Négy előadás a relativitáselméletről

ELTE Doktori Iskola 2011

Hraskó Péter

Tartalomjegyzék

1. Miért Lorentz-transzformáció nélküli bevezetést választunk

Az egyetemi relativitáselmélet kurzusok egy hosszabb-rövidebb történeti bevezetés után a Lorentz-transzformáció levezetésével indítanak, mert a speciális (1. óra) relativitáselmélet karakterisztikus sajátosságai — az idődilatáció, ikerparadoxon, Lorentz-kontrakció, a relativisztikus mozgástörvény — mind a Lorentz-transzformáció segítségével kaphatók meg. Arra biztosan emlékeztek, hogy a tárgyalás alapját a *fénysebesség állandósága* (a relativitáselmélet 2. posztulátuma) képezi és a levezetés lényeges eleme *az órák szinkronizálása*, amelyet fényjelek segítségével kell elvégezni. Mármost mind a saját diákkorom, mind a tanítási praxisom alapján biztonsággal kijelenthetem, mindenkit, aki csak egy kicsit is elgondolkozik ezen a dolgon, zavarba hoz a következő azonnal felmerülő probléma: Ha egyszer az órákat a fénysebesség állandóságának a *feltételezése* alapján *kell* szinkronizálni egymással, akkor persze a fénysebesség állandósága automatikusan teljesülni fog; vagyis ez a posztulátum nem egy igazi természeti törvény, hanem puszta megállapodás, amelynek a teljesülését a speciálisan választott szinkronizálási eljárással kényszerítjük ki.

[1] Ez a függelék utólagos hozzáadás, a *Biztos, hogy az energia megmarad?* kötetben sem szerepel.

Ne tagadjuk, valóban ez a látszat, amely elsősorban pont azokat téveszti meg, akik nemcsak bebiflázzák a Lorentz-transzformáció levezetését, hanem el is gondolkoznak rajta. Pedig a látszat csal, a fénysebesség állandósága igazi természeti törvény, amelynek érvényessége független az olyan esetlegességektől, mint az „órák szinkronizálása". Ahhoz azonban, hogy ez az „optikai csalódás" ne következzen be, az elméleti bevezetést a Lorentz-transzformáció helyett más eljárással kell elvégezni. Az első feladatunk ennek az új megközelítési iránynak a kijelölése.

A Lorentz-transzformációval indító szokásos tárgyalás szinte elkerülhetetlenül azt a benyomást kelti, hogy *a szinkronizálás szükségessége csak a relativitáselmélet kapcsán merül fel*, hiszen a newtoni fizikában (a középiskolában és a többi egyetemi kurzusban) „az órák szinkronizálásáról" egyáltalán nem esik szó. Pedig a newtoni fizika t ideje ugyancsak egy jól meghatározott szinkronizálási eljáráson alapul, csak ez annyira természetes, hogy sohasem kerül sor az explicit megfogalmazására. Ahhoz, hogy napfényre hozhassuk, vissza kell nyúlnunk a modern fizika kezdeteihez, amikor először kezdték a t időt a mozgás matematikai leírásában alkalmazni.

Nagyon valószínű, hogy ez a fordulópont Galileihez köthető, a híres lejtőkísérletekhez, amelynek végeredményét (későbbi jelölésben) az $s = \dfrac{1}{2}(g \sin\varphi)t^2$ képlet fejezi ki (φ a lejtő hajlásszöge). Világos, hogy itt a t idő speciális jelentéssel bír, amelyet Galilei mérési eljárásának az analízise alapján kell megállapítanunk.

A *Matematikai érvelések és bizonyítások*ban (Európa 1986, 196.oldal) Galilei így számol be a kísérletéről:

> Kerestünk egy körülbelül tizenkét rőf hosszú, fél rőf széles, háromujjnyi vastag lécet, illetve deszkát, hosszában (az éle mentén) rendkívül egyenes, ujjnyi széles csatornát vájtunk, gondosan megtisztítottuk és megcsiszoltuk, majd a lehető legfinomabb, tökéletesen sima pergament enyveztünk bele; a csatornában pedig egy tökéletesen gömb alakú és sima bronzgolyót gurítottunk le. A léc egyik végét rögzítettük, a másikat pedig tetszésünk szerint egy- vagy kétrőfnyire a vízszintes fölé emeltük, és, mint említettem, hagytuk, hogy a golyó végigguruljon a csatornában; gondosan megmértük a teljes mozgáshoz szükséges időt (mindjárt megmondom, hogyan); a kísérletet számtalanszor megismételve meggyőződtünk róla, hogy a futási idők soha még a pulzusütés tizedrészével sem térnek el egymástól. Miután a kísérletet sokszor elvégeztük, és az eredmény mindig ugyanaz volt, úgy intéztük, hogy a golyó csupán a csatorna negyedrészén gurulhasson le; ismét megmértük a mozgáshoz szükséges időt, és megállapítottuk, hogy a lehető legpontosabban fele az előzőnek. A kísérleteket különböző részutakkal is elvégeztük, a teljes út megtételéhez szükséges időt előbb a fél, majd a kétharmad és a háromnegyed úthoz szükséges idővel hasonlítottuk össze, valamint más osztásokkal is; a méréseket legalább százszor megismételtük, és mindig az volt az eredmény, hogy a megtett utak úgy aránylanak egymáshoz, mint az idők négyzetei, és ez igaz, akárhogyan rögzítjük is a sík, illetve a csatorna (ahol a golyó legurul) vízszintessel bezárt szögét... Az időt pedig a következő módszerrel mértük: felakasztottunk egy nagy, vízzel teli dézsát, amelyből a fenekébe illesztett csövecskén keresztül vékony sugárban csordogált a víz; a kicsorgó vizet poharakban fogtuk fel mindaddig, amíg a vizsgált mozgás (a teljes csatorna vagy annak egy része mentén) tartott; az így összegyűjtött vizeket időről időre megmértük egy rendkívül pontos mérlegen, súlyaik különbségei és arányai megadták az időkülönbségeket és -arányokat, éspedig, mint említettem, olyan pontosan,

hogy sok-sok mérés eredménye között nem volt tényleges eltérés.

Dávid Gábor fordítása

Hogyan végezte volna el a kísérletet Galilei, ha rendelkezésére álltak volna az elvileg elképzelhető legpontosabb mérőeszözök? Alighanem a hosszú lejtő mentén egyenlő távolságokban fotocellákat helyezett volna el úgy, hogy abban a pillanatban adjanak ki egy elektromos jelet, amikor a golyó elhalad mellettük. A jeleket egy időanalizátorban összegyűjtve nagy pontossággal meghatározhatta volna a keresett út-idő függvény egyes pontjait.

Egy bizonyos pontosságon túl azonban már figyelembe kellett volna vennie, hogy az elektromos jelek véges sebességgel terjednek a kábelekben, ezért az időanalizátort és a különböző fotocellákat egyenlő hosszúságú kábelekkel kell összekötni. De ha extrém pontosság a cél, akkor — a kábelek kapacitása és induktivitása miatt — még arra is ügyelni kell, hogy a kábelek alakja, egymáshoz és a környezethez viszonyított helyzete is ugyanolyan legyen, hiszen a kábelekben a jelterjedés sebessége a kábeleknek a környezetükkel (és egymással) történő kölcsönhatásától is függ. Ennél már valószínűleg egyszerűbb, ha közvetlenül mindegyik fotocella mellé odahelyez egy ideális órát és egy miniatür fényképezőgépet, amely a fotocella jelének hatására lefényképezi az óra állását. Ezeket az ideális órákat természetesen *jól kell szinkronizálni* egymással. Ezt bizonyára úgy valósította volna meg, hogy mielőtt kihelyezi őket a lejtő különböző pontjaiba, egy központi helyen a mutatóikat azonos állásba hozza. Mivel az ideálisnak gondolt órák azonos szerkezetük következtében azonos ritmusban járnak, ezután már biztosan a helyes t időt fogják mutatni.

Ennek a tudománytörténeti jelentőségű kísérletnek ez az idealizált formája alkalmas arra, hogy absztraháljuk belőle a newtoni fizika időfogalmát, amely tetszőleges mozgás leírására alkalmas: *A mozgást leíró képletekben szereplő t időn azt az időt értjük, amelyet a laboratóriumban sűrűn széthelyezett helyesen szinkronizált nyugvó ideális órák mutatnának, ha valóban ott volnának.* Ez az az ideál, amelyet a kísérletezőnek a mindenkori adott lehetőségek mellett minél pontosabban meg kell közelítenie.

De honnan tudhatjuk, hogy az a szinkronizálás, amelyet választottunk, valóban „korrekt"-e? Ezt a következő kísérlettel lehet eldönteni. Amikor még az órák a központi helyen vannak, fogjuk az egyiket, elvisszük a majdani helyére és utána visszavisszük a központi helyre. Ha ezután még mindig ugyanazt az időt mutatja, mint az ott lévő többi óra, akkor jogunk van azt mondani, hogy a szinkronizálási eljárásunk, amelyet *newtoni szinkronizálásnak* fogunk nevezni, helyes volt.

A „newtoni" jelző azonban ne tévesszen meg senkit: Ezt a szinkronizálási eljárást se maga Newton, se utána senki más sem fogalmazta meg. A névadás sokkal későbbi és az indokolja, hogy megkülönböztessük a fényjelekkel történő „einsteini szinkronizációtól". De ha így van, akkor miért vagyunk olyan biztosak benne, hogy Newton és követői, ha nem is fogalmazták meg soha explicite, mégis rábólintanának erre a „newtoninak" nevezett szinkronizálási eljárásra? Abból, hogy nyilvánvalónak tekintették: ha egy órát mozgatunk és a mozgás következtében a járásának a ritmusa megváltozik, akkor *ez az óra rossz (nem ideális).*

A mi mai spontán, naív ítéletünk ugyanez lenne. Arra pedig, hogy tényleg így gondolták, van egy kitűnő történelmi példánk: *John Harrison* kronométerének működését pontosan ennek az elvnek az alapján tesztelték. A kronométert 1761-62-ben elvitték Plymouth-ből Jamaikára, onnan vissza Plymouth-be. A mesés 20000£ jutalom elnyerésének az volt a feltétele, hogy az öt hónapig tartó kemény tengeri utazás alatt a kronométer pontatlansága nem lehet több, mint amennyit a földrajzi hosszúság fél fok pontossággal történő meghatározása megenged. A díj kitűzőjében nyilván fel sem merült a gondolat, hogy a mozgatás még egy *tökéletesen megkonstruált* (ideális) óra járását is esetleg befolyásolhatja[2].

Mi azonban már tudjuk, hogy befolyásolja: ez a jelenség az *idődilatáció*. Ha a newtoni szikronizáció fenti tesztjét egy tökéletes konstrukciójú (ideális) órával ténylegesen elvégeznénk, azt találnánk, hogy visszaérkezése után a mozgatott óra kevesebb időt mutatna mint azok, amelyek végig a központi helyen nyugodtak. De ez a különbség olyan minimális, hogy nem lehetett „véletlenül" észrevenni: még ma sem egyszerű feladat a kimérése. Ezért maradt sokáig észrevétlen az a tény, hogy a fizika időfogalma az órák szinkronizációján alapul és egyáltalán nem nyilvánvaló, hogyan kell (lehet) ezt a szinkronizációt *helyesen* elvégezni.

Mint látható, az idődilatáció ismerete sokat segít a szinkronizáció szerepének a tisztázásában. A valóságban azonban másképp történt: Einstein a fénysebesség problémáján keresztül jutott el az időfogalmunkban rejlő szinkronizáció felismeréséhez. A Lorentz-transzformáció megalapozásához volt szüksége rá és az idődilatációt a Lorentz-transzformációból vezette le[3]. Ha legalább utólag, a relativitáselmélet tanításában ezt a sorrendet meg tudnánk fordítani, vagyis ha az idődilatáció tényét sikerülne *a Lorentz-transzformáció nélkül* meggyőzően demonstrálni, ezzel nyilvánvalóvá tennénk, hogy új szinkronizálási eljárásra van szükség. Ebben az esetben pedig már nagyon kézenfekvő arra gondolni, hogy az új szinkronizálást a fénysebesség állandóságára alapozzuk, mert ekkor a szinkronizálást az órák széthelyezése *után* lehet elvégezni.

Tekintsünk pl. két tökéletesen pontos (ideális) órát a laboratórium két távoli pontjában. Indítsunk az 1. számú órától fényjelet a 2. számú óra felé, amelyet a 2. óra mellett álló tükör azonnal visszaver az 1. óra irányába. Tegyük fel, hogy az 1. óra a fényjel indításakor t_{1i} időt, a fényjel visszaérkezésekor t_{1e} időt mutatott. A két óra akkor van jól szinkronizálva, ha a 2. óra a visszatükrözés pillanatában

$$t_2 = t_{1i} + \frac{t_{1e} - t_{1i}}{2} = \frac{t_{1i} + t_{2e}}{2}$$

[2]A kronométer a tengeri hajókon a földrajzi hosszúság meghatározását tette lehetővé. A hosszúság pontatlan ismerete ugyanis súlyos hajó katasztrófákhoz vezetett. Ha a hajón van egy olyan óra, amely az utazás során végig pontosan a greenwhich-i időt mutatja, akkor a Nap delelésének a pillanatában mutatott időből könnyen megállapítható, milyen földrajzi hosszúságon tartózkodik a hajó. Már ez a módszer maga mutatja, hogy senkiben sem merült fel az a gondolat, hátha még egy technikailag kifogástalanul megkonstruált kronométer ritmusa is megváltozhat csupán a hajó mozgása következtében.

[3]A valóságos történet még ennél is bonyolultabb. Lorentz már Einstein előtt tudott az idődilatációról és a Lorentz-transzformációval való kapcsolatáról, de nem ismerte fel ennek összefüggését a fizika időfogalmában benne rejlő szinkronizációval.

időt mutat. Ha ennél mondjuk 2 másodperccel kevesebbet mutatott, akkor előre kell vinni 2 másodperccel[4].

Természetesen most sem kerülhető el, hogy ezt a szinkronizálási eljárást is alkalmas tesztnek vessük alá. Ehhez azt kell kísérletileg igazolni, hogy a fénysebesség valóban minden inerciarendszerben minden irányban ugyanakkora. Az eljárás a következő:

1) Mindenekelőtt meg kell győződnünk róla, hogy a laboratóriumunk (vonatkoztatási rendszerünk) valóban inerciarendszer. Ennek ellenőrzése nem igényel időmérést: A nyugvó izolált testeknek nyugalomban kell maradniuk, a giroszkópok tengelyének folyamatosan a fal ugyanazon pontjára kell mutatniuk.

2) Két *egymás mellett nyugvó* azonos szerkezetű ideális órát szinkronizálunk (a mutatóállásukat azonos állásba hozzuk), majd egy egyenes mentén pontosan ellenkező irányban szimmetrikus mozgással eltávolítjuk őket egymástól úgy, hogy az egyik a P, a másik a Q pontban álljon meg. A szimmetriát például a következő módszerrel biztosíthatjuk: Az órákat két azonos szerkezetű „holdjárón" helyezzük el, amelyek egyszerre indulnak el egymással ellenkező irányba és csak egyenesen tudnak haladni. A kocsik mozgását olyan belső program vezérli, amely mindkét járművön pontosan egyforma, és a végrehajtáshoz szükséges időjeleket maguk a járműveken elhelyezett (korábban szinkronizált) ideális órák szolgáltatják.

3) Ezután fényjeleket küldünk P-ből Q-ba, feljegyezzük az összetartozó indítási és érkezési időpontokat és kiszámítjuk a repülési idők T_{PQ} empirikus átlagát. A két pont L_{PQ} távolságát a „holdjárók" kerekeinek a kerületét ismerve abból számíthatjuk ki, hogy hány fordulatot tettek meg.

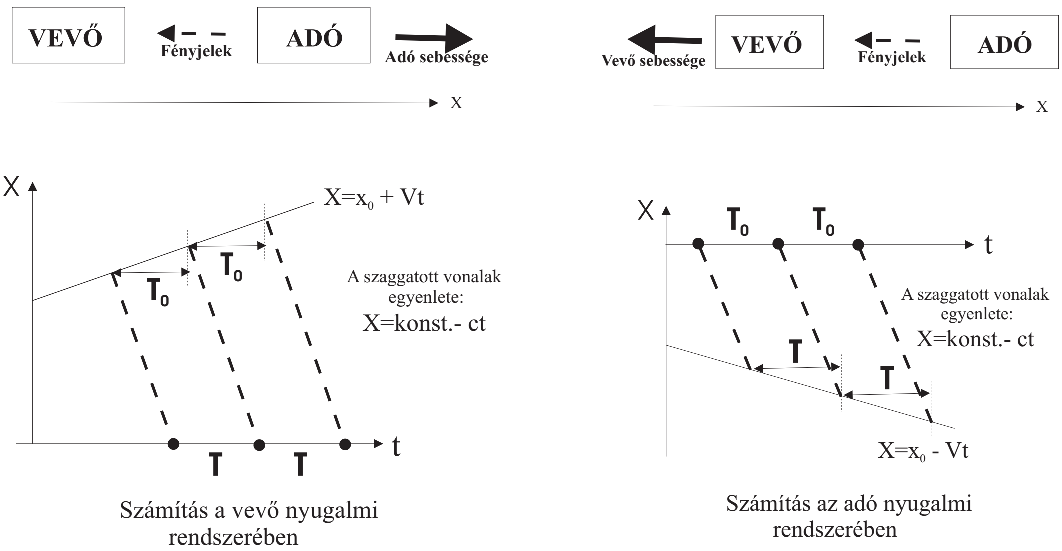
4) Az L_{PQ}/T_{PQ} hányados megadja a fénysebességet a tetszőlegesen megválasztott $P \to Q$ irányban. Ha a relativitáselmélet igaz, egy ilyen mérés*sorozatnak* azt kell mutatnia, hogy ez a sebesség minden inerciarendszerben minden irányban ugyanakkora.

Ha a relativitáselmélet valóban érvényes, ahogy ma hisszük, akkor ez a kísérlet igazolná az 2. posztulátum helyességét (a fénysebesség állandóságát minden irányban minden inerciarendszerben) *anélkül, hogy szükség volna távoli órák fényjelekkel történő előzetes szinkronizálására.* Ez a lehetőség bizonyítja, hogy az 2. posztulátum nem a választott szinkronizálási eljárás triviális következménye, hanem igazi természeti törvény.

2. Az idődilatáció

A problémánk, amiből kiindultunk, az volt, hogy a Lorentz-transzformáció levezetésénél a 2. posztulátumot és az órák fényjelekkel történő szinkronizálását kell felhasználnunk, és ha ezt kellő előkészítés nélkül tesszük, akkor nagyon könnyen az a benyomásunk támadhat, hogy a fénysebesség állandósága az ügyesen választott szinkronizálási eljárás következménye, ami súlyos félreértés. Mint láttuk, ezt a veszélyt elég könnyen elkerülhetnénk, ha még a Lorentz-transzformáció ismerete *előtt* meggyőzően tudnánk demonstrálni az idődilatáció létezé-

[4] Vegyük észre, hogy ebben az eljárásban az órák közötti távolságnak nincs szerepe.



1. ábra.

sét. Ezt meg is lehet tenni az *optikai Doppler-effektus* gondos tanulmányozása alapján.

Képzeljünk el egy adóberendezést, amely szabályos T_0 időközönként — $\nu_0 = 1/T_0$ frekvenciával — rövid fényimpulzusokat generál, és egy vevőt, amely ezeket tudja észlelni. Amikor a vevő nyugszik az adóhoz képest, ν_0 frekvenciájú jelsorozatot érzékel. Amikor azonban mozog, valamilyen ν_0-tól különböző ν frekvenciát ($T = 1/\nu$ periódusidőt) észlel. Ez a jelenség az optikai Doppler-effektus.

Tegyük fel, hogy a vevő és az adó konstans V sebességgel távolodik egymástól. Ekkor az észlelt $\nu/\nu_0 = T_0/T$ arány 1-nél kisebb konstans, és ha a két inerciarendszer, amelyben nyugszanak, valóban egyenértékű egymással, ahogy azt a relativitáselmélet megköveteli, akkor a nagyságára ugyanazt a számot kell kapnunk akár az adó, akár a vevő nyugalmi rendszerében végezzük el a számítást.

Mindig hasznos, ha egy megoldandó feladathoz ábrát is mellékelünk. Az 1. ábra baloldalán a vevő nyugalmi rendszeréből nézve, a jobboldalán pedig az adó nyugalmi rendszeréből nézve ábrázoltuk ugyanazt a „Doppler-szituációt”. A rajzokon az egyenesek az adó, a vevő és az egymást követő fényjelek pályái. A baloldali ábrán a vevő pályája maga a vízszintes t-tengely, mert a vevő végig az $x = 0$ pontban nyugszik, míg az adó V sebességgel távolodik tőle pozitív irányban. A jobboldali ábrán az adó pályája a vízszintes tengely, a vevő pedig negatív irányban távolodik tőle konstans V sebességgel. A szaggatott vonalak a fényimpulzusok pályái; ezek nyilvánvalóan mindkét nézőpontból az x-tengely negatív irányában haladnak.

Az ábráról leolvasható, hogy T mindkét esetben nagyobb T_0-nál, ahogy lennie is kell, de az ábra egyáltalán nem sugallja, hogy a T/T_0 arány is ugyanaz a két rajzon, ahogy a relativitáselmélet alapján várjuk. Ez az arány a rajzok segítségével nagyon könnyen kiszámítható:

$$T/T_0 = \begin{cases} 1 + V/c & \text{a vevő nyugalmi rendszerében,} \\ \dfrac{1}{1 - V/c} & \text{az adó nyugalmi rendszerében.} \end{cases} \tag{1}$$

Valóban nem azt kaptuk, amit a relativitáselmélet alapján vártunk, mert a T/T_0 arány függ attól, hogy a vevő vagy az adó nyugalmi rendszerében végezzük el a számítást. De ez képtelenség, hiszen ha a kísérletet ténylegesen megvalósítanánk, egyetlen határozott arányt mérnénk. Melyiket?

Egyszerű kiutat csak az tenne lehetővé, ha a fénysebesség nem lenne mindkét inerciarendszerhez viszonyítva ugyanaz a c szám. Ekkor azt kellene mondanunk, hogy (1) első sorában c helyébe a vevő nyugalmi rendszerében érvényes c_v-t, a második sorában pedig az adó nyugalmi rendszerében érvényes c_a-t kell behelyettesítenünk. Ebben az esetben a két sor már adhatná ugyanazt a számot a T/T_0 arányra. De ha ténylegesen megmérnénk a fénysebességet az előző fejezetben vázolt eljárással a két inerciarendszerben, ugyanazt a számértéket kapnánk, ezért ez a könnyű kiút nem lehetséges.

Világos, hogy a fénysebesség állandósága (az inerciarendszerek ekvivalenciája a fényterjedés szempontjából) ellentmondásra vezet, ha a newtoni fizikában megszokott módon alkalmazzuk. Milyen változtatást kell eszközölnünk a szokásos érvelésben, ha fenn akarjuk tartani azt a nagyon vonzó elvet, hogy az inerciarendszerek minden fizikai jelenség szempontjából egyenértékűek egymással?

Az (1)-t az 1. ábra segítségével vezettük le, ez az ábra pedig azt mutatja, hogy a periódusidő megváltozása T_0-ról T-re kizárólag az adó és a vevő viszonylagos mozgásának a következménye. Magának az adónak a mozgása *önmagában* (a baloldali ábrán) nem változtat T_0-on éppen úgy, ahogy a vevőnek a mozgása *önmagában* (a jobboldali ábrán) nem módosítja a T értékét: csak az számít, hogy a közöttük lévő távolság változik. Mi van akkor, ha ebben tévedünk, és a baloldali ábra szituációjában az adó mozgása következtében két egymás utáni jel között már nem T_0, hanem valamilyen $\gamma(V)T_0$ idő telik el; és hasonlóan, a jobboldali ábrán a vevő mozgása miatt az általa vett jelek között eltelt idő nem T, hanem $\gamma(V)T$. A $\gamma(V)$ a sebesség egyenlőre ismeretlen függvénye, amely az időintervallumoknak magának a mozgásnak a következtében előálló változását veszi figyelembe.

Ha a megfelelő változtatást (1)-ben elvégezzük, a

$$\begin{cases} T/\gamma T_0 = 1 + V/c & \text{a vevő nyugalmi rendszerében,} \\ \gamma T/T_0 = \dfrac{1}{1 - V/c} & \text{az adó nyugalmi rendszerében.} \end{cases} \tag{2}$$

egyenletekre jutunk. De honnan vegyük a $\gamma(V)$ függvényt? Válasszuk meg úgy, hogy *mindkét sor ugyanazt a képletet adja* a T/T_0 arányra!

Ezt nagyon könnyű megtenni. Ha

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \tag{3}$$

akkor mindkét sorban a

$$T/T_0 = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}}, \tag{4}$$

vagy a frekvenciákon keresztül kifejezve a

$$\nu/\nu_0 = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \tag{5}$$

képletekre jutunk. A ν most is kisebb ν_0-nál, de ami különösen fontos, ha különböző sebességgel mozgó gerjesztett atomok sugárzási spektrumát megmérjük, akkor *az (5) az, ami a mérésekkel összhangban van.* Ez a valóságos kísérlet súlyos érv a $\gamma(V)$ faktor bevezetése mellett.

Az eljárásunk fizikai jelentése az, hogy a mozgó testeken az idő lassabban telik, mint az a t idő, amelyik a mozgásukat leíró képletben szerepel. A (2)-ből kiderül, hogy a vevő nyugalmi rendszerében, vagyis amikor az adó távolodik, akkor két egymás utáni jel között észlelt $T = \gamma T_0(1 + V/c)$ időtartam *nagyobb*, mint amit az (1) alapján eredetileg vártunk (mert $\gamma > 1$). Ennek a legtermészetesebb interpretációja az, hogy a mozgás lelassította az adót szabályozó óra járását. Amikor pedig az adó nyugalmi rendszerében vagyunk, a vevő az, amelyik mozog, és $T = \dfrac{T_0}{\gamma(1 - V/c)}$ *kisebb*, mint az (1) szerint várható periódusidő (mert $1/\gamma < 1$). Ez azt mutatja, hogy a vevővel együtt mozgó órán *kevesebb* idő telik el, mint várnánk, vagyis ez az óra is a vártnál lassabban jár.

Ennek az *idődilatációnak* nevezett jelenségnek további fontos bizonyítéka a *tranzverzális Doppler-effektus*, amikor a vevő körpályán mozog konstans V sebességgel az adó körül, vagy megfordítva (az eddig vizsgált szokásos Doppler-effektust *longitudinálisnak* nevezzük). A relativitáselmélet előtti felfogás szerint ebben az esetben nem várunk frekvenciaeltolódást, mert az adó és a vevő közötti távolság állandó: $T = T_0$, $\nu = \nu_0$. Ha azonban összhangban akarunk maradni a longitudinális effektusra adott magyarázattal, akkor meg kell engednünk, hogy a vevő mozgása most is ugyanolyan hatással van az általa észlelt jelek gyakoriságára, mint a longitudinális mozgás esetében. Ha pedig így van, akkor a helyes képlet $\gamma T = T_0$, tehát

$$T = T_0\sqrt{1 - V^2/c^2}, \qquad \nu = \frac{\nu_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Ennek a képletnek az érvényességét speciális magfizikai kísérletben (a Mössbauer-effektus segítségével) igazolták. (2. óra)

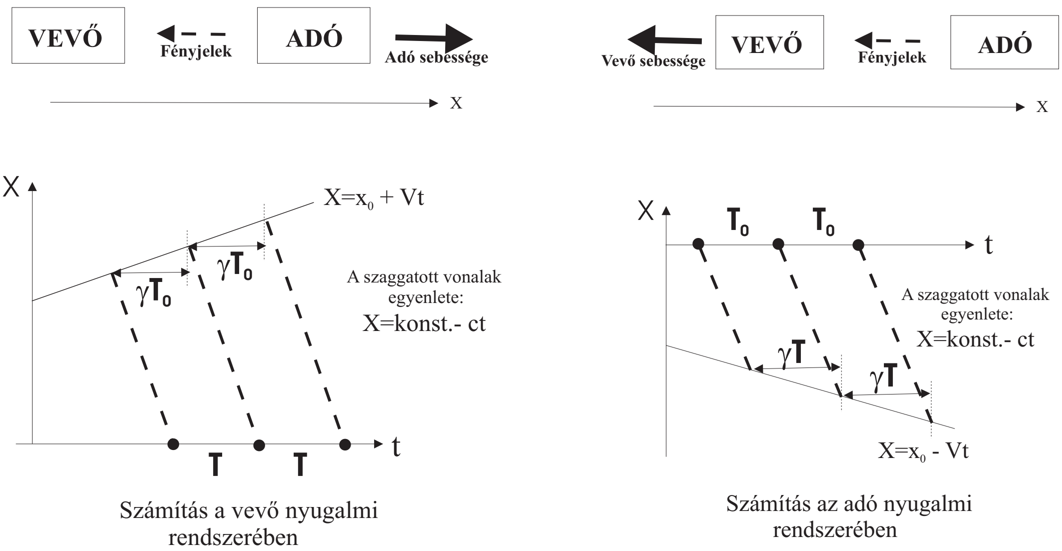
Mint már az 1. fejezetben megbeszéltük, a newtoni fizika nem ismer idődilatációt, ezért egyetlen időfogalommal dolgozik, amelyet t-vel jelölünk.Ha pl. Galilei lejtőkísérletében a leguruló golyó valahogy egy ideális órát is visz magával, amelyik a lejtő tetején ugyanazt az időt mutatja, mint a lejtő mellett elhelyezett helyesen szinkronizált órák közül az, amelyik éppen mellette nyugszik, akkor a newtoni felfogás szerint a golyón lévő óra mutatóállása gurulás közben is mindig pontosan ugyanazt az időt fogja mutatni, mint az a nyugvó óra, amely mellett elhalad. A relativitáselmélet szerint azonban az idődilatáció következtében a mozgó óra egyre többet és többet fog késni, ahogy fokozatosan gurul a lejtőn lefele.

Kétfajta idővel kell tehát dolgoznunk, amelyekre a relativitáselméletben két különböző elnevezést vezettek be. Egy adott (általában mozgó) órán eltelt időt az óra *sajátidejének* nevezzük, és ha egy mód van rá, τ-val jelöljük (szükség esetén a τ-t elláthatjuk indexszel, vesszővel, felülhúzással, stb). A t idő pedig, amely a mozgó óra pályájának a képletében szerepel, a *koordinátaidő*. Az előző fejezetben csak ezzel foglalkoztunk és ott meg is adtuk a definícióját: *Koordinátaidőn azt az időt értjük, amelyet a laboratóriumban sűrűn széthelyezett helyesen szinkronizált nyugvó ideális órák mutatnának, ha valóban ott volnának.* A koordinátaidő elnevezés azért nagyon szerencsés, mert a mozgó test trajektóriáját rendszerint úgy ábrázoljuk, hogy a koordinátatengelyek egyike a t-tengely.

Gondolatban tehát minden inerciarendszerhez hozzá kell képzelnünk nyugvó ideális órák sokaságát, amelyek a koordinátaidőt mutatják. A különböző inerciarendszerekhez tartozó órasokaságok egyenletes sebességgel mozognak egymáshoz képest, ezért az idődilatáció következtében egy adott eseményhez minden inerciarendszerben más és más koordinátaidőpontot rendelnek. Érdekes és természetesen nagyon fontos körülmény, hogy ez egyáltalán nem vezet zűrzavarhoz. Ezt az elmélet belső matematikai konzisztenciája biztosítja, de „átérezni" csak akkor kezdi az ember, miután már elég sok konkrét feladatot megoldott és elemzett.

Vegyük észre, hogy a tárgyalásunkban szereplő T és T_0 időintervallum *sajátidő-intervallum*, mert a vevőre ill. az adóra szerelt egy-egy órán olvassuk le (tehát szigorúan véve át kellene jelölnünk őket $\Delta\tau$-ra és $\Delta\tau_0$-ra, de ezt nem tesszük meg). Amikor a vevő nyugalmi rendszerében a mozgó adó T_0-ja helyébe γT_0-t írtunk, ezzel tulajdonképpen két egymás utáni jel közötti T_0 sajátidő intervallumot számítottuk át Δt koordinátaidő intervallumba. Az ábra vízszintes tengelyén ugyanis a koordinátaidőt mértük fel és a pályát ennek függvényében ábrázoltuk. Az adó nyugalmi rendszerében természetesen a $T \longrightarrow \gamma T$ helyettesítéssel a vevő két „kattanása" közötti koordinátaidő intervallumot fejezzük ki a T sajátidő intervallum segítségével. A nyugvó adó és vevő esetében ezt a helyettesítést azért nem kell elvégezni, mert $\gamma(0) = 1$. A relativitáselmélet szerint tehát az 1. ábrát helyesbíteni kell (ld. a 2. ábrát).

Ezekből a meggondolásokból levonhatjuk azt az általános következtetést, hogy *ha egy test pályájának két infinitezimálisan közeli pontja között a test sebessége V, akkor a két pont között eltelt infinitezimális koordinátaidő-intervallum és sajátidő-intervallum a $dt = \gamma(V) \cdot d\tau$ képlet segítségével számítható át egy-*



2. ábra.

másba. Részletesen kiírva:

$$d\tau = \sqrt{1 - V^2/c^2}\, dt. \tag{6}$$

Ez a képlet inerciarendszerben történő változó sebességű (gyorsuló) mozgásra is érvényes.

A $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ kifejezés, amelyben V két inerciarendszer relatív sebessége, alapvető szerepet játszik a relativitáselméletben. Ahhoz, hogy ne vezessen értelmetlenségre, fel kell tennünk, az inerciarendszerek mindig a fénynél lassabban mozognak egymáshoz képest.

3. Az egyidejűség relativitása

Azt találtuk, hogy az idő az adón lassabban telik, mint a vevőn, és a vevőn is lassabban telik, mint az adón. Ez azonban lehetetlennek látszik.

Jelöljük az adó és a vevő óráját mondjuk $\mathcal{O}$-val és $\mathcal{O}'$-vel. Tegyük fel, hogy ezek a mozgásuk során elhaladnak egymás mellett, és a találkozásuk pillanatában mindketten 0 másodpercet mutatnak. Később, amikor pl. $\mathcal{O}$ mondjuk 5 másodpercet mutat, az $\mathcal{O}'$-n (mivel $\mathcal{O}$ nyugalmi rendszerében mozog és ezért lassabban jár nála), *ugyanebben a pillanatban* a mutató még csak a 4-esen áll. De az $\mathcal{O}$ is lassabban jár $\mathcal{O}'$-nél (mert $\mathcal{O}'$ nyugalmi rendszerében ő mozog), ezért az $\mathcal{O}$ *ugyanebben a pillanatban* még csak 3 másodpercet mutat. Azonban abból indultunk ki, hogy ebben a pillanatban az $\mathcal{O}$ mutatója az 5 másodpercen áll, ezért ellentmondásra jutottunk, hiszen egy óra nem mutathat egyszerre két különböző időpontot.

Ennek a látszólag nagyon meggyőző érvelésnek azonban van egy gyenge pontja: Az a teljesen természetesnek látszó feltevés, hogy ha két esemény az $\mathcal{O}$ nyugalmi rendszeréből nézve egyidejű, akkor az $\mathcal{O}'$ nyugalmi rendszeréhez viszonyítva is az (az egyidejűség *abszolút*). Einstein a híres vonatos gondolatkísérletében azonban megmutatta, hogy ha a fénysebesség valóban ugyanaz minden inerciarendszerben (a mi esetünkben az adó és a vevő nyugalmi rendszerében), akkor ez nem lehet igaz.

Legyen a vasútállomás (amelyen a vonat megállás nélkül halad keresztül) az egyik inerciarendszer, az egyenes pályán egyenletes sebességgel mozgó vonat a másik. Tegyük fel, hogy megmértük a fény terjedési sebességét az 1. fejezetben leírt eljárással az állomáson is, a mozgó vonaton is, és valóban azt találtuk, hogy mindkét esetben mindkét irányban ugyanazzal a c-vel egyenlő. Indítsunk fényjelet a vonat középpontjából, amely a vonat elején és végén elhelyezett tölteteket felrobbantja. Egyidejű-e ez a két robbanás? Erre a kérdésre nincs egyértelmű válasz — a két inerciarendszerhez viszonyítva a jelenséget eltérő konklúzióra jutunk. A vonat inerciarendszerében a robbanások egyidejűek, mert a robbanás a középpontban történt, és a fény sebessége mindkét irányban egyforma. A földi inerciarendszerben azonban a vonat végén a robbanás előbb következik be, mint az elején, mert a két fényjel ehhez képest is ugyanazzal a c sebességgel terjed mindkét irányban, de a vonat vége elébe megy a fényjelnek, az eleje pedig szalad előle.

Akkor hát egyszerre vagy nem egyszerre történt a két robbanás? Nyilván egyiket se mondhatjuk, mert a vonat és az állomás inerciarendszere semmilyen fizikai jelenség alapján sem különböztethető meg egymástól[5]. Bele kell nyugodnunk, hogy a kérdésünk így értelmetlen, és csak úgy tehető értelmessé, ha hozzátesszük, melyik inerciarendszerhez viszonyítjuk az eseményeket. A konklúzió tömören az, hogy *abszolút egyidejűség nem létezik.*

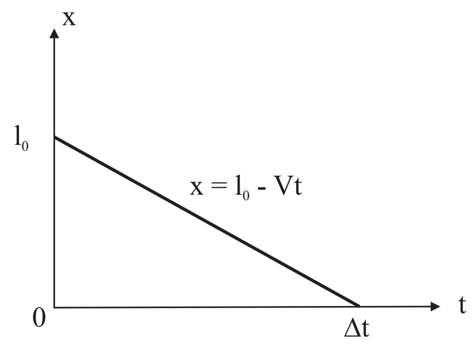
4. A Lorentz-kontrakció

Az egyidejűség relativitása a mozgó testek rövidülését idézi elő. Ezt megint egy mozgó vonattal illusztrálhatjuk. Egy mozgásban lévő vonat hossza az eleje és a végpontja közötti távolsággal egyenlő *ugyanabban az időpontban.* Nem meglepő, hogy az egyidejűség relativitása maga után vonja a hosszúság relativitását.

A mozgó vonat l hosszát úgy mérhetjük meg, hogy a töltésen állva egy stopperrel megmérjük, mennyi idő alatt haladt el mellettünk és a kapott időtartamot megszorozzuk a vonat sebességével. Az így kapott szám ugyanis azt mutatja meg, milyen messze van a vonat eleje a végétől *abban a pillanatban*, amikor a stoppert leállítjuk, tehát valóban a mozgó vonat hosszával egyenlő.

Legyen a stopperen leolvasott időtartam $\Delta\bar{\tau}$ (ez nyilván sajátidő, hiszen egy adott órán olvassuk le). A vonatban ülők azt látják, hogy a menetiránnyal szemben a vonat relatív V sebességével elsuhan mellettük egy ember, akinek a pályáját a 3. ábra egyenese mutatja (az x tengely a vonaton menetirányba

[5] Még a tárgyalt gondolatkísérlet alapján sem, hiszen ha a fényjeleket az *állomás* középpontjából indítanánk és a töltetek az állomás két szélső pontjában nyugodnának, akkor a robbanások az állomás nyugalmi rendszerében lennének egyidejűek.



3. ábra.

mutat). Az egyszerűség kedvéért gondoljuk azt, hogy a vonat egyetlen hosszú vasúti kocsiból áll. Ebben az esetben az utasok méterrúddal megmérhetik a kocsi l_0 hosszát és természetesen tetszőleges pontossággal meghatározhatják azt a Δt koordinátaidő intervallumot is, amennyi idő alatt az ember a vonat mellett elsuhan. A Δt és a $\Delta\bar{\tau}$ kapcsolatát (6) adja meg, ezért

$$l = V \cdot \Delta\bar{\tau} = V \cdot \Delta t\sqrt{1 - V^2/c^2} = l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}. \tag{7}$$

Ez a *Lorentz-kontrakció* képlete.

Foglalkoznunk kell még azzal a kérdéssel is, hogyan lehet a mozgó vonat V sebességét megmérni. Jelöljük ki a töltés mellett azt a P pontot, ahol várni fogjuk a vonatot, és ettől menetirányban s_0 távolságra a sínen (legyen ez az R pont) helyezzünk el egy relét, amely összeköttetésben van egy mellette álló fényforrással. Amikor a vonat eleje a relét működésbe hozza, a fényforrás felvillan. Ezután az előkészület után foglaljuk el a helyünket a P pontban és a másik kezünkben is egy stropperrel várjuk a vonat érkezését.

Amikor a vonat eleje a P ponthoz ér, ezt a második stoppert is megindítjuk és akkor állítjuk le, amikor megpillantjuk a fényjelet. A stopperen leolvasott $\Delta\tau$ idő két részből áll: Abból az s_0/V időből, amely alatt a vonat a P-ből a reléhez ér, és abból az s_0/c-ből, amely alatt a fényjel P-be érkezik:

$$\Delta\tau = \frac{s_0}{V} + \frac{s_0}{c}. \tag{8}$$

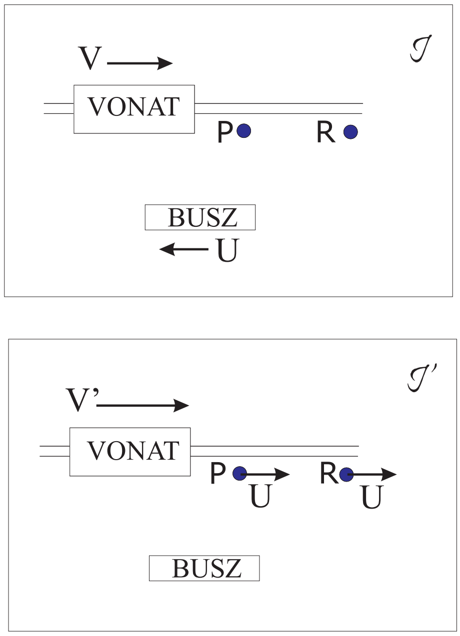
Ebből a mért adatok alapján a fénysebesség ismeretében meg tudjuk határozni V-t.

5. Sebességösszeadás

Mozogjon két test V és U sebességgel egy egyenes mentén. Két különböző kérdést lehet feltenni velük kapcsolatban:

1) Milyen *ütemben* változik a távolság közöttük, és

2) milyen *sebességgel* mozog egyik a másikhoz képest (vagyis a másik inerciarendszerében).



4. ábra.

Az első kérdésre a választ egyedül azon az alapon adjuk meg, hogy a sebességnek *út/idő* a definíciója, ezért a válasz a newtoni fizika és a relativitáselmélet szerint ugyanaz: Ha a testek ellenkező irányban mozognak, akkor a távolságuk $U + V$, ha pedig azonos irányban mozognak akkor $|U - V|$ ütemben változik (növekszik vagy csökken).

A második kérdésre adandó válasz a sebesség definícióján kívül még attól is függ, milyen ritmusban múlik az idő az egyik test inerciarendszerében a másikéhoz képest. Ezért erre a kérdésre a válasz már nem ugyanaz a relativitáselméletben mint a newtoni fizikában.

A newtoni fizikában a válasz nagyon egyszerű: A relatív sebesség megegyezik a távolság változásának az ütemével. Ahhoz azonban, hogy a relativitáselmélet válaszát is megtudjuk, abból kell kiindulni, hogy hogyan mérjük egy mozgó test sebességét.

Az előző fejezet végén láttuk, hogy erre a kérdésre (8) adja meg a választ. Vizsgáljuk meg, hogyan néz ki ez a mérési eljárás egy olyan *másik test* (mondjuk egy autóbusz) $\mathcal{I}$' inerciarendszeréből nézve, amelyik U sebességgel mozog a vonattal *szemben* (4. ábra).

A töltés inerciarendszere, amelyre (8) vonatkozik, legyen $\mathcal{I}$, a vonat $\mathcal{I}$'-beli (az autóbuszhoz viszonyított) sebessége pedig legyen V' (ezt akarjuk kiszámítani). A megfigyelő stopperjén eltelt $\Delta\tau$ sajátidőnek $\mathcal{I}$'-ből (az autóbuszról) nézve a $\Delta t = \Delta\tau/\sqrt{1 - U^2/c^2}$ koordinátaidő felel meg. Ez természetesen ugyanabból a két részből áll, mint $\Delta\tau$, csak ezeket a részeket is $\mathcal{I}$'-höz viszonyított mennyiségeken keresztül kell kifejezni. A vonat $s/(V'-U)$ koordinátaidő alatt ér el a P-ből a reléig, a fényjel pedig $s/(U+c)$ koordinátaidő alatt ér vissza a relétől a P pontig, ugyanis a vonat és a relé távolsága $(V'-U)$, a fényjel és a P pont távolsága pedig $(U+c)$ ütemben csökken. Ezért

$$\Delta t = \frac{s}{V'-U} + \frac{s}{U+c}.$$

Ebben a képletben természetesen $s = s_0\sqrt{1-U^2/c^2}$ a P pont és a relé $\mathcal{I}$ '-beli távolságával egyenlő. Ha ezt és a $\Delta t = \Delta\tau/\sqrt{1-U^2/c^2}$ összefüggést ebben a képletben figyelembe vesszük, kis átrendezés után a

$$\frac{\Delta\tau}{s_0} = (1-U^2/c^2)\left(\frac{1}{V'-U} + \frac{1}{U+c}\right)$$

képletre jutunk. Ezt a hányadost (8)-ból is kifejezzük, majd a két jobboldalt egyenlítve az

$$(1-U^2/c^2)\left(\frac{1}{V'-U} + \frac{1}{U+c}\right) = \frac{1}{V} + \frac{1}{c}$$

képletet kapjuk, amelyet néhány lépésben megoldunk V'-re: $V' = (V+U)/(1+VU/c^2)$.

A képlet jelentése a következő: Ha két test mozog egy közös irány mentén egymással szembe V ill. U sebességgel, akkor a második testhet viszonyítva (vagyis ennek nyugalmi rendszerében) az első test sebessége a képlet által meghatározott V'-vel egyenlő. Azonban hasznosabb alakot kapunk, ha az egyenesen, amely mentén a testek mozognak, kijelöljük a pozitív irányt, és a testek mozgásirányát nem egymáshoz, hanem a tengely pozitív irányához viszonyítjuk. Ha pl. V pozitív, és a testek egymás felé mozognak, akkor U-nak negatívnak kell lennie. Ezért ha erre az esetre vissza akarjuk kapni az előző képletet, a sebességösszeadás törvényét a

$$V' = \frac{V-U}{1-VU/c^2} \tag{9}$$

alakban kell felírnunk.

A (9) képlethez három megjegyzést fűzhetünk:

1) Ha az „első test" fénysugár ($V=c$), akkor a képlet a V'-re is a c értéket adja, tehát összhangban van a fénysebesség állandóságával. Ennek így is kell lennie, mert a képlet levezetésénél feltételeztük, hogy a fénysebesség $\mathcal{I}$-ben és $\mathcal{I}$ '-ben egyaránt c.

2) Amikor a testek sebessége sokkal kisebb a fénysebességnél, a (9) nevezőjében VU/c^2 elhagyható 1 mellett és visszakapjuk a newtoni fizika $V' = V-U$ sebességösszeadási képletét.

3) A képlet szerint a második test (az autóbusz) U' relatív sebessége az elsőhöz (a vonathoz) képest $-V'$-vel egyenlő (mert V és U szerepet cserél), ahogy lennie is kell.

***

(3. óra)

Az eddig mondottak segítségével ki tudjuk számítani, hogy Einstein vonatkísérletében milyen Δt-vel egyenlő a robbanások közötti idő az állomás nyugalmi rendszeréből nézve.

Az állomás $\mathcal{I}$ vonatkoztatási rendszeréhez viszonyítva a fényjelek elindulásának pillanatában a vonat eleje és vége a Lorentz-kontrakciót figyelembe véve $\frac{1}{2}l_0\sqrt{1-V^2/c^2}$ távolságra van a fényjelektől. Ez a távolság a fényjel és a vonat eleje között $(c-V)$, a fényjel és a vonat vége közötti pedig $(c+V)$ ütemben csökken, tehát

$$\Delta t_e = \frac{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{2(c-V)}, \qquad \text{illetve} \qquad \Delta t_v = \frac{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{2(c+V)}$$

idő alatt fogy el. Ennek a két időtartamnak a különbsége a keresett Δt:

$$\Delta t = \Delta t_e - \Delta t_v = \frac{1}{2}l_0\sqrt{1-V^2/c^2}\cdot\left(\frac{1}{c-V}-\frac{1}{c+V}\right) = \frac{V\cdot l_0}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

6. A mozgásegyenlet

Az $m\mathbf{a}=\mathbf{F}$ newtoni mozgásegyenlet tetszőleges sebességgel mozgó testre érvényes. Elég azonban az is, ha az érvényességét csak a *nyugvó* testre posztuláljuk $m\mathbf{a}_0=\mathbf{F}_0$ alakban, amelyben $\mathbf{a}_0$ és $\mathbf{F}_0$ a nyugvó test gyorsulása és a nyugvó testre ható erő. Ha ugyanis ezt a testet a $-\mathbf{v}$ sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerből nézzük, amelyben a test az adott pillanatban $\mathbf{v}$ sebességgel mozog, akkor — mivel $\mathbf{a}_0$-t és $\mathbf{F}_0$-t a $\mathbf{v}$ segítségével ki tudjuk fejezni $\mathbf{a}$-n és $\mathbf{F}$-n keresztül, — a nyugvó testre felírt mozgásegyenlet egyértelműen meghatározza a tetszőleges sebességgel mozgó testre vonatkozó mozgásegyenlet matematikai alakját.

Tekintsük azt a fontos példát, amikor egy e elektromos töltésű tömegpont homogén $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ elektromos mezőben mozog a mezővel párhuzamos irányban. A mozgás ekkor egydimenziós, ezért a vektor-jelöléstől eltekinthetünk és a nyugvó testre vonatkozó mozgásegyenletet $ma_0=e\mathcal{E}_0$ alakban írhatjuk. Hogyan módosul ez a mozgásegyenlet, amikor a test éppen v sebességgel mozog? Foglalkozzunk először a gyorsulással. A newtoni fizika szerint egy test gyorsulása nem függ attól, hogy melyik inerciarendszerből figyeljük meg, ezért a $-v$ sebességgel mozgó inerciarendszerben mért a gyorsulása egyenlő lesz a_0-lal: $a_0=a$. A newtoni fizika szerint a homogén elektromos mező sem változik, ha egy vele párhuzamosan mozgó inerciarendszerből figyeljük meg, azaz $\mathcal{E}_0=\mathcal{E}$. Ha a két utóbbi egyenlőséget a nyugvó töltésre vonatkozó $ma_0=e\mathcal{E}_0$ egyenletbe behelyettesítjük, azt találjuk, hogy a tetszőleges sebességgel mozgó testre a változatlan alakú $ma=e\mathcal{E}$ mozgásegyenlet érvényes.

Vegyük észre, hogy ebből a gondolatmenetből az is látszik, hogy *nem is szabad* a tetszőleges sebességgel mozgó test mozgásegyenletét önkényesen posztulálni, hiszen a nulla sebességnél felvett alak minden sebességre egyértelműen meghatározza azt. A mozgásegyenlet relativitáselméletben érvényes alakját ennek az észrevételnek az alapján kell megkeresnünk. A fénynél sokkal kisebb sebességgel mozgó történő mozgásra a newtoni mozgásegyenlet érvényességét a tapasztalat sokszorosan bizonyította. Ezt a tényt a relativitáselméletbe úgy építjük be, hogy a *nyugvó testekre* továbbra is az $ma_0 = e\mathcal{E}_0$ egyenletet posztuláljuk és ezt az egyenletet a relativitáselmélet szabályai szerint írjuk át v sebességgel mozgó testre érvényes alakba.

Foglalkozzunk előbb megint a gyorsulással. Mindenekelőtt írjuk fel a gyorsulásokat a sebesség időderiváltjaként:

$$a_0 = \frac{dv_0}{dt_0} \qquad \text{és} \qquad a = \frac{dv}{dt},$$

ahonnan

$$a_0 = \frac{dv_0}{dv} \times \frac{dt}{dt_0} \times \frac{dv}{dt} = \frac{dv_0}{dv} \cdot \frac{dt}{dt_0} \cdot a.$$

A dt_0 a nyugvó testen eltelt infinitezimálisan rövid időtartam, a dt az ennek megfelelő időtartam abban az inerciarendszerben, amelyben a test v sebességgel mozog. Elég nyilvánvaló, hogy a kettő ugyanúgy aránylik egymáshoz, mint az összetartozó sajátidő és koordinátaidő intervallumok. A (6) alapján tehát $dt = dt_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, ezért

$$a_0 = \frac{dv_0}{dv} \cdot \frac{a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

A dv_0/dv arányt a következő meggondolással számíthatjuk ki.

Amikor a gyorsulás nulla, az $\mathcal{I}_0$-ban a dt_0 idő alatt az elmozdulás nulla: $dl_0 = 0$. Az $\mathcal{I}$-ben azonban az ennek megfelelő dt idő alatt az elmozdulás $v \cdot dt$-vel egyenlő. Zérustól különböző gyorsulásnál dl_0 valamilyen véges érték, az $\mathcal{I}$-ben megtett út pedig a dl_0-nak megfelelő dl értékkel *nagyobb*, mint $v \cdot dt$. A dl tehát *nem* az $\mathcal{I}$-ben dt idő alatt megtett teljes távolság, hanem annak csak a gyorsulással kapcsolatos része. Mivel dv_0 és dv is csak akkor különbözik nullától, amikor van gyorsulás, ezért

$$dv_0 = k_0 \frac{dl_0}{dt_0} \qquad \text{és} \qquad dv = k\frac{dl}{dt}.$$

Azonban elég egyszerűen látható, hogy $k = 2$. A dt infinitezimális időintervallumban az a gyorsulás konstansnak tekinthető, ezért

$$dl = \left(\frac{a}{2}dt^2 + v \cdot dt\right) - v \cdot dt = \frac{a}{2}dt^2 = \frac{1}{2}dv \cdot dt,$$

ahonnan valóban $k = 2$ következik. Ugyanez a gondolatmenet $v = 0$-val is megy, ezért k_0 is 2-vel egyenlő. Így végül

$$dv_0 : dv = \frac{dl_0}{dt_0} : \frac{dl}{dt} = \frac{dt}{dt_0} \times \frac{dl_0}{dl} = \frac{1}{1 - v^2/c^2},$$

mert $dt_0 = dt\sqrt{1-v^2/c^2}$ és $dl = dl_0\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Ha ezt az a_0-ra kapott előbbi kifejezésbe írjuk, az

$$a_0 = \frac{a}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \tag{10}$$

képletre jutunk. A relativitáselméletben ez helyettesíti a newtoni fizika $a_0 = a$ szabályát, amelyet a $v \ll c$ határesetben kapunk vissza.

A további diszkusszió érdekében írjuk (10)-t

$$a = a_0 \times (1-v^2/c^2)^{3/2} \tag{11}$$

alakban és hasonlítsuk össze a newtoni $a = a_0$ képlettel. Mindkét képlet arra a kérdésre ad választ, hogy ha egy nyugvó test gyorsulása a_0, akkor milyen a-val gyorsul abból a vonatkoztatási rendszerből nézve[6], amelyben a sebessége v. A newtoni fizika szerint ugyanazzal az a_0-lal, de a relativitáselmélet szerint ennél kisebb gyorsulással, amelyet (11) határoz meg. Röviden ezt úgy fejezhetjük ki, hogy a relativitáselmélet szerint *gyorsulás-deficit* lép fel a newtoni fizikához képest.

Ha nem a nyugvó, hanem a mozgásban lévő testből indulunk ki, a gyorsulás-deficit így magyarázható: Tekintsünk egy tömegpontot, amely az $\mathcal{I}$ inerciarendszerben változó sebességgel mozog. A pályájának egy adott pontjában a sebessége legyen v. A *konstans* v sebességgel mozgó inerciarendszerben az adott pillanatban a test éppen nyugszik, ezért ezt az inerciarendszert a test adott pontbeli $\mathcal{I}_0$ *pillanatnyi nyugalmi rendszerének* nevezzük[7]. Ha a pillanatnyi nyugalmi rendszerben a test gyorsulása a_0-lal egyenlő, akkor $\mathcal{I}$-beli a gyorsulása a newtoni fizika szerint ugyanennyi ($a = a_0$), a relativitáselmélet szerint azonban ennél kisebb ($a = a_0 \times (1-v^2/c^2)^{3/2}$).

A gyorsulás-deficit egyedül az idődilatáció következménye. A levezetésénél ugyan a Lorentz-kontrakció képletét is használtuk, de — mint láttuk, — ez a képlet maga is az idődilatáció következménye.

Kanyarodjunk vissza tulajdonképpeni tárgyunkhoz, a mozgásegyenlet relativisztikus alakjának származtatásához. Abban már megállapodtunk, hogy a *nyugvó ponttöltés* mozgásegyenletét a relativitáselméletben is a newtoni fizikában érvényes $ma_0 = e\mathcal{E}_0$ alakban posztuláljuk. Vegyük figyelembe azonban még azt a lehetőséget is, hogy a relativitáselméletben a testek tömege esetleg nem állandó érték, hanem valahogy függ a sebességtől. Ha ezt megengedjük, akkor célszerű a nyugvó test tömegét m_0-lal jelölni, az m-t pedig fenntartani a mozgó test tömegére. A nyugvó testre vonatkozó egyenlet ebben az esetben

[6] Az a és az a_0 közötti különbséget legvilágosabban az űrhajó példáján mutathatjuk be: Amikor az űrhajó gyorsulása ahhoz az inerciarendszerhez képest, amelyben mozog, a-val egyenlő, az űrhajós (és műszerei) által érzékelt gyorsulás a_0.

[7] A függőlegesen felhajított test pályájának a tetőpontjához tartozó pillanatnyi nyugalmi rendszer a talajhoz rögzített inerciarendszer, mert a tetőpontban ehhez az inerciarendszerhez képest nulla a test sebessége. Az elhajítás pillanatához tartozó pillanatnyi nyugalmi rendszer viszont a v_0 kezdősebességgel felfele mozgó inerciarendszer. A test ehhez viszonyítva is állandóan lefelé gyorsul g-vel és a földetérés pillanatában $2v_0$ a sebessége.

$m_0a_0 = e\mathcal{E}_0$. A tetszőleges v sebességgel mozgó töltésre érvényes alakot úgy kapjuk, hogy megvizsgáljuk: hogyan néz ki ez az egyenlet a $-v$ sebességgel mozgó inerciarendszerből.

Az a_0 helyébe a (10) jobboldalát kell helyettesíteni. Az $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$ egyenlőségről be lehet látni, hogy a relativitáselméletben is megmarad, ezért a töltött tömegpontra homogén elektromos térben a relativitáselmélet szerint az

$$m_0a = (1 - v^2/c^2)^{3/2}e\mathcal{E} \tag{12}$$

mozgásegyenletet kapjuk. De ez nem a végleges alak, hiszen a nyugvó test m_0 tömegét még ki kell fejeznünk benne a mozgó test m tömegén keresztül. A nyugvó és a mozgó tömeg kapcsolatára vonatkozóan azonban az eddigi megfontolásaink semmiféle támpontot sem nyújtanak, ezért ezt új posztulátumban kell rögzítenünk. A relativitáselméletben a tömeg transzformációjára az elképzelhető legegyszerűbb posztulátumot fogadjuk el, azt, hogy *a tömeg invariáns*:

$$m = m_0. \tag{13}$$

Ennek az alapvető fontosságú posztulátumnak a következtében a relativitáselméletben éppúgy elég egyetlen m szimbólum a tömeg jelölésére, mint a newtoni mechanikában. Az m_0 jelölésre nincs semmi szükség, ezért az előző egyenlet helyes alakja a következő:

$$ma = (1 - v^2/c^2)^{3/2}e\mathcal{E}. \tag{14}$$

Ez az egyenlet kizárólag a gyorsulás-deficit miatt különbözik a newtoni fizika mozgásegyenletétől, amelyet a $v \ll c$ határesetben kapunk vissza belőle. A gyorsulás-deficit hatása az egyenletben az, hogy akármekkora elektromos mezőben akármilyen hosszú ideig gyorsítunk is egy töltött részecskét, sohasem tudjuk elérni a fénysebességet.

A (14) arra a speciális esetre vonatkozik, amikor egy ponttöltés mozog homogén elektromos térben. A lineáris mozgás általános esetében érvényes mozgásegyenletet úgy kapjuk, hogy eE-t a v-sebeségű testre ható F erővel helyettesítjük:

$$ma = (1 - v^2/c^2)^{3/2}F. \tag{15}$$

Ez az egyenlet egyaránt vonatkozik semleges és töltött tömegpontok mozgására. Az erő természete az, amely különbséget tesz közöttük.

A közfelfogás szerint a gyorsulás-deficitet az okozza, hogy a sebesség növekedésével nő a test tömege. Mint látjuk, ez teljesen hibás értelmezés, mert a tömeg invariáns, a gyorsulás-deficit oka pedig az idődilatáció. Ha az $m = m_0$reláció helyett az $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ összefüggést fogadtuk volna el, akkor az m_0-t innen kellett volna behelyettesíteni (12)-be, és (14) helyett az $ma = (1-v^2/c^2)F$ mozgásegyenletet kaptuk volna. A tapasztalat azonban nem ezt, hanem a (15) egyenletet és ezzel együtt az $m = m_0$ trlációt igazolja. Ennek következtében a mozgási és a nyugalmi tömeg megkülönböztetése alaptalan és súlyosan félrevezető, ezért ezeket az elnevezéseket következetesen kerülni kell.

De miért ne lehetne a gyakran előforduló $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ kombinációra a „mozgási tömeg” elnevezést használni anélkül, hogy a (13) képlet érvényességét kétségbe vonnánk? Azért, mert már késő. Akik ezt a terminust használják, nem az $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ kifejezés egyszerű megnevezését, hanem a gyorsulásdeficit magyarázatát látják benne: A gyorsulásdeficit oka szerintük az, hogy a sebességgel a tömeg is nő. Ez azonban súlyos tévedés, mert a gyorsulásdeficit az idődilatáció következménye.

A közvetett deriválás szabálya alapján a (15) mozgásegyenlet $\dfrac{dp}{dt} = F$ alakban is felírható, amelyben

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,. \tag{16}$$

A relativitáselméletben ez a mennyiség tölti be a tömegpont *impulzusának* a szerepét, mert az impulzus definíció szerint az a mennyiség, amelynek időderiváltja az erő.

Az F/a arány a test *tehetetlenségét* jellemzi. A (15)-ből látható, hogy a nyugvó test tehetetlensége a tömegével egyenlő, a mozgó test tehetetlensége azonban a gyorsulás-deficit következtében nagyobb a tömegnél (és $v \longrightarrow c$-nél végtelenhez tart).

7. A mozgási energia

Egy v sebességű test K *mozgási energiája* azzal a munkával egyenlő, amit a testre ható erő végez, miközben a kezdetben nyugvó testet v sebességre gyorsítja fel. A gyorsulás-deficit növeli a mozgási energiát, mert az adott sebességet hosszabb úton lehet csak elérni, mint amikor a gyorsulás-deficit nulla. Ezért azt várjuk, hogy az adott v-hez tartozó mozgási energia a relativitáselméletben nagyobb, mint a newtoni fizikában. A számítás ezt igazolja is.

Ennek a definíciónak megfelelően a kinetikus energia megváltozása egy infinitezimális ds úton $dK = F \cdot ds = Fv \cdot dt$-vel egyenlő. A newtoni esetben az F helyébe $ma = m\dfrac{dv}{dt}$ kerül, a relativisztikus esetben pedig (15) szerint $ma(1-v^2/c^2)^{-3/2} = m(1-v^2/c^2)^{-3/2}\dfrac{dv}{dt}$. Amikor ezek bármelyikét a $dK = Fv \cdot dt$ képletbe beírjuk, a dt egyszerűsödik és az integrálást dv szerint kell elvégezni, ami jól simul a feladathoz.

Eszerint a newtoni esetben

$$K = m\int_0^v v \cdot dv = \frac{1}{2}mv^2, \tag{17}$$

ahogy vártuk. A relativisztikus esetben pedig

$$K = m\int_0^v \frac{v}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \cdot dv = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 \tag{18}$$

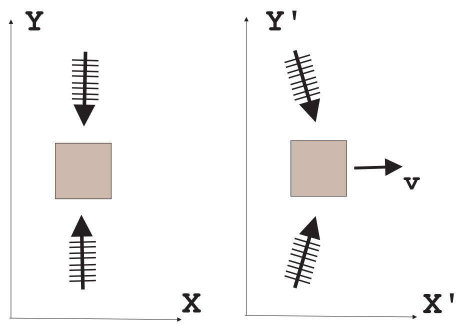
(a második esetben az integrálás helyességéről legegyszerűbben visszaderiválással győződhetünk meg). A v^2/c^2 szerinti sorfejtéssel könnyen igazolhatjuk, hogy a v^2/c^2 legalacsonyabb rendjében a (18) képlet a (17)-be megy át.

Einstein „*A mozgó testek elektrodinamikájához*" című híres közleményében, amely a speciális relativitáselmélet minden lényeges aspektusát tartalmazza, a mozgási energia (18) képlete is megtalálható (más jelölésben). A fenti levezetésben Einstein eredeti gondolatmenetét követtük. A képlet két tagjának fizikai jelentéséről azonban ebben a közleményben nem esik szó: Amikor ezt a cikket befejezte, Einstein *még nem tudta*, hogy a második tag a nyugvó test energiájával egyenlő. Honnan is tudhatta volna? Ugyanazzal a gondolatmenettel, amely a newtoni fizikában az egyszerű $mv^2/2$ képletet adja a mozgási energiára, neki egy kéttagú kifejezés jött ki, amely semmiféle támpontot sem nyújt a két tag fizikai jelentésére vonatkozóan külön-külön. Három hónapjába telt, amíg a második tag fizikai jelentését (és ezzel együtt természetesen az elsőét is) egy külön dolgozatban tisztázta. A következő fejezetben az ebben a dolgozatban közölt gondolatmenetet (pontosabban egy negyven évvel későbbi változatát) ismertetjük.

8. A nyugalmi energia

Mikor egy tárgyat melegítünk, az E_0 *belső* (vagy *nyugalmi*) energiáját változtatjuk. Ennek az energiának a megváltozását a csodálatosan egyszerű $\Delta E_0 = \Delta m \cdot c^2$ kapcsolja össze a tömeg megváltozásával. A $\Delta E_0 = \Delta m \cdot c^2$ képletben szereplő mindhárom mennyiséget már a 19. században ismerte a fizika, de semmi jel se mutatott arra. hogy ilyen mély kapcsolat állna fenn közöttük. Alkalmas kísérletben mindhárom mennyiséget külön-külön meg lehet mérni, tehát az összefüggés helyességét tapasztalatilag lehet igazolni vagy cáfolni.

A képlet bizonyítása a következőképpen történik. Képzeljünk el egy m tömegű testet, amely az XYZ inerciarendszerben nyugszik. Figyeljük *ugyanezt* a testet egyidejűleg egy másik, $X'Y'Z'$ vonatkoztatási rendszerből is, amelynek tengelyei párhuzamosak az XYZ tengelyeivel és tetszőlegesen kis v sebességgel mozog a közös X-tengely mentén *negatív* irányba. A vesszős koordinátarend-



5. ábra.

szerhez képest a test természetesen v sebességgel fog mozogni az X' tengely pozitív irányába (ld. az 5.ábrát).

Képzeljük most el, hogy két teljesen egyforma elektromágneses hullámcsomag esik rá a testre, amelyeket a test teljes egészében abszorbeál. Tegyük fel, hogy a két csomag a vesszőtlen rendszerben pontosan az Y tengellyel párhuzamosan érkezik egymással ellentétes irányból. A klasszikus elektrodinamika szerint az ilyen hullámcsomagoknak van valamekkora energiája (ϵ) és impulzusa (p), amelyek között fennáll az $\epsilon = cp$ reláció.

Az energiamegmaradás tétele következtében a hullámcsomagok elnyelése után a test energiája 2ϵ-nal megnő. Ez a növekmény azonban kizárólag a *belső energiát* növeli meg, hiszen a test továbbra is nyugalomban marad: Az impulzusok, amelyeket a test a két hullámcsomagtól vesz át, pontosan kompenzálják egymást.

Az $X'Y'Z'$ rendszerben a fénysugarak már nem ugyanazon az egyenesen mozognak, hanem elhajolnak a vesszőtlen koordinátarendszer mozgásának az irányába (aberráció). Az aberráció szöge az Y' iránnyal bezárt α szög. Mivel $v \ll c$, a sebességek vektordiagrammja alapján ez a szög v/c radiánnal egyenlő. A két csomag impulzusa most nem kompenzálja egymást, hanem $2p \sin\alpha = 2p \sin\frac{v}{c} \approx 2p\frac{v}{c}$ X-irányú impulzus adódik át a testnek.

A test sebessége azonban nem változik meg, hiszen a vesszőtlen rendszerben nyugalomban maradt, ezért a vesszős rendszerben továbbra is v sebességgel fog mozogni X' pozitív irányába. Hogyan változhat meg akkor az impulzusa? Csak úgy, hogy a tömege megnő valamilyen Δm értékkel.

Mivel v-t nagyon kicsinek választottuk (elvben $v \longrightarrow 0$), ezért az impulzus még a speciális relativitáselmélet szerint is mv-vel egyenlő. A csomagok elnyelése után tehát az impulzusmegmaradás tétele következtében teljesülnie kell a $2p\frac{v}{c} = \Delta m \cdot v$ relációnak, amelyből a $\Delta m = \frac{2p}{c}$ képletet kapjuk a tömegnövekedésre. Azonban, mint mondottuk, a hullámcsomag energiája és impulzusa között fennáll a $p = \epsilon/c$ reláció, így $\Delta m = 2\epsilon/c^2$. De 2ϵ a test belső energiájának ΔE_0 megnövekedésével egyenlő, ezért végül $\Delta E_0 = \Delta m \cdot c^2$.

Ez a bizonyítás az energia és az impulzus megmaradásán alapul, ezért az energia és a tömeg *megváltozását* kapcsolja össze egymással. Azonban jó okunk van feltételezni, hogy a delták nélküli $E_0 = mc^2$ is igaz. A természetben pl. vannak olyan objektumok (a π_0 mezon pl. ilyen), amelyek spontán módon elektromágneses sugárzássá tudnak átalakulni és nyugvó pionok szétsugárzásánál a létrejövő sugárzás energiája $m_{\pi_0}c^2$-tel egyenlő. Ez arra utal, hogy nemcsak a tömeg egy része kapcsolatos a test belső energiájával, hanem az egész tömeg. Az $E_0 = mc^2$ törvényt *tömeg-energia relációnak* nevezzük.

A továbbiakban egy szabadon mozgó tömegpont E energiáján a mozgási és a nyugalmi energia összegét fogjuk érteni. A (18) figyelembevételével azt találjuk, hogy

$$E = K + E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (19)$$

Az $E_0 = mc^2$ képlet ennek speciális esete, amely nyugvó testre vonatkozik.

A gondolatkísérletben a test energiája annak következtében nőtt, hogy elektromágneses sugárzást nyelt el. A termodinamikából azonban tudjuk, hogy egy test termodinamikai állapotának a megváltozása energiafelvétel során nem függ attól, milyen formában kapta az energiát. Ezért a tömeg akkor is nő, amikor a testet melegítjük. Kihatásaiban ez a relativitáselméletnek talán még nagyobb jelentőségű következtetése, mint az, hogy egyetlen test sem mozoghat fénysebességgel vagy annál gyorsabban.

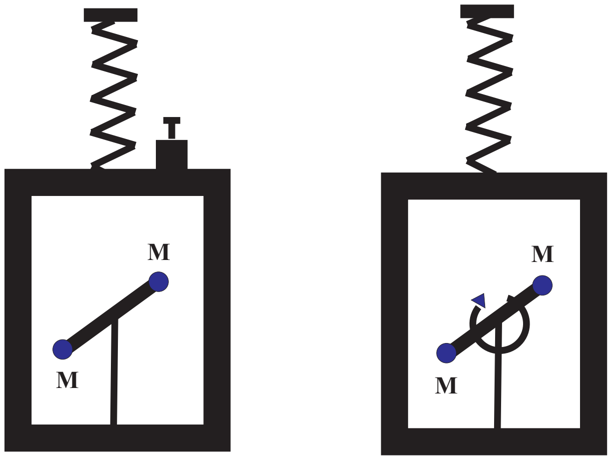
A fenti bizonyításban egyáltalán nem hivatkoztunk explicite a relativitáselméletre, ezért az ember azt gondolhatná, hogy ez a gondolatmenet a newtoni fizikán belül is érvényes. Nem így van, mert a gondolatmenetben kihasználtuk, hogy az XYZ és az $X'Y'Z'$ inerciarendszer még az elektromágneses impulzusok szempontjából is egyenértékű egymással. Ez a feltevés csak a relativitáselméletben jogos, mert a newtoni fizika inerciarendszerei csak a mechanikai jelenségek szempontjából ekvivalensek. De az igaz, hogy az eddig vizsgált problémákkal ellentétben az $E_0 = mc^2$ képlet levezetésénél az idődilatációt és a rá jellemző $\sqrt{1 - V^2/c^2}$-t nem kellett kihasználnunk. A képlet bizonyítása a Lorentz-transzformáció ismeretében sem változik. Ennek az az oka, hogy a Lorentz-transzformáció (és az idődilatáció is) a *kinematika* körébe tartozik, míg a tömeg-energia reláció *dinamikai* természetű.

Az $E_0 = mc^2$ reláció egyenes következménye, hogy *a tömeg nem marad meg.* A belső energia ugyanis az energiának csak egy része, amelynek külön nem kell megmaradnia, és ezért a tömegnek sem kell. Az alfa-bomlásban pl. a bomlástermékek belső energiája kisebb, mint a bomló magé, és a különbség a bomlástermékek mozgási energiája formájában jelenik meg. De akkor a bomlástermékek össztömege is kisebb, mint a bomló mag tömege.

A newtoni fizika alapjául szolgáló jelenségekben a belső energia *változása* olyan kicsi magához a belső energiához képest, hogy az ezzel együttjáró tömegváltozás is megfigyelhetetlenül kicsi ($\Delta m/m \ll 1$). Ezért vált a tömegmegmaradás a newtoni fizika egyik alaptörvényévé, amely azonban pl. az alfabomlást megtiltaná. A newtoni fizika érvényességének ezért nemcsak az a feltétele, hogy a sebességek legyenek sokkal kisebbek a fénysebességnél, hiszen pl. alfa-bomlásnál ez a feltétel teljesülhet. Az is követelmény, hogy a Δm legyen elhanyagolhatóan kicsi.

(4. óra)

Einstein relativitáselméletről szóló nevezetes közleménye *A mozgó testek elektrodinamikájához* címmel 1905 júniusában jelent meg és az elmélet minden lényeges aspektusát tartalmazta egyetlen kivétellel: Csak a mozgási energiára vonatkozó (18) szerepelt benne, az $E_0 = mc^2$ képlet nem . Ez utóbbi formulát Einstein még ugyanazon év szeptemberében publikálta egy rövid cikkben, amely a *Függ-e a testek tehetetlensége az energiatartalmuktól* címet viselte. A gondolatmenetet azonban még hosszú ideig csiszolta. Itt most az 1946-ban publikált változatot ismertettük.



6. ábra.

9. A tömeg-energia reláció a folklórban

A közhit szerint a tömeg-energia reláció nemcsak a nyugalmi energiára, hanem *minden energia fajtára* érvényes, tehát nemcsak az $E_0 = mc^2$ reláció igaz, hanem az általánosabb $E = mc^2$ is, tekintet nélkül az E energia természetére. Eszerint pl. a mozgó test tömege nem E_0/c^2-tel, hanem $E/c^2 = m/\sqrt{1 - V^2/c^2}$-tel egyenlő. Mint látjuk, itt újra felbukkan a „mozgási tömeg”, de éppúgy bizonyítás nélkül, mint a 6. fejezetben[8]. Csak egy próbálkozást ismerek az igazolására, a következőt[9]: Az 6. ábrán egy doboz látható, amelyben vízszintes tengelyre erősített súlyzó foroghat. A baloldali ábra azt a helyzetet ábrázolja, amikor a súlyzó nyugalomban van, a jobboldali pedig azt, amikor forog. A dobozok rugón lógnak és az ábra szerint a forgó súlyzót tartalmazó doboz súlyosabb, mint a másik: A súlykülönbséget a baloldali dobozra helyezett súly méri. A gondolatkísérlet kitalálója szerint ha a kísérletet tényleg elvégeznénk, valóban ezt találnánk és levonhatnánk a következtetést, hogy a súlyzók végén lévő golyók tömege annál nagyobb, minél nagyobb a sebességük.

Azonban ezt a kísérletet úgy is lehet értelmezni, hogy az egész jobboldali *doboz* tömege az, ami nagyobb, mint a baloldalié, mert nagyobb a *nyugalmi energiája*[10]. Hogyan lehetne eldönteni, melyik interpretáció a helyes? Legyen a doboz fala hőszigetelő és engedjük meg, hogy a felpörgetett súlyzó a dobozban

[8] A 6. fejezetben láttuk, hogy ha a tömeg valóban függne a sebességtől, ez elrontaná a (15) mozgásegyenletet, amelyet a tapasztalat igazol.

[9] E. M. Purcell, *Electricity and Magnetism* (Berkeley Physics Course, Vol. 2, 178.oldal)

[10] Legyen a baloldali és a jobboldali doboz nyugalmi energiája E_0^b és E_0^j. A tömeg-energia képlet alapján a súlykülönbség $g \times (E_0^j - E_0^b)/c^2$-tel egyenlő. Ha a rudak tömege elhanyagolható, akkor a belső energiák különbsége a két forgó tömeg kinetikus energiájával egyenlő. A (18) alapján tehát a súlykülönbség $g \times 2\left(M/\sqrt{1 - V^2/c^2} - M\right)$ alakban írható és *formálisan* a „mozgási” és a „nyugalmi” tömeg különbségével arányos.

lévő levegővel való súrlódása miatt lassan leálljon. Mi fog történni a rugóval? Ha a golyók mozgási tömege okozta a rugó megnyulását, akkor a forgás lassulásával párhuzamosan a doboz súlya fokozatosan csökken és a leállás után a jobboldali rugó hossza rövidebb lesz, mint a baloldalié. Az $E_0 = mc^2$ tömeg-energia reláció szerint viszont a rugó hossza változatlan marad, mert a doboz belső energiája a falak hőszigeteltsége következtében nem csökken[11].

A hibás $E = mc^2$ szerint egy E energiájú elektromágneses hullámcsomagnak is van tömege, amelyik E/c^2-tel egyenlő. De ez az állítás — az $E_0 = mc^2$ tömeg-energia relációval ellentétben — nem egy fizikai törvény, mert semmilyen módon se lehet kísérletileg ellenőrizni. A tömeg definíciója, amelynek alapján a nagyságát meg is lehet mérni, a mozgásegyenleten alapul: Egy test tömege a nyugvó testre ható erőnek és a test gyorsulásának a hányadosa. Az általános relativitáselmélet szerint pedig *ugyanez a tömeg* a test súlya alapján is meghatározható. Az elektromágneses hullámcsomagra azonban a mechanika mozgásegyenlete nem alkalmazható, a Maxwell-egyenletekben pedig tömeg nem szerepel; és a hullámcsomag súlyát sem lehet megmérni (ha valahogy dobozba zárjuk, megint a nyugvó doboz tömegét mérjük, nem a hullámcsomagét).

Nehéz megmondani, miért ragaszkodik még a fizikus közfelfogás is ahhoz, hogy minden energia fajtához tartozik tömeg. Az egyik ok biztosan az, hogy Einstein gondolatmenete egyáltalán nem része a tananyagnak[12], a helytelen $E = mc^2$ képletet pedig bizonyítás nélkül deklarálják.

Ez a hibás értelmezés valószínűleg azért is annyira vonzó, mert a tömegmegmaradásról „pszichológiailag" nagyon nehéz lemondani[13], a „mozgási tömeg" bevezetésével pedig az energiamegmaradás tételét formálisan átfogalmazhatjuk tömegmegmaradássá. Tekintsük például a

$$Po^{210} \longrightarrow Pb^{206} + \alpha.$$

[11] Erre azt válaszolhatná valaki, hogy a levegőben lévő molekulák sebessége viszont megnőtt és az ő „mozgási tömegük" lett nagyobb. De még ha ezt elfogadnánk is, azt már semmiképpen sem állíthatnánk, hogy a molekulák „mozgási tömegének" a megnövekedése pontosan egyenlő a két forgó golyó „mozgási tömegének" a csökkenésével. Ez csak ideális gáznál lenne így. Reális gázban ugyanis (és minden gáz reális, a levegő is az) a belső energia egy része a molekulák kölcsönös potenciális energiájából származik.

[12] *A speciális és általános relativitás elmélete* c. könyvében ((Gondolat, 1963) Einstein természetesen az $E_0 = mc^2$ összefüggésre ad (egy nem teljesen komplett) bizonyítást (53-54. old). A könyvet azonban még 1916-ban írta, ezért a bizonyítása az eredeti 1905-s dolgozat gondolatmenetén alapul. A bizonyítás 1946-os változata, amelyet az előző fejezetben ismertettünk, lényegesen egyszerűbb. A magyar kiadás az 56. oldal lábjegyzetében azonban sajnos azzal egészíti ki a könyv alapszövegét, hogy az elektronnyalábbal végzett nevezetes Kaufmann-kísérletben „az elektronok nagy mozgási energiája folytán a tömegük tetemesen megnövekszik".

[13] Ennek valószínűleg az az alapja, hogy a tömegmegmaradást ösztönösen anyagmegmaradásként fogjuk fel, pedig két különböző dologról van szó. A „tömeg" *terminus technicus*, a testeknek azt a paraméterét jelenti, amely a mozgásegyenletben a gyorsulást, a súlyerőben pedig a nehézségi gyorsulást szorozza. Az anyagnak vannak olyan fajtái (pl. az elektromágneses mező), amelyek nem jellemezhetők tömeggel. Az „anyag" inkább filozófiai, mint fizikai fogalom; nincs olyan mérőszám, amely egyértelműen jellemezné a mennyiségét. Talán az energia áll ehhez a legközelebb, mert — a tömeggel ellentétben — energiával az anyag minden fajtája rendelkezik.

alfa-bomlást. Amikor a bomló polónium mag nyugalomban van, az energiamegmaradás tétele a következő:

$$Mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} + \frac{\mu c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{20}$$

Az M a Po^{210} mag tömege, az m, V és a μ, v párok pedig a Pb^{206} magra illetve az alfa-részecskére vonatkoznak.

A (20) jobboldala nyilván nagyobb, mint $(m + \mu)c^2$, így $M > m + \mu$, vagyis a tömeg nem marad meg. Mint az előző fejezetben már szó volt róla, ez azért van így, mert a bomló Po^{210} mag belső energiájának egy része átalakult a bomlástermékek mozgási energiájává. Ha azonban (20)-t végigosztjuk c^2-tel és a „mozgási tömeget" (*relativistic mass*) az r alsó indexszel különböztetjük meg a tömegtől, akkor az energiamegmaradást kifejező (20) képletet $M = m_r + \mu_r$ alakban írhatjuk fel, amely *fomáját tekintve* tömegmegmaradás.

10. Koordinátarendszerek és vonatkoztatási rendszerek

Sok fölösleges problémát elkerülhetünk, ha a pontos értelmüknek megfelelően használjuk ezt a két fogalmat.

- *Vonatkoztatási rendszeren* azt az objektumot értjük, amelyhez viszonyítva érzékeljük a vizsgált jelenségeket. A vonatkoztatási rendszerek leggyakoribb példái a laboratórium, egy vonat, a pályatest, űrhajó, a forgó Föld, az állócsillagok rendszere. A vonatkoztatási rendszerek lehetnek inerciarendszerek vagy gyorsuló rendszerek. A vonatkoztatási rendszerek mindig valóságosan létező, de legalább is valóságosan realizálható objektumok.

- A *koordinátarendszer* olyan elképzelt matematikai konstrukció, amelynek segítségével a tér pontjaihoz egy meghatározott számhármast rendelhetünk. Ehhez az szükséges, hogy a koordinátavonalak végtelenül sűrűn hálózzák be a térnek azt a tartományát, amelyet vizsgálunk. Ezért pl. a Descartes-koordinátarendszer sokkal több, mint a három egymásra merőleges x, y, z tengely. Noha a koordinátarendszer csak a képzeletünkben („papíron") létezik, a konkrét számításokhoz mégis többnyire nélkülözhetetlen: Gondoljunk csak pl. a bolygópályák, vagy az üstököspályák számítására az általános tömegvonzás törvénye alapján. A számításoknak azonban csak azokat az eredményeit tudjuk összevetni a tapasztalattal, amelyek a koordinátarendszerrel együtt a vonatkoztatási rendszerünkre is vonatkoznak. Ezért fontos a vonatkoztatási rendszerünkhöz *rögzített* koordinátarendszert választani. A ferde hajítás tárgyalásánál például a természetes vonatkoztatási rendszerünk a földfelszín egy darabja. Ennek megfelelően a koordinátarendszer z-tengelyét a földfelszínre merőlegesen, az x-tengelyét pedig a hajítás irányába orientáljuk. De ezt csak gondolatban tesszük meg, eszünk ágában sincs ezt a koordinátarendszert a valóságban is „ fölvenni".

Amikor egy tömegpont pályáját grafikusan ábrázoljuk, az egyik tengelyre mindig a koordinátaidőt mérjük fel. Ha a test térgörbén mozog, akkor az ábrázoláshoz mindhárom térbeli koordináta-tengelyre szükség volna, és az ábránk négydimenziós lenne. Ezt a hipotetikus négydimenziós teret nevezzük *téridőnek*. A téridő pontjai a pontszerű és pillanatszerű *események*. Egy téridőbeli koordinátarendszer tehát négy egymásra merőleges tengelyt tartalmaz, amelyek közül az egyik a koordinátaidő tengely (amelyet többnyire pongyolán időtengelynek mondunk). Ezt azonban nemcsak ábrázolni, de elképzelni se tudjuk, ezért be kell érnünk egy olyan kétdimenziós metszetének a felrajzolásával, amely az egyik koordinátatengelyt és az időtengelyt tartalmazza.

A koordinátarendszer választása teljesen önkényes, a célszerűség szabja meg. A speciális relativitáselméletben leggyakrabban a *Minkowski-koordinátákkal* dolgozunk, amely a térbeli Descartes-koordináták kiegészítése koordinátaidővel azon a módon, ahogy lényegében már az 1. fejezetben tárgyaltuk. Az $x = y = z = 0$ pontban nyugvó elképzelt (virtuális) ideális óra mutatja a koordinátaidőt ebben a geometriai pontban. Egy másik pontban a koordinátaidőt egy ott nyugvó virtuális ideális óra mutatja (pontosabban mutatná, ha valóban ott lenne), amelyet az Einstein-féle eljárással szinkronizálunk össze az origóban nyugvó órával. Így az egész téridőben értelmeztük a geometriai koordinátákon kívül a koordinátaidőt is; ezek szerepelnek a tömegpontok pályáit leíró egyenletekben. A valóságban természetesen a pályákat nem a Minkowski-koordinátákhoz viszonyítjuk (amelyek csak a képzeletünkben léteznek), hanem a vonatkoztatási rendszerünkhöz, valamint ahhoz a néhány valóságos órához, amelyet a megfigyeléseink során használunk. A Minkowski-koordinátarendszeren alapuló meggondolásoknak és számításoknak azért van mégis reális értéke, mert ezt a koordinátarendszert gondolatban a valóságos inerciarendszerünkhöz és valóságos időmérési eljárásunkhoz igazítva választjuk meg.

A Minkowski-koordinátarendszer és a valóságos megfigyelések kapcsolatára nagyon jó példa az *ikerparadoxon*. Egy ikerpár két tagja külön-külön űrutazásban vesz részt. A paradoxon abban áll, hogy két egymást követő találkozásuk között nem egyforma idő telik el a számukra.

Legyen a pályájuk az $\mathcal{I}$ inerciarendszerhez rögzített Minkowski-koordinátarendszerben

$$x = f_i(t), \qquad y = g_i(t), \qquad z = h_i(t) \qquad (i = 1, 2). \tag{21}$$

A t-pillanatbeli sebességük x, y, z komponense ezeknek a függvényeknek az idő-deriváltjával egyenlő (természetesen feltesszük, hogy a sebességük kisebb c-nél). A két találkozás történjen a $t = t_a$ és a $t = t_b$ koordinátaidő pillanatban ($f_1(t_a) = f_2(t_a)$, $f_1(t_b) = f_2(t_b)$ és ugyanilyen relációk érvényesek a másik két függvényre is). A két időpillanat között az űrhajókon

$$\Delta\tau_i = \int_{t_a}^{t_b} d\tau_i = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{df_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh_i}{dt}\right)^2\right]}\, dt \tag{22}$$

sajátidő telik el. Mivel általában $\Delta\tau_1 \neq \Delta\tau_2$, a két találkozás között az ikrek különböző mértékben öregednek meg: ez az ikerparadoxon.

Amit itt valóságosan megfigyelhetünk, az két *sajátidő intervallum.* A sajátidőt mindig egy adott órán olvassuk le, ezért egyáltalán nem számít, hogyan választunk koordinátarendszert a téridőben (a sajátidő *invariáns*). A (21) felírásához azonban szükség van koordinátákra, ezért koordinátarendszer nélkül mégsem tudnánk kiszámítani az ikerparadoxon mértékét, annak ellenére, hogy ez nem érzékeny arra, milyen koordinátarendszerben végeztük a számítást.

Gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben a fénysebesség nem egyenlő ugyanazzal a c-vel minden irányban. Ezen alapul az *optikai giroszkópnak* nevezett modern navigációs eszköz. Ilyen vonatkoztatási rendszerben nyugvó (valódi vagy virtuális) órákat ezért *nem lehet* az Einstein-féle eljárással szinkronizálni. A szinkronizálási eljárás (vagyis a koordinátaidő rögzítése) ilyenkor azon az alapon végezhető el, hogy egy gyorsuló vonatkoztatási rendszer mozgása mindig vonatkoztatható inerciarendszerre. Ennek részleteire azonban nem térünk ki. De azt hangsúlyozzuk, hogy noha a $d\tau = dt \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2}$ képlet inerciarendszerben (Minkowski-koordinátákban) gyorsuló mozgásra is érvényes, gyorsuló vonatkoztatási rendszerben valamilyen más formula lép a helyébe, amelyet a gyorsuló vonatkoztatási rendszerben választott koordinátaidő határoz meg.

11. Miért vetjük el az éterhipotézist

A leggyakoribb válasz: Azért, mert a Michelson-Morley kísérlet bebizonyította, hogy nincs éter. De ez nem jó válasz, a relativitáselmélet megjelenése előtt nem is vonta le senki ezt a következtetést a kísérletből. Lorentz pl. kifejezetten az éterhipotézis alapján magyarázta meg a kísérlet negatív eredményét. Mint abban az időben mindenki, ő is abból a teljesen természetes feltevésből indult ki, hogy a fénynek is, lévén hullámjelenség, közegre van szüksége (ez az éter) és az éterhez viszonyított terjedési sebesség az, ami minden irányban ugyanakkora. Vagyis pontosan ugyanolyan a helyzet, mint a hanggal. A hang is csak a „saját közegéhez" (a levegőhöz) viszonyítva terjed minden irányban ugyanazzal a kb. 300 m/s sebességgel. Amikor a nyugvó levegőben a hang terjedése irányában mozgunk, a hang sebessége *hozzánk képest* kisebb, mint 300 m/s. Sőt, ha ezt a sebességet túllépjük, le is maradhat mögöttünk.

A relativitáselmélet megszületése előtt ugyanezeket a tulajdonságokat tételezték fel a fényről is, amely szintén hullámjelenség. De volt egy különbség: A hang esetében a gyakorlatban nem a hozzánk viszonyított hangsebesség alapján tudjuk, hogy mozgunk a levegőhöz képest, hiszen az arcunkba csapó szél sokkal feltűnőbb jelenség, mint a hangsebesség megváltozása. A fény közegének az áramlását (az éterszelet) azonban egyáltalán nem érzékeljük, a fénysebesség pedig olyan nagy, hogy még ma se lehetne meggyőző pontossággal kimutatni, ha a különböző mozgásállapotú testekhez viszonyított sebessége más és más lenne. Michelson arra jött rá, hogy a fénynél mégis hasonló a helyzet, mint a hangnál: Az éterszél kimutatása — noha szintén nagyon nehéz feladat, — még mindig könnyebb, mint közvetlenül a fénysebesség változásának az észlelése. A Michelson-Morley kísérlet célja éppen az volt, hogy interferometrikus módszerrel észleljék a Föld keringése következtében fellépő éterszelet.

A kísérlet azonban negatív eredménnyel zárult, éterszél létezését a kísérletben nem lehetett igazolni. De a relativitáselmélet előtti felfogás szerint éternek kellett léteznie, hiszen különben miben terjedne a fény? Lorentz úgy oldotta meg a rejtélyt, hogy megmutatta: Ha *az éterhez viszonyított mozgásuk következtében* a testek mozgásirányú mérete $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ arányban lecsökken, az időtartamok pedig ugyanilyen arányban hosszabbá válnak, akkor ez pont azzal a következménnyel jár, hogy a Michelson-Morley típusú kísérletekben az éterhez viszonyított sebesség észlelhetetlenné válik.

Einstein kiindulópontja teljesen más volt. A nevezetes 1905-ös *A mozgó testek elektrodinamikájához* című cikke első két bekezdésében szokásához híven világosan megfogalmazza a problémát, amelyet vizsgálni fog, és azt az irányt is, amelyben a megoldást keresi:

> Ismeretes, hogy amikor Maxwell elektrodinamikáját annak modern formájában mozgó testekre alkalmazzuk, olyan aszimmetriával találjuk magunkat szemben, amely feltehetően nem maguknak a jelenségeknek a sajátja. Vegyük például — mondjuk — a mágnes és az áramtól átfolyt vezető elektrodinamikai kölcsönhatását. A jelenség, amit megfigyelünk, csak a mágnes és a vezető relatív mozgásától függ, de az elmélet mai állása szerint azt az esetet, amikor a vezető mozog, szigorúan meg kell különböztetnünk attól az esettől, amikor a mágnes mozog. Valóban, amikor a mágnes mozog és a vezető nyugszik, a mágnes körül elektromos mező jön létre, amelyben bizonyos mennyiségű energia halmozódik fel, és ez az elektromos mező hozza létre az áramot a vezetőben. Amikor viszont a mágnes nyugszik és a vezető mozog, a mágnes körül semmiféle elektromos mező sem keletkezik; a vezetőben azonban létrejön elektromotoros erő, amelynek önmagában semmiféle energia sem felel meg, de ugyanolyan nagyságú és irányú áramot hoz létre, mint az elektromos mező az első esetben — feltéve, hogy a relatív mozgás mindkétszer ugyanaz.
>
> Az ilyen példák, valamint a sikertelen kísérletek a Föld éterhez viszonyított sebességének megállapítására arra a feltevésre indítanak, hogy az abszolút nyugalommal[14] nemcsak a mechanikában, de az elektrodinamikában sem hozható kapcsolatba a jelenségeknek semmiféle tulajdonsága. Azt sugallják, hogy — amint azt legalacsonyabb rendben már megmutatták, — minden olyan vonatkoztatási rendszerben, amely a mechanika szempontjából megfelelő, ugyanazok az elektrodinamikai és optikai törvények érvényesek.

Ez utóbbi észrevétel alapján Einstein feltételezi, hogy az inerciarendszerek *minden fizikai jelenség szempontjából* egyenértékűek egymással. Speciálisan a Maxwell-egyenletek mindegyikben egyformán érvényesek, és — mivel a Maxwell-egyenletekből következik, hogy az elektromágneses hullámok terjedési sebessége minden irányban ugyanazzal a c-vel egyenlő, — a fénysebesség minden inerciarendszerben minden irányban c.

Most már tudunk válaszolni a címben feltett kérdésre. Az éter a definíciója szerint az az anyagi közeg, amely a fényhullámokat hordozza, ezért a fénysebesség a nyugvó éterhez és csakis hozzá képest izotróp. A relativitáselmélet 2. posztulátuma szerint ezzel szemben a fényterjedés minden inerciarendszerben rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, és mivel ennek az elméletnek az érvényességét a tapasztalat sokszorosan igazolja, éter nem létezhet.

[14]Az akkori szóhasználatban abszolút nyugalmi állapoton az éterhez viszonyított mozdulatlanságot értették.

Ez a posztulátum éles ellentmondásban van a sebesség tulajdonságaira vonatkozó közvetlen tapasztalatainkkal, amelyeket — legalábbis a 20. század elejéig — a fizika sem vont kétségbe. Nyilvánvaló ugyanis, hogy ha egy mozgó vonatban a menetirányban igyekszünk a büfékocsi felé, akkor a sebességünk a pályatesthez és a vonathoz képest nem ugyanakkora. A relativitáselmélet szerint a fényre ez nem vonatkozik, a fény sebessége a vonathoz és a töltéshez viszonyítva pontosan egyenlő egymással. *Pusztán szemléleti alapon* ezt nagyon nehéz, vagy talán nem is lehet elfogadni. Ezért még a fizikusok között is akadnak olyanok, akik arra szavaznak, hogy inkább van Lorentznek igaza, mint Einsteinnek: Mégis van éter, a fény *csak az éterhez képest* terjed minden irányban ugyanazzal a sebességgel, de a természet ezt „eltitkolja" előttünk, mert az *éterhez viszonyított* Lorentz-kontrakció és idődilatáció következtében semmilyen kísérlettel sem állapíthatjuk meg, milyen sebességgel mozgunk az éterhez képest. Ebből a nézőpontból a relativitáselmélet 2. posztulátuma nem több ügyes matematikai trükknél, amely lehetővé teszi, hogy az étert — ha már a hozzá viszonyított mozgás semmilyen módon sem állapítható meg — kiküszöbölhessük a konkrét számításokból.

Az einsteini felfogás mellett szóló érvek és tapasztalatok azonban ennél sokkal súlyosabbak.

1. A relativitáselmélet *nem mond ellent* annak a tapasztalatunknak, hogy a vonaton sétáló ember sebessége a vonathoz és a töltéshez képest más és más, hiszen a sebességösszeadás törvénye a fénynél sokkal kisebb sebességekre ugyanazt adja, mint a newtoni fizika (és a mindennapos tapasztalatunk). Ettől csak a fény és a fényéhez közeli sebességgel mozgó testek tulajdonságai mondanak ellent, de közvetlen tapasztalattal erre vonatkozóan nem rendelkezünk.

   A természettudomány bővelkedik olyan állításokban, amelyek ellenkeznek a közvetlen tapasztalatainkkal és néha még ma is ellenállást váltanak ki. Gondoljunk csak arra, hogy Ausztráliában az emberek hozzánk képest „fejjel lefele" járkálnak. A tudomány lényegéhez tartozik a reflektálatlan („készpénznek vett") szemlélet felülbírálata. Egyébként — más oldalról — az éterhipotézis is súlyosan ellentmond a szemléletnek, mert az étert olyan különleges közegnek kell elképzelnünk, amely egyáltalán nem akadályozza az égitestek mozgását. Sőt ahhoz, hogy *tranzverzális* hullámok terjedhessenek benne, szilárd halmazállapotú közegnek kellene lennie.

2. Az éterfelfogás mai szószólói azt állítják, hogy ez az elmélet ugyanúgy megmagyaráz minden ma ismert fizikai jelenséget, mint a relativitáselmélet. Ez légből kapott állítás. A legtöbb, amit elmondhatunk az, hogy *a klasszikus elektrodinamika* körébe eső jelenségekről Lorentz elmélete is számot tud adni. Lorentz ugyanis azt mutatta meg, hogy az éterhez viszonyított mozgás „elkonspirálása" azért történik meg, mert a Maxwell-egyenletek — a koordináták látszólagos kontrakciója és az idő látszólagos dilatációja következtében[15] — matematikai alakjukat tekintve minden inerciarend-

[15] A látszólagosságot maga Lorentz hangsúlyozta, mert felfogása szerint a testek valódi se-

szerhez viszonyítva pontosan ugyanolyanok, mint az éterhez viszonyítva. Ha még azt is feltételezzük, hogy az anyagi testeket elektromágneses erők tartják össze, ahogy ezt a 19. - 20. század fordulóján (éppen Lorentz munkásságának a következtében is) joggal gondolhatták[16], magyarázatot nyerünk a Michelson-Morley típusú kísérletek negatív eredményére.

Mai ismereteink azonban ennél sokkal kiterjedtebbek. Az anyagi testekről ma is úgy gondoljuk, hogy töltött részecskékből állnak, de a stabilitásukban lényeges szerepet játszik a kvantumelmélet. Az elektronok relativisztikus kvantumelmélete a Dirac-egyenleten nyugszik, amelyet aligha lehetett volna felfedezni az éterelmélet keretei között. A relativitáselmélet matematikai áttekinthetősége, amely az éterhez kötött abszolút nyugalmi állapot teljes kiküszöbölésének a következménye, itt már meggyőzően bizonyítja, hogy sokkal többről van szó egyszerű „matematikai trükknél". A relativisztikus kvantumelmélet egyik legnagyszerűbb eredménye az antirészecskék létezésének a *megjóslása* ennek köszönhető. Ugyanez mondható el az általános relativitáselméletről, amelyről talán már az éterelmélet legelfogultabb hívei sem állítják, hogy az éterhipotézisre is alapozható lett volna.

3. Végül meg kell jegyeznünk, hogy az $E_0 = mc^2$ tömeg-energia reláció *nem* a Lorentz-transzformáció következménye (ld. a levezetését a 9. fejezetben), ezért teljesen kívül esik Lorentz éterelméletén. Az $E_0 = mc^2$ képletnek valójában *semmiféle előzménye* sem volt. Soha senkise gondolt arra, hogy ha egy testet felmelegítünk, egy rugót megfeszítünk vagy egy akkumulátort feltöltünk, ezzel növeljük a tömegüket. És a relativitáselmélet megjelenését megelőző évtizedben az sem jutott az eszébe senkinek, hogy a radioaktív hő energiáját a tömeg csökkenése fedezi. Ez utóbbi következtetés első ízben a *Függ-e a testek tehetetlensége az energiatartalmuktól* című Einstein-cikk végén jelent meg 1905 szeptemberében.

Az éterhipotézis hívei gyakran hivatkoznak arra, hogy a relativitáselmélet körben forgó hibás okoskodáson (*circulus vitiosus*on) alapul, mert a távoli órák szinkronizálásához felhasználja, hogy a fénysebesség minden inerciarendszerben ugyanakkora, de erről tapasztalatilag csak a távoli órák előzetes szinkronizálása után győződhetünk meg. Hallgassuk meg erről E. Szabó Lászlót, az irányzat prominens hazai képviselőjét[17]:

> Nem lehetséges ... a fény terjedésének egyirányú sebességét megmérni az egyidejűség előzetes fogalma nélkül. Ez egy egyszerű logikai tény, ha direkt módon a fény egyirányú terjedési sebességét akarnánk megmérni, hiszen ehhez a fényjel elindulásának és megérkezésének idejét kell összevetnünk. Számos olyan javaslat is volt az irodalomban, amely különböző indirekt módszerekre vonatkozott.

---

bességét és belső állapotát az éterhez viszonyítva állapíthatjuk me.

[16]Ezt a felfogást azonban már akkor is lehetett kritizálni, mert *Samuel Earnshaw* már 1842-ben megmutatta, hogy az elektrosztatikus erők egyedül nem elegendők a töltésrendszerek stabilitásához.

[17]*A nyitott jövő problémája*, (Typotex 2002) 45. oldal.

E javaslatok részletes analízise kimutatta, hogy nincs olyan trükkös mérési eljárás, amellyel lehetséges lenne a fény egyirányú terjedési sebességét meghatározni anélkül, hogy az eljárás maga ne tételezné fel az egyidejűség előzetes definícióját.

A valóság ezzel szemben az, hogy a fénysebesség állandóságát minden különösebb trükk nélkül meg lehet mérni tetszőleges inerciarendszerben minden irányban anélkül, hogy előzetesen távoli órákat fényjelek segítségével szinkronizálni kellene egymással. Ezt az eljárást az 1. fejezet végén ismertettük. E. Szabó bírálata ezért nélkülöz minden alapot, és valószínűleg onnan származik, hogy a koordinátaidő definíciójában (2. fejezet) szereplő órákat valóságosnak tekinti, és úgy gondolja, hogy a fénysebesség mérése csak ezeknek az óráknak a segítségével végezhető el. Ezek az órák azonban a téridőbeli koordinátarendszer részei és ezért csak a képzeletünkben léteznek (10. fejezet). A fénysebesség mérésének 1. fejezetben ismertetett módszerében, amely valóságosan is elvégezhető fénysebesség-mérési eljárás, olyan órákat használunk, amelyeknek a *ritmusa* megegyezik a Minkowski-féle koordinátaidőt mutató elképzelt órák ritmusával, de nem kell feltétlenül szinkronban is lenniük velük.

12. Függelék[18]: A sebességfüggő tömeg történetéhez

Az a gondolat, hogy a testek tömege függhet a sebességüktől, nem sokkal a relativitáselmélet megszületése előtt merült fel. Erről így írtam az egyik cikkemben[19]:

> A 19. és a 20. század fordulóján a kor több vezető fizikusa (*J. J. Thomson, H. Poincaré, M. Abraham*) fokozatosan arra a meggyőződésre jutott. hogy az elektromágneses éter képes impulzust tárolni. A V sebességgel egyenletesen mozgó töltés esetében ennek az impulzusnak a nagyságára a
>
> $$p_{em} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \cdot \frac{W_e}{c^2} \cdot V \tag{23}$$
>
> képletet kapták, amelyben W_e a *nyugvó* töltést körülvevő éterben felhalmozott elektrosztatikus energiával egyenlő.
>
> A képletből nyilvánvaló, hogy amikor a töltés gyorsul, a befektetett munka egy része nem a sebesség növelésére, hanem az éterben felhalmozott impulzus gyarapítására fordítódik. A nevezőben megjelenő $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ következtében a gyorsító erő munkájának annál nagyobb része megy el az éterben tárolt impulzus növelésére, minél nagyobb a töltés sebessége, ezért a gyorsan mozgó töltés egy adott erő hatása alatt kevésbé gyorsul, mint azt a test m tömege és a newtoni mechanika alapján várnánk. 1902-ben *W. Kaufmann* elektronokkal végzett híres kísérletei ezt a várakozást igazolták is.

[18]Ez a függelék utólagos hozzáadás, a *Biztos, hogy az energia megmarad?* kötetben sem szerepel.

[19]Fizikai Szemle 2011/12. Valamivel tágabb összefüggésben ezt a kérdést a Fizikai Szemle 2006/2 számában *A fizika tanításáról* címmel megjelent cikkemben is tárgyalom.

A mechanikai impulzus mV képletéhez hasonlóan az (23) elektromágneses impulzus is arányosnak bizonyult a töltés sebességével, ezért célszerűnek látszott az arányossági tényezőt, amely a képletben a tömeg helyén áll, *elektromágneses tömegnek* nevezni. Ha erre a mennyiségre bevezetjük az m_{em} jelölést, akkor (23)-ból azt látjuk, hogy

$$m_{em}c^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{W_e}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{24}$$

* * *

Einstein *A mozgó testek elektrodinamikájához* című nevezetes 1905-ös dolgozatának utolsó, 10. paragrafusában adott magyarázatot a Kaufmann-kísérlet eredményére. Nem idézem ezt a részletet szószerint, mert a cikkből kiragadva nem lehetne megérteni[20]. Einstein a relativitáselmélet posztulátumai alapján *a tömeg invarianciáját feltételezve* levezeti a ponttöltés mozgásegyenletét elektromágneses mezőben, amelyekre (mai jelölésekben) a következő képleteket kapja:

$$\begin{aligned} \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}\, a_x &= eE_x, \\ \frac{m}{1 - v^2/c^2}\, a_y &= e\frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ \frac{m}{1 - v^2/c^2}\, a_z &= e\frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{25}$$

Ez az egyenletrendszer abban a pillanatban érvényes, amikor a töltés sebessége éppen x irányú.

Az egyenletek után nemsokkal a két kiemelt

$$\begin{aligned} \text{Longitudinális tömeg} &= \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}, \\ \text{Tranzverzális tömeg} &= \frac{m}{1 - v^2/c^2} \end{aligned} \tag{26}$$

sort találjuk, amelyekhez Einstein rögtön hozzáfűzi: „A tömegekre természetesen más kifejezést kapnánk, ha másképpen definiálnánk az erőt és a gyorsulást”.

Ennek a megjegyzésnek a jelentőségét az adja, hogy a newtoni fizikában a gyorsulás iránya mindig megegyezik az erő irányával, míg (25) szerint a longitudinális és a tranzverzális tömeg különbözősége miatt ez nyilván nincs így *feltéve*, hogy a jobboldalt azonosítjuk az erővel. Ez az azonosítás azonban egyáltalán

[20] Einstein dolgozatának benne kellene lennie az *Albert Einstein válogatott írásai* kötetben (Typotex. 2010), de érthetetlen módon a dolgozatnak csak az első öt paragrafusa található meg a kötetben.

nem nyilvánvaló. A (25) egyenleteket például nagyon könnyű felírni forgásinvariáns alakban, amelyben nincs olyan kikötés, hogy a sebesség legyen x irányú:

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\mathbf{a} = e\left[\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\right]. \tag{27}$$

(a $\cdot$ skalárszorzást, a $\times$ vektorszorzást jelöl). Ha *ennek az egyenletnek* a jobboldalát tekintjük erőnek, akkor a gyorsulás mindig az erő irányába mutat ugyanúgy, mint a newtoni fizikában. A többértelműség további illusztrálására még megjegyezhetjük, hogy ha a (25) 2. és 3. egyenletében a $\sqrt{1-v^2/c^2}$-t átvisszük a másik oldalra, a tranzverzális tömegre az $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ kifejezést kapjuk, és *ez az az alak*, amelyet ma elsősorban használnak.

Einstein választásának az értelme abból a (25)-höz fűzött megjegyzéséből érthető meg, hogy ezek a képletek elektromosan semleges részecskékre is érvényesek, mert „ egy ilyen testhez mindig hozzá lehet illeszteni egy *tetszőleges kicsiny* elektromos töltést..." Ez azért van így, mert a mozgásegyenleteket Einstein a $\mathcal{K}$' pillanatnyi nyugalmi rendszerben érvényes $\mathbf{a}' = m\mathbf{E}'$ egyenletből származtatja le úgy, hogy *mindkét oldalt külön-külön* kifejezi abban a $\mathcal{K}$ vonatkoztatási rendszerben érvényes mennyiségeken keresztül, amelyben a töltés $\mathbf{v}$ sebességgel mozog. A baloldalon ezért egy tisztán kinematikai, a jobboldalon pedig egy tisztán dinamikai mennyiség áll, és csak ez utóbbi függ az erő konkrét természetétől[21].

Azért idéztem Einstein dolgozatának a végéről a (26) képletet, hogy világossá tegyem: A cikk szerzője a mozgó testek tömegéről egyáltalán nem teszi fel, hogy a sebességgel nőne. Világos, hogy a Kaufmann-kísérlet eredményéről itt egy tisztán kinematikai tényező (a longitudinális és a tranzverzális tömeg sebességfüggése, vagy — ami ugyanaz — a gyorsulásdeficit) ad számot, nem pedig a „tömeg relativisztikus megnövekedése". Ez egészen nyilvánvaló már abból is, hogy a sebességtől különböző módon függő kétfajta tömeg definíciójáról van szó anélkül, hogy az egyiket alapvetőbbnek lehetne tekinteni a másiknál. De a „relativisztikus tömegnövekedés" ellen a legfontosabb érv az, hogy (25) levezetésénél Einstein explicite felteszi, hogy a mozgó test tömege megegyezik a nyugvóéval.

* * *

A „relativisztikus tömegnövekedés" mitosza valószínűleg *G. N. Lewis* és *R. C. Tolman* 1909-ben *The Principle of Relativity, and Non-Newtonian Mechanics* címmel megjelent dolgozatára[22] vezethető vissza[23]. A szerzők célkitűzése

[21] Fentebb a 6. fejezetben ugyanezt az elvet alkalmaztuk a mozgásegyenlet származtatására az egydimenziós mozgás speciális esetében. Ebben az esetben természetesen (25)-nek csak az 1. sorát kaptuk meg. A longitudinális tömeg fogalma helyett alkalmasabbnak láttuk a (longitudinális) gyorsulásdeficit fogalmát használni, mert ez egyértelműbben utal a tisztán kinematikai eredetre. A (25)-ből világos, hogy tranzverzális irányban a gyorsulásdeficitet az $(1-v^2/c^2)$ tényező határozza meg a 3/2-es hatványkitevő nélkül.

[22] Gilbert N. Lewis and Richard C. Tolman, Philosophical Magazine, **18**, 510-523 (1909)

[23] Ez a dolgozat a kiindulópontja annak a nézetnek is, hogy a relativisztikus effektusok „nem valóságosak" (bármit jelentsen is ez), amelyet a szerzők többször is hangsúlyoznak.

nagyon hasonló volt ahhoz, mint a *Négy előadás*ban az enyém: A relativisztikus alapjelenségek származtatása a Lorentz-transzformáció felhasználása nélkül. Csak míg én ezt — igaz, száz évvel később — az idődilatációból kiindulva kíséreltem meg, ők a megmaradási tételekre alapozták az érvelésüket, vagyis a tisztán kinematikai jelenségeket a dinamikára próbálták visszavezetni. Ez nagyon szerencsétlen törekvés volt, amely súlyos félreértések forrásává vált.

Milyen előzetes elképzelésekkel foghattak hozzá a munkához? Nyilván tudták, hogy a Kaufmann-kísérlet eredménye összhangban van a sebességfüggő elektromágneses tömegre vonatkozó prerelativisztikus elgondolásokkal, de Einstein relativitáselméletével is, és alighanem ösztönösen úgy vélték, hogy ez a két interpretáció *lényegében nem különbözhet egymástól*. Ezért próbálkoztak meg annak az igazolásával, hogy a tömeg a *relativitáselmélet szerint is* függ a sebességtől.

A bizonyítást, amelyet az impulzusmegmaradásra alapoztak, azért nem ismertetem, mert nyilvánvaló logikai hibát tartalmaz. A gondolatmenetet ugyanis, amelyből azt a következtetést vonták le, hogy egy v sebességű részecske impulzusa $mv/\sqrt{1-v^2/c^2}$ (vagyis a tömege a felfogásuknak megfelelően tényleg függ a sebességtől), azzal az explicit feltevéssel indították, hogy az impulzus mv-vel egyenlő. 1934-ben azonban Tolman megjelentette *Relativity, Thermodynamics and Cosmology* című könyvét, amely évtizedekre a relativitáselmélet egyik alap tankönyve lett. A tömeg sebességfüggésének a bizonyítása ebben a könyvben már nem tartalmaz ilyen elemi logikai hibát.

Tolman érvelése, amely a könyv 23. paragrafusában található, ma már közismert. A gondolatmenete a következő:

Tekintsünk két egyforma m tömegű részecskét, amelyek egy $\mathcal{K}$' inerciális koordinátarendszer x-tengelye mentén egymással szemben mozognak $\pm v'$ sebességgel. Tegyük fel, hogy a részecskék ütközése teljesen rugalmatlan, és az összeolvadásukból egy nyugvó, M' tömegű új részecske képződik.

Írjuk le ugyanezt a folyamatot egy olyan $\mathcal{K}$ koordinátarendszerben, amely egyenletes $-V$ sebességgel mozog $\mathcal{K}'$-höz képest. A sebességösszeadás törvénye szerint a két részecske $\mathcal{K}$-beli sebessége

$$v_1 = \frac{v'+V}{1+v'V/c^2}, \qquad \text{valamint} \qquad v_2 = \frac{-v'+V}{1-v'V/c^2}. \tag{28}$$

Az összeolvadásukból létrejövő részecske sebessége nyilván V, tömege pedig M, amelynek Tolman felfogása szerint nem kell egyenlőnek lennie M'-vel. A két ütköző részecske m_1 és m_2 tömege ugyancsak különbözik m-től.

Tegyük fel, hogy a folyamatban mind a tömeg, mind az impulzus bármely inerciarendszerben, és így $\mathcal{K}$-ban is megmarad:

$$m_1 + m_2 = M \tag{29}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = MV. \tag{30}$$

Az utolsó egyenlet felírásánál feltételeztük, hogy az impulzus a relativitáselméletben is a tömeg és a sebesség szorzatával egyenlő.

Ha (29)-ből és (30)-ból kizárjuk M-t és a kapott egyenleben v_1-et és v_2-t a (28)-ból behelyettesítjük, a

$$\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{\sqrt{1-{v_1}^2/c^2}\cdot\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+v'V/c^2} = \frac{\sqrt{1-{v_2}^2/c^2}\cdot\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-v'V/c^2}$$

azonosság felhasználásával megkapjuk az

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sqrt{1-{v_2}^2/c^2}}{\sqrt{1-{v_1}^2/c^2}}$$

relációt, amelyből következik, hogy egy v sebességgel mozgó m_0 nyugalmi tömegű test m tömegét az

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tag{31}$$

képlet határozza meg.

Ez a következtetés azonban távolról sem egyértelmű, mert a premisszák, amelyek alapján (30)-at és (31)-et levezettük, egy másik interpretációval is összeférnek. Ha ugyanis (31)-et behelyettesítjük (29)-be és (30)-ba, a képletek akkor is érvényben maradnak, ha a tömegeket a sebességtől független invariánsoknak tekintjük, a (29) relációt pedig nem tömegmegmaradásként, hanem a c^2 faktorral végigosztott energiamegmaradásként fogjuk fel[24]. A tömeg ebben az interpretációban nem marad meg[25] . A (30) fizikai jelentése továbbra is az impulzus megmaradása, de az impulzust most az $m_1v_1/\sqrt{1-{v_1}^2/c^2}$ és az $m_2v_2/\sqrt{1-{v_2}^2/c^2}$ képletek fejezik ki. A (29) és a (30) jobboldalán az M helyén valami más áll (ha M az összeolvadt részecske tömegét jelöli, akkor természetesen $M/\sqrt{1-V^2/c^2}$), mindkét egyenletben ugyanaz a kifejezés, amely a két egyenletből ugyanúgy kizárható, mint előbb. Ha a gondolatmenetet újra végigvisszük, azonosságra jutunk. Ez igazolja, hogy a második interpretáció is lehetséges.

A Tolman könyvében közölt gondolatmenet tehát már nem tartalmaz olyan durva logikai hibát, mint az 1909-es cikk, logikai értelemben azonban mégis hiányos, mert a gondolatmenettel összeférő két lehetséges következtetés közül csak az egyiket vonja le. Ha mindkettőt szem előtt tartjuk, akkor ahhoz, hogy választhassunk közöttük, új szempontra van szükségünk. Ezt a hiányzó szempontot

[24]Ld. a (20) képletet a 8. fejezetben.

[25]Feltehetően Tolman könyve nyomán terjedt el az a felfogás, hogy a tömegmegmaradás is és az energiamegmaradás is a relativitáselméletben ugyanúgy fennáll, mint a newtoni fizikában, vagyis mindkét esetben rendelkezünk mindkét megmaradási törvénnyel. Ez a felfogás ahelyett, hogy kihangsúlyozná, éppenséggel elhomályosítja azt a tényt, hogy a relativitáselméletben valójában eggyel kevesebb megmaradási törvényünk van, mint a newtoni fizikában. A newtoni hidrodinamika alapegyenletei mindkét megmaradási törvényt tartalmazzák, és a relativisztikus hidrodinamikára történő áttérésnél a tömegmegmaradás hiánya okoz is gondot.

azonban már Einstein 1905-ös dolgozata tartalmazza. Mint már hangsúlyoztuk, ebben a munkában Einstein a (25)-öt, amelyet a tapasztalat sokszorosan igazol, annak az explicit feltevésnek az alapján vezette le, hogy a tömeg a sebességtől független állandó. Ez az észrevétel egyértelműen bizonyítja, hogy Tolman gondolatmenetét *nem értelmezhetjük* a (31) bizonyításaként, de felfoghatjuk a $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ képlet igazolásaként.

Tolman interpretációjának talán legkárosabb következménye az, hogy kibogozhatatlanul összekeveredik benne a relativitáselmélet két egészen különböző jellegzetessége: Egyrészt az, hogy egy testet annál nehezebb tovább gyorsítani, minél nagyobb a sebessége, amely a Lorentz-transzformáció tisztán *kinematikai* következménye, másrészt a tömeg-energia reláció, amely közvetlenül a relativitáselmélet 1. posztulátumából, valamint az energia és az impulzus megmaradásából következő *dinamikai* természetű törvény. Fentebb az előadásokban mindkettőről részletesen volt szó. A könyv 27. paragrafusában Tolman a következő értelmezését adja a tömeg-energia relációnak (kurziválás a könyvben):

> *[A] legáltalánosabb formában posztuláljuk, hogy az* E *energia mindig kapcsolatos megfelelő mennyiségű* m *tömeggel, amely*
>
> $$m = \frac{E}{c^2} \tag{32}$$
>
> *-tel egyenlő*

Tolman felfogásában ez a reláció csak újabb megerősítése a (31) képletnek, hiszen ha a tömegpont teljes energiájának $E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ kifejezését (32)-be behelyettesítjük, éppen (31)-et kapjuk eredményül.

Mint tudjuk, a tömeg-energia relációban valójában az E_0 nyugalmi energia szerepel. *Ez az energia* valóban lehet bármilyen természetű, de súlyos félreértés a „bármilyen természetbe” a mozgási energiát is beleérteni.