Idő és relativitás 2.0

ELTE doktori iskola 2021 őszi szemeszter

Úgy tervezem, hogy *lényegében* (de nem pontosan) ugyanazt a gondolatmenetet fogom követni, amit legutóbb, a két évvel ezelőtti előadásokon.

A relativitáselmélet két jól elkülöníthető részből áll, a speciális és az általános relativitáselméletből. A közfelfogás szerint a speciális elmélet viszonylag egyszerű, az általános azonban nagyon nehéz. Régebben én is így gondoltam, de ma már meg vagyok győződve róla, hogy ez csak a két elméletben használt matematikai apparátusra érvényes: A speciális relativitáselmélet megértéséhez teljesen elég a középiskolás matematika (talán még a differenciál- és integrálszámítás elemei), az általános relativitáselmélet matematikai apparátusa viszont nehéz (de gyönyörű). *Fogalmilag* azonban a newtoni fizika és a speciális relativitáselmélet között a szakadék valójában sokkal szélesebb és mélyebb, mint ami a speciális elméletet választja el az általánostól, és ez okozza az igazi nehézséget.

Meg vagyok róla győződve, hogy a relativitáselmélet kulcsa az einsteini időfogalom minél világosabb megértése, ezért az első fejezetnek ez lesz a témája.

1. Az idő két fajtája

A speciális relativitáselmélet magvát a fizikai idő fogalmának gondos analízise képezi. Az idő olyan tulajdonságainak a feltárásáról van szó, amelyek egyáltalán nem tűnnek fel a hétköznapi gondolkozás számára. És mivel a newtoni fizika átvette az időnek ezt a reflektálatlan, közkeletű fogalmát, észrevétlenül maradtak a klasszikus fizikában is.

Miről van szó? Amikor vonaton utazunk, a két állomás között eltelt időt legegyszerűbben a karóránk alapján állapíthatjuk meg, amelyről feltesszük, hogy *ideális*[1]. De ha nincs saját óránk, elég kinézni a vasútállomások óráira, amelyekről leolvashatjuk, hogy mikor érkeztünk meg egy adott helységbe, és egyszerű kivonással ugyancsak megkaphatjuk, mennyi idő telt el két állomás között.

Azt gondolnánk, hogy a két eljárás teljesen egyenértékű, pedig van egy elég lényeges különbség közöttük — még akkor is, ha a vasútállomások óráit szintén ideálisnak tételezzük fel. Két állomás között ugyanis csak akkor telik el ugyanannyi idő a karóránk és az állomások órái alapján, ha ez utóbbiak *helyesen vannak szinkronizálva egymással*.

Hogyan lehet ezt elérni? A gyakorlatban a rádió pontos időjelzése alapján, de elvben, mivel az óráink ideálisak, azt is feltehetjük, hogy az ország összes vasútállomásának összes óráját egyetlen óragyárban készítették, és amikor mind elkészült, egy közös helyiségben délben pontosan ugyanabba a 12-s helyzetbe hozták a mutatóikat. Utána nyugodtan kiszállíthatták őket a végleges helyükre, mert – ideálisak lévén – megőrizték a pontos idejüket. De az is lehetséges, hogy valaki végigjárta az összes vasútállomást és a saját órája alapján állította be őket.

Figyeljük meg jól a különbséget! Ha ugyanazt az időtartamot egyetlen órán olvassuk le, nincs szükség semmiféle szinkronizálásra, elég, ha az óra pontos (ideális). Több órán történő leolvasásnál azonban még szinkronizálni is kell őket.

---

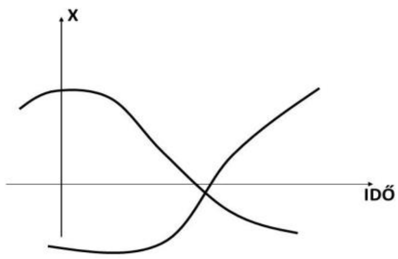
[1] Ideális órán a *homokóra és vízóra* → *gátlóműves kerekes óra* → *ingaóra* → *kronométer* → *kvarcóra* → *atomóra* → … fejlődési lánc hipotetikus végpontját értjük.

De mi teszi elkerülhetetlenné ezt a különbséget? A válasz nyilvánvaló: A karóránk csak azért tudott egyedül megbírkózni a feladattal, mert *mozgott*, míg az állomások órái folyamatosan egy helyben állnak.

Most mindjárt megvizsgáljuk, milyen következményekkel jár mindez a fizikában felmerülő feladatokra nézve, de előbb, hogy ne kelljen minden esetben hosszasan körülírni, melyik eljárásról van szó, adjunk nevet a két eljárásban kapható két időtartamnak.

Ha két adott pillanat (esemény) közötti időtartamot egyetlen órán olvassuk le, akkor az eltelt időtartamot *sajátidőnek* fogjuk nevezni és $\Delta\tau$-val fogjuk jelölni. A másik esetben, amikor ugyanazon két esemény közötti időt az események helyén nyugvó két különböző, helyesen szinkronizált óra alapján állapítjuk meg, a *koordinátaidő* elnevezést és a Δt jelölést használjuk.

Gondoljuk most meg, mi következik mindebből a fizika — konkrétebben a kinematika — számára. Tekintsünk két tömegpontot, amelyek az *x*-tengely mentén mozognak és ábrázoljuk a mozgásukat szokásos módon (1.ábra):



1.ábra

Melyik idő-típusba tartozik a vízszintes tengelyen felvett idő?

A válaszhoz megint érdemes a vasúti közlekedéshez fordulni, mert a *menetrend* tulajdonképpen ilyen grafikonok összeségéből áll (2. ábra) .

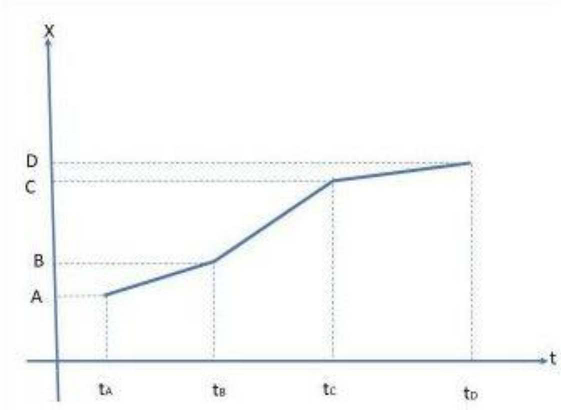
A vízszintes tengelyen nyilván[2] az állomások óráin mutatott időt, vagyis a koordinátaidőt értjük, nem a mozdonyvezetők óráinak mutatóállását (a sajátidejüket).

A *t* neve azért *koordinátaidő*, mert éppen úgy a koordináták egyike, mint *X,Y,Z*.

A fizikában sincs másképp. Gyakran kell egy grafikonon egyszerre ábrázolni több tömegpont pályáját, amelyekben *fogalmilag* a koordinátaidő az, ami közös, ezért az időtengelyen a koordinátaidőt kell felmérnünk[3].

[2] Csak (inerciarendszerben) *nyugvó* órákat lehet szinkronizálni. A mozdonyvezetők sajátideje az óraparadoxon következtében (7. fejezet) automatikusan deszinkronizálódna.

[3] Az nem lenne jó indoklás, hogy azért kell a koordinátaidőt választanunk, mert a tömegpontokon nincs óra. Gondolatban ugyanis minden tömegponthoz hozzáerősíthetünk egy miniatűr ideális órát, amely a tömegpont sajátidejét mutatja.



2.ábra

Ahhoz, hogy a koordinátaidő pontosabb definícióját megadhassuk, érdemes meggondolni a következő példát is. Tegyük fel, hogy az állomásokon folyamatosan mérik a hőmérsékletet. Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy mekkora volt a hőmérséklet a különböző állomásokon *ugyanabban az időpontban* (mondjuk déli 12 órakor), akkor teljesen nyilvánvaló, hogy *időponton* nem érhetünk mást, csakis koordinátaidőpontot: Azt az időt, amit az állomásokon, a hőmérő közelében nyugvó órák mutatnak.

Matematikai megfogalmazásban a mérendő hőmérsékletek itt egy *T(**r**,t) hőmérsékleti mezőt* alkotnak, ezért ennek a példának az általános tanulsága az, hogy a *mezők* esetében – amelyek az hely és az idő függvényei – időn mindig automatikusan koordinátaidőt értünk. Ez érvényes természetesen az $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ elektromos és mágneses mezőre is, amelyeknek „a hasában" mindig a *t* koordinátaidő szerepel, és a Maxwell-egyenletekre is, amelyek közül egyet felírunk csupán példaként:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + rot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0. \qquad (1)$$

De ahhoz, hogy mindezt helyesen értsük, nyilván túl kell lépnünk a koordinátaidőnek a vasútállomások óráival történő illusztrációján, vagyis meg kell adnunk a koordinátaidő általános definícióját.

Mindenekelőtt meg kell állapítanunk, hogy a koordinátaidőt mutató órákat – a vasútállomások óráitól eltérően – valójában csak *elképzeljük*, általában ezek az órák „nincsenek ott": Röviden ezt úgy fejezzük ki, hogy *virtuálisak* (de megengedjük, hogy az állomások óráihoz hasonlóan realizálhassunk közülük annyit, amennyi szükséges).

A koordinátaidő pontos fizikai definíciója ezek után így fogalmazható meg:

A koordinátaidőt a térben nyugvó sűrűn szétszórt helyesen szinkronizált ideális órák mutatnák, ha valóban ott volnának.

A koordinátaidőnek ilyen általános definícióját valójában nemcsak a mezők, hanem a tömegpontok mozgásának a leírása is megköveteli. Egy tömegpont trajektóriáját az

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t) \qquad (2)$$

egyenletekkel adjuk meg. Ez így értendő: Amikor a tömegpont helyén lévő virtuális óra mondjuk *t=5* másodpercet mutat, akkor a tömegpont éppen az $x = f(5), y = g(5), z = h(5)$ pontban tartózkodik.

A koordinátaidő bekeretezett definíciójában a *„helyesen szinkronizált”* jelző természetesen magyarázatra szorul. A definíciónak ez a leglényegesebb eleme mást jelent a newtoni fizikában, mint a relativitáselméletben.

A newtoni fizikában a „helyes szinkronizálás” azt jelenti, hogy a koordinátaidőt mutató óráknak mindenütt *ugyanazt az abszolút időt* kell mutatniuk (a kezdőpont és az időegység természetesen önkényesen választható). Arról, hogy ezen mi értendő, a *Principiában* a következő lakonikus megállapítást olvashatjuk:

Az abszolút, valóságos és matematikai idő önmagában véve és lényegének megfelelően, minden külső vonatkozás nélkül egyenletesen múlik[4]…

Ebből a definícióból egyáltalán nem derül ki, hogyan kell (vagy lehet) a – newtoni feltevés szerint – abszolút időt mutató órákat úgy beállítani (szinkronizálni), hogy az időszámítás kezdőpontja mindenütt ugyanaz legyen. De ha valaki rákérdezett volna, maga Newton és utódai biztosan azt mondták volna, hogy ez nagyon egyszerű dolog: Két (ideális) órát úgy szinkronizálunk egymással, hogy egy helyre visszük őket, azonos időpontra állítjuk a mutatóikat, majd elvisszük őket oda, ahol szükség van rájuk. Mivel ideálisak, mozgatás közben is az abszolút idő ritmusában járnak, a szinkronicitásukat nem veszítik el. Erről egyébként meg is győződhetünk úgy, hogy később újra összehozzuk őket egy helyen és tapasztalni fogjuk, hogy változatlanul ugyanazt az időt mutatják. Órák halmazát valamilyen sorrendben pároként vagy egy csoportba gyűjtve szinkronizálhatjuk össze egymással.

Az abszolút időt egyébként úgy képzelhetjük el, mint egy tökéletlen GPS-t, amely másodpercenként folyamatosan küldi az időjeleket, de nem kapcsol hozzájuk időpontot.

Tudomásom szerint Einstein előtt explicite senkise taglalta ezt a szinkronizálási eljárást, de meggyőződésem szerint azért nem, mert nyilvánvalónak tekintették. Einstein volt az első, aki észrevette, hogy itt *lehet* probléma.

A relativitáselmélet egy gyökeresen más, de szintén egyértelmű receptet ad arra, hogy mit kell értenünk a koordinátaidőt mutató virtuális órák helyes szinkronizálásán. De ahhoz, hogy ezt megvilágíthassuk, a problémát egy másik irányból, az elektrodinamikából kiindulva is meg kell vizsgálnunk. Ezt a következő fejezetben tesszük majd meg.

Ennek a fejezetnek a lezárásaként most mégegyszer összefoglaljuk, mit értünk pontosan a kétfajta időn:

1) Amit egy óra mutat, az az ő sajátideje. Egy tömegpontnak is van sajátideje, amelyet a gondolatban hozzá erősített ideális óra mutatna. A Föld felszínének egyes pontjain eltelt sajátidőt az abban a pontban nyugvó (valóságos vagy csak elképzelt) ideális óra mutatja.

   Ha két esemény között egy adott órán (vagy adott tömegponton) $\Delta\tau$ sajátidő telik el, akkor ez minden nézőpontból változatlanul maradó *tény*. Másképpen kifejezve ugyanezt: a sajátidő intervallum *invariáns*.

[4] Absolute, true and mathematical time, of itself, and from its own nature flows equably without regard to anything external...

2) A koordinátaidőt mutató órák is a „saját sajátidejüket" mutatják, de a koordinátaidő lényege az, hogy ezek az egyedi sajátidők valamilyen *rendszeridőbe* illeszkednek, amely az órák megfelelő *szinkronizációjának* a következménye. Két különböző helyen történő pillanatszerű esemény között eltelt Δt koordinátaidő intervallum függ a szinkronizálás konkrét módjától és ezért *nem szükségképpen invariáns*.

A newtoni fizikában nem különböztették meg a koordinátaidő intervallumot a sajátidő intervallumtól. Mozogjon megint a tömegpont az

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t)$$

trajektórián. Mennyi *sajátidő* telik el a tömegponton azalatt a $\Delta t = 3$ másodpercnyi *koordinátaidő* intervallum alatt, miközben a tömegpont az $x = f(5), y = g(5), z = h(5)$ pontból az $x = f(8), y = g(8), z = h(8)$ pontba ér? A newtoni fizika (és a naív, általános időfogalom) alapján nyilván szintén 3 másodperc. Általában:

$$\Delta\tau = \Delta t. \qquad (newtoni) \tag{3}$$

A newtoni szinkronizálásnál ugyanis kihasználjuk, hogy az ideális órák járását a mozgatásuk *se* befolyásolja (ha ez nem lenne így, akkor amikor az órákat újra egy helyen gyűjtjük össze, már nem járnának egymással szinkronban).

Ez az egyenlőség annyira mélyen beépült a szemléletünkbe, hogy nem is figyelünk fel rá: A sajátidő és a koordinátaidő intervallum két egymástól különböző módon értelmezett időtartam, ezért a fogalmukból egyáltalán nem következik, hogy – amikor mindkettőnek van értelme, — egyenlőnek *kell* lenniük egymással.

A relativitáselmélet lényeges eleme a kétfajta időfogalom világos megkülönböztetése és a különbözőségükből adódó lehetőségek következetes kihasználása.

2. A relativitáselmélet első posztulátuma[5]

Einstein egy 1905 júniusi dolgozatban publikálta a relativitáselméletet szinte teljesen kidolgozott formában. Indítsuk ezt a fejezetet azzal a példával, amellyel Einstein vezette be ezt a munkáját a dolgozatának a legelső bekezdésében.

Mai szóhasználattal a mozgási és a nyugalmi indukciót hasonlította össze egymással.

Képzeljünk el egy asztalon álló rúdmágnest és a közelében egy tekercset (ampermérővel).

Nézzük először azt az esetet, amikor a mágnes nyugszik, a tekercs pedig konstans ***V*** sebességgel mozog. A rúdmágnes ***B*** mágneses terében a tekercs minden (Q töltésű) vezetési elektronjára hat az $\boldsymbol{F} = Q(\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B})$ Lorentz-erő, amely az ampermérő által jelzett (változó) áramot hoz létre a tekercsben. Ez a jelenség a *mozgási indukció*. Einstein hangsúlyozza, hogy eközben elektromos mező seholse jön létre.

[5] Hagyományosan ezt másodiknak szokták venni.

Tegyük fel most, hogy a tekercs nyugszik és a mágnes mozog önmagával párhuzamosan $-\boldsymbol{V}$ sebességgel. A tekercsre Lorentz-erő most nem hat, mert nyugalomban van. A Ψ mágneses fluxusa azonban változik, ezért $\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\dot{\Psi}$ elektromotoros erő jön létre benne, amely áramot generál, és az ampermérő szintén kileng. Ez a jelenség a *nyugalmi indukció*, amely – mint Einstein szintén aláhúzza – elektromos mező jelenlétének köszönhető.

Mármost a tapasztalat szerint az ampermérő kilengése mindkét esetben ugyanolyan. Az egybeesés magyarázata kézenfekvő: A két szituáció csupán abban különbözik egymástól, hogy *ugyanazt a jelenséget* először a mágnes, másodszor pedig a tekercs nyugalmi rendszeréből vizsgáltuk (amelyeket természetesen inerciarendszernek tekinthetünk). Mivel a galvanométer mutatóállása objektív tény, amely nem függhet a leíráshoz választott koordinátarendszertől (invariás), ezért *nyilvánvaló*, hogy a két – egyébként valóban különböző – jelenségben ugyanolyan változó áramot kell mérnünk.

Ez a magyarázat azonban elfogadhatatlan következményre vezet.

Ha ugyanis tényleg igaz lenne, hogy az elektromágnesesség törvényei minden inerciarendszerben egyformán érvényesek, akkor a Maxwell-egyenletek is érvényesek lennének minden inerciarendszerben. A Maxwell-egyenletekből azonban következik, hogy a fény minden irányban ugyanazzal a $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ sebességgel terjed. Ez azonban nyilvánvalóan ellentmond annak az egyszerű szabálynak, ahogy a sebességet kell átszámítani az egyik inerciarendszerből a hozzá képest mozgó másikba.

Einsteinnek azonban a belső meggyőződése azt diktálta, hogy a két inerciarendszer ekvivalenciáján alapuló indoklás annyira természetes, hogy valahogy mégis igaznak kell lennie[6]. De ha tényleg így van, akkor nem kerülhető el a következtetés: *A fénynek minden inerciarendszerhez viszonyítva minden irányban ugyanazzal a* c *sebességgel kell terjednie*, ellentmondva annak a jól ismert átszámítási eljárásnak, amelyre az előbb utaltunk.

A megvilágosodás pillanata Einstein számára minden valószínűség szerint az volt, amikor rádöbbent, hogy *a koordinátaidő és a sajátidő különbözősége (vagy – másképpen fogalmazva – a távoli órák szinkronizálásának „kibeszéletlensége") lehetővé teszi ennek az ellentmondásnak a feloldását.*

Alighanem erre a pillanatra utal *Jürgen Neffe* leírása[7]:

> *Einstein együtt üldögélt barátjával és szabadalmi hivatali kollégájával, Michele Bessóval. Mint általában, most is egy fizikai problémáról vitatkoztak. Nem akármilyen problémáról, hanem az egyik legjelentősebbről: hogyan lehet leküzdeni azokat az ellentmondásokat, amelyek az utóbbi években alapjaiban rengették meg az uralkodó fizikai világképet? Ezzel a*

---

[6] A nagyon precíz olvasó kedvéért megjegyezzük, hogy Einsteinnek ez az érvelése a célnak ugyan tökéletesen megfelel, de utólag visszatekintve nem teljesen korrekt. Végeredményben a tekercsben fellépő elektromotoros erő fogalmán alapul, amely az áramot létrehozza, de ez a fogalom csak kvázistacionér közelítésben értelmes (ld. a *Unipolar Induction* című cikkem 1. Függelékét a honlapomon). Kvázistacionér közelítésben viszont a Maxwell-egyenletekből hiányzik az un. eltolási áramot reprezentáló tag, az így megcsonkított egyenleteknek nincs hullámmegoldásuk, tehát nem írják le a fény terjedését. Szigorúan véve tehát ezt a gondolatkísérletet nem lett volna szabad összekapcsolni a fény terjedésével.

[7] *Albert Einstein igaz története* (Typotex, 2011), 171-172. oldal. Ez az életrajz egyébként egyáltalán nem rokonszenves, mert főleg hálószobatitkok után nyomoz Einstein magánéletében, amelyek csupán leszármazottaira tartoznak.

kérdéssel a legkitűnőbb szakemberek sem tudtak megbirkózni – és most Einstein is kapitulálni készült: „Feladom” – közölte barátjával.

Aztán eljött az éjszaka. Hogyan tölthette el Einstein az éjszakát?... A Bessóval folytatott beszélgetés során történnie kellett valaminek. Lehetséges, hogy barátja adta a döntő tippet…

Reggel újra találkozott Bessóval. „Még mielőtt egyáltalán üdvözölhettem volna – mondta Besso –, Einstein elújságolta a nagyszerű hírt: Hála neked, teljes egészében megoldottam a problémámat!” A megoldás csak néhány évvel később kapta meg a végleges nevét, a speciális relativitáselméletet[8].

…

Az Einstein-házaspár szokatlan formában ünnepelte az 1905 júniusi áttörést. Leitták magukat – ez az egyetlen ismert alkalom, amikor Einstein alkoholhoz nyúlt. Conrad Habicht történelmi kuriózumnak számító képeslapot kapott: „Tök részegen az asztal alatt heverünk mind a ketten. Az Ön szegény farkcsontja [?] és felesége.”[9]

Mindenekelőtt világosan meg kell értenünk, mit jelent az, hogy a fény minden inerciarendszerben minden irányban ugyanazzal a *c* sebességgel terjed.

Képzeljük el az egymáshoz képest mozgó inerciarendszereket különböző sebességű zárt vasúti kocsikként. Foucault forgótükrös, vagy Fizeau forgótárcsás módszerével elvben mindegyikben minden irányban meghatározhatjuk a fénysebességet, és minden esetben ugyanazt a *c* értéket kapjuk eredményül annak ellenére, hogy legfeljebb csak az egyik kocsi nyugodhat az éterhez képest.

Sebességmérésről lévén szó az ilyen kísérletekben időt is kell valahogy mérni, tehát biztosan lesznek (ideálisnak feltételezett) órák a vasúti kocsikban. De se Foucault, se Fizeau kísérletében nem találunk órákat. Akkor használtak *egyetlen egy* órát, amikor a tükröt, ill. a fogazott tárcsát forgató motor szögsebességét bekalibrálták. Az idő tehát, amelyet ezekben a kísérletekben mérnek, egyértelműen sajátidő. A koordinátaidőre jellemző szinkronizálás ezekben a kísérletekben szóba se jöhet.

A Foucault és a Fizeau kísérletben a tárcsa vagy a tükör *szögsebességét* kell meghatározni, amit egyetlen óra segítségével elegendően hosszú ideig tartó méréssel tetszőleges pontossággal el lehet végezni[10]. Ennél sokkal nehezebb egy-egy pillanatszerű esemény *időpontjának* a pontos meghatározása. A 19. században ezért nem végezhettek fénysebeség mérést „direktben”, a *sebesség = út/idő* képlet alapján. Gondolatkísérletben[11] azonban ennek a képletnek a felhasználásával a Foucault és a Fizeau kísérletnél sokkal egyszerűbben meg lehet mérni a fénysebességet két tetszőleges P_1 és P_2 pont között mondjuk a $P_1 \to P_2$ irányban az *Einstein-féle szinkronizációs eljárás* segítségével.

Helyezzünk el egy-egy órát, $\mathcal{O}_1$-et és $\mathcal{O}_2$-t, mindkét pontban. A t_1 pillanatban villantsunk fel egy izzót a P_1 pontban, amelynek a jelét P_2-ből egy tükör visszaveri a P_1 felé. A visszatükrözés pillanata legyen

[8] Az 1905 júniusi cikkben nincs egyetlen irodalmi hivatkozás sem, de a végén olvasható ez a köszönetnyilvánítás: *„Befejezésül megjegyzem, hogy barátom és kollégám M. Besso kitartó segítőtársam volt az itt előadott problémák kidolgozásában és sok értékes észrevételt köszönhetek neki.”*

[9] Uo. 205. oldal. A kérdőjelet én tettem oda. Habicht Einstein közeli barátja volt (három évvel volt idősebb nála). Biztosan tudta, miért utalt magára Einstein ezzel a furcsa kifejezéssel.

[10] A fordulatszám relatív hibája a mérési idővel fordítottan arányos: $\Delta n/n = \Delta t/t$.

[11] Ilyen kísérletek ma már lehetségesek.

t_2, a visszatükrözött jel origóba érkezésének pillanata pedig t_1'. Mivel feltevésünk szerint a fény a $P_1 \to P_2$ irányban ugyanazzal a sebességgel halad, mint az ellenkező $P_2 \to P_1$irányban, ezért az $\mathcal{O}_2$ akkor van helyesen szinkronizálva $\mathcal{O}_1$-el, amikor $t_2 = (t_1 + t_1')/2$. Ha ennél kevesebbet vagy többet mutat, akkor a szükséges mértékben előre vagy vissza kell állítani.

A két pont l távolságának ismeretében ezután újabb fényjeleket indítva, az $l/(t_2 - t_1)$ képlet segítségével (amelyben természetesen t_1 és t_2 a fényjel P_1-beli indításának és P_2-be érkezésének időpontja a már szinkronizált órák alapján) meghatározhatjuk a fény terjedési sebességét a két pont között[12]. Ha minden inerciarendszerben bármely pontpár között ugyanazt a *c* értéket kapjuk, ezzel igazoljuk Einstein hipotézisét: A fénysebesség *tényleg* minden inetrciarendszerben minden irányban ugyanakkora. Ha ellenben a sebességértékek szórnak, a hipotézist el kell vetnünk.

Figyeljük meg jól: A két távoli óra szinkronizációján itt már egyáltalán nem a newtoni eljárást értjük, amelyben az órák mutatóállását egy közös helyen állítják be ugyanolyanra. A szinkronizáltság egyedüli kritériuma az, hogy az $l/(t_2 - t_1)$ képlet segítségével kiszámított fénysebesség legyen egyenlő a konstans *c*-vel.

***

Első látásra a fénysebesség állandósága a különböző sebességgel mozgó vasúti kocsikban nem is látszik olyan hihetetlennek. Hiszen ha például ugyanolyan típusú (nyugvó) pisztolyból kilőtt golyók sebességét határoznánk meg a fénysebesség helyett, ugyanezt az eredményt kapnánk: A pisztolygolyó mindegyik vasúti kocsiban (inerciarendszerben) ugyanazzal a sebességgel mozogna minden irányban.

Csakhogy a fény és a pisztolygolyó között van egy óriási különbség! A pisztolygolyó sebessége függ a pisztoly sebességétől, mert a *pisztolyhoz képest* állandó. *Ezért* ugyanakkora a *nyugvó* fegyverből kilőtt golyó sebessége minden vasúti kocsiban.

A Maxwell-egyenletek szerint a fénysebesség ezzel szemben független a fényforrás sebességétől (ezt laboratóriumi és csillagászati megfigyelések is alátámasztják). Ez a tény összhangban van azzal, hogy ugyanezen egyenletek szerint a fény hullámjelenség. A hullámok ugyanis nem az őket gerjesztő forráshoz, hanem a hullámzó *közeghez* képest terjednek ugyanazzal a sebességgel[13]. Noha a fényhullámok esetében semmise utal ilyen közeg valóságos létezésére, Einstein előtt mindenki úgy gondolta, hogy hullámterjedés nem képzelhető el nélküle. Ez a hipotetikus közeg volt az éter.

A fénysebesség állandóságának a feltételezése az inerciarendszereket realizáló vasúti kocsik mindegyikében eszerint a pisztolygolyó (egy részecske) viselkedésére emlékeztet, a fényforrás sebességétől való függetlenség viszont a hullámokra jellemző[14]. A két tulajdonság szemléletileg egyáltalán nem egyeztethető össze egymással.

Ezeket a vasúti kocsikkal illusztrált megfigyeléseket valójában persze nem lehet elvégezni, mert technikailag nem lehet létrehozni egymáshoz képest elég gyorsan mozgó inerciarendszereket. Ezért

[12] Az oda-vissza úton valójában már a $c = 2l/(t_1' - t_1)$ képletből is meg lehetne határozni a fénysebességet.

[13] Példaként gondoljunk a hangrobbanásra, amely akkor következik be, amikor a repülőgép átlépi a hangsebességet, és az az oka, hogy a hanghullámok, amelyeknek a sebessége nem nő a repülőgép sebességével, összetorlódnak.

[14] Lehet, hogy már ez a posztulátum tartalmazza csírájában azt, amit ma röviden a fény kettős (részecske és hullám) természetének nevezünk. Einstein fénykvantumokat posztuláló dolgozata egyébként fél évvel megelőzte a relativitáselméletet.

ahelyett, hogy ilyen kísérletekre buzdított volna, Einsteinnek posztulátum formájában kellett kimondania a feltételezését:

A relativitáselmélet 1. posztulátuma:

Ha a fénysebességet megmérnénk minden inerciarendszerben minden irányban, akkor azt találnánk, hogy ugyanakkora és nem függ a fényforrás sebességétől.

3. A „helyes szinkronizálás” a relativitáselméletben

Ha a fénysebesség *valóban* minden inerciarendszerben minden irányban ugyanazzal a *c*-vel egyenlő, akkor a koordinátaidőt mutató $\mathcal{O}(x,y,z)$ órákat minden inerciarendszerben *lehetséges és célszerű* úgy szinkronizálni, hogy bármely P_1 és P_2 pont között terjedő fényjelre igaz legyen a

$$\frac{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}{t_2-t_1}=c \tag{4}$$

egyenlőség, amelyben t_1 a fényjel indításának pillanata a P_1-beli, t_2 pedig az érkezésének pillanata a P_2-beli koordinátaidőt mutató órán leolvasva.

Ehhez csupán annyi szükséges, hogy az inerciarendszerben „szétszórt” $\mathcal{O}(x,y,z)$ órákat „egyenként” szinkronizáljuk az origóbeli (P_0-beli) $\mathcal{O}_0 \equiv \mathcal{O}(0,0,0)$ órával az előző fejezetben ismeretett Einstein-féle eljárás segítségével. Ha ezt megtesszük, akkor (4) érvényes lesz minden olyan pontpárra, amelynek egyike az origó.

Ez az eljárás azonban *konzisztens*, mert a fénysebesség állandóságának következtében *bármely* P_1 és P_2 pontban nyugvó $\mathcal{O}_1 \equiv \mathcal{O}(x_1,y_1,z_1)$ és $\mathcal{O}_2 \equiv \mathcal{O}(x_2,y_2,z_2)$ órapár is szinkronizálva lesz *egymással*.

Ezt így láthatjuk be: A P_0-ban és a P_1-ben helyezzünk el tükröket úgy, hogy a P_2-ből indított fényjel a $P_2 \to P_0 \to P_1 \to P_2$ zárt kontúr mentén visszajusson P_2-be. Az 1. posztulátum következtében nyilván

$$l_{20}+l_{01}+l_{12}=c(t_2'-t_2),$$

ahol t_2 és t_2' az $\mathcal{O}_2$ mutatóállása a fényjel indításának és érkezésének a pillanatában. Ez az egyenlet átírható a következő alakba:

$$l_{20}+l_{01}+l_{12}=c[(t_0-t_2)+(t_1-t_0)+(t_2'-t_1)].$$

A jobboldalon a t_0 és a t_1 az $\mathcal{O}_0$ ás az $\mathcal{O}_1$ mutatóállása abban a pillanatban, amikor a fényjel a P_0 és a P_1 pontban lévő tükörről visszaverődik.

Az $\mathcal{O}_0$-hoz történt szinkronizáció következtében azonban $l_{20}=c(t_0-t_2)$, valamint $l_{01}=c(t_1-t_0)$. Ezért az $l_{12}=c(t_2'-t_1)$ egyenlet is fennáll, ami mutatja, hogy az $\mathcal{O}_1$ és az $\mathcal{O}_2$ órapár *egymással is* szinkronban jár.

Az általános gyakorlatot követve a továbbiakban *t*-n mindig az Einstein-féle „helyes” szinkronizálással értelmezett koordinátaidőt fogjuk érteni.

Foglalkozzunk most egy kicsit a koordinátaidőt mutató virtuális óra-halmazok tulajdonságaival.

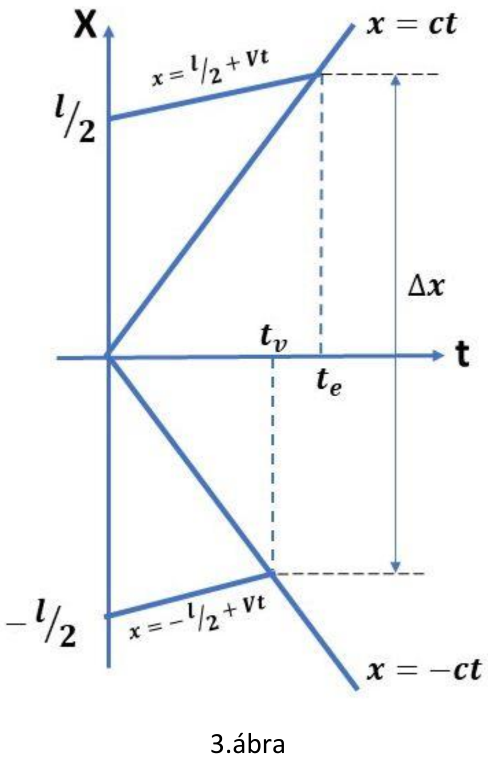
A newtoni fizikában éppúgy, mint a relativitáselméletben, az egymáshoz képest mozgó inerciarendszerek cipelik magukkal a bennük sűrűn széttelepített virtuális órákat, amelyek a koordinátaidőt mutatják.

A newtoni időfelfogás szerint a *K'-ben és* a *K*-ban az a két virtuális óra, amelyik éppen egymás felett tartózkodik, mindig ugyanazt az időt mutatja[15], mert, mint már idéztük, a *Principia* szerint *„az abszolút, valóságos és matematikai idő önmagában véve és lényegének megfelelően, minden külső vonatkozás nélkül egyenletesen múlik*". Az einsteini szinkronizáció esetében ez nincs így, a *K*-val, *K'*-vel, *K''*-vel stb. együtt „utazó" virtuális órák közül azok, amelyek éppen ugyanott vannak („fedik egymást"), mind különböző időt mutatnak.

Később majd kissé részletesebben is leírjuk ezt a különbséget, de azt hiszem, igazából lehetetlen képzeletben egyszerre nyomon követni, hogy a *K*-ban nyugvó és a *K'*-ben utazó egymást éppen fedő virtuális órák halmazán leolvasható idő milyen viszonyban áll egymással. De erre nincs is szükség, mert ha tisztában vagyunk a koordinátaidő és a sajátidő fogalmával, általában egyszerű képletek segítenek minden konkrét feladat megoldásában. Lássunk is mindjárt egyet!

Feladat: Egy *V* sebességgel mozgó l hosszúságú vasúti kocsi középpontjából fényjelet indítunk a kocsi két vége felé, ahol azok egy-egy robbanást inicializálnak. Mennyi idő telik el a két robbanás között a vonat *K'* és a pályatest *K* vonatkoztatási rendszerében?

A *K'*-ben a robbanások nyilván egyidejűek ($\Delta t' = 0$), mert a fénysebesség *K'*-ben (is) mindkét irányban ugyanaz a *c*, és a robbanás a vonat közepén történt.



3.ábra

[15] Az a kijelentés azonban, hogy pl. a *K*-n belüli virtuális órák egyszerre mind ugyanazt az időt mutatják, csak a newtoni fizika abszolút időfelfogása alapján értelmes. A relativitáselméletben azonban tautológia, mert az „egyszerre" jelző éppen a virtuális órák által definiált egyidejűséget jelenti.

Ha azonban a *K*-ból szemléljük az eseményeket akkor a következőt látjuk (3. ábra). A vonat eleje *V* sebességgel rohan az előre menő fényjel elől, a vége pedig V sebességgel közeledik a hátrafele mozgó fényjel felé. *Mivel a fénysebesség független a fényforrás sebességétől*, a fényjel *K*-ban is *c* mindkét irányban, ezért a vonat eleje és a fényjel közötti távolság *(c-V)* sebességgel, a vonat vége és a fényjel közötti távolság pedig *(c+V)* sebességgel csökken. Ha a *mozgó* vonat hossza l, akkor ennek alapján a fényjel

$$t_e = \frac{l/2}{c-V} \quad \text{és} \quad t_v = \frac{l/2}{c+V} \tag{5}$$

koordinátaidő alatt éri el a vonat elejét és végét. Ebből pedig az következik, hogy a pályatest nyugalmi rendszerében a két robbanás között

$$\Delta t = t_e - t_v = \frac{l \cdot {}^{V}/_{c^2}}{1 - {}^{V^2}/_{c^2}} \tag{6}$$

szekundum telik el úgy, hogy a vonat elején történik a robbanás később. Ez a Δt nyilván koordinátaidő különbség, hiszen a *t,x* koordinátasíkon felrajzolt pályák tulajdonsága. De vajon mekkora $\Delta\tau$ sajátidő telik el a két robbanás között?

Ez a kérdés azonban így nincs jól feltéve, mert két esemény közötti sajátidőnek csak *egy olyan órához viszonyítva* van értelme, amely mindkét esemény közvetlen közelében tartózkodik. Vagy egyszerűbben fogalmazva: Csak egy adott testen történő pillanatszerű esemény párhoz tartozik határozott sajátidő.

A vasúti kocsi *K'* nyugalmi rendszerében azonban a két robbanás egyidejű, az órának, amelyen le lehetne olvasni a közöttük eltelt sajátidőt, végtelen sebességgel kellene mozognia. Ilyen óra pedig nyilván nem létezik.

A *K*-ból nézve azonban a robbanások nem egy időpillanatban történnek, ezért tulajdonképpen el lehetne képzelni egy órát, amely pont olyan sebességgel mozog, hogy ott legyen mindkét robbanás helyszínén. De mivel a *K* és a *K'* két *egyenértékű* inerciarendszer, ilyen óra se létezhet.

Ahhoz, hogy tisztábban lássuk, miről is van szó, számítsuk ki, milyen *U* sebességgel kellene mozognia az említett órának *K*-hoz viszonyítva.

Ha *K*-ban a két robbanás Δx távolságra történik egymástól, akkor nyilván $U = \Delta x/\Delta t$. A Δt-t a (6)-ban már megtaláltuk, és teljesen hasonlóan lehet kiszámítani Δx-et is (ld. a 3.ábrát):

$$\Delta x = c \cdot (t_e + t_v) = c \cdot \left(\frac{l/2}{c-V} + \frac{l/2}{c+V}\right) = \frac{l}{1 - {}^{V^2}/_{c^2}}. \tag{7}$$

A (6) és a (7) alapján:

$$U = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{c^2}{V}. \tag{8}$$

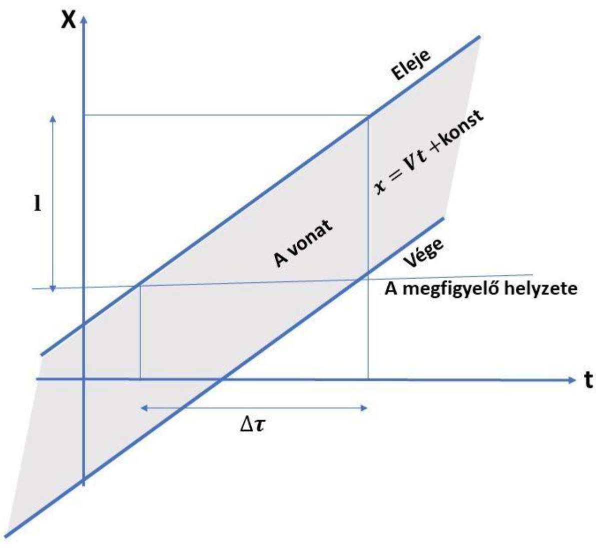
Mármost a vonat *V* sebességéről hallgatólagosan feltettük, hogy kisebb a fénysebességnél, különben a mozgásirányban haladó fényjel sohase érné el a vonat elejét. Ennek következtében $U > c$. A vonat nyugalmi rendszerében (*V=0*) $U = \infty$, és az nyilvánvaló, hogy ilyen óra nem létezik. De akkor az inerciarendszerek ekvivalenciája következtében olyan óra se létezhet, amelyik a fénynél gyorsabban mozog. Ez a meggondolás elég egyértelműen arra kötelez, hogy ezt a kikötést vegyük figyelembe az 1. posztulátumban:

Kiegészítés az 1. posztulátumhoz:

Semmilyen test se mozoghat és semmilyen hatás se terjedhet a fénynél gyorsabban

A posztulátumnak a hatások terjedésére vonatkozó kiterjesztését például a szilárd testekben terjedő rugalmas gerjesztésekre a pajta-rúd paradoxonnal lehet megindokolni (ld. a 2017-es kurzus diáit a honlapomon).

Azt a kérdéskomplexumot, amelyet most analizáltunk, röviden *az egyidejűség relativitásának* hívják. Így foglalhatjuk össze: Két távoli esemény egyidejűségét nem értelmezhetjük az abszolút időben elfoglalt azonos helyként, mert az abszolút idő fogalma üres. De lehetséges és célszerű a fénysebesség állandóságára alapozott koordinátaidő egyenlőségeként értelmezni. Az így értelmezett egyidejűség azonban relatív, mert ha valamelyik inerciarendszerben a két esemény egyidejű (Δt=0), akkor az ehhez képest mozgó inerciarendszerekben már nem lesznek egyidejűek ($\Delta t \neq$0): Lesz olyan inerciarendszer, amelyben $\Delta t > 0$, és olyan is, amelyben $\Delta t < 0$. Ez azonban csak akkor okozna problémát, ha egy mozgó óra segítségével meg lehetne határozni a két esemény valódi sorrendjét. De ennek az órának a fénynél gyorsabban kellene mozognia, ami a (kiegészített) 1. posztulátum szerint nem lehetséges. Az ilyen típusú eseménypárokat, amelyeknek az időbeli sorrendje határozatlan, *térszerűeknek* hívjuk[16].



4.ábra

Térjünk még vissza a (6) képletre és mutassuk meg, hogy ez egy kísérletileg elvben ellenőrizhető összefüggés. A fénysebesség méréséről már szó volt, ez tehát ismert. A baloldali Δt mérése érdekében sűrűn el kell helyeznünk valóságos koordinátaidőt mutató órákat, amelyek közül az egyiket kiválasztjuk és fényjelek segítségével ahhoz szinkronizáljuk a többit. Ezután a t_e, a t_v és a V is

[16] A fényjellel összeköthető eseménypárokat *fényszerűnek*, a fénynél lassabban mozgó testekkel (pl. órákkal) összeköthetőket pedig *időszerűeknek* nevezzük. Az ilyen eseménypárok időbeli sorrendje egyértelmű.

megmérhető. De hogyan lehet megmérni egy mozgásban lévő vasúti kocsi l hosszúságát? Az eljárás nagyon egyszerű: Meg kell mérnünk, mekkora $\Delta\tau$ idő alatt haladt el egy nyugvó megfigyelő mellett, és ezt a sajátidőt meg kell szoroznunk a vonat V sebességével: Ilyen távolságra lesz ugyanis a vonat eleje a kiválasztott órától *abban a t pillanatban*, amikor a vége elhalad az óra mellett (ld. a 4. ábrát).

$$l = V \cdot \Delta\tau = V \cdot \Delta t. \tag{9}$$

***

Az egyidejűség relativitásának van egy katasztrofális következménye: A newtoni fizika sikerágazata, az égi mechanika alól kirántja a talajt.

Egy kettős csillag mozgását meghatározó Newton-egyenletek egyike

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_1(t) = \frac{Gm_2}{|\boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{r}_1(t)|^3}\big(\boldsymbol{r}_2(t) - \boldsymbol{r}_1(t)\big).$$

Az egyenlet szerint az 1. csillagra ható erőt a 2. csillag helyzete határozza meg *ugyanabban a pillanatban* (távolhatás). Az egyidejűség relativitása következtében a relativitáselméletben ez az egyenlet biztosan nem tartható.

A megoldás útját az elektrodinamika mutatja meg, amelyben ez a probléma nem lép fel, mert a *t*-ben egy ponttöltésre ható erőt *a töltés helyén* lévő elektromos és mágneses mező *t*-beli értéke határozza meg (*közelhatás*), és két *ugyanazon a helyen* történő esemény[17] egyidejűsége invariáns.

Az általános relativitáselmélettel Einstein a gravitációs kölcsönhatás problémáját hasonló módon oldotta meg, mert ebben az elméletben a gravitáció az elektrodinamikához hasonlóan közelhatásként jelenik meg.

4. A relativitáselmélet második posztulátuma

Tekintsük át a helyzetet! Mit tudunk? A tapasztalat szerint (1. posztulátum) a fény minden inerciarendszerben minden irányban ugyanazzal a *c* sebességgel terjed. Ez a tény lehetővé és célszerűvé teszi a koordinátaidő einsteini megválasztását (szinkronizálási módját), amely szerint a fénysugarak egyenlete minden inerciarendszerben *x=ct*, vagy általánosabban

$$x = l \cdot c \cdot t + x_0 \qquad y = m \cdot c \cdot t + y_0 \qquad z = n \cdot c \cdot t + z_0 \qquad (l^2 + m^2 + n^2 = 1),$$

ahol *l,m,n* a fénysugár iránykoszinuszai.

Ezzel elhárul az akadály azelőtt, hogy a Maxwell-egyenletek minden inerciarendszerben azonos alakúak legyenek, hiszen nem kerülünk ellentmondásba az egyenleteknek azzal a következményével, hogy a fény minden irányban *c* sebességgel terjed. Az (1)-ben példaként felírt Maxwell-egyenletet tehát így egészíthetjük ki:

$$K\!: \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + rot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0 \leftrightarrow K'\!: \frac{\partial \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{r}',t')}{\partial t'} + rot\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}',t') = 0. \tag{10}$$

Ezt a kapcsolatot fejezi ki a 2. posztulátum általános formában:

[17] A két esemény a ponttöltés és az elektromos mező ottléte.

A relativitáselmélet 2. posztulátuma:

A fizika törvényei minden inerciarendszerben azonos alakban érvényesek.

Einstein indukciós gondolatkísérletében ezzel értelmessé válik, hogy mindkét módszerrel ugyanazt az elektromotoros erőt kapjuk a vezetőben, hiszen ugyanazokat a Maxwell-egyenleteket alkalmazhatjuk akár a mágnes, akár a tekercs nyugalmi rendszerében (mert mindkettő inerciarendszer). Ez a gondolatkísérlet arra is rávilágít, hogy az ***E***, ***B*** térmennyiségek változnak, amikor egyik inerciarendszerről egy másikra térünk át (a mágnes nyugalmi rendszerében $\boldsymbol{E} = 0$, a tekercsében $\boldsymbol{E} \neq 0$). A térmennyiségek pontos transzformációs szabályát Einstein már az első cikkében megtalálta[18]. Az $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t} \rightarrow \boldsymbol{r}', \boldsymbol{t}'$ átszámítás a Lorentz-transzformáció segítségével történik, amelyet majd az utolsó fejezetben tárgyalunk.

Fontos megjegyzés a két posztulátum viszonyáról:

Kérdés: A 2. posztulátumból következik, hogy a Maxwell-egyenletek minden inerciarendszerben egyformán érvényesek, tehát a fénysebesség minden inerciarendszerben minden irányban *c*-vel egyenlő. Miért van akkor szükség az 1. posztulátumra, amely ugyanezt mondja ki?

Válasz: Az 1. posztulátum leszögez egy *tapasztalati tényt*, amely független attól, hogy képesek vagyunk-e azt elméletileg értelmezni. Nincs okunk ugyanis eleve feltételezni, hogy az evolúció olyan agyvelővel ruházott fel, amely alkalmas a mindennapos tapasztalattól egyre távolabb eső fizikai jelenségek elméleti, predikciókra is képes megértésére. A fénysebesség tapasztalati állandóságát Einstein − neves kortársaival, *H. Lorentz*-cel, *M. Abraham*-mal ellentétben — nem megmagyarázni akarta, hanem olyan *útmutatásként* fogta fel, amely rávilágít a sajátidő és a koordinátaidő különbözőségére. Ez a megkülönböztetés tette lehetővé, hogy a relativitáselmélettel Maxwell elektrodinamikájának olyan értelmezését adja, amely összhangban van a fénysebesség állandóságával és nagyszámú — sok esetben meglepő — predikcióra képes. A 2. posztulátum tehát az 1. posztulátumra alapozott *általánosítás*, amely szükségképpen tartalmazza az 1. posztulátum állítását is.

5. A sajátidő és a koordinátaidő kapcsolata

Ezt a kapcsolatot *az optikai Doppler-effektus* felhasználásával fogjuk megállapítani. Célszerű lesz úgy képzelni, hogy az adó szabályos időközönként éles fényimpulzusokat indít a vevő felé, amely egyenletes sebességgel mozog. A Doppler-effektus abban áll, hogy két egymás utáni impulzus között különböző idő telik el a vevőn, mint az adón (nagyobb, ha távolodnak egymástól, kisebb, ha közelednek egymáshoz).

Doppler aránynak (DA) a vevő által észlelt és az adó által kibocsátott két egymás utáni jel között eltelt idő arányát nevezzük:

[18] Maxwell és Lorentz a térmennyiségek transzformációját csak pontatlanul ismerte.

$$DA = \frac{\textbf{\textit{A VEVŐ ÁLTAL ÉSZLELT JELEK KÖZÖTTI IDŐ}}}{\textbf{\textit{AZ ADÓ ÁLTAL KIBOCSÁTOTT JELEK KÖZÖTTI IDŐ}}}$$

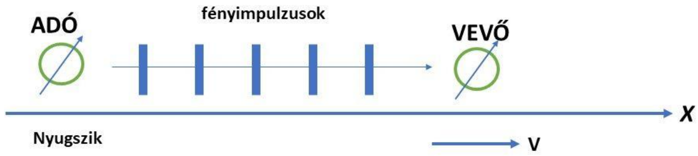
Számítsuk ki *DA*-t az adó nyugalmi rendszerében, amelyben a vevő sebessége *v<c* (5.ábra).

Ha a vevő nyugodna, akkor Δt_v egyenlő lenne Δt_a-val. De két jel között $v \cdot \Delta t_v$-vel távolabb kerül az adótól, ezért

$$\Delta t_v = \Delta t_a + \frac{v}{c}\Delta t_v, \tag{11}$$

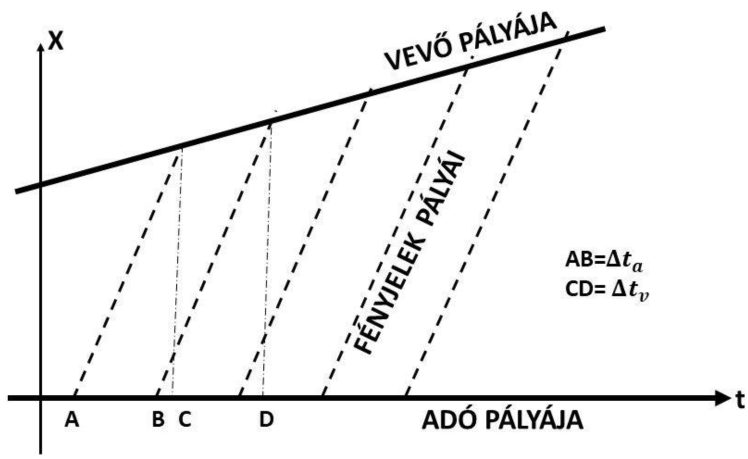
azaz

$$\frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \frac{1}{1 - {}^{v}/_{c}}. \tag{12}$$



5.ábra

Az adó által kibocsátott Δt_a, és a vevő által észlelt Δt_v azért *koordinátaidő* különbség két egymás utáni jel között, mert a (11) egyenlet az adó, a vevő és a fényjelek pályáit ábrázoló grafikonon a megfelelő metszéspontok vízszintes távolságára vonatkozik (6.ábra):



6.ábra

A *DA* számlálójában és nevezőjében azonban nem ezek a koordinátaidő különbségek, hanem a nekik megfelelő *sajátidő* különbségek szerepelnek, amelyeket az adóhoz és a vevőhöz tartozó óra mutat:

$$DA = \frac{\Delta \tau_v}{\Delta \tau_a}. \tag{13}$$

A Doppler-arány kiszámításához tehát ismernünk kellene a koordinátaidő és a sajátidő kapcsolatát, vagyis a $\Delta\tau = F(\Delta t, v, c)$ képletben szereplő *F* függvényt. Az *F*-nek *sec* dimenziójúnak kell lennie, ami csak úgy lehetséges, ha *F* arányos Δt-vel, az arányossági tényező pedig a ${v^2}/{c^2}$ tört függvénye:

$$\Delta\tau = F(\Delta t, v, c) = \Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \Delta t. \tag{14}$$

A nyugvó órára $\Delta\tau = \Delta t$, ezért $\Phi(0) = 1$, és mivel a kétfajta idő kapcsolata nem függhet a mozgás irányától, ezért Φ csak a sebesség négyzetét tartalmazhatja.

Helyettesítsük ezt a képletet (13)-ba:

$$DA = \frac{\Delta\tau_v}{\Delta\tau_a} = \frac{\Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \Delta t_v}{\Phi(0) \cdot \Delta t_a} = \Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \frac{1}{1 - {v}/{c}}. \tag{15}$$

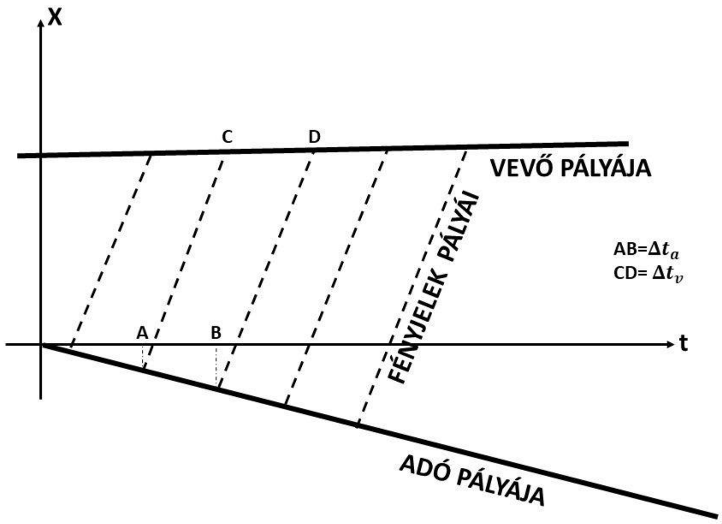
A Φ egyváltozós függvényt azonban nem ismerjük, de kiszámíthatjuk, ha *DA* képletét *a vevő nyugalmi rendszerében* is felírjuk és egyenlítjük (15)-tel. Mivel a fénysebesség a vevő nyugalmi rendszerében is ugyanazzal a *c*-vel egyenlő, mint az adóéban, ezért a vevő nyugalmi rendszerében

$$\Delta t_v = \Delta t_a + \frac{v}{c}\Delta t_a, \tag{16}$$

és innen

$$\frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = 1 + {v}/{c}. \tag{17}$$

Ez az összefüggés az alábbi ábra alapján is megkapható, ezért ez is koordinátaidőre vonatkozik:



7.ábra

Ekkor tehát

$$DA = \frac{\Delta\tau_v}{\Delta\tau_a} = \frac{\Phi(0)\cdot\Delta t_v}{\Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\cdot\Delta t_a} = \frac{1}{\Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\cdot\frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \frac{1}{\Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\cdot(1 + {}^{v}\!/_{c}). \tag{18}$$

A (15) és a (18) egyenlítéséből megkapjuk a

$$\Phi = \sqrt{1 - {}^{v^2}\!/_{c^2}} \tag{19}$$

függvényt, amelynek segítségével a *DA* akár (15)-ből, akár (18)-ból kiszámítható[19]:

$$DA = \sqrt{\frac{1 + {}^{v}\!/_{c}}{1 - {}^{v}\!/_{c}}}. \tag{20}$$

De most igazából nem is a *DA*, hanem a koordinátaidő és a sajátidő kapcsolata az ami érdekel. A (14) és a (19) alapján ez a következő:

$$\boxed{\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - {}^{v^2}\!/_{c^2}}} \tag{21}$$

Mint látni fogjuk, egyedül ebből az egyenletből már következik a relativitáselmélet összes nevezetes kinematikai következménye a Lorentz-transzformációt is beleértve. A (21) levezetésében a Doppler-effektus hatékonyságának az a magyarázata, hogy a koordinátaidő és a sajátidő fogalmi megkülönböztetésén kívül csupán azt kellett kihasználni, hogy a fénysebesség mind az adó, mind a vevő nyugalmi rendszerében ugyanakkora. Ez a feltevés viszi be implicite a gondolatmenetbe az Einstein-szinkronizálást.

6. A sebesség transzformációja

A 2. fejezetben a fénysebesség állandóságával (az 1. posztulátummal) kapcsolatban azt mondottuk, hogy „ez képtelenség, mert nyilvánvaló ellentmondásban van a sebességnek azzal az alapvető tulajdonságával hogy megváltozik, amikor egy vonatkoztatási rendszerről egy hozzá képest mozgó másik vonatkoztatási rendszerre térünk át”. De azon a bizonyos kritikus éjszakán Einstein felismerte, hogy „a koordinátaidő és a sajátidő különbözősége lehetővé teszi ennek az ellentmondásnak a feloldását”. A Doppler-effektus lehetőséget nyújt ennek a sejtésnek a nagyon egyszerű igazolására is.

A *relatív sebesség* fogalma szerint a vevő relatív sebességén az adóhoz képest a vevőnek az adó nyugalmi rendszerében mért sebességét értjük. Ezt jelöltük v-vel. Hasonlóan, az adó relatív sebessége a vevőhöz képest $-v$ -vel egyenlő. A *DA* invariáns, akármelyik vonatkoztatási rendszerből nézve határozzuk meg az értékét, ugyanazt kell kapnunk. Ebből a követelményből kiindulva kaptuk meg (21)-t.

Ha a *DA*-t az *x*-tengely mentén tetszőleges sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben számítjuk ki és az eredményt egyenlítjük (20)-szal, akkor leolvashatjuk, hogyan kell a relativitáselmélet szerint a sebességet átszámítani az egymáshoz képest kollineárisan mozgó vonatkoztatási rendszerek között.

[19] A Doppler-effektust inkább a frekvenciák hányadosával szokás jellemezni, ami a (20) inverze.

Tekintsük azt a (balra mozgó) *K* vonatkoztatási rendszert, amelyben az adó és a vevő sebessége $0 < v_a < v_v < c$. Ekkor, mivel az adó v_a sebességgel *közeledik* a vevőhöz a vevő pedig v_v sebességgel *távolodik* tőle , (11) és (16) analogonja a következő:

$$\Delta t_v = \Delta t_a - \frac{v_a}{c}\Delta t_a + \frac{v_v}{c}\Delta t_v, \tag{22}$$

ahonnan[20]

$$\frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \frac{1 - {}^{v_a}/_c}{1 - {}^{v_v}/_c}, \tag{23}$$

Ennek következtében

$$DA = \frac{\Delta\tau_v}{\Delta\tau_a} = \frac{\Phi\left(\frac{v_v^2}{c^2}\right)\cdot\Delta t_v}{\Phi\left(\frac{v_a^2}{c^2}\right)\cdot\Delta t_a} = \frac{\sqrt{1 - {}^{v_v^2}/_{c^2}}}{\sqrt{1 - {}^{v_a^2}/_{c^2}}}\cdot\frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \frac{\sqrt{\left(1 + {}^{v_v}/_c\right)\left(1 - {}^{v_a}/_c\right)}}{\sqrt{\left(1 - {}^{v_v}/_c\right)\left(1 + {}^{v_a}/_c\right)}}. \tag{24}$$

Ha a gyökjel alatti szorzásokat elvégezzük és a számlálót és a nevezőt $\left(1 - {}^{v_v v_a}/_{c^2}\right)$-tel végigosztjuk, akkor pontosan a (20) képletre jutunk, amelyben

$$v = \frac{v_v - v_a}{1 - \frac{v_v v_a}{c^2}}.$$

Mivel a (20)-ban a v a vevő relatív sebessége az adóhoz képest, ezért ez a formula *a relatív sebesség* általános képlete.

A *sebességösszeadás* képletét (25) átrendezésével kapjuk:

$$v_v = \frac{v + v_a}{1 + \frac{v v_a}{c^2}}.$$

Ezzel a képlettel lehet kiszámítani a vevő sebességét *K*-ban, amikor ismerjük az adó sebességét *K*-ban és a vevő relatív sebességét az adóhoz képest.

A fenti képletek természetesen nem kötődnek a Doppler-effektushoz, ezért célszerű semlegesebb jelölésekkel is felírni őket. Tegyük fel, hogy a *K'* inerciarendszer *V* sebességgel mozog *K*-hoz képest, és tekintsünk egy tömegpontot, amelynek relatív sebessége *K*-hoz és *K'*-höz képest v-vel és v'-vel egyenlő ($v \to v', v_a \to V, v_v \to v$). Akkor

$$v' = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}}; \qquad v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}. \tag{25}$$

Miért különböznek ezek a képletek newtoni $v' = v - V$ és $v = v' + V$ megfelelőiktől[21], amelyek (25)-ből a $c \to \infty$ határesetben kaphatók meg? Azért, mert a *K* nyugvó és a *K'* mozgó

[20] A vevő nyugalmi rendszerében $v_v = 0, v_a = -v$, ezért visszakapjuk (17)-t.

[21] Megjegyezzük, hogy ha v_1 *és* v_2 két test sebessége egy adott *K* vonatkoztatási rendszerhez képest, akkor $v_1 - v_2$ a két test távolságának változási üteme *K*-ban mind a newtoni fizika, mind a relativitáselmélet szerint. Fogalmilag ez nagyon más, mint az egyik test relatív sebessége a másikhoz képest, de a newtoni fizikában a

inerciarendszerben a koordinátaidő másképpen telik, és a sebességet mindig annak a vonatkoztatási rendszernek a koordinátaideje alapján kell érteni, amelyhez viszonyítjuk.

Tegyük fel most, hogy a tömegpont helyett fényjel terjed *K*-ban: $v = c$. A (25) első egyenlete alapján ekkor a fényjel *K'*-höz viszonyított v' sebessége is *c*-vel egyenlő, akármilyen V sebességgel mozog is *K'* a *K*-hoz képest. És ezt, mint látjuk, valóban a sajátidő és a koordinátaidő megkülönböztetése teszi lehetővé.

7. Az idődilatáció

A (3)-t helyettesítő (21) szerint egy konstans *V* sebességgel mozgó tömegponton (órán) a sajátidő lassabban telik („megnyúlik", „dilatál"), mint a koordinátaidő. Ha speciálisan a tömegpont trajektóriája $x = Vt$, akkor az $x_1 = Vt_1$ és a későbbi $x_2 = Vt_2$ pontok között az órán eltelt $\Delta\tau$ sajátidő kisebb, mint $\Delta t = t_2 - t_1$. Ez a jelenség az *idődilatáció*.

Mindenekelőtt vizsgáljuk meg, mi következik ebből a koordinátaidőt mutató virtuális órákra nézve. Tekintsük a *K'* koordinátarendszert, amely konstans *V* sebességgel mozog a nyugvó *K*-hoz képest a közös *X*-tengely mentén. Mindkettő „tele van szórva" virtuális órákkal, amelyek a *t'*, illetve a *t* koordinátaidőt mutatják. Szemeljünk ki egy *K'*-beli ***Ø'*** virtuális órát, amely „a kiválasztás pillanatában" éppen annyi időt mutat, mint a vele fedésben lévő *K*-beli óra. Azt fogjuk tapasztalni, hogy a mozgása során az ***Ø'***-n leolvasható idő az idődilatáció következtében fokozatosan lemarad a vele éppen fedésben lévő *K*-beli virtuális órákon leolvasható időhöz képest. Mivel azonban a *K* és a *K'* két egyenértékű inerciarendszer, ugyanezt fogjuk tapasztalni akkor is, ha egy *K*-ban nyugvó ***Ø*** mutatóállását vetjük össze azoknak a *K'*-beli virtuális óráknak a mutatóállásával, amelyek mellett éppen elhalad.

Az egymáshoz képest mozgó koordinátarendszerekhez tartozó virtuális óráknak ezek a paradoxális tulajdonságai logikailag egyáltalán nem mondanak ellent egymásnak, de képzeletben egyidejűleg szemlélni (követni) őket — ez biztosan kívül esik az átlagember szellemi képességeinek a határán.

***

A newtoni fizikában a Doppler-effektus oka az adó és a vevő közötti távolság folyamatos változása (*longitudinális Doppler-effektus)*. A relativitáselméletben ehhez hozzájön még az idődilatáció hatása. Az idődilatáció következtében azonban akkor is fellép Doppler-effektus, amikor a vevő körpályán kering (egyenletes v sebességgel) az adó körül, és így a távolság egyáltalán nem változik közöttük (*tranzverzális Doppler-effektus)*. Ekkor $\Delta t_v = \Delta t_a$ és[22]

$$DA = \frac{\Delta\tau_v}{\Delta\tau_a} = \frac{\Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\cdot\Delta t_v}{\Phi(0)\cdot\Delta t_a} = \Phi\left(\frac{v^2}{c^2}\right) = \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}. \tag{26}$$

***

távolság változási üteme és a relatív sebesség numerikusan egyenlő egymással. A relativitáselméletben nem ez a helyzet.

[22] Ez a képlet (28)-ból következik, mert egyenletes körmozgásnál a $v(t) = v = konstans$.

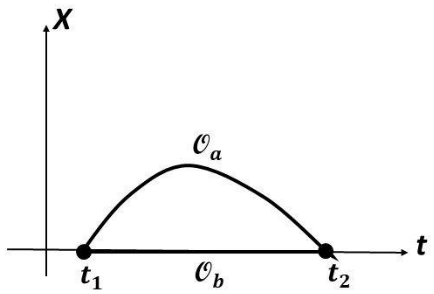
Idődilatáció változó sebességű mozgásoknál is fellép. A $(t, t+dt)$ infinitezimális koordinátaidő intervallumban $v(t)$ sebességgel mozgó test sajátidejének megnövekedése a (21) alapján

$$d\tau = dt \cdot \sqrt{1 - {v^2(t)}/{c^2}} \tag{27}$$

-tel egyenlő.

Az *óraparadoxon* (vagy *ikerparadoxon*) ennek a képletnek a következménye (8.ábra).

Tekintsük az $\mathcal{O}_a$ és az $\mathcal{O}_b$ órát, amelyek a t_1 pillanat előtt és a későbbi t_2 után egy inerciarendszerben egymás mellett az *X=0* pontban tartózkodnak és a t_1 időpont előtt szinkronban járnak. A két időpont között az $\mathcal{O}_a$ „utazásra indul” az $X = x(t)$ trajektórián, amelyen a sebessége $\dot{x}(t) = v(t)$. A (27) alapján az utazása alatt



8.ábra

$$\Delta\tau_a = \int_{t_1}^{t_2} d\tau_a = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \sqrt{1 - {v^2(t)}/{c^2}} \tag{28}$$

sajátidő telik el rajta. Az $\mathcal{O}_b$-n, amely a (t_1, t_2) intervallumban nyugalomban maradt, ezalatt nyilván $\Delta\tau_b = t_2 - t_1$ sajátidő telt el. Mivel

$$\Delta\tau_a = \int_{t_1}^{t_2} d\tau_a = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot \sqrt{1 - {v^2(t)}/{c^2}} < \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 = \Delta\tau_b, \tag{29}$$

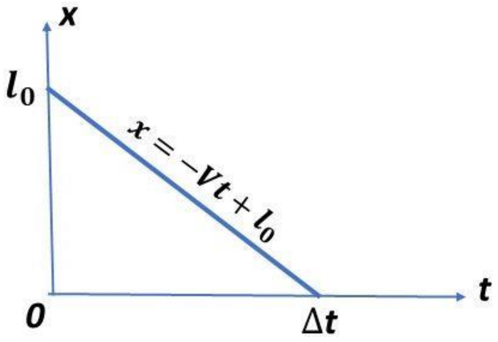
ezért a t_2 után, amikor már újra azonos ritmusban járnak, nem lesznek szinkronban egymással, hanem $\mathcal{O}_a$ késni fog $\mathcal{O}_b$-hez képest. Ez a jelenség az óraparadoxon.

Általános következtetés: Ha két adott eseményt több különböző pályán haladó óra is érint, akkor az események között ezek általában különböző sajátidő különbséget mérnek. A sajátidő különbség azon az órán a leghosszabb, amelyik a két esemény között nem szenvedett gyorsulást.

8. A Lorentz-kontrakció

A 3. fejezetben láttuk, hogyan lehet egy mozgó vonat hosszát megmérni. Egy töltésen álló megfigyelőnek meg kell mérnie, mekkora $\Delta\tau$ idő alatt halad el előtte a vonat. Ezután az $l = V \cdot \Delta\tau$ képlet segítségével könnyen kiszámíthatja a mozgásban lévő vonat hosszát.

A vonatban[23] ülők eközben azt látják, hogy a pályatesten álló megfigyelő megjelenik a vonat elején



9.ábra

és *V* sebességgel mozog a vonathoz képest mindaddig, amíg a vonat végén el nem tűnik. Ha az *X*-tengelyt úgy veszik föl, hogy a pozitív irány rajta megegyezzen a menetiránnyal, akkor a megfigyelő pályáját a 9.ábra grafikonja mutatja.

A grafikonon l_0 a vasúti kocsi hossza, amit az utasok méterrúd segítségével állapítanak meg, a Δt pedig az a koordinátaidő intervallum, amely alatt a megfigyelő a kocsi mellett elhalad, és amelyet az utasok elvben a kocsiban sűrűn elhelyezett helyesen szinkronizált virtuális órákról olvasnak le.

Semmi okunk sincs eleve feltételezni, hogy $l_0 = l$. Nem is egyenlők egymással, mert

$$l = V \cdot \Delta\tau = V \cdot \Delta t \cdot \sqrt{1 - V^2/_{c^2}} = l_0 \cdot \sqrt{1 - V^2/_{c^2}} \qquad (30)$$

Felhasználtuk (21)-t és azt, hogy a 9.ábra alapján $l_0 = V \cdot \Delta t$.

A (30) szerint a vonat hossza rövidebb abból az inerciarendszerből nézve, amelyhez képest mozog, mint ahhoz képest, amelyben nyugszik. Ez a jelenség a *Lorentz-kontrakció*, amelyet az egyidejűség relativitása tesz lehetővé: Azzal a pillanattal, amikor a vonat végpontja elhalad a vonat hosszát mérő megfigyelő mellett (ld. a 4.ábrát), a különböző inerciarendszerekben más és más időpillanat egyidejű a vonat elejének a pályáján.

***

A mozgásra merőleges méretek (a vonat magassága és szélessége) nem változnak a különböző sebességgel mozgó inerciarendszerekhez képest. Képzeljünk el egy kaput, amelynek a belső méretei majdnem pontosan megegyeznek a nyugvó vonat magasságával és szélességével úgy, hogy az álló vonat éppen elfér benne. Ha a mozgó testek tranzverzális méretei változnának – mondjuk kontrahálódnának –, akkor a kapu nyugalmi rendszeréből nézve a mozgó vonat könnyen áthaladhatna a kapun, a vonat nyugalmi rendszeréből nézve azonban a kapu beleütközne a vonatba, ezért a két inerciarendszer nem lenne egyenértékű egymással. Az inerciarendszerek ekvivalenciája tehát megköveteli, hogy a tranzverzális méretek ne változzanak, amikor különböző inerciarendszerekre vonatkoztatjuk őket.

Egy majdnem ugyanilyen paradoxon azonban a Lorentz-kontrakcióval kapcsolatban is megfogalmazható. Képzeljünk el egy alagutat, amelyik pontosan ugyanolyan hosszú, mint egy vasúti szerelvény nyugalmi hossza. Ebben az esetben az alagút nyugalmi rendszeréből nézve a mozgó vonat egy időre teljesen eltűnik az alagútban, a vonat nyugalmi rendszerében viszont legalább az

[23] Az egyszerűség kedvéért úgy képzeljük, hogy a vonat egyetlen hosszú motorkocsiból áll.

egyik vége mindig kilóg belőle. Miért nem tekintjük ezeket is egymásnak ellentmondó eseményeknek, amelynek alapján a Lorentz-kontrakciót is el kellene vetnünk?

A „tranzverzális kontrakció" a két egymáshoz képest egyenletes mozgást végző inerciarendszerből nézve két egymástól teljesen különböző *eseményláncot* indítana be. Ebből az következne, hogy a két inerciarendszer nem egyenértékű egymással. Ha tehát ezt az ekvivalenciát fenn kívánjuk tartani, fel kell tételeznünk, hogy a Lorentz-kontrakciónak a tranzverzális irányú méretek vonatkozásában nincs analogonja.

A Lorentz-kontrakcióval kapcsolatos „vonat-alagút" paradoxon[24] azonban csupán az egyidejűség relativitásának egy speciális következménye, nem jár együtt két különböző eseménylánc beindításával, ezért éppúgy összefér az inerciarendszerek ekvivalenciájával, mint az egyidejűség relativitása[25].

9. Egy összefoglaló feladat

Egy kerékpáros v sebességgel hajt egy országút egyenes szakaszán. Az országúttal párhuzamos vasúti töltésen l_0 nyugalmi hosszúságú vonat jön vele szembe, amelynek a sebessége V. Mennyi idő alatt halad el a kerékpáros a vonat mellett a saját karórája szerint?

A newtoni fizika szerint $\frac{l_0}{V+v}$ idő alatt, ugyanis a vonat végpontja és a kerékpáros közötti ***s*** távolság $V + v$ sebességgel csökken.

A relativitáselmélet szerinti megoldáshoz először válasszunk koordinátarendszert. Legyen ez a vasúti töltéshez rögzített *K*.

Milyen messze van a vonat vége a biciklistától, amikor ez éppen eléri a vonatot? A vonat Lorentz-kontrakciója miatt $l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$ távolságra.

Mennyi idő alatt csökken ez a távolság nullára?

$$\frac{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{V+v}$$

másodperc alatt[26].

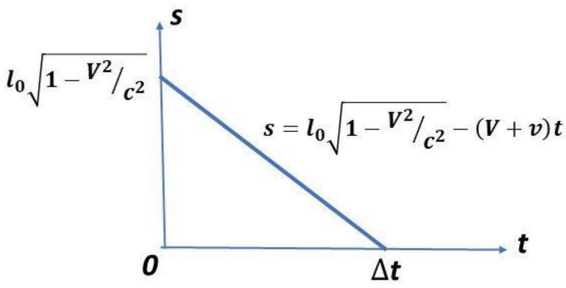
Ez sajátidő vagy koordinátaidő intervallum?

---

[24] Pajta-rúd paradoxonnak is hívják.

[25] A 2017-es kurzus 3. feladata azt illusztrálja, hogy ha a „vonat-alagút" paradoxonnál a két nézőpontból mégis két különböző eseménylánc bekövetkeztét akarjuk kicsikarni, akkor az egyikre vezető érvelés biztosan hibás, mert nem veszi számításba az egyidejűség relativitását. Ld. még a *Pajta-rúd paradoxonról* című cikkemet a *Fizikai Szemle* 2012/5 számában.)

[26] Ennek a képletnek a nevezőjében azért nem (25)-t használjuk, mert nem valamilyen test sebességét kell kiszámítanunk a relatív sebesség alapján, hanem két test távolságának változási *ütemét* egy adott koordinátarendszeren belül.



10.ábra

A 10.ábra mutatja, hogy koordinátaidő:

$$\Delta t = \frac{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{V+v}.$$

A biciklista karórája azonban az ő sajátidejét mutatja, ezért a feladat megoldása

$$\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1-{v^2}/{c^2}} = \frac{l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{V+v}. \tag{31}$$

Most oldjuk meg ugyanezt a feladatot a vonat *K'* nyugalmi rendszerében is. A *K'*-ben a biciklista sebességét jelöljük v'-vel.

Nyilvánvaló, hogy a biciklista

$$\Delta t' = {l_0}/{v'}$$

koordinátaideig teker a vonat mellett. Ezalatt a karóráján

$$\Delta\tau = \Delta t' \cdot \sqrt{1-{v'^2}/{c^2}} = l_0\frac{\sqrt{1-{v'^2}/{c^2}}}{v'} \tag{32}$$

sajátidő telik el.

A biciklista karóráján eltelt idő azonban nem függhet attól, hogy a vasúti töltés vagy a vonat nyugalmi rendszerében végezzük a kiszámítását. Ezért nem tettünk a (32)-ben vesszőt a $\Delta\tau$-ra. A (31) és a (32) jobboldalát tehát át *kell* tudnunk alakítani egymásba.

A feladat nyilván az, hogy (32)-ben a v'-t ki kell fejeznünk v-n keresztül. A newtoni fizika szerint $v' = v + V$. A relativitáselméletben ez megváltozik. A (25) szerint[27]

$$v' = \frac{v+V}{1+{vV}/{c^2}}. \tag{33}$$

Helyettesítsük (33)-t (32) *nevezőjébe* és szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt $\left(1+{vV}/{c^2}\right)$-tel:

[27] Legyen a biciklista sebessége a pozitív irány. Akkor a biciklista sebessége a vonathoz képest (v') = a biciklista sebessége a pályatesthez képest (v) + a pályatest sebessége a vonathoz képest (V). A (33) ezt fejezi ki relativisztikusan.

$$\Delta\tau = l_0 \frac{\sqrt{\left(1 + {vV}/{c^2}\right)^2 \left(1 - {v'^2}/{c^2}\right)}}{v + V}. \tag{34}$$

Mivel $\left(1 + {vV}/{c^2}\right)^2 v'^2 = (v + V)^2$, ezért

$$\Delta\tau = l_0 \frac{\sqrt{\left(1 + {vV}/{c^2}\right)^2 - {(v + V)^2}/{c^2}}}{v + V} = l_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{V + v},$$

ami valóban azonos (31)-gyel.

A koordinátaidő intervallumok azonban nem egyenlők egymással: $\Delta t' \neq \Delta t$. Ez nem baj, mert nincs olyan óra (még virtuális sem), amely két különböző helyen történő esemény koordinátaidő *különbségét* mutatná.

10. A gyorsulás

A relativitáselméletben a gyorsulásnak két fajtája van, a *sajátgyorsulás* és a *koordinátagyorsulás*, amelyek párhuzamba állíthatók a sajátidővel és a kordinátaidővel.

Mozogjon egy (pontszerűnek tekinthető) űrhajó a *K* inerciarendszerben az *X*-tengely mentén. Az űrhajó a_0 sajátgyorsulásán azt a gyorsulást értjük, amelyet az űrhajón lévő gyorsulásmérő (akcelerométer) mutat (és az űrhajós érzékel). Mivel a gyorsulásmérő mutatóállása éppen olyan nézőponttól független tény, mint az űrhajón lévő óra mutatóállása, ezért a sajátgyorsulás éppen úgy invariáns, mint a sajátidő.

Az űrhajó koordinátagyorsulásán az *X* koordinátatengelyhez viszonyított *K*-beli gyorsulását értjük:

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{35}$$

Ha csak gyorsulást mondunk, azon csaknem mindig a koordinátagyorsulást értjük.

Most meg kell keresnünk a kétfajta gyorsulás kapcsolatát, a (21) analogonját.

Az egyenletes sebességgel mozgó űrhajó akcelerométere a nullán áll. Ha az űrhajós a saját órája szerint egy infinitezimálisan rövid $d\tau$ sajátidőre konstans intenzitással bekapcsolja a hajtóművet, az akcelerométere a_0-ra ugrik, majd a hajtómű kikapcsolása után visszaáll nullára. Ebből az űrhajós megállapíthatja, hogy a sebessége

$$dv_0 = a_0 \cdot d\tau \tag{36}$$

-val nőtt meg a gyorsítás előtti sebességéhez képest, amely természetesen az ő nyugalmi rendszerében nullával volt egyenlő.

A K-beli külső szemlélő számára ez a sebesség növekedés v-ről $v + dv$-re történt, amely (25) alapján a következő:

$$v + dv = \frac{v + dv_0}{1 + \frac{v dv_0}{c^2}}. \tag{37}$$

A gondolatmenetünk infinitezimálisan kis $d\tau$-ra, dv_0-ra és dv-re vonatkozik, ezért (37) jobboldala a dv_0-ban csak lineáris pontossággal érvényes. A $-\,vdv_0/c^2$ kvóciensű végtelen geometriai sor összegképlete alapján

$$\frac{1}{1+\frac{vdv_0}{c^2}} = 1 - \frac{vdv_0}{c^2} + \left(\frac{vdv_0}{c^2}\right)^2 - \cdots \cong 1 - \frac{vdv_0}{c^2} \qquad \left(\frac{vdv_0}{c^2} \ll 1\right).$$

Ha ezt (37) jobboldalába behelyettesítjük, a két binomot összeszorozzuk és a v-n kívül csak a dv_0-ban lineáris tagokat tartjuk meg, akkor a

$$dv = \left(1 - {v^2}/{c^2}\right) dv_0 \tag{38}$$

egyenletre jutunk.

A (36) és a (27) alapján azonban

$$dv_0 = a_0 \cdot d\tau = a_0 \sqrt{1 - {v^2}/{c^2}} \cdot dt.$$

Ha ezt behelyettesítjük (38) jobboldalába és felhasználjuk (35)-t, megkapjuk az összefüggést a sajátgyorsulás és a koordinátagyorsulás között:

$$a = \left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{3/2} a_0. \tag{39}$$

A koordinátagyorsulás mindig kisebb a sajátgyorsulásnál. Ez a tulajdonság a *gyorsulásdeficit*. A gyorsulásoknak nyilván pont ilyen típusú kapcsolata szükséges ahhoz, hogy a példabeli rakétánk sohase (még konstans a_0 mellett se) érhesse el *K*-ban a fénysebességet. A ${v^2}/{c^2} \ll 1$ newtoni határesetben $a = a_0$, *ezért* nem szükséges a kétféle gyorsulás megkülönböztetése a klasszikus mechanikában.

A figyelmes hallgató (olvasó) bizonyára észreveszi, hogy a gondolatmenetünk egy nagyon speciális kikötéssel kezdődött: Feltettük, hogy az űrhajó csak egy infinitezimálisan rövid ideig gyorsul, előtte és utána a sebessége állandó. Ez a kép azonban csak a könnyebb megértést szolgálta, valójában egyetlen lépésünkben sem használtuk ki, ezért (39) tetszőlegesen változó sebességű mozgásra is alkalmazható.

Van egy nagyon jól használható fogalmi eszközünk*,* amely lehetővé teszi, hogy az érvelésünk rögtön tetszőlegesen gyorsuló objektumra legyen érvényes. Ez a *pillanatnyi nyugalmi rendszer* fogalma.

Mozogjon egy tömegpont tetszőlegesen változó **v**(t) sebességgel a térben. Válasszunk ki egy tetszőleges t_0 pillanatot, és azt az *inerciális koordinátarendszert*, amely a *konstans* **v**(t_0) sebességgel mozog, jelöljük K_0-al. Mivel a test a $t=t_0$ pillanatban a K_0-ban nyugszik, ezt a koordinátarendszert nevezzük (a t_0-beli) pillanatnyi nyugalmi rendszernek. A K_0 az a vonatkoztatási rendszer, amelyben a gyorsulás az a_0 sajátgyorsulással egyenlő, és az ehhez viszonyított sebességnövekedést adja meg a (36) képlet[28].

***

[28] A *sajátgyorsulás*, a *koordinátagyorsulás* és a *gyorsulásdeficit* (proper acceleration, coordinate acceleration, acceleration suppression) nem általánosan használt elnevezések, de jó lenne, ha elterjednének.

Mindeddig a *relativisztikus kinematika* tárgykörébe eső kérdésekkel foglalkoztunk. Maradt még egy fontos kinematikai feladat, a Lorentz-transzformáció származtatása. Ezt azonban későbbre halasztjuk és áttérünk a *relativisztikus dinamika* alapjainak ismertetésére.

11. A relativisztikus mozgásegyenlet

Einstein már az 1905 júniusi alapcikkében megmutatta, hogyan kell megtalálni a newtoni fizika ***ma*=*F*** mozgásegyenletének relativisztikus általánosítását. Abból kell kiindulni, hogy a newtoni mozgásegyenlet kis sebességeknél (amikor $v \ll c$) nagyon jó közelítés. Ezt a követelményt úgy lehet pontosan megfogalmazni, hogy *nyugvó* testre (vagyis a K_0 pillanatnyi nyugalmi rendszerben) változatlan formában teljesül: $m_0 \boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{F}_0$. Ezután már csak annyit kell tenni, hogy ebben az egyenletben a pillanatnyi nyugalmi rendszerre vonatkozó nulla indexű mennyiségeket *kifejezzük* abban a *K*-ban érvényes mennyiségeken keresztül, amelyben a test az aktuális v sebességgel mozog.

A jobboldal megfelelő átírása attól függ, hogy milyen erőről van szó. A fizikus gyakorlatban csak a gravitáció és az elektromágneses erő következtében jöhet létre olyan nagysebességű mozgás, amely relativisztikus tárgyalást igényel. Az általános relativitáselmélet szerint azonban a gravitáció valójában nem erő és a hatását nem a Newton-egyenlet írja le helyesen. Az elektromágneses mezőben *nyugvó* ponttöltésre pedig csak a Coulomb-erő hat, ezért praktikusan az $m_0 \boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{F}_0$ egyenlet jobboldalán mindig $\boldsymbol{F}_0 = Q\boldsymbol{\mathcal{E}_0}$ áll (a pillanatnyi nyugalmi rendszerben lehet $\boldsymbol{B_0}$ mágneses indukció is , de az nem gyakorol erőt az éppen nyugvó töltésre).

A baloldalon az $\boldsymbol{a_0}$ sajátgyorsulást az $\boldsymbol{a}$ koordinátagyorsuláson keresztül kell kifejezni. Az erre szolgáló (39) képlet azonban csak egyenesvonalú mozgásra érvényes, ezért a továbbiakban erre az esetre korlátozódunk. Ekkor

$$a_0 = \frac{a}{\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{3/2}}. \tag{40}$$

Ha ezt a kifejezést behelyettesítjük a K_0-ban érvényes egydimenziós mozgásegyenlet $m_0 a_0 = F_0$ képletébe, akkor az

$$m_0 \frac{a}{\left(1 - {v^2}/{c^2}\right)^{3/2}} = F_0 \tag{41}$$

egyenletre jutunk, amelyben $F_0 = Q\mathcal{E}_0$.

Most azt kell eldöntenünk, hogy van-e különbség a nyugvó test m_0 és a mozgó test m tömege között. Einstein azt tételezte fel, hogy a relativitáselméletben a tömeg a testnek ugyanolyan mozgástól független konstans paramétere, mint a newtoni fizikában, vagyis[29]

[29] Az elterjedt hibás felfogás szerint a tömeg az

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - {v^2}/{c^2}}} \qquad (nem\ igaz)$$

képletnek megfelelően annál nagyobb, minél nagyobb a test sebessége. Ezt a nemlétező jelenséget nevezik „relativisztikus tömegnövekedésnek”. Ha (42) helyett ez a képlet lenne igaz, akkor a mozgásegyenletből a 3/2

$$m_0 = m. \tag{42}$$

Ha a (41)-ben ezt kihasználjuk, akkor (41) helyett ezt írhatjuk:

$$m\frac{a}{\left(1-{v^2}/{c^2}\right)^{3/2}} = F_0.$$

A jobboldalon azonban még mindig a *K₀*-beli $F_0 = Q\mathcal{E}_0$ erő áll, amelyet szintén a *K*-beli mennyiségeken keresztül kell kifejezni. A *Q* töltésről feltesszük, hogy minden vonatkoztatási rendszerben ugyanakkora, de mi a helyzet az $\mathcal{E}_0$-lal?

A 4. fejezetben már volt szó róla, hogy a különböző inerciális koordinátarendszerek közötti áttérés során az elektromágneses mező nem marad változatlan, és *K*-ban általában megjelennek a Coulomb- és a Lorentz-erőnek olyan komponensei is, amelyek a töltést a feltételezett egyenes irányból eltérítik. *Abban a speciális esetben azonban*, amikor a ponttöltés homogén elektromos mezőben mozog a térerősséggel párhuzamosan, az elektromos mező *K*-ban ugyanaz marad, mint amilyen K_0-ban volt: $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} = konstans$. Ennek következtében a töltés gyorsul vagy lassul, de a mozgása egyenesvonalú marad. Ekkor

$$ma = \left(1-{v^2}/{c^2}\right)^{3/2} F, \tag{43}$$

amelyben $F = Q\mathcal{E}$**.** A (43) relativisztikus mozgásegyenlet jobboldalán a jellegzetes $\left(1-{v^2}/{c^2}\right)^{3/2}$ tényező a gyorsulásdeficit egyenes következménye. Azt eredményezi, hogy *egy adott erő annál kevésbé tud gyorsítani egy testet, minél közelebb van a sebessége a fénysebességhez*, és ennek következtében a sebesség tetszőlegesen megközelítheti, de sohase érheti el a fénysebességet[30].

Az impulzus relativisztikus képletét az impulzus általános definíciója alapján a mozgásegyenlet segítségével kell megkeresnünk. A *p* impulzus az a mennyiség, amelyet az erőlöket megváltoztat[31]: $dp = F \cdot dt$. A newtoni fizikában $F \cdot dt = ma \cdot dt = d(mv)$, amelyből az impulzusra a $p = mv$ képletet kapjuk. A relativitáselméletben (43) következtében ez a gondolatmenet így módosul:

$$F \cdot dt = \frac{ma \cdot dt}{\left(1-{v^2}/{c^2}\right)^{3/2}} = \frac{m \cdot dv}{\left(1-{v^2}/{c^2}\right)^{3/2}} = d\left(\frac{mv}{\sqrt{1-{v^2}/{c^2}}}\right). \tag{44}$$

Ebből látható, hogy az impulzus képlete a relativitáselméletben a következő:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-{v^2}/{c^2}}}. \tag{45}$$

Érdemes még eltűnődni azon, hogy mit célszerű érteni pontosan egy test tehetetlenségén. Az ${F}/{a} = {QE}/{a}$ mennyiség látszik a legalkalmasabbnak, hiszen a tehetetlenség annál nagyobb, minél nagyobb erő szükséges egy adott gyorsulás megvalósításához (vagy egy adott erő minél kisebb gyorsulást

---

hatványkitevő hiányozna (1 állna helyette). A tapasztalat – és egyébként a relativitáselmélet egész struktúrája – azonban (43)-at igazolja.

[30] Teljesen hibás az a gyakran hallható érv, hogy a fénysebesség elérését a fentebb már említett „relativisztikus tömegnövekedés" akadályozza meg, mert nyilvánvalóan ellentmond az alapvető (42) egyenlőségnek.

[31] Már Newton így értelmezte az erő és az impulzus kapcsolatát a *Principia*-ban.

okoz). A (43) alapján a tehetetlenség eszerint az $m/(1-v^2/c^2)^{3/2}$ aránnyal lenne egyenlő. Ebben a kifejezésben azonban a nevező, amely a gyorsulásdeficit következménye, nem a testnek magának a tulajdonsága, hanem a koordinátarendszer megválasztásától függ. Márpedig egy test tehetetlenségét belső (invariáns) tulajdonságnak képzeljük el. Ezért célszerű a tehetetlenség mértékén a *nyugvó* testre vonatkozó F_0/a_0 arányt, vagyis egyszerűen a test *m* tömegét érteni a relativitáselméletben ugyanúgy, mint a newtoni dinamikában.

12. A mozgási energia

Egy *V* sebességű test *K mozgási energiája* azzal a munkával egyenlő, amit a testre ható erő végez, miközben a kezdetben nyugvó testet *V* sebességre gyorsítja fel. A newtoni fizikában ez a definíció a jól ismert $K=\frac{1}{2}mV^2$ képletre vezet:

$$K=\int_0^S F ds=\int_0^T Fv\cdot dt=m\int_0^T a\cdot v\cdot dt=m\int_0^T\frac{dv}{dt}\cdot v\cdot dt=m\int_0^V dv\cdot v=\frac{1}{2}mV^2 \quad (46)$$

Ugyanez a definíció a relativitáselméletben a

$$K=\int_0^S F ds=\int_0^T Fv\cdot dt=m\int_0^T\frac{a}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\cdot v\cdot dt=$$

$$=m\int_0^V\frac{dv\cdot v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=mc^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big|_0^V=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-mc^2 \quad (47)$$

képletet szolgáltatja a mozgási energiára.

A newtoni és a relativisztikus formula különbözőségének eredete a jellegzetes $(1-v^2/c^2)^{3/2}$ nevező, amiről tudjuk, hogy a gyorsulásdeficit következménye.

Amikor $V\to c$, a relativitáselméletben a mozgási energia végtelenhez tart. A gyorsulásdeficit tehát növeli a mozgási energiát, mert az adott sebességet hosszabb úton lehet csak elérni, mint amikor a gyorsulásdeficit nulla, és a hosszabb úton az erő több munkát végez. Ez az oka annak, hogy az adott *V*-hez tartozó mozgási energia a relativitáselméletben nagyobb, mint a newtoni fizikában.

Mint látjuk, a newtoni fizikában a mozgási energia egytagú képlet, a relativitáselméletben azonban két tagból áll. Ebből azonban egyáltalán nem következik, hogy a két tagnak külön-külön is lenne önálló fizikai jelentése. Csupán arról van szó, hogy a határozatlan integrál értéke az alsó határon a newtoni fizikában nulla, a relativitáselméletben pedig különbözik nullától. Az 1905 júniusi cikkében Einstein nem is fűz ehhez a kéttagúsághoz semmiféle megjegyzést. Három hónappal később azonban egy teljesen független gondolatkísérlet elemzése útján[32] megmutatja, hogy az mc^2 kifejezés a test E_0 *belső energiájával* egyenlő.

13. A tömeg-energia reláció

Az E_0 belső energián a nyugvó testben felhalmozott különböző természetű (hő, kémiai, elektromágneses, nukleáris, szubnukleáris, stb) energiák összegét értjük. Ezért az E_0-t nyugalmi energiának is nevezzük. Ennek a definíciónak az alapján azonban E_0-t nem tudjuk se kiszámítani, se megmérni, mert ehhez túl keveset tudunk az anyag szerkezetéről. Legfeljebb a belső energia ΔE_0 megváltozásáról tehetünk határozott kijelentéseket abban az esetben, ha elég jól ismert energia fajtával (pl. hőenergiával) kapcsolatos.

Ezt a helyzetet változtatja meg gyökeresen az

$$E_0 = mc^2 \tag{48}$$

tömeg-energia reláció.

1905 szeptemberében Einstein a *Függ-e egy test tehetetlensége az energiatartalmától* című rövid dolgozatában a következő gondolatkísérlet segítségével jutott el ehhez a képlethez.

Nyugodjon a *K* inerciarendszerben egy test, amelynek a belső energiája E_0, a tömege pedig m. Egy adott pillanatban a test két teljesen egyforma elektromágneses jelet (hullámcsomagot) emittál egymással pontosan ellentétes irányban. A két jel által elvitt összimpulzus nyilván nullával egyenlő, ezért a jelek kibocsátása után a test nyugalomban marad *K*-ban.

A belső energiája azonban E_0-ról lecsökken valamilyen $\bar{E}_0$-ra. Ha *K*-ban a jelek energiája egyenként $^{\epsilon}/_{2}$-vel egyenlő, akkor a *K*-beli energiamegmaradás következtében

$$E_0 = \bar{E}_0 + \epsilon. \tag{49}$$

Szemléljük most *ugyanezt a folyamatot* egy olyan *K'*-ből, amely *K*-hoz képest konstans v sebességgel mozog. Nyilvánvaló, hogy a test *K'*-ben végig egyenletes v sebességgel halad ellenkező irányban, azonban se a test, se a hullámcsomagok energiája *K'*-ben nem lesz ugyanaz, mint amilyen *K*-ban volt. A júniusi dolgozatában Einstein már kiszámította egy tetszőleges irányban mozgó hullámcsomag energiájának a megváltozását a *K*-ból a *K'*-be történő áttérés során. Ezt a képletet a két ellentétes irányban mozgó hullámcsomagra alkalmazva azt kapta, hogy a két csomag *K'*-beli összenergiája $\epsilon/\sqrt{1-v^2/c^2}$-tel egyenlő. A testnek pedig a belső energiája mellett lesz még a (47) szerinti kinetikus energiája is.

A következő lépés a *K'*-beli energiamegmaradás felírása. Az első próbálkozás után kiderül[33], hogy a *K'*-beli energia csak akkor maradhat meg, ha az emisszió során a test tömege

[32] A (47) levezetésénél a belső energiáról hallgatólag feltettük, hogy a gyorsító erő munkája nem változtat rajta, tehát a tömeghez hasonlóan független a test sebességétől. Arról azonban, hogy a tömeg és a belső energia esetleg kapcsolatban lehet egymással, a mozgási energia képletéből nem tudhatunk meg semmit.
[33] Ha (50) jobboldalán a mozgási energia ugyanazt az *m* tömeget tartalmazná, mint a baloldalán, akkor ezzel a taggal lehetne egyszerűsíteni és ellentmondásba kerülnénk (49)-cel.

megváltozik. Ha ezt a megváltozott tömeget $\overline{m}$-mel jelöljük, akkor az energiamegmaradás tétele *K'*-ben a következő:

$$E_0 + K(v, m) = \bar{E}_0 + K(v, \overline{m}) + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{50}$$

A $K(v, m)$ és a $K(v, \overline{m})$ a test mozgási energiája az emisszió előtt és után, amelynek képletét Einstein a júniusi dolgozatában már levezette. A (47) képletről van szó, amelyet behelyettesíthetünk (50)-be:

$$E_0 + \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 = \bar{E}_0 + \frac{\overline{m}c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \overline{m}c^2 + \frac{\epsilon}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

A (49) alapján ϵ-t energiakülönbséggel helyettesítjük és a kapott összefüggést átrendezzük:

$$(m - \overline{m}) \cdot c^2 \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right] = (E_0 - \bar{E}_0) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right].$$

A zárójeles kifejezéssel nyilván egyszerűsíthetünk, és az $E_0 - \bar{E}_0 = \Delta E_0$, valamint a $\Delta m = m - \overline{m}$ jelölések bevezetése után a

$$\Delta E_0 = \Delta m \cdot c^2 \tag{51}$$

képletre jutunk, amely a (48) tömeg-energia reláció *differenciális alakja*: A tömeg *megváltozása* arányos a belső energia *megváltozásával*.

Einstein azonban bizonyosra vette, hogy a képlet az eredeti (48) nemdifferenciális alakban is érvényes, vagyis a tömegnek nincs olyan része, amelyhez ne tartozna energia. A későbbi évtizedekben ez a meggyőződése fontos kísérletekben teljes mértékben igazolódott[34], de már sokkal hamarabb világossá vált, hogy *a (48) nemdifferenciális törvény az, amely harmonikusan illeszkedik a relativitáselmélet struktúrájába*.

Legyen E a szabadon mozgó test *teljes* (mozgási plusz belső) energiája. A (48) következtében

$$E \equiv K + E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{52}$$

[34] Az $E_0 = mc^2$ relációt például a nyugvó pozitrónium $(e^- e^+) \to 2\gamma$ annihilációja bizonyítja.

Az elektron m_e tömegét jól ismerjük, mert ismerjük a töltését, valamint a mozgását elektromágneses térben: energiaegységben kifejezve $m_e \approx$ 0.5 MeV. A pozitron az elektron antirészecskéje, ezért a tömege egyenlő az elektronéval. A pozitrónium tömege eszerint m≈1 MeV.

A pozitrónium E_0 nyugalmi energiája a két gamma-foton energiájával egyenlő, amely jól mérhető.

A két független kísérletben kapható *m* és E_0 eleget tesz az $E_0 = mc^2$ relációnak (vagyis a két gamma-foton összenergiája is kb. 1 MeV).

Amikor ütközésük vagy bomlásuk következtében részecskék alakulnak át egymásba, *ez* az az energia, ami megmarad. Ha pedig a (45) alapján figyelembe vesszük az impulzus komponenseit is, akkor (21)-t felhasználva némi próbálkozás után[35] rájövünk, hogy[36]

$$\left(E/c\,, p_x, p_y, p_z\right) = m\left(\frac{\Delta(ct)}{\Delta\tau}, \frac{\Delta x}{\Delta\tau}, \frac{\Delta y}{\Delta\tau}, \frac{\Delta z}{\Delta\tau}\right). \tag{53}$$

Ez a *négyesimpulzusnak* nevezett mennyiség, amely alapvető szerepet játszik a relativitáselméletben, a nemdifferenciális (48) tömeg-energia reláció következménye.

Az $E_0 = mc^2$ nemdifferenciális tömeg-energia reláció az általános relativitáselméletben nyer elméleti igazolást[37]. Az általános relativitáselmélet, amely a gravitáció relativisztikus elmélete, 1915-ben kapott végleges alakot. De azt Einstein már 1908-ban bebizonyította, hogy ha (48) igaz a *tehetetlen tömegre*, amely a mozgásegyenletben a gyorsulást okozza, akkor a *súlyos tömegre* is érvényes, amely rugós mérleggel határozható meg.

***

Mivel egy bomlási vagy ütközési folyamatban csak a teljes energia az, ami megmarad, a részecskék belső energiája külön-külön nem, ezért a relativitáselmélet szerint – tehát a fizikában általában – nincs tömegmegmaradás. Abban a jelenségkörben azonban, amely a newtoni fizika alapjául szolgál, a testek belső energiája vagy egyáltalán nem változik (pl. az égi mechanikában), vagy ha változik is, a tömegváltozás elhanyagolhatóan kicsi a résztvevő tömegekhez képest. Ezért ekkor a tömeg nagy pontossággal (de csak közelítően!) megmarad.

A lemondás a tömegmegmaradásról sokak számára nem fogadható el talán azért, mert a tömeg fogalmát azonosítják az anyag fogalmával; pedig ez két különböző fogalom. Azt gondolják, hogy ha a tömeg nem marad meg, akkor veszélybe kerül az a tétel, hogy „az anyag nem vész el, csak átalakul".

A tömeg *terminus technicus,* azzal a mennyiséggel egyenlő, amely a Newton-egyenletben a gyorsulást szorozza. Az elektromágneses mezőhöz pl. nem rendelhető tömeg, mert a Maxwell-egyenletekben nem fordul elő gyorsulás. Ennek ellenére az elektromágneses mezőt is az anyag egy formájának tekintjük. Az $(e^- e^+) \rightarrow 2\gamma$ elektron-pozitron annihilációban pl. tömeges anyag alakul át tömeg nélküli elektromágneses sugárzássá. Mindkét objektum anyagi természetű, de csak az egyik rendelkezik tömeggel: az anyag nem vész el, csak átalakul.

***

Fontos megjegyzés: A (48) tömeg-energia reláció minden tömeggel rendelkező testhez meghatározott belső energiát rendel, de *nem rendel minden fajta energiához tömeget*. Mivel a belső energia a *nyugvó* test energiájával egyezik meg, ezért például egy

---

[35] Például $m\,{}^{\Delta x}/_{\Delta\tau} = m \cdot {}^{\Delta x}/_{\Delta t} \cdot {}^{\Delta t}/_{\Delta\tau} = {}^{mv_x}\Big/\sqrt{1-{}^{v^2}/_{c^2}} = p_x$. Az (53) egyenletes egyenesvonalú mozgásra vonatkozik. Általános esetben egyszerűen el kell végezni a $\Delta \rightarrow d$ helyettesítést.

[36] A *c*-ket úgy helyeztük el, hogy egy négykomponensű mennyiség minden komponensének ugyanaz legyen a fizikai dimenziója.

[37] Gyakran lehet olvasni, hogy a tömeg-energia tételre elsőként Planck adott pontos bizonyítást 1908-ban. Aki ezt állítja, biztosan nem olvasta Planck cikkét. Ld. erről a Fizikai Szemle 2017/3 számában megjelent dolgozatomat itt a honlapomon.

elektromágneses hullámcsomagra vagy egy fotonra nem alkalmazható, mert ezeknek nincs nyugalmi rendszerük[38]. A (48) egy mozgásban lévő test *K* kinetikus, vagy *E* teljes energiájára se alkalmazható, tehát se $K/_{c^2}$, se $E/_{c^2}$ nem egyenlő a mozgó test tömegével, amely a (42)-nek megfelelően mindig egyszerűen csak m.

14. A Lorentz-transzformáció

Az előző három fejezetben a relativisztikus dinamika alapjait ismertettük. Most visszakanyarodunk a kinematikához, és utolsó pontként a korábbi eredményeink felhasználásával megkeressük a Lorentz-transzformáció képleteit.

Induljunk ki a következő feladatból:

Egy $l_0 \equiv \Delta x_0$ nyugalmi hosszúságú vonat (nyugalmi rendszere K_0) halad *V* sebességgel a pályatesten (*K*). A vonat végén v_0 sebességű pisztolygolyót lövünk ki a vonat eleje felé, amely Δt_0 idő alatt éri el a vonat elejét. A pályatestről nézve a golyó Δt ideig repül és közben Δx utat tesz meg. Mi a kapcsolat a $\Delta x_0, \Delta t_0$, valamint a $\Delta x, \Delta t$ párok között?

Kezdjük a mérettel! A newtoni fizikában nyilván $\Delta x = \Delta x_0 + V \cdot \Delta t$. Hogyan módosul ez a képlet a relativitáselméletben?

A Lorentz-kontrakció következtében $\Delta x_0 \to \Delta x_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$, ezért $\Delta x = \Delta x_0\sqrt{1 - V^2/c^2} + V \cdot \Delta t$, tehát

$$\Delta x_0 = \frac{\Delta x - V \cdot \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{54}$$

Ez a képlet fejezi ki Δx_0-t a $\Delta x, \Delta t$ páron keresztül.

Ugyanezt kell tennünk Δt_0-lal is. Ehhez nyilván szükség lesz a golyó sebességére, amely a vonathoz képest v_0, a pályatesthez képest v: $v_0 = \frac{\Delta x_0}{\Delta t_0}$, $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Az (54) segítségével

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta x_0}{v_0} = \frac{\Delta x - V \cdot \Delta t}{v_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{55}$$

Ide be kell helyettesíteni a relatív sebesség

$$v_0 = \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} = \frac{\Delta x - V \cdot \Delta t}{\Delta t - \frac{V}{c^2} \cdot \Delta x} \tag{56}$$

képletét. A $(\Delta x - V \cdot \Delta t)$-vel lehet egyszerűsíteni, ezért

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2} \cdot \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{57}$$

[38] Az a gyakori állítás, hogy egy ν frekvenciájú foton tömege $h\nu/_{c^2}$-tel egyenlő, teljesen alaptalan.

Az (54) és az (57) képlet-pár szolgáltatja a feladat megoldását. Ezek a Lorentz-transzformáció képletei, amelyeket kiemelt jelentőségük miatt általános formában is megfogalmazunk.

A *K'* mozogjon *K*-hoz képest *V* sebességgel a közös *x* irány mentén. Történjen két esemény, amelyek koordináta- és időkülönbsége *K*-ban Δx és Δt. Akkor a két esemény koordináta- és időkülönbségét *K'*-höz képest a Lorentz-transzformáció[39]

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V \cdot \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad \Delta y' = \Delta y, \qquad \Delta z' = \Delta z \tag{58}$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2} \cdot \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{59}$$

képletei határozzák meg. Az (58) második és harmadik képlete azt fejezi ki, hogy – mint a 7. fejezetből tudjuk, – a mozgásra merőleges méretek a $K \rightarrow K'$ áttérésnél változatlanok maradnak.

Ezeket a képleteket azonban egy olyan feladat megoldásaként kaptuk meg, amelyekben a két esemény – a pisztoly eldördülése és a lövedék becsapódása, – nyilván időszerű eseménypár, mert a fénynél lassabban mozgó objektum (a jelen esetben a pisztolygolyó) „köti össze" őket (ld. a 3. fejezetet). De vajon érvényesek maradnak-e, ha a pisztolygolyót fényjellel helyettesítjük (fényszerű eseménypár), vagy ha csak a fénynél gyorsabban haladó jellel lehetne összekötni őket (térszerűek)?

Az első esetben $\Delta x = c \cdot \Delta t$, az (58) és az (59) alapján pedig

$$\Delta x' = \frac{c - V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Delta t, \qquad \Delta t' = \frac{1 - \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \Delta t,$$

ahonnan $\Delta x' = c \cdot \Delta t'$. Az (58), (59) Lorentz-transzformáció tehát összhangban van a fénynek azzal a tulajdonságával, hogy a *K*-ban és a *K'*-ben egyaránt *c* sebességgel terjed[40].

Azt, hogy térszerű eseménypárra is érvényesek, Einstein vonatos kísérletével (3. fejezet) illusztráljuk. Ha *K'* a vonat, *K* pedig a töltés nyugalmi rendszere, akkor ebben a kísérletben $\Delta t' = 0$ és $\Delta x' = l_0$. Ha ezeket beírjuk (58) első egyenletébe és (59)-be, majd a két egyenletből kizárjuk Δx-et, akkor rövid átalakítás után a

$$\Delta t = \frac{l_0 \cdot {}^{V}\!/_{c^2}}{\sqrt{1 - {}^{V^2}\!/_{c^2}}} \tag{60}$$

képletre jutunk, amely a (30) Lorentz-kontrakció figyelembevételével azonos (7)-tel.

---

[39] A newtoni fizika megfelelő képlete a

$$\Delta t' = \Delta t, \qquad \Delta x' = \Delta x - V \cdot t, \qquad \Delta y' = \Delta y, \qquad \Delta z' = \Delta z,$$

Galilei-transzformáció ,amely a Lorentz-transzformációból a $V \ll c$ határesetben kapható meg.

[40] Az Olvasó könnyen igazolhatja, hogy ez a tulajdonság akkor is érvényben marad, amikor a fény terjedési iránya nullától különböző szöget zár be az *x*-tengellyel. A sebesség iránya ekkor megváltozik, de a nagysága *c* marad.

***

A Lorentz-transzformáció összhangban van a sajátidő invarianciájával.

Tegyük fel, hogy a *K'*-ben a két eseményt konstans $\left(\frac{\Delta x\prime}{\Delta t\prime}, \frac{\Delta y\prime}{\Delta t\prime}, \frac{\Delta z\prime}{\Delta t\prime}\right)$ sebességű „óra” köti össze egymással. Az órán a két esemény között

$$\Delta\tau' = \Delta t' \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta y'}{\Delta t'}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta z'}{\Delta t'}\right)^2} \quad (61)$$

sajátidő telik el. Ha a jobboldalon az (58) és az (59) Lorentz-transzformáció segítségével a vesszős differenciákat vesszőtleneken keresztül fejezzük ki, akkor rövid átalakítás után a

$$\Delta\tau'^2 = \Delta t'^2 - \frac{1}{c^2}\left(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2\right) = \Delta t^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) = \Delta\tau^2 \quad (62)$$

egyenlőségre jutunk, ami bizonyítja a sajátidő intervallumok függetlenségét a koordinátarendszer megválasztásától. A sajátidő „vesszőzése” ezért valójában szükségtelen és félrevezető.

A (62) igazolásánál nem használjuk ki azt a tényt, hogy a

$$\Delta t^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2) \quad (63)$$

kvadratikus kifejezés értéke – mivel feltevés szerint időszerű eseménypárra vonatkozik – pozitív. A kifejezés invarianciája ezért akkor is igaz, amikor az értéke nulla (az eseménypár fényszerű), vagy negatív (az eseménypár térszerű). Amikor az előjel nem pozitív, akkor persze (63)-t nem nevezhetjük sajátidőnek. Ezért vezették be rá – pontosabban a c^2-szeresére, — a *négyestávolság négyzet* elnevezést és a Δs^2 jelölést:

$$\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2). \quad (64)$$

***

A $\Delta\tau$ valamint a tömeg invarianciája miatt (53) következtében $K \to K'$ koordinátarendszer váltásnál a tömegpontok teljes energiája és impulzusa is a Lorentz-transzformáció szerint változik meg[41]:

$$E' = \frac{E - Vp_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad p'_x = \frac{p_x - \frac{V}{c^2}E}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad p'_y = p_y, \qquad p'_z = p_z.$$

***

A Lorentz-transzformációhoz konkrét fizikai jelenségek (Doppler-effektus, Lorentz-kontrakció) vizsgálatán keresztül jutottunk el, de ez a transzformáció lehetővé teszi, hogy ezeket a kinematikai tényeket általánosabb, *geometriai* nézőpontból interpretáljuk.

A közös *X* tengely mentén egymáshoz képest egyenletes mozgást végző *K* és *K'* mindegyike viszi magával a *t* illetve *t'* koordinátaidőt mutató virtuális órák halmazát. Az Einstein-szinkronizálás következtében két egymást „fedő” óra különböző koordinátaidőt mutat, és – mint többször is

[41] Az (53) alapján a helyettesítés szabálya (58)-ban és (59)-ben nyilván $\Delta(ct) \to E/c$ (vagyis $\Delta t \to E/c^2$), $\Delta x \to p_x$ stb.

hangsúlyoztuk, — lehetetlen (és valójában szükségtelen) szemlélettel folyamatosan követni és összehasonlítani az éppen azonos helyet elfoglaló *összes* órapáron a mutatóállásokat. A legtöbb amit tehetünk az, hogy egyetlen egy kiválasztott órapárra, amelyek egy pillanatra fedésbe kerülnek egymással előírjuk, hogy a fedésük pillanatában mutassanak mondjuk $t=t'=0$ pillanatot.

A legcélszerűbb azt az órapárt választani, amely a két koordinátarendszer origójában nyugszik. Ekkor az az E_0 esemény, amely a K-ban az $x_0=y_0=z_0=t_0=0$ koordinátákkal rendelkezik, a K'-ben is ugyanilyen, csupa nulla komponensű lesz: $x_0'= y_0'= z_0'= t_0'=0$. Ha E egy tetszőleges másik esemény, amelynek a koordinátái x,y,z,t és x',y',z',t', akkor erre a két eseményre (58)-ban és (59)-ben az összes Δ elhagyható, mert pl. $\Delta x = x - x_0' = x$. Ekkor

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z. \tag{65}$$

A Lorentz-transzformációt leggyakrabban ebben a formában írják fel. Mi a jelentése? Tegyük fel, hogy a K rögzített koordinátarendszer, amelyben egy adott E esemény *téridő koordinátái t, x, y* és *z*. Képzeljünk el egy csomó K' koordinátarendszert, amelyek abban különböznek egymástól, hogy más és más V sebességgel mozognak K-hoz képest, de az origójukhoz rögzített virtuális órák mind fedik egymást, amikor éppen nullát mutatnak. A (65) azt mutatja meg, hogy az E milyen téridő koordinátákkal rendelkezik ezekben a különböző sebességgel mozgó K'-kben.

A Δs^2 invarianciája következtében a vesszős és a vesszőtlen koordináták eleget tesznek a

$$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2 \tag{66}$$

feltételnek. Ez a (65) alapján is könnyen ellenőrizhető.

A következő egyszerű példa segít jobban megérteni, miről van itt szó. Képzeljünk el egy rögzített $\mathcal{K}$ Descartes-koordinátarendszert a háromdimenziós térben, amelyhez képest egy tetszőleges $\mathcal{E}$ pont koordinátái x,y és z. Jelöljük $\mathcal{K}'$-vel azokat a Descartes-rendszereket, amelyek különböző φ szöggel vannak elforgatva $\mathcal{K}$-hoz képest a z-tengely körül (ezért az origóik is közösek). Akkor az

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \qquad y' = y\cos\varphi + x\sin\varphi, \qquad z' = z \tag{67}$$

egyenletből számítható ki, hogy milyen Descartes-koordinátákkal rendelkezik az $\mathcal{E}$ pont a különböző $\mathcal{K}'$-kben. A (66) feltételnek itt az $\mathcal{E}$ pont origótól mért távolságának a változatlansága felel meg:

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2. \tag{68}$$

A háromdimenziós analógia alapján, amely remélhetően önmagáért beszél, a Lorentz-transzformáció a négydimenziós téridőben elképzelt derékszögű koordinátarendszer *(ct,x)* tengelyeket tartalmazó síkjának az „elforgatásaként" fogható fel, amelynek mértékét a különböző K'-k V sebessége határozza meg. Az idézőjelet a megfelelő képletekben található előjelkülönbség magyarázza: A Lorentz-transzformációt pontosabban *hiperbolikus forgatásnak* nevezzük.

Két egymás utáni φ_1 majd φ_2 szögű elforgatás maga is egy (67) elforgatás $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ szöggel. Ugyanebben az értelemben két egymás utáni V_1 majd V_2 sebességű Lorentz-transzformáció szintén egy (65) Lorentz-transzformáció a (25') alapján kiszámítható

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + {}^{V_1V_2}/_{c^2}}$$

sebességgel.

***

A speciális relativitáselmélet Einsteinig visszamenő hagyományos tárgyalásának az egyes lépései a következők:

1. A fénysebesség posztulált állandóságából következik, hogy ha a (64)-ben definiált Δs^2 négyestávolság négyzet valamelyik inerciális koordinátarendszerben nullával egyenlő, akkor minden inerciarendszerben nulla.
2. A $\Delta s^2=0$ invarianciáját általánosítják olyan eseménypárokra, amelyekhez nullától különböző (pozitív vagy negatív) Δs^2 tartozik. A körültekintő általánosítás egyáltalán nem egyszerű, ld. például a Landau-Lifsic sorozat *Klasszikus erőterek* kötetének elején a 2. fejezetet.
3. Az egyenletesen mozgó koordinátarendszerre történő áttérés szabályát – a Lorentz-transzformációt — azzal a *lineáris* transzformációval azonosítják, amely biztosítja a Δs^2 invarianciáját.
4. A kinematikai következményeket (idődilatáció, Lorentz-kontrakció, sebességösszeadás, a gyorsulás transzformációja) ezután a Lorentz-transzformációból dedukálják.

Ebben a kurzusban fordított eljárást követtünk. A posztulátumokból először a kinematikai következményeket származtattuk le, majd ezek ismeretében egyszerűen fel tudtuk írni a Lorentz-transzformáció képletét. A módszertani egyszerűségen kívül ennek az eljárásnak komoly pedagógiai előnye, hogy közben folyamatosan szem előtt kell tartani a sajátidő és a koordinátaidő közötti különbséget, amelynek pontos megértése segít elkerülni a relativitáselmélettel kapcsolatos gyakori félreértéseket.