart tétel alapján állapítható meg:

$$\begin{aligned} \langle ATT_3 | H_{00}^c | ATT_3 \rangle &\text{nem függ } T_3\text{-tól} \\ \langle ATT_3 | H_{01}^c | ATT_3 \rangle &\sim (TT_3 10 | TT_3) \sim T_3 \\ \langle ATT_3 | H_{02}^c | ATT_3 \rangle &\sim (TT_3 20 | TT_3) \sim 3T_3^2 - T(T+1), \end{aligned}$$

ezért írhatjuk, hogy

$$E_C(ATT_3) = E_c^{(0)}(A, T) - T_3 E_c^{(1)}(A, T) + [3T_3^2 - T(T+1)] E_c^{(2)}(A, T), \quad (9)$$

ahol  $E_c^{(0)}$ ,  $E_c^{(1)}$ ,  $E_c^{(2)}$  az un. skalár, vektor, tenzor Coulomb-energia.

A kísérletek tanúsága szerint a kvadratikus függés jól teljesül, ami arra mutat, hogy az alapállapotokban az izospin tisztátalanság, a gerjesztett állapotokban pedig a Thomas-Ehrman shift a kísérleti hibán belülván, és ha van is töltésfüggő kölcsönhatás, az feltehetően kicsi.

Vizsgálhatjuk a (9) tömegformulában fellépő  $E_c^{(i)}$  koeficiensnek relatív nagyságát is. A Coulomb kölcsönhatás operátorára oly gyakran alkalmazott egyrészesce közelítés például rögzíti a koeficiens arányát. Ebben a közelítésben ugyanis

$$E_C(ATT_3) \sim \frac{Z^2}{A^{1/3}} = \frac{1}{A^{1/3}} \left\{ \left[ \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{3}T(T+1) \right] - AT_3 + \frac{1}{3} [3T_3^2 - T(T+1)] \right\},$$

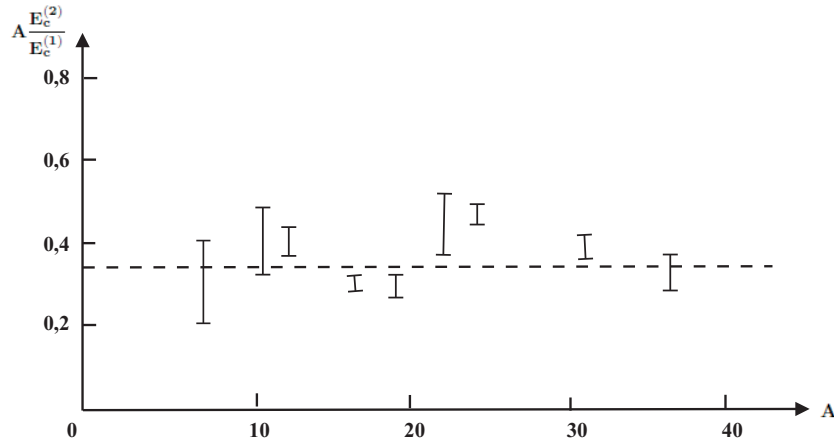
tehát

$$E_c^{(0)}(A, T) \sim \frac{1}{A^{1/3}} \left[ \frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{3}T(T+1) \right]$$

$$E_c^{(1)}(A, T) \sim A^{2/3}$$

$$E_c^{(2)}(A, T) \sim \frac{1}{3A^{1/3}},$$

ahonnan speciálisan  $A \frac{E_c^{(2)}(A, T)}{E_c^{(1)}(A, T)} = \frac{1}{3}$ . A kísérlet valami ilyesmit ad:



6. ábra

Azt kell mondanunk, hogy az egyenleteen töltött gömb modellje nem is olyan rossz, de természetesen a Coulomb-energia azért függ finomabb magstruktúra effektusoktól is.