

# Merre mutat a Föld forgástengelye?

Hraskó Péter

PTE Elméleti Fizika Tanszék

*Látod-e, mely kicsiny itt a föld, félrésze vizekkel  
Béfozva sötét zöldes, félrésze világos,  
S mint félérésű citrom hintálva tulajdon  
Terhe nyomásától, lóg a nagy semminek ágán.*

(Csokonai)

Amikor a nyolcvanas évek végén a pécsi Janus Pannonius Tudományegyetemre hívtak elméleti fizikát tanítani tanárszakos hallgatóknak, tisztában voltam vele, hogy a tananyagban sok olyan része van, amelyet nem ismerek elég jól ahhoz, hogy taníthassam. Egyebek között a Föld forgástengelyének 25730 év periódusú *luniszoláris precessziója* tartozott ide, ezért beültem az MTA könyvtárába irodalmazni a témáról. Ekkor került a kezembe W. H. Munk and G. J. F. MacDonald *The rotation of the earth : a geophysical discussion* című könyve, amely részletesen tárgyalta a luniszoláris precessziót, de szó volt benne egy másik precesszióról is, amelyről korábban sohase hallottam és olyan hihetetlennek tűnt a számomra, hogy sokáig bizonytalankodtam, jól értem-e, amit olvasok. Arról volt ugyanis szó, hogy a Föld forgástengelye nem esik egybe pontosan a szimmetriatengelyével, a forgástengely dőléspontja úgy kerülgeti *néhány méteres távolságban* a szimmetriatengelyt mint egy kaptos sarkkutató (ld. a 3. ábrát), és ezt a mozgást a geofizikusok már száz év óta *folymatosan regisztrálják*.

## A reguláris precesszió

Ennek az érdekes geofizikai jelenségnek az alapja az izolált tengelyszimmetrikus merev testek forgása a tömegközéppontjuk körül, amelyet *reguláris precesszió*nak (vagy *szabad nutáció*nak) hívunk. Induljunk ki abból, hogy a test nyugalomban van és egy adott pillanatban mi hozzuk forgásba valamilyen  $\omega$  szögsebességgel a tömegközéppontján áthaladó tetszőleges irányú tengely körül. Hogyan mozog tovább?

Bontsuk fel az  $\omega$  szögsebesség vektort egy szimmetriatengellyel párhuzamos  $\omega_{\parallel}$  és egy rá merőleges  $\omega_{\perp}$  komponensre:

$$\omega = \omega_{\parallel} + \omega_{\perp}.$$

A szimmetriatengelyre és a tömegközépponton áthaladó rá merőleges egymással egyenértékű tengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékokat jelöljük  $I_{\parallel}$ -sal és  $I_{\perp}$ -sel. Ekkor a perdületet (impulzusmomentumot) az

$$\mathbf{N} = I_{\parallel} \cdot \omega_{\parallel} + I_{\perp} \cdot \omega_{\perp}$$

képlet határozza meg. A perdület eszerint benne fekszik a szimmetriatengely és a szögsebesség által meghatározott  $\mathcal{S}$  síkban.

Az  $\boldsymbol{\omega}$ -nak és az  $\mathbf{N}$ -nek a szimmetriatengellyel bezárt szögét jelöljük  $\alpha$ -val és  $\beta$ -val. A két szög között egyértelmű kapcsolat van:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{N_{\perp}}{N_{\parallel}} = \frac{I_{\perp} \cdot \omega_{\perp}}{I_{\parallel} \cdot \omega_{\parallel}} = \frac{I_{\perp}}{I_{\parallel}} \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Fontos körülmény, hogy a perdületnek a szimmetriatengelyre vetett  $N_{\parallel}$  vetülete mozgásállandó. Ez nem következik abból, hogy  $\mathbf{N}$  maga mozgásállandó, mert a szimmetriatengely nem egy rögzített térbeli irány. Az  $N_{\parallel}$  időderiváltja mégis zérussal egyenlő. A bizonyításhoz jelöljük a szimmetriatengely irányába mutató egységvektort  $\mathbf{k}$ -val. Nyilván  $N_{\parallel} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{N})$ , ezért

$$\dot{N}_{\parallel} = (\dot{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{N}) + (\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{N}}) = ([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}] \cdot \mathbf{N}).$$

Kihasználtuk, hogy  $\dot{\mathbf{N}} = 0$  és a  $\mathbf{k}$  irány együtt forog a testtel:  $\dot{\mathbf{k}} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}]$ . Mint az előbb láttuk, a vegyes szorzatban szereplő három vektor egy síkban fekszik, ezért a vegyes szorzatuk nullával egyenlő.

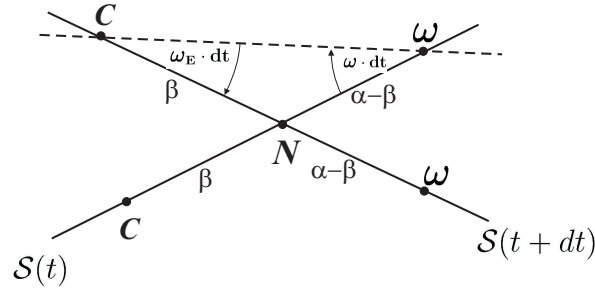
Az  $N_{\parallel}$  megmaradása maga után vonja az  $N_{\perp}$ , valamint az  $\omega_{\parallel} = N_{\parallel}/I_{\parallel}$ , az  $\omega_{\perp} = N_{\perp}/I_{\perp}$  és végső soron magának az  $\omega$  szögsebességnek az állandóságát is.

Mivel  $N_{\parallel} = \cos \beta \cdot N$ , a  $\beta$  szög is állandó, és (1) következtében ugyanez érvényes az  $\alpha$  szögre is. Eszerint nemcsak az igaz, hogy a szimmetriatengely, a perdület és a forgástengely mindig egy közös  $\mathcal{S}$  síkban fekszik, hanem ebben a síkban a relatív helyzetük is állandó.

Az  $\mathcal{S}$  síknak és benne a szögsebesség vektornak forognia kell a testhez képest ahhoz, hogy mindhárom irány folyamatosan egy közös síkban maradjon. A perdület ugyanis mozgásállandó, ezért a forgás során csak a szimmetriatengely fordul el az  $\boldsymbol{\omega}$  irány körül, az  $\mathbf{N}$  iránya változatlan marad. Ha tehát a három irány a  $t$  pillanatban egy síkban volt, a  $t + dt$  pillanatban az  $\mathbf{N}$  perdület már valamilyen szöget zárna be az új helyzetű szimmetriatengelyt és a szögsebességvektort tartalmazó síkkal, ha a szögsebesség iránya változatlan maradna. De ez az irány megváltozhat, hiszen (az  $\mathbf{N}$ -hez hasonlóan és a szimmetriatengellyel ellentétben) nincs „beleégetve” a testbe. El fog tehát fordulni a szimmetriatengely új helyzete körüli  $\alpha$  nyílásszögű kúpon úgy, hogy újból rákerüljön a szimmetriatengely és a  $\mathbf{N}$  által meghatározott síkra. Ez a két elfordulás valójában természetesen nem egymást követően, hanem egyidejűleg következik be, de — mint a következő pontban látni fogjuk, — gondolati szétválasztásuk megkönnyíti a mozgás kvantitatív analizisét.

## Az $\omega_E$ Euler-körfrekvencia

A reguláris precesszió során tehát a forgástengely egy  $\alpha$  nyílásszögű kúpon forog a testhez képest annak szimmetriatengelye körül. A továbbiakban a mozgásnak ezt az aspektusát fogjuk elsősorban tanulmányozni. A forgás körfrekvenciáját *Euler-körfrekvenciának* hívjuk és  $\omega_E$ -vel fogjuk jelölni. A kiszámításához képzeljünk el egy gömböt a testen belül a tömegközéppont mint origó körül. Az  $\mathcal{S}(t)$  és az  $\mathcal{S}(t + dt)$  sík egy-egy főkört metsz ki ebből a gömbből, amelyek az  $\mathbf{N}$  irány dőfésponjtjában metszik egymást. Az 1. ábrán ezeket a főköröket az



1. Az Euler-körfrekvencia számítása

egyszerűség kedvéért egyenesekkel ábrázoltuk. Az ábra belapult ellipszoidra vonatkozik, amelyre  $I_{\parallel} > I_{\perp}$  és (1) következtében  $\alpha > \beta$  (a  $\mathbf{C}$  a szimmetriatengely dőfpontja).

A szaggatott egyenes az  $\mathcal{S}$  síknak azt az  $\mathcal{S}(t)$  és  $\mathcal{S}(t + dt)$  közötti hipotetikus közbenső helyzetét ábrázolja, amikor az  $\mathbf{N}$  még „kilóg” belőle, mert csak az  $\omega \cdot dt$  szögű elfordulás következett be a pillanatnyi forgástengely körül. Csak ezután fog a forgástengely  $\omega_E \cdot dt$  szöggel elfordulni a megváltozott irányú szimmetriatengely körül.

Az  $\omega_E$  Euler-körfrekvenciát a gömbháromszögtan szinusz tétele segítségével fejezhetjük ki a forgás  $\omega$  szögsebességén keresztül:

$$\sin(\omega_E \cdot dt) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta} \sin(\omega \cdot dt).$$

Amikor  $dt \rightarrow 0$  a két  $dt$ -t tartalmazó szinusz helyettesíthető az argumentumával. A  $dt$ -vel egyszerűsíthetünk, így

$$\omega_E = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta} \omega = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \cos \alpha \cdot \omega.$$

Az (1) segítségével a tangensek kifejezhetők a tehetetlenségi nyomatékokon keresztül

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\perp}}, \quad (2)$$

az  $\omega \cdot \cos \alpha$  szorzat pedig a szögsebességnek a szimmetriatengelyre vetett  $\omega_{\parallel}$  vetületével egyenlő. Így végül az Euler-körfrekvenciára az

$$\omega_E = \frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\perp}} \cdot \omega_{\parallel},$$

az ennek megfelelő periódusidőre pedig a

$$T_E = \left( \frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\perp}} \right)^{-1} \cdot T_{\parallel}$$

képletet kapjuk.

A Földre vonatkozóan az  $\omega_{\parallel}$ -t szorzó *precessziós konstans* (vagy másik néven *dinamikai lapultság*) értéke

$$\frac{I_{\parallel} - I_{\perp}}{I_{\perp}} = 0.003295 \approx \frac{1}{300}.$$

Ez a tört a lunisolaris precesszió képletében is megjelenik (innen az elnevezése) és a precesszió megfigyelt értékéből számolható vissza. Mivel  $T_{\parallel} \approx 1$  nap, ezért az Euler-periódusidő értéke a Földre vonatkozóan  $T_E \approx 300$  nappal egyenlő.

Mint látjuk, a Föld reguláris precessziójának  $T_E$  periódusideje sokkal kisebb, mint a lunisolaris precesszió 25730 éves periódusa. Ez utóbbi precessziót a Nap és a Hold tömegvonzásának a Föld egyenlítői kidudorodására gyakorolt forgatónyomatéka okozza. A Föld tehát szigorúan véve nem izolált test és így kérdéses, hogy a reguláris precesszió képletei érvényesek-e rá. Mivel azonban  $T_E$  nagyságrendű idő alatt a lunisolaris precesszió mértéke nagyon kicsi, a reguláris precesszió szempontjából a Földre gyakorolt forgatónyomaték hatása elhanyagolható.

## A pólusingadozás (Chandler-wobble)

A Föld esetében az  $\alpha$  és a  $\beta$  szög biztosan nagyon kicsi. A forgástengely irányát — mint láttuk, — a kezdőfeltételek határozzák meg, ezért az  $\alpha$  szög csak mérésel állapítható meg, elméleti számításal nem. Az azonban könnyen igazolható, hogy a  $\beta$  szög nagy pontossággal egyenlő  $\alpha$ -val. A (2) képlet ugyanis a két szög közötti különbség legalacsonyabb rendjében

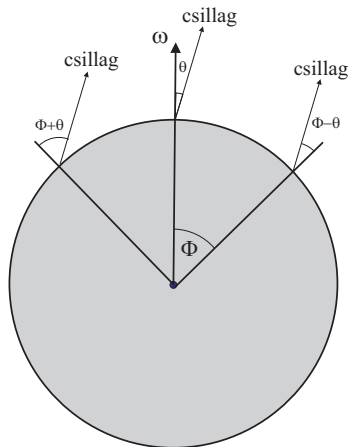
$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha} \approx \frac{1}{300}$$

alakú, és ez a képlet mutatja, hogy az  $(\alpha - \beta)$  különbség valóban elhanyagolható  $\alpha$  mellett.

A Föld reguláris precesszióját tehát a következőképpen írhatjuk le. Az  $\omega$  forgástengely folyamatosan a csillagos ég egy határozott pontjára mutat, mert egybeesik az  $\mathbf{N}$  perdület irányával, amely mozgásállandó. A szimmetriatengely és vele együtt az egész földgolyó ekörül az irány körül precesszál a csillagos éghez képest valamilyen  $\alpha$  nyílásszögű kúpon, a számítások szerint kb. 300 napos periódusidővel.

*Ugyanez a mozgás* a merevnek elképzelt Földhöz viszonyítva úgy jelenik meg, hogy a pillanatnyi forgástengely dőféspontja (a *forgási pólus*)  $T_E$  periódusidejű körmozgást végez a poláris régió egy pontja körül, amely a szimmetriatengely dőféspontjával azonosítható. Ez a mozgás a Föld tengely körüli forgásával ellentétes értelmű (ld. az 1. ábrát).

A reguláris precesszió megfigyelési módszere azon az egyszerű tényen alapul, hogy a Föld egy adott pontjának a *forgási pólushoz* viszonyított  $\Phi$  szélességét (vagyis a pillanatnyi forgási pólus helyzetét az ismert földrajz szélességű megfigyelési ponthoz képest) könnyen kiszámíthatjuk, ha 24 órán belül többször is meg tudjuk mérni egy adott csillag irányának a lokális merőlegessel bezárt



2. A szélesség meghatározása

szögét. Egy olyan csillagnak az iránya ugyanis, amely a forgási pólusban  $\theta$  szög alatt látszik a lokális merőlegeshez viszonyítva, a  $\Phi$  szélességű pontban 24 órás periódusidővel változik a lokális merőlegeshez viszonyítva a  $(\Phi - \theta, \Phi + \theta)$  szögtartományban (ld. a 2. ábrát). A  $\Phi$  szélesség a két szélső érték átlagával egyenlő, a hosszúságát pedig az ingadozás fázisából lehet kikövetkeztetni.

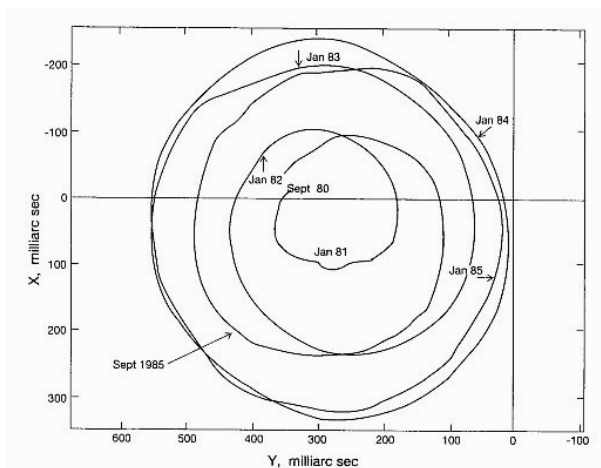
A reguláris precesszió következtében a forgási pólus folyamatosan vándorol a Földhöz viszonyítva, ezért egy adott megfigyelési pont szélessége és hosszúsága nem marad állandó. Ez a jelenség a *pólusingadozás*. Ezt az ingadozást a geofizikai obszervatóriumok széles hálózata figyel folyamatosan a Föld különböző pontjaiban, amelyeknek a mérési eredményeiből rekonstruálható a forgási pólus pályája. Az 1980-85 periódusra vonatkozóan ezt a pályát a 3. ábrán láthatjuk.

## A Chandler-periódus és az $\alpha$ szög nagysága

A mérési eredmények csak kvalitatív összhangot mutatnak a reguláris precesszió elképzelésével. Többet nem is várhatunk, hiszen a Földet csak közelítően lehet izolált merev testnek tekinteni<sup>1</sup>. Mindenekelőtt az derült ki, hogy a forgási pólus mozgásának a periódusa a várt kb. 300 nap helyett 435 nappal egyenlő. Ezt a periódust a szélességingadozás felfedezőjéről *Chandler-periódusnak* hívják. *S. Newcomb* szerint a különbséget a földkéreg rugalmassága okozza. Ma már jól ismert, hogy a földkéreg is mutat árapályt, a pontos fizikai méréseknél ezt gyakran figyelembe is kell venni. Ezen az alapon az is várható, hogy a centrifugális erő változása következtében az egyenlítői kidudorodás is képes valamilyen mértékben igazodni a forgástengely irányváltozásaihoz.

A 4. ábra azt sugallja, hogy ez az igazodás *növeli* a pólusingadozás periódusidejét. Tegyük fel, hogy a teljesen merev Föld feltételezése mellett a

<sup>1</sup>A Napnak és a Holdnak a forgatónyomatéka szempontjából a Föld, mint láttuk, izoláltnak tekinthető, de a Napról érkező sugárzási energia jelentős közvetett befolyást gyakorolhat a szélességingadozásra.

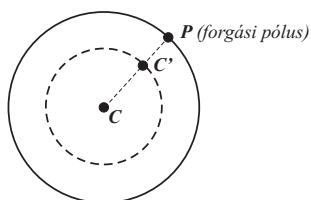


3. A forgási pólus megfigyelt mozgása

$P$  forgási pólus a szimmetriatengely  $C$  dőféspontja körül precesszál. Az egyenlítői kidudorodás igazodása a forgástengely pillanatnyi irányához azt eredményezheti, hogy a tényleges szimmetriatengely a forgási pólus irányához közelebbi  $C'$  pontba helyeződik át. Az Euler-periódus számértékében ez nem okoz változást, de a körpályán történő mozgás sebességét  $\frac{C'P}{CP} \equiv \gamma$  arányban lecsökkenti. Ezzel a csökkentett sebességgel kerüli meg a  $P$  forgási pólus a  $C$  dőféspontot, ami a periódusidő  $1/\gamma$ -szoros megnövekedéséhez vezet.

Az  $\alpha$  szög nagyságára áttérve a 3. ábrából láthatjuk, hogy ez a szög nagyságrendileg néhány száz milliszögmásodperccel (néhány tized szögmásodperccel) egyenlő, ami a talajszinten 10 méter (!) körüli távolságnak felel meg. A forgási pólus nem körön, hanem egy elég szabálytalan csigavonalon mozog, vagyis  $\alpha$  értéke folyamatosan fluktuál ebben a nagyságrendi tartományban.

Az előbb szó volt róla, hogy amikor a szimmetriatengely és a szögsebesség vektora (a forgástengely) valamilyen nullától különböző szöget zár be egymással, a forgási pólus mozgását deformációs folyamatok kísérik, amelyek bizonyosan energia-disszipációval járnak. A szélességingadozásnak ezért le kellene csengenie, az  $\alpha$ -nak a nulla értéknél kellene stabilizálnia. A becslések azt mutatják, hogy a lecsengésnek nagyon gyorsan be kellene következnie, mert a folyamat időállandója kevesebb mint száz év.



4. A Chandler-periódus magyarázatához

Létezniük kell tehát olyan geofizikai mechanizmusoknak, amelyek folyamatosan gondoskodnak a szélességingadozás „rugójának a felhúzásáról”. A modellszámítások alapján például elképzelhető, hogy az óceánok fenekén a nyomás fluktuációja tartja fenn a jelenséget, amely maga a hőmérséklet és a szalinitás (sókoncentráció) változásainak, valamint a széljárás okozta áramlás-változásoknak a következménye. De az sem kizárt, hogy az ingadozás nem vezethető vissza egyetlen jól meghatározott okra, hanem számos független hatás következménye.