Merre mutat a Föld forgástengelye?

Hraskó Péter
PTE Elméleti Fizika Tanszék

Látod-e, mely kicsiny itt a főld, félrésze vizekkel
Béfoglalva setét zőldes, félrésze világos,
S mint félérésű citrom hintálva tulajdon
Terhe nyomásától, lóg a nagy semminek ágán.
(Csokonai)

Amikor a nyolcvanas évek végén a pécsi Janus Pannonius Tudományegyetemre hívtak elméleti fizikát tanítani tanárszakos hallgatóknak, tisztában voltam vele, hogy a tananyagnak sok olyan része van, amelyet nem ismerek elég jól ahhoz, hogy taníthassam. Egyebek között a Föld forgástengelyének 25730 év periódusú *luniszoláris precessziója* tartozott ide, ezért beültem az MTA könyvtárába irodalmazni a témáról. Ekkor került a kezembe W. H. Munk and G. J. F. MacDonald *The rotation of the earth : a geophysical discussion* című könyve, amely részletesen tárgyalta a luniszoláris precessziót, de szó volt benne egy másik precesszióról is, amelyről korábban sohase hallottam és olyan hihetetlennek tűnt a számomra, hogy sokáig bizonytalankodtam, jól értem-e, amit olvasok. Arról volt ugyanis szó, hogy a Föld forgástengelye nem esik egybe pontosan a szimmetriatengelyével, a forgástengely döféspontja úgy kerülgeti *néhány méteres távolságban* a szimmetriatengelyt mint egy kapatos sarkkutató (ld. a 3. ábrát), és ezt a mozgást a geofizikusok már száz év óta *folyamatosan regisztrálják.*

A reguláris precesszió

Ennek az érdekes geofizikai jelenségnek az alapja az izolált tengelyszimmetrikus merev testek forgása a tömegközéppontjuk körül, amelyet *reguláris precessziónak* (vagy *szabad nutációnak*) hívunk. Induljunk ki abból, hogy a test nyugalomban van és egy adott pillanatban mi hozzuk forgásba valamilyen ω szögsebességgel a tömegközéppontján áthaladó tetszőleges irányú tengely körül. Hogyan mozog tovább?

Bontsuk fel az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség vektort egy szimmetriatengellyel párhuzamos $\boldsymbol{\omega}_\parallel$ és egy rá merőleges $\boldsymbol{\omega}_\perp$ komponensre:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\parallel + \boldsymbol{\omega}_\perp.$$

A szimmetriatengelyre és a tömegközépponton áthaladó rá merőleges egymással egyenértékű tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékot jelöljük $I_\parallel$-sal és $I_\perp$-sel. Ekkor a perdületet (impulzusmomentumot) az

$$\mathbf{N} = I_\parallel \cdot \boldsymbol{\omega}_\parallel + I_\perp \cdot \boldsymbol{\omega}_\perp$$

képlet határozza meg. A perdület eszerint benne fekszik a szimmetriatengely és a szögsebesség által meghatározott $\mathcal{S}$ síkban.

Az $\boldsymbol{\omega}$-nak és az $\mathbf{N}$-nek a szimmetriatengellyel bezárt szögét jelöljük α-val és β-val. A két szög között egyértelmű kapcsolat van:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{N_\perp}{N_\parallel} = \frac{I_\perp \cdot \omega_\perp}{I_\parallel \cdot \omega_\parallel} = \frac{I_\perp}{I_\parallel} \operatorname{tg}\alpha. \tag{1}$$

Fontos körülmény, hogy a perdületnek a szimmetriatengelyre vetett $N_\parallel$ vetülete mozgásállandó. Ez nem következik abból, hogy $\mathbf{N}$ maga mozgásállandó, mert a szimmetriatengely nem egy rögzített térbeli irány. Az $N_\parallel$ időderiváltja mégis zérussal egyenlő. A bizonyításhoz jelöljük a szimmetriatengely irányába mutató egységvektort $\mathbf{k}$-val. Nyilván $N_\parallel = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{N})$, ezért

$$\dot{N}_\parallel = (\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{N}) + (\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{N}}) = ([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}] \cdot \mathbf{N}).$$

Kihasználtuk, hogy $\dot{\mathbf{N}} = 0$ és a $\mathbf{k}$ irány együtt forog a testtel: $\dot{\mathbf{k}} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}]$. Mint az előbb láttuk, a vegyes szorzatban szereplő három vektor egy síkban fekszik, ezért a vegyes szorzatuk nullával egyenlő.

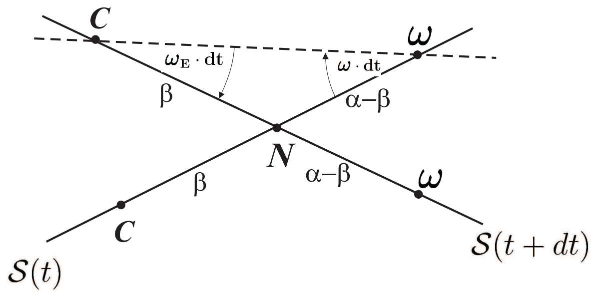
Az $N_\parallel$ megmaradása maga után vonja az $N_\perp$, valamint az $\omega_\parallel = N_\parallel / I_\parallel$, az $\omega_\perp = N_\perp / I_\perp$ és végső soron magának az ω szögsebességnek az állandóságát is.

Mivel $N_\parallel = \cos\beta \cdot N$, a β szög is állandó, és (1) következtében ugyanez érvényes az α szögre is. Eszerint nemcsak az igaz, hogy a szimmetriatengely, a perdület és a forgástengely mindig egy közös $\mathcal{S}$ síkban fekszik, hanem ebben a síkban a relatív helyzetük is állandó.

Az $\mathcal{S}$ síknak és benne a szögsebesség vektornak forognia kell a testhez képest ahhoz, hogy mindhárom irány folyamatosan egy közös síkban maradhasson. A perdület ugyanis mozgásállandó, ezért a forgás során csak a szimmetriatengely fordul el az $\boldsymbol{\omega}$ irány körül, az $\mathbf{N}$ iránya változatlan marad. Ha tehát a három irány a t pillanatban egy síkban volt, a $t + dt$ pillanatban az $\mathbf{N}$ perdület már valamilyen szöget zárna be az új helyzetű szimmetriatengelyt és a szögsebességvektort tartalmazó síkkal, ha a szögsebesség iránya változatlan maradna. De ez az irány megváltozhat, hiszen (az $\mathbf{N}$-hez hasonlóan és a szimmetriatengellyel ellentétben) nincs „beleégetve" a testbe. El fog tehát fordulni a szimmetriatengely új helyzete körüli α nyílásszögű kúpon úgy, hogy újból rákerüljön a szimmetriatengely és a $\mathbf{N}$ által meghatározott síkra. Ez a két elfordulás valójában természetesen nem egymást követően, hanem egyidejűleg következik be, de — mint a következő pontban látni fogjuk, — gondolati szétválasztásuk megkönnyíti a mozgás kvantitatív analízisét.

Az ω_E Euler-körfrekvencia

A reguláris precesszió során tehát a forgástengely egy α nyílásszögű kúpon forog a testhez képest annak szimmetriatengelye körül. A továbbiakban a mozgásnak ezt az aspektusát fogjuk elsősorban tanulmányozni. A forgás körfrekvenciáját *Euler-körfrekvenciának* hívjuk és ω_E-vel fogjuk jelölni. A kiszámításához képzeljünk el egy gömböt a testen belül a tömegközéppont mint origo körül. Az $\mathcal{S}(t)$ és az $\mathcal{S}(t+dt)$ sík egy-egy főkört metsz ki ebből a gömbből, amelyek az $\mathbf{N}$ irány döféspontjában metszik egymást. Az 1. ábrán ezeket a főköröket az



1. Az Euler-körfrekvencia számítása

egyszerűség kedvéért egyenesekkel ábrázoltuk. Az ábra belapult ellipszoidra vonatkozik, amelyre $I_{\|} > I_{\perp}$ és (1) következtében $\alpha > \beta$ (a **C** a szimmetriatengely döféspontja).

A szaggatott egyenes az $\mathcal{S}$ síknak azt az $\mathcal{S}(t)$ és $\mathcal{S}(t+dt)$ közötti hipotetikus közbenső helyzetét ábrázolja, amikor az **N** még „kilóg" belőle, mert csak az $\omega \cdot dt$ szögű elfordulás következett be a pillanatnyi forgástengely körül. Csak ezután fog a forgástengely $\omega_E \cdot dt$ szöggel elfordulni a megváltozott irányú szimmetriatengely körül.

Az ω_E Euler-körfrekvenciát a gömbháromszögtan szinusz tétele segítségével fejezhetjük ki a forgás ω szögsebességén keresztül:

$$\sin(\omega_E \cdot dt) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta} \sin(\omega \cdot dt).$$

Amikor $dt \to 0$ a két dt-t tartalmazó szinusz helyettesíthető az argumentumával. A dt-vel egyszerűsíthetünk, így

$$\omega_E = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta} \omega = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \cos \alpha \cdot \omega.$$

Az (1) segítségével a tangensek kifejezhetők a tehetetlenségi nyomatékokon keresztül

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{I_{\|} - I_{\perp}}{I_{\perp}}, \tag{2}$$

az $\omega \cdot \cos \alpha$ szorzat pedig a szögsebességnek a szimmetriatengelyre vetett $\omega_{\|}$ vetületével egyenlő. Így végül az Euler-körfrekvenciára az

$$\omega_E = \frac{I_{\|} - I_{\perp}}{I_{\perp}} \cdot \omega_{\|},$$

az ennek megfelelő periódusidőre pedig a

$$T_E = \left(\frac{I_{\|} - I_{\perp}}{I_{\perp}} \right)^{-1} \cdot T_{\|}$$

képletet kapjuk.

A Földre vonatkozóan az $\omega_\parallel$-t szorzó *precessziós konstans* (vagy másik néven *dinamikai lapultság*) értéke

$$\frac{I_\parallel - I_\perp}{I_\perp} = 0.003295 \approx \frac{1}{300}.$$

Ez a tört a luniszoláris precesszió képletében is megjelenik (innen az elnevezése) és a precesszió megfigyelt értékéből számolható vissza. Mivel $T_\parallel \approx 1$ nap, ezért az Euler-periódusidő értéke a Földre vonakozóan $T_E \approx 300$ nappal egyenlő.

Mint látjuk, a Föld reguláris precessziójának T_E periódusideje sokkal kisebb, mint a luniszoláris precesszó 25730 éves periódusa. Ez utóbbi precessziót a Nap és a Hold tömegvonzásának a Föld egyenlítői kidudorodására gyakorolt forgatónyomatéka okozza. A Föld tehát szigorúan véve nem izolált test és így kérdéses, hogy a reguláris precesszió képletei érvényesek-e rá. Mivel azonban T_E nagyságrendű idő alatt a luniszoláris precesszió mértéke nagyon kicsi, a reguláris precesszió szempontjából a Földre gyakorolt forgatónyomaték hatása elhanyagolható.

A szélességingadozás

A Föld esetében az α és a β szög biztosan nagyon kicsi. A forgástengely irányát — mint láttuk, — a kezdőfeltételek határozzák meg, ezért az α szög csak méréssel állapítható meg, elméleti számítással nem. Az azonban könnyen igazolható, hogy a β szög nagy pontossággal egyenlő α-val. A (2) képlet ugyanis a két szög közötti különbség legalacsonyabb rendjében

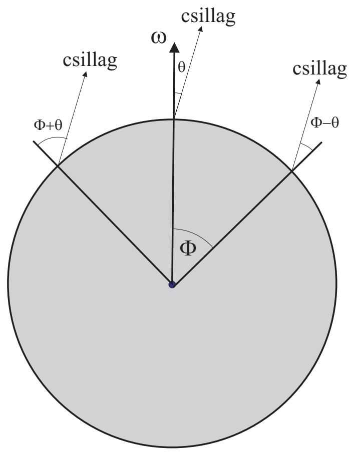
$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha} \approx \frac{1}{300}$$

alakú, és ez a képlet mutatja, hogy az $(\alpha - \beta)$ különbség valóban elhanyagolható α mellett.

A Föld reguláris precesszióját tehát a következőképpen írhatjuk le. Az $\boldsymbol{\omega}$ forgástengely folyamatosan a csillagos ég egy határozott pontjára mutat, mert egybeesik az $\mathbf{N}$ perdület irányával, amely mozgásállandó. A szimmetriatengely és vele együtt az egész földgolyó ekörül az irány körül precesszál a csillagos éghez képest valamilyen α nyílásszögű kúpon, a számítások szerint kb. 300 napos periódusidővel.

Ugyanez a mozgás a merevnek elképzelt Földhöz viszonyítva úgy jelenik meg, hogy a pillanatnyi forgástengely döféspontja (a *forgási pólus*) T_E periódusidejű körmozgást végez a poláris régió egy pontja körül, amely a szimmetriatengely döféspontjával azonosítható. Ez a mozgás a Föld tengely körüli forgásával ellentétes értelmű (ld. az 1. ábrát).

A reguláris precesszió megfigyelési módszere azon az egyszerű tényen alapul, hogy a Föld egy adott pontjának a *forgási pólushoz* viszonyított Φ szélességét könnyen kiszámíthatjuk, ha 24 órán belül többször is meg tudjuk mérni egy adott csillag irányának a lokális merőlegessel bezárt szögét. Egy olyan csillagnak az iránya ugyanis, amely a forgási pólusban θ szög alatt látszik a lokális



2. A szélesség meghatározása

merőlegeshez viszonyítva, a Φ szélességű pontban 24 órás periódusidővel változik a lokális merőlegeshez viszonyítva a $(\Phi - \theta, \Phi + \theta)$ szögtartományban (ld. a 2. ábrát). A megfigyelési pont Φ szélessége a két szélső érték átlagával egyenlő.

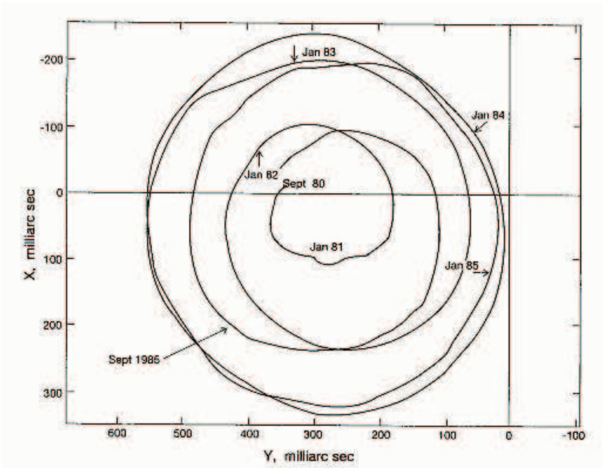
A reguláris precesszió következtében a forgási pólus folyamatosan vándorol a Földhöz viszonyítva, ezért egy adott megfigyelési pont Φ szélessége nem marad állandó. Ez a jelenség a *szélességingadozás*. Ezt az igadozást a geofizikai obszervatóriumok széles hálózata figyeli folyamatosan a Föld különböző pontjaiban, amelyeknek a mérési eredményeiből rekonstruálható a forgási pólus pályája. Az 1980-85 periódusra vonatkozóan ezt a pályát a 3. ábrán láthatjuk.

A Chandler-periódus és az α szög nagysága

A mérési eredmények csak kvalitatív összhangot mutatnak a reguláris precesszió elképzelésével. Többet nem is várhatunk, hiszen a Földet csak közelítően lehet izolált merev testnek tekinteni[1]. Mindenekelőtt az derült ki, hogy a forgási pólus mozgásának a periódusa a várt kb. 300 nap helyett 435 nappal egyenlő. Ezt a periódust a szélességingadozás felfedezőjéről *Chandler-periódusnak* hívják. *S. Newcomb* szerint a különbséget a földköpeny rugalmassága okozza. Ma már jól ismert, hogy a földkéreg is mutat árapályt, a pontos fizikai méréseknél ezt gyakran figyelembe is kell venni. Ezen az alapon az is várható, hogy a centrifugális erő változása következtében az egyenlítői kidudorodás is képes valamilyen mértékben igazodni a forgástengely irányváltozásaihoz.

A 4. ábra azt sugallja, hogy ez az igazodás *növeli* a szélességingadozás periódusidejét. Tegyük fel, hogy a teljesen merev Föld feltételezése mellett a P forgási pólus a szimmetriatengely **C** döféspontja körül precesszálna. Az egyenlítői kidudorodás igazodása a forgástengely pillanatnyi irányához azt eredményez-

[1] A Napnak és a Holdnak a forgatónyomatéka szempontjából a Föld, mint láttuk, izoláltnak tekinthető, de a Napról érkező sugárzási energia jelentős közvetett befolyást gyakorolhat a szélességingadozásra.

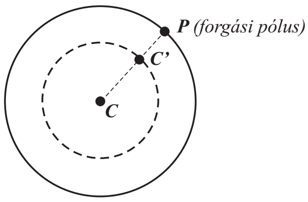


3. A forgási pólus megfigyelt mozgása

heti, hogy a tényleges szimmetriatengely a forgási pólus irányához közelebbi $\mathbf{C}'$ pontba helyeződik át. Az Euler-periódus számértékében ez nem okoz változást, de a körpályán történő mozgás sebességét $\dfrac{C'P}{CP} \equiv \gamma$ arányban lecsökkenti. Ezzel a csökkentett sebességgel kerüli meg a P forgási pólus a $\mathbf{C}$ döféspontot, ami a periódusidő $1/\gamma$-szoros megnövekedéséhez vezet.

Az α szög nagyságára áttérve a 3. ábrából láthatjuk, hogy ez a szög nagyságrendileg néhányszáz milliszögmásodperccel (néhány tized szögmásodperccel) egyenlő, ami a talajszinten 10 méter (!) körüli távolságnak felel meg. A forgási pólus nem körön, hanem egy elég szabálytalan csigavonalon mozog, vagyis α értéke folyamatosan fluktuál ebben a nagyságrendi tartományban.

Az előbb szó volt róla, hogy amikor a szimmetriatengely és a szögsebesség vektora (a forgástengely) valamilyen nullától különböző szöget zár be egymással, a forgási pólus mozgását deformációs folyamatok kísérik, amelyek bizonyosan energia-disszipációval járnak. A szélességingadozásnak ezért le kellene csengenie, az α-nak a nulla értéknél kellene stabilizálódnia. A becslések azt mutatják, hogy a lecsengésnek nagyon gyorsan be kellene következnie, mert a folyamat időállandója kevesebb mint száz év.



4. A Chandler-periódus magyarázatához

Létezniük kell tehát olyan geofizikai mechanizmusoknak, amelyek folyamatosan gondoskodnak a szélességingadozás „rugójának a felhúzásáról”. A modellszámítások alapján például elképzelhető, hogy az óceánok fenekén a nyomás fluktuációja tartja fenn a jelenséget, amely maga a hőmérséklet és a szalinitás (sókoncentráció) változásainak, valamint a széljárás okozta áramlás-változásoknak a következménye. De az sem kizárt, hogy az ingadozás nem vezethető vissza egyetlen jól meghatározott okra, hanem számos független hatás következménye.