IDŐTÜKRÖZÉS A KVANTUMMECHANIKÁBAN

Irta: Hraskó Péter

Összefoglalás

A cikkben egységes szempontból tárgyaljuk az időtükrözés tulajdonságait különös tekintettel a magfizikai alkalmazásokra.

I. Antilineáris operátorok

Az alábbiakban véges dimenzióju komplex vektortér esetére összefoglaljuk az antilineáris operátorok tulajdonságait.

1/ Tekintsünk egy N dimenziós komplex vektorteret e_i $(i=1,\dots N)$ ortonormált bázissal:

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

Egy L operátor lineáris, ha

$$L(\alpha a + \beta b) = \alpha L a + \beta L b$$

Ennek alapján

$$(La)_j = (e_j, La) = (e_j, L\sum_i a_i e_i) = \sum_i (e_j, L e_i) a_i = \sum L_{ji} a_i$$

ahol $$L_{ji} = (e_j, L e_i)$$

Egy A operátor antilineáris, ha $A(\alpha a + \beta b) = \alpha^* A a + \beta^* A b$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$(Aa)_j = (e_j, Aa) = (e_j, A\sum_i a_i e_i) = \sum_i (e_j, A e_i) a_i^* = \sum_i A_{ji} a_i^*$$

ahol

$$A_{ji} = (e_j, A e_i) \qquad /1/$$

Az A_{ji} számokkal jellemezzük numerikusan A-t. Ezek képezik az A operátor mátrixát.

Az operátor mátrixát határozottan meg kell különböztetnünk magától az operátortól. Lehetséges például, hogy $L_{ji}=A_{ji}$, mégis $L \neq A$, hiszen általában $La \neq Aa$.

2/ Legyenek L^1 és L^2 lineáris operátorok. Az $L=L^1 \cdot L^2$ lineáris operátor mátrixát az

$$L_{ji}=\sum_m L^1_{jm} L^2_{mi}$$

összefüggés alapján határozzuk meg.

Legyenek A^1 és A^2 antilineáris operátorok és legyen $L=A^1 A^2$. Vizsgáljuk L hatását egy tetszőleges a vektorra:

$$(La)_j=(A^1[A^2 a])_j=\sum_m A^1_{jm}[A^2 a]^*_m=\sum_m A^1_{jm}[\sum_i A^2_{mi} a^*_i]^*=$$

$$=\sum_j(\sum_m A^1_{jm} \overset{*}{A}{}^2_{mi})a_i=\sum_j L_{ji} a_i$$

Látjuk, hogy L lineáris operátor és mátrixa nem egyenlő az A^1 és A^2 operátorok mátrixainak szorzatával, hanem

$$L_{ji}=\sum_m A^1_{jm} \overset{*}{A}{}^2_{mi} \qquad /2/$$

Az előzőhöz hasonlóan látható, hogy ha L lineáris, A antilineáris operátor, akkor LA és AL antilineárisak és mátrixuk az

$$(LA)_{ji}=\sum_m L_{jm} A_{mi}$$

$$(AL)_{ji}=\sum_m A_{jm} L^*_{mi} \qquad /3/$$

összefüggések alapján határozható meg.

3/ Legyen K az az antilineáris operátor, amelynek mátrixa az adott bázisban $K_{ij}=\delta_{ij}$. Ezt az operátort a komplex konjugálás operátorának szokás nevezni. Legyen L lineáris, A antilineáris operátor és legyen $L_{ij}=A_{ij}$. Ekkor $A=LK$. Valóban, ha a tetszőleges vektor, akkor

$$(Aa)_j=\sum A_{ji} a^*_i$$

$$(LKa)_j=\sum_i L_{ji}(Ka)_i=\sum_i L_{ji}(\sum_m K_{im} a^*_m=$$

$$=\sum_{im} L_{ji}\delta_{im} a^*_m=\sum_i L_{ji} a^*_i=\sum_i A_{ji} a^*_i$$

A /2/ alapján $K^2=I$. Hasonlóan egyszerűen belátható, hogy $LK=KL^*$.

Legyen $A' = KL^{-1}$, azaz $A'_{ji} = \sum_m K_{jm} (L^{-1})^*_{mi} = (L^{-1})^*_{ji}$. Minthogy $AA' = LKKL^{-1} = LL^{-1} = I$ és $A'A = KL^{-1}LK = K^2 = I$, A' az A antilineáris operátor inverze.

4/ Minden L lineáris operátorhoz értelmezzük az L^+ lineáris operátort az

$$(a, L b) = (L^+ a, b) \tag{4}$$

összefüggéssel. A /4/ -ből következik, hogy $(L^+)_{ji} = L^*_{ij}$.

Minden A antilineáris operátorhoz értelmezzük az $\tilde{A}$ antilineáris operátort az

$$(a, A b) = (b, \tilde{A} a) \tag{5}$$

összefüggéssel. Az /5/ -ből következik, hogy $(\tilde{A})_{ji} = A_{ij}$.

Egyszerűen igazolhatók a következő összefüggések:

$$\widetilde{AL} = L^+ \tilde{A} \tag{6}$$

$$\widetilde{LA} = \tilde{A} L^+$$

$$(A^1 A^2)^+ = \tilde{A}^2 \tilde{A}^1$$

Igazoljuk pl. az elsőt: az $\widetilde{AL}$ operátort a

$$(b, AL a) = (a, \widetilde{AL} b)$$

összefüggés értelmezi.

$$(b, AL a) = \sum_i b_i^* [ALa]_i = \sum_{im} b_i^* A_{im} [L a]^*_m =$$

$$= \sum_{imj} b_i^* A_{im} [L_{mj} a_j]^* = \sum_{imj} b_i^* A_{im} L^*_{mj} a_j^* =$$

$$= \sum_{imj} a_j^* L^+_{jm} \tilde{A}_{mi} b_i^* = \sum_{ij} a_j^* \left[\sum_m L^+_{jm} \tilde{A}_{mi}\right] b_i^* =$$

$$= \sum_{ij} a_j^* (L^+ \tilde{A})_{ji} b_i^* = \sum_j a_j^* (L^+ \tilde{A} b)_j = (a, L^+ \tilde{A} b)$$

ahonnan leolvashatjuk /6/ első összefüggését.

5/ Egy U lineáris operátor unitér ha

$$(Ub, Ua) = (b, U^+ U a) = (b, a)$$

azaz

$$U^+ U = I$$

Egy Q antilineáris operátor antiunitér, ha

$$(Qb, Qa) = (a, \tilde{Q}Qb) = (a, b)$$

azaz

$$\tilde{Q}Q = I$$

Ebből /2/ felhasználásával kapjuk, hogy $\sum Q_{mi} Q^*_{mj} = \delta_{ij}$, tehát a Q antiunitér operátor "mátrixa unitér". Ezért $Q = UK$, ahol U unitér operátor.

6/ Térjünk át uj bázisra egy U unitér operátorral:

$$e'_j = \sum_i U^+_{ij} e_i$$

Ez ekvivalens azzal, ha minden vektort U -val transzformálunk:

$$a \to a' = Ua$$

Legyen A antilineáris operátor és

$$b = Aa \qquad /7/$$

A transzformáltjának azt az A' operátort nevezzük, amely az a' vektort b' -be viszi át. A /7/ -ből kapjuk, hogy

$$Ub = UAU^+ Ua$$

azaz

$$b' = UAU^+ a'$$

tehát

$$A' = UAU^+ \qquad /8/$$

A /3/ és /8/ alapján

$$A'_{ji} = \sum_{me} U_{jm} A_{me} U_{ie} \qquad /9/$$

Egy lineáris operátor transzformáltja ugyanakkor

$$L' = ULU^+$$

azaz

$$L'_{ji} = \sum_{me} U_{jm} L_{me} U^*_{ie} \qquad /10/$$

Tekintsük a komplex konjugálás operátorát. Térjünk át az uj bázisra:

$$K'_{ji} = \sum_{me} U_{jm} \delta_{me} U_{ie} = \sum_{m} U_{jm} U_{im} \neq \delta_{ji}$$

tehát egy olyan antilineáris operátor, amely egy bizonyos bázisban a komplex konjugálás operátora, uj bázisra való áttérés után már nem egyezik meg a komplex konjugálás operátorával.

7/ Tegyük fel, hogy Q olyan antiunitér operátor, amelynek négyzete az egységoperátorral arányos:

$$Q^2 = \gamma \cdot I \qquad /11/$$

Megmutatjuk, hogy $\gamma = \pm 1$.

Minthogy Q antiunitér $Q = UK$, ahol U unitér operátor. A /11/ tehát felirható U segitségével:

$$UKUK = \gamma \cdot I$$

$$UU^* = \gamma I$$

$$U^* = \gamma U^+$$

$$U^+ = \gamma \cdot U^* = \gamma^2 U^+$$

ahonnan $\gamma^2 = 1$, azaz $\gamma = \pm 1$.

Legyen c egységnyi abszolut értékü faktor: $|c|^2 = 1$ és $Q' = c \cdot Q$. Nyilván

$$Q'^2 = cQcQ = Q^2 = \gamma I$$

tehát γ értéke nem függ egy Q-ban esetleg meglevő határozatlan fázisfaktor értékétől.

8/ A továbbiakban, amikor a Hilbert tér vektoraira alkalmazzuk a kapott összefüggéseket, az eddigi jelölések mellett a Dirac-jelöléseket is fogjuk használni. Igy az állapotvektorokat a, b ...stb-vel, vagy $|a\rangle, |b\rangle$-vel fogjuk jelölni. A mátrixelemek jelölésére is felváltva használjuk az F_{ji} vagy $\langle j|F|i\rangle$ szinbólumot. Például a /9/ és /10/ képleteket, amelyek az uj bázisra való áttéréshez szükségesek, Dirac-jelöléssel igy irhatjuk:

$$\langle \beta'|A|\beta\rangle = \sum_{\alpha'\alpha} \langle \beta'|\alpha'\rangle\langle\alpha'|A|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle^* \qquad /12/$$

$$\langle \beta'|L|\beta\rangle = \sum_{\alpha'\alpha} \langle \beta'|\alpha'\rangle\langle\alpha'|L|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle$$

mert

$$u_{\alpha\beta} = \langle\alpha|\beta\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle^* = u^*_{\beta\alpha}$$

Antilineáris operátorok előfordulása esetén a $\sum_c |c\rangle\langle c| = I$ egységoperátor közbeiktatása bizonyos körültekintést igényel. Nézzük pl. a $\langle b|A|a\rangle$ mátrixelemet, ahol A antilineáris:

$$A|a\rangle = A\sum_c \langle c|a\rangle|c\rangle = \sum_c \langle c|a\rangle^* A|c\rangle$$

tehát

$$\langle b|A|a\rangle = \sum_c \langle b|A|c\rangle\langle c|a\rangle^*$$

II. Az időtükrözési invariancia

1/ Az időtükrözési invariancia fogalmát a klasszikus mechanikából visszük át a kvantummechanikába.

A klasszikus mechanikát azért tekintjük invariánsnak az időtükrözéssel szemben, mert ha létezik olyan mozgás, amelynek során a rendszer t idő alatt adott kezdeti állapotból adott végállapotba megy át, akkor létezik olyan mozgás is, amelyben ugyancsak t idő alatt a rendszer az időtükrözött végállapotból az időtükrözött kezdeti állapotba megy át.

Adott állapotban a részecskéknek adott koordinátájuk és sebességük van. Az állapot időtükrözöttjét ugy kapjuk meg, hogy a sebességek irányát megforditjuk.

2/ A kvantummechanikára való átvitel első lépése az időtükrözött állapot definiálása.

Feltesszük, hogy az időtükrözött állapot az eredetiből egy T unitér, vagy antiunitér operátor segitségével állitható elő, azaz a Ta állapot az a állapot időtükrözöttje.

A klasszikus mechanikában az időtükrözés során a sebességgel együtt az impulzus és az impulzusmomentum előjelet vált, mig a koordináták és az energia változatlan marad. Általában egy f fizikai mennyiségből λf lesz, ahol $\lambda = \pm 1$ a fizikai mennyiség jellegétől függően.

Legyen F az f mennyiség operátora. Megköveteljük, hogy az F operátor elégitse ki a

$$T^{-1} F T = \lambda F$$

relációkat. Ezek felsorolva a következők:

$$\begin{aligned} T^{-1} r T &= r & \qquad T^{-1} p T &= -p \\ T^{-1} H T &= H & T^{-1} L T &= -L \\ & & T^{-1} \sigma T &= -\sigma \end{aligned} \qquad /13/$$

Tekintsünk egy rendszert, amelynek a Hamilton-operátora H. Ha $t=0$ pillanatban a rendszer állapotvektora a_0, akkor a t időpillanatban az állapotvektor

$$a_t = e^{-iHt} a_0 \qquad /14/$$

lesz.

Megköveteljük, hogy - a klasszikus mechanikai analógiának megfelelően, - a Ta_t állapotvektor t idő alatt a Ta_0 állapotvektorba menjen át, azaz a

$$Ta_0 = e^{-iHt}\, Ta_t \qquad /15/$$

összefüggés legyen /14/ következménye.

Az elméletet akkor nevezzük invariánsnak az időtükrözéssel szemben, ha létezik olyan T unitér vagy antiunitér operátor, amely /13/-t kielégiti és olyan, hogy /15/ következménye /14/-nek.

Ha egy ilyen operátor létezésének feltételezése belső ellentmondásra vezet, vagy a belőle levont következtetések ellentmondanak a tapasztalatnak, akkor időtükrözési invariancia nincs, legalábbis abban az értelemben, ahogy azt fentebb definiáltuk.

3/ A /14/ és /15/ összefüggéseket helyettesithetjük differenciálegyenlettel. A /14/-ből kapható az

$$i\frac{\partial a}{\partial t} = Ha \qquad /16/$$

Schrődinger-egyenlet $(a = a_t)$. A/15/-t differenciálva pedig az

$$i\frac{\partial Ta}{\partial(-t)} = HTa \qquad /17/$$

egyenletre jutunk. Időtükrözési invariancia esetén /17/-nek /16/ következményének kell lennie.

4/ A /17/ csak akkor következménye /16/-nak, ha T antiunitér. A /15/ alapján $TH = HT$, ezért ha T unitér, /16/-ból T -vel szorozva az

$$i\frac{\partial Ta}{\partial t} = HTa$$

egyenletet kapjuk, ami nem egyezik meg /17/-tel. Ha viszont T antiunitér, akkor eredményül /17/-t kapjuk. A továbbiakban T -t mindenütt antiunitérnek tekintjük, tehát $T^{-1} = \tilde{T}$.

5/ Keressük meg a $\tilde{T}U(t,t_0)T$ operátort. Az $U(t,t_0)$ irja le az állapotvektor időbeli változását kölcsönhatási reprezentációban és kielégiti az

$$i\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t} = H_i(t)\cdot U(t,t_0)$$

egyenletet. Hassunk erre az egyenletre balról $\tilde{T}$ -vel, jobbról T -vel

$$-i\frac{\partial \tilde{T}U(t,t_o)T}{\partial t}=\tilde{T}H_i(t)T\cdot\tilde{T}U(t,t_o)T \qquad /18/$$

De

$$\tilde{T}H_i(t)T=\tilde{T}e^{iH_ot}H_ie^{-iH_ot}T=e^{-iH_ot}H_ie^{iH_ot}=H_i(-t)$$

Ezt /18/ -ba helyettesitve és a t előjelét megváltoztatva azt találjuk, hogy

$$i\frac{\partial \tilde{T}U(-t,t_o)T}{\partial t}=H_i(t)\tilde{T}U(-t,t_o)T$$

A $\tilde{T}U(-t,t_o)T$ ugyanazt az elsőrendü differenciálegyenletet elégiti ki, mint $U(t,t_o)$. Minthogy

$$\left[\tilde{T}U(-t,t_o)T\right]_{t=-t_o}=1$$

és

$$\left[U(t,-t_o)\right]_{t=-t_o}=1$$

ezért

$$\tilde{T}U(-t,t_o)T=U(t,-t_o)$$

Az

$$\Omega_+=U(0,-\infty)$$

$$\Omega_-=U(0,+\infty)$$

definiciók alapján az Ω_+ és Ω_- időtükrözéskor a

$$\tilde{T}\Omega_+T=U(0,+\infty)=\Omega_-$$

$$T\Omega_-T=U(0,-\infty)=\Omega_+$$

képletek szerint transzformálódik. Felhasználva az

$$S=\Omega_-^+\Omega_+ \qquad /19/$$

összefüggést, azt találjuk, hogy

$$\tilde{T}ST=\tilde{T}\Omega_-^+\Omega_+T=\tilde{T}\Omega_-^+T\,\tilde{T}\Omega_+T=\Omega_+^+\Omega_-=S^+ \qquad /20/$$

ugyanis /6/ alapján $\Omega_+^+ = (\tilde{T}\Omega_- T)^+ = \tilde{T}\Omega_-^+ T$

Időtükrözési invariancia esetén tehát a $\tilde{T}ST = S^+$ összefüggés teljesül. /Megjegyezzük, hogy pl. a tértükrözéssel szembeni invariancia következményeként $P^+SP = S^+$ ./

A /20/ -ból következik, hogy

$$(b, S\,a) = (Ta, STb) \qquad /21/$$

Valóban:

$$(b, Sa) = (a, S^+b)^* = (a, \tilde{T}STb)^* =$$

$$= (STb, Ta)^* = (Ta, STb)$$

ahol felhasználtuk az /5/ összefüggést.

III. A T -operátor mátrixának meghatározása

1/ Legyen A és B két fizikai mennyiség operátora, $|\alpha>$ és $|\beta>$ pedig sajátvektoraik:

$$\sum_{\alpha'} <\alpha|B|\alpha'><\alpha'|\beta> = \beta<\alpha|\beta> \qquad /22/$$

$$\sum_{\beta'} <\beta|A|\beta'><\beta'|\alpha> = \alpha<\beta|\alpha> \qquad /23/$$

$$<\alpha|\beta> = <\beta|\alpha>^*$$

$<\alpha|\beta>$ mellett a /22/ egyenletet kielégiti az

$$<\alpha|\beta>' = c_\beta<\alpha|\beta>$$

hullámfüggvény is, ahol $|c_\beta|^2 = 1$. Az $<\alpha|\beta>'$ hullámfüggvény azonban természetesen nem elégiti ki /23/-t, hiszen a β változónak gyakorlatilag önkényesen választott függvénye. Ezért ha $<\alpha|\beta>'$ -vel kivánunk dolgozni $<\alpha|\beta>$ helyett, akkor meg kell változtatnunk a $<\beta|A|\beta'>$ mátrixelemet:

$$<\beta|A|\beta'> \longrightarrow <\beta|A|\beta'>' = \sum_{\alpha\alpha'} <\beta|\alpha>'<\alpha|A|\alpha'><\alpha'|\beta'>' =$$

$$= c_\beta^* c_\beta <\beta|A|\beta'> \qquad /24/$$

Valóban, /24/-ből beirva $\langle\beta|A|\beta'\rangle$ -t /23/-ba kapjuk:

$$\sum_{\beta'} \langle\beta|A|\beta'\rangle' \cdot c^*_{\beta'} \langle\beta'|\alpha\rangle = \alpha \langle\beta|\alpha\rangle \cdot c^*_{\beta}$$

azaz

$$\sum_{\beta'} \langle\beta|A|\beta'\rangle' \cdot \langle\beta'|\alpha\rangle' = \alpha \langle\beta|\alpha\rangle'$$

Természetesen egyidejüleg el kell végeznünk a következő változtatásokat is:

$$\begin{aligned} \langle\gamma|\beta\rangle &\longrightarrow \langle\gamma|\beta\rangle' = c_\beta \langle\gamma|\beta\rangle \\ \langle\beta|G|\beta'\rangle &\longrightarrow \langle\beta|G|\beta'\rangle' = c^*_\beta c_{\beta'} \langle\beta|G|\beta'\rangle \\ \langle\beta|A|\beta'\rangle &\longrightarrow \langle\beta|A|\beta'\rangle' = c^*_\beta c^*_{\beta'} \langle\beta|A|\beta'\rangle \end{aligned} \qquad /25/$$

ahol $|\gamma\rangle \neq |\beta\rangle$ tetszőleges állapot, G tetszőleges lineáris, A antilineáris operátor. Azokat a mátrixelemeket és hullámfüggvényeket, amelyek $|\beta\rangle$ vektort nem tartalmaznak, nem kell megváltoztatni:

$$\langle\gamma|\delta\rangle \longrightarrow \langle\gamma|\delta\rangle' = \langle\gamma|\delta\rangle$$

$$\langle\gamma|G|\gamma'\rangle \longrightarrow \langle\gamma|G|\gamma'\rangle' = \langle\gamma|G|\gamma'\rangle$$

A "vesszős" és "vesszőtlen" leirásmód nyilván teljesen egyenrangu.

A továbbiakban a következő egyrészecske hullámfüggvényeket használjuk:

$$\left.\begin{aligned} \langle \mathbf{r}|\mathbf{p}\rangle &= (2\pi)^{-3/2} \cdot e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \\ \langle r'\vartheta\varphi|lmr\rangle &= \frac{1}{r^2}\delta(r'-r)\, i^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \\ \langle p\Theta\Phi|lmr\rangle &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, j_l(pr)\, Y_{lm}(\Theta,\Phi) \\ \langle p'\Theta\Phi|lmp\rangle &= \frac{1}{p^2}\delta(p'-p)\, Y_{lm}(\Theta,\Phi) \end{aligned}\right\} \quad /26/$$

ahol ϑ, φ az $\mathbf{r}$ helyzetvektor, Θ, Φ pedig a $\mathbf{p}$ impulzusvektor irányszögei.

A felsoroltak helyett használhatnánk az

$$\left.\begin{aligned} &\langle r|p\rangle = (2\pi)^{-3/2} e^{ipr} \\ &\langle r'\vartheta\varphi|\ell m r\rangle = \frac{1}{r^2}\delta(r'-r)Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) \\ &\langle p\Theta\Phi|\ell m r\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, j_\ell(pr)\, i^{-\ell}\, Y_{\ell m}(\Theta,\Phi) \\ &\langle p'\Theta\Phi|\ell m p\rangle = \frac{1}{p^2}\delta(p'-p)\, Y_{\ell m}(\Theta,\Phi) \end{aligned}\right\} \quad /27/$$

hullámfüggvényeket is. A /26/ -ról a /27/ -re való áttérés az előbb vázolt séma szerint annak felel meg, hogy $\beta = \ell m r$ -t és $c_\beta = i^{-\ell} - t$ választunk. A /26/ vagy a /27/ használata esetén az operátorok mátrixelemei $\ell m r$ reprezentációban általában különbözni fognak. Az áttérést /25/ alapján végezhetjük el. Azért választjuk /27/ helyett a /26/ hullámfüggvényeket, hogy a T operátor mátrixa $\ell m r$ reprezentációban bizonyos szempontból kedvező alaku legyen.

2/ Legyen L egy fizikai mennyiség operátora, $|\ell\rangle$ az L sajátállapota és

$$T L \tilde{T} = \pm L$$

Ekkor $T|\ell\rangle$ az L operátor $\pm\ell$ -hez tartozó sajátállapota. Valóban:

$$L|\ell\rangle = \ell|\ell\rangle$$

$$T L \tilde{T} T|\ell\rangle = \ell T|\ell\rangle$$

$$L T|\ell\rangle = \pm\ell T|\ell\rangle$$

tehát

$$T|\ell\rangle = c_\ell|\pm\ell\rangle$$

ahol

$$|c_\ell|^2 = 1$$

3/ Minthogy $T r \tilde{T} = r$ és $T p \tilde{T} = -p$

$$T|r\rangle = c_r|r\rangle \qquad T|p\rangle = c_p|-p\rangle$$

Megmutatjuk, hogy $c_r = c_p = c$, ahol a c egységnyi abszolut értékü szorzó nem függ sem r -től, sem p -től.

A bizonyitáshoz két módon sorbafejtjük a $c_p|-p\rangle$ vektort:

$$\begin{aligned} c_p|-p\rangle = T|p\rangle = T\int\langle r|p\rangle\cdot|r\rangle\,dr = \int\langle r|p\rangle^{*} T|r\rangle\,dr = \\ = \int\langle r|-p\rangle\, c_r|r\rangle\,dr \end{aligned} \qquad /28/$$

Ugyanakkor

$$c_p|-p\rangle = c_p\int \langle r|-p\rangle |r\rangle dr \qquad /29/$$

A /28/ és /29/ ugyanazon vektor sorfejtése az $|r\rangle$ bázisban. A két sorfejtés koefficienseinek meg kell egyeznie egymással: $c_r = c_p$. Minthogy c_r csak r -től, c_p csak p -től függhet, a két fázisfaktor egy C konstanssal egyenlő.

A T mátrixát ennek a konstansnak az erejéig határozzák meg a /13/ relációk. A továbbiakban $C=1$ -t választunk. Tehát

$$T|r\rangle = |r\rangle$$

$$T|p\rangle = |-p\rangle$$

A T operátor mátrixát az /1/ összefüggéssel definiáltuk. Ennek alapján

$$\langle r'|T|r\rangle = \langle r'|r\rangle = \delta(r'-r)$$

$$\langle p'|T|p\rangle = \langle p'|p\rangle = \delta(p'+p)$$

Megjegyezzük, hogy

$$T|r\vartheta\varphi\rangle = |r\vartheta\varphi\rangle$$

$$T|p\Theta\Phi\rangle = |p,\pi-\Theta,\varphi+\pi\rangle$$

4/ Határozzuk meg a T mátrixát $\ell m r$ reprezentációban. Minthogy

$$T\ell^2\tilde{T} = \ell^2$$

$$T r^2\tilde{T} = r^2$$

$$T\ell_z\tilde{T} = -\ell_z$$

nyilván

$$T|\ell m r\rangle = c_{\ell m r}|\ell -m r\rangle$$

Fejtsük sorba a $c_{\ell m r}|\ell -m r\rangle$ vektort két módon:

$$c_{\ell m r}|\ell -m r\rangle = T|\ell m r\rangle = T\int \langle r'\mathbf{n}|\ell m r\rangle |r'\mathbf{n}\rangle r'^2 dr' d\mathbf{n} =$$

$$= \int \langle r'\mathbf{n}|\ell m r\rangle^* T|r'\mathbf{n}\rangle r'^2 dr' d\mathbf{n} =$$

$$= (-1)^{\ell-m}\int \langle r'\mathbf{n}|\ell -m r\rangle \cdot |r'\mathbf{n}\rangle r'^2 dr' d\mathbf{n}$$

Felhasználtuk, hogy /26/ alapján

$$\langle r'n|\ell m r\rangle^{*} = \frac{1}{r^2}\delta(r'-r)(-i)^{\ell} Y^{*}_{\ell m}(n) =$$

$$= (-1)^{\ell-m}\frac{1}{r^2}\delta(r'-r)i^{\ell} Y_{\ell,-m}(n) = (-1)^{\ell-m}\langle r'n|\ell -m r\rangle$$

/ n -nel jelöltük röviden a ϑ, φ változókat./

Ugyanakkor

$$C_{\ell m r}|\ell -m r\rangle = C_{\ell m r}\int \langle r'n|\ell -m r\rangle \cdot |r'n\rangle r'^2 dr' dn \qquad /30/$$

A két sorfejtést összehasonlitva kapjuk, hogy $C_{\ell m r} = (-1)^{\ell-m}$

azaz

$$T|\ell m r\rangle = (-1)^{\ell-m}|\ell -m r\rangle$$

Teljesen hasonló módon történik $T|\ell m p\rangle$ meghatározása. Nyilván $T|\ell m p\rangle = C_{\ell m p}|\ell -m p\rangle$. Ezt a vektort kell sorbafejteni a $|pn\rangle$ vektorok szerint /ahol most $n = \theta, \phi$ /. A /26/ felhasználásával azt találjuk, hogy

$$T|\ell m p\rangle = (-1)^{\ell-m}|\ell -m p\rangle$$

Ennek alapján

$$\langle \ell' m' r'|T|\ell m r\rangle = (-1)^{\ell-m}\delta_{\ell\ell'}\delta_{m,-m'}\frac{1}{r^2}\delta(r'-r)$$

$$\langle \ell' m' p'|T|\ell m p\rangle = (-1)^{\ell-m}\delta_{\ell\ell'}\delta_{m,-m'}\frac{1}{p^2}\delta(p'-p)$$

Megjegyezzük, hogy ha /26/ helyett /27/-t használjuk, akkor a T mátrixára az $\ell m r$ reprezentációban teljesen hasonló módon az

$$\langle \ell' m' r'|T|\ell m r\rangle = (-1)^{m}\delta_{\ell\ell'}\delta_{m,-m'}\frac{1}{r^2}\delta(r'-r) \qquad /31/$$

kifejezést kapjuk. A /30/ kifejezés azonban, - mint látni fogjuk, - több szempontból előnyös.

5/ Legyen $|\ell m n\rangle$ egy gömbszimmetrikus potenciálban mozgó részecske energiasajátállapota / n a főkvantum szám/.

$$T|\ell m n\rangle = T\sum_{\ell' m' r'}\langle \ell' m' r'|\ell m n\rangle|\ell' m' r'\rangle = \sum_{\ell' m' r'}\langle \ell' m' r'|\ell m n\rangle^{*} T|\ell' m' r'\rangle$$

Minthogy $\langle \ell' m' r'|\ell m n\rangle = \varphi_{n\ell}(r')\cdot\delta_{\ell'\ell}\delta_{m'm}$ ahol $\varphi_{n\ell}$ valós függvény,

$$T|\ell m n\rangle = \sum_{\ell' m' r'}(-1)^{\ell'-m'}\langle \ell' m' r'|\ell m n\rangle|\ell' m' r'\rangle = (-1)^{\ell-m}|\ell -m n\rangle$$

tehát

$$\langle l'm'n'|T|lmn\rangle = (-1)^{l-m}\,\delta_{ll'}\,\delta_{m,-m'}\,\delta_{nn'}$$

6/ Ha a T mátrixát ismerjük az egyik, mondjuk α reprezentációban, akkor valamilyen β reprezentációban megkaphatjuk a /12/ összefüggés segitségével. Kiindulva pl. az $\langle r'|T|r\rangle = \delta(r'-r)$ mátrixból, rendre megkaphatjuk a T mátrixát a többi reprezentációkban.

Azt, hogy a kapott mátrixok antiunitérek, a

$$\sum_{\alpha'} \langle\alpha|T|\alpha''\rangle\langle\alpha'|T|\alpha''\rangle^* = \delta_{\alpha\alpha'}$$

összefüggés segitségével ellenőrizhetjük, amely a $T\tilde{T} = I$ mátrixalakja.

7/ Most keressük a T operátor mátrixát a spintérben. A /13/ alapján a T operátornak ki kell elégitenie a

$$\tilde{T}\sigma_i T = -\sigma_i$$

relációkat. Megmutatjuk, hogy a keresett T az az antilineáris operátor, amelynek mátrixa megegyezik a $c\cdot\sigma_2$ operátor mátrixával, ahol c tetszőleges egységnyi abszolut értékü fázisfaktor.

Legyen $T_{\alpha\beta} = c(\sigma_2)_{\alpha\beta}$. A

$$(\tilde{T}\sigma_i T)_{\alpha\beta} = -(\sigma_i)_{\alpha\beta}$$

összefüggés a /2, 3/ szabály alapján igy fejthető ki

$$\sum c(\sigma_2)_{\gamma\alpha}(\sigma_i)^*_{\gamma\delta}\cdot c^*\cdot(\sigma_2)^*_{\delta\beta} = -(\sigma_i)_{\alpha\beta}$$

Minthogy $\sigma_i^+ = \sigma_i$ és $cc^* = 1$, ez az összefüggés a következő módon irható:

$$\sigma_2^*\ \sigma_i^*\ \sigma_2^* = -\sigma_i$$

azaz

$$\sigma_2\sigma_i\sigma_2 = -\sigma_i^*$$

A σ_1 és σ_3 valós és a σ_i -k antikommutálnak, tehát ez az összefüggés $i = 1,3$ -ra igaz. Minthogy $\sigma_2^* = -\sigma_2$, ezért $i = 2$ -re is teljesül.

A /13/-t tehát kielégiti az a T , amelynek mátrixa

$$T_{\alpha\beta} = c\cdot(\sigma_2)_{\alpha\beta}$$

Wigner [1] megmutatta, hogy ez T egyetlen lehetséges mátrixa.

Legyen $c=-i$,

$$-i\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\langle +\frac{1}{2}|T|+\frac{1}{2}\rangle & \langle +\frac{1}{2}|T|-\frac{1}{2}\rangle\\ \langle -\frac{1}{2}|T|-\frac{1}{2}\rangle & \langle -\frac{1}{2}|T|-\frac{1}{2}\rangle\end{pmatrix} \quad /32/$$

ahol az $\langle S'\mu'|T|S\mu\rangle$ mátrixot röviditve $\langle\mu'|T|\mu\rangle$ -vel jelöltük. A /32/ összefoglalóan igy irható:

$$\langle S'\mu'|T|S\mu\rangle=(-1)^{S-\mu}\delta_{SS'}\cdot\delta_{\mu,-\mu'}$$

A $c=-i$ választással a T mátrixát a spinváltozókban hasonlóvá tettük a T mátrixhoz az ℓm reprezentációban.

8/ Láttuk, hogy a T mátrix ℓm -függése az r , illetve En függéstől szeparálható. Jelöljük az ℓm -től függő részt $\langle\ell'm'|T|\ell m\rangle$ -el:

$$\langle\ell'm'|T|\ell m\rangle=(-1)^{\ell-m}\delta_{\ell\ell'}\delta_{m,-m'}$$

A T mátrix alakja a spinváltozókban is ugyanilyen. Felvetődik az a kérdés, hogy vajon nem igaz-e általában a

$$\langle J'M|T|JM\rangle=(-1)^{J-M}\delta_{JJ'}\delta_{M,-M'} \quad /33/$$

összefüggés függetlenül attól, hogy a J impulzusmomentum milyen csatolással jött létre a spin- és pályamomentumokból. Megmutatjuk, hogy /33/ általában igaz. Ehhez azt kell belátnunk, hogy /33/ invariáns az impulzusmomentumok összeadásával szemben.

Eddig csak egyrészecske állapotokat vizsgáltunk. A T mátrixot azonnal felirhatjuk sokrészecske állapotokra is annak alapján, hogy a szorzattérben a T operátorok direkt szorzata hat. Ha $T|j_1m_1\rangle=(-1)^{j_1-m_1}|j_1-m_1\rangle$ és $T|j_2m_2\rangle=(-1)^{j_2-m_2}|j_2-m_2\rangle$ akkor

$$T|j_1m_1j_2m_2\rangle=(-1)^{j_1-m_1+j_2-m_2}|j_1-m_1j_2-m_2\rangle$$

Legyen

$$|JMj_1j_2\rangle=\sum\langle j_1m_1j_2m_2|JM\rangle\cdot|j_1m_1j_2m_2\rangle$$

Határozzuk meg $T|JMj_1j_2\rangle$ -t:

$$T|JMj_1j_2\rangle=T\sum\langle j_1m_1j_2m_2|JM\rangle\cdot|j_1m_1j_2m_2\rangle=$$

$$=\sum\langle j_1m_1j_2m_2|JM\rangle\cdot(-1)^{j_1-m_1+j_2-m_2}|j_1-m_1j_2-m_2\rangle=$$

$$=(-1)^{j_1+j_2-M}\sum\langle j_1m_1j_2m_2|JM\rangle\cdot|j_1-m_1j_2-m_2\rangle$$

Itt felhasználtuk azt, hogy a Clebsch-Gordan koefficiensek valósak. Változtassuk meg az összegző indexek előjelét és aztán használjuk fel a

$$\langle j_1 -m_1 j_2 -m_2 | JM \rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J -M \rangle$$

összefüggést:

$$T|JM j_1 j_2\rangle = (-1)^{j_1+j_2-M} \sum \langle j_1 -m_1 j_2 -m_2 | JM \rangle | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle =$$

$$= (-1)^{2(j_1+j_2)-M-J} \sum \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J -M \rangle | j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle =$$

$$= (-1)^{2(j_1+j_2)-M-J} \, | J -M j_1 j_2 \rangle$$

De

$$(-1)^{2(j_1+j_2)-M-J} = (-1)^{2(j_1+j_2-J)} \cdot (-1)^{J-M} = (-1)^{J-M}$$

tehát

$$T|JM j_1 j_2\rangle = (-1)^{J-M} | J -M j_1 j_2 \rangle$$

ahonnan

$$\langle J'M'j_1'j_2' | T | JM j_1 j_2 \rangle = (-1)^{J-M} \delta_{JJ'} \delta_{M,-M'} \delta_{j_1 j_1'} \delta_{j_2 j_2'}$$

Tekintsük a $|JM\{j\}\{n\}\rangle$ állapotvektort, amely adott egyrészecske állapotokból adott csatolási séma alapján épül fel. Már korábban láttuk, hogy a T mátrix az $\{n\}$ energia- kvantumszámokban diagonális és most azt találtuk, hogy a $\{j\}$ kvantumszámokban is az, tehát

$$T|JM\{j\}\{n\}\rangle = (-1)^{J-M} | J -M\{j\}\{n\}\rangle$$

Egy tetszőleges $|JMA\rangle$ állapot felépithető $|JM\{j\}\{n\}\rangle$ tipusu vektorok lineárkombinációjaként, ezért

$$T\,|JMA\rangle = (-1)^{J-M} | J -MA \rangle \qquad /34/$$

Ha a $|JMA\rangle$ vektorok A -ban ortogonálisak, akkor

$$\langle J'M'A' | T | JMA \rangle = (-1)^{J-M} \delta_{JJ'} \delta_{M,-M'} \delta_{AA'}$$

Az, hogy T mátrixára impulzusmomentum-reprezentációban egységes kifejezést találtunk, annak következménye, hogy a /26/ hullám-függvényeket használtuk. Ha a /27/ hullámfüggvényeket használjuk, T mátrixelemére

$\{m$ reprezentációban a /31/ kifejezést kapjuk. Hasonló alaku lesz T mátrixa a spintérben is, ha a T operátor mátrixának a $-\sigma_2$ mátrixot választjuk. Azonban a fentiek mintájára könnyü belátni, hogy ez a mátrixelem-alak nem invariáns az impulzusmomentumok összeadásával szemben, tehát a mátrixelem bonyolultabb esetben függ azoktól az impulzusmomentumoktól, amelyekből J összetevődik.

Mint azt Huby [2] észrevette, a [3]-ban a /31/ mátrixot használták tetszőleges csatolási séma esetén. Ezért [3] képletei között vannak hibásak. Ilyen hibás képletet vett át Blatt és Biedenharn [4]. A [3] és [4] javitott formuláit [2] és [5] közli.

Megjegyezzük még, hogy /33/ helyett gyakran használják a

$$\langle J'M'|T|JM\rangle = (-1)^{J+M}\delta_{JJ'}\delta_{M,-M'} \qquad /35/$$

mátrixot. Ez /33/-al teljesen ekvivalens. Valóban, $\{m$ reprezentációban a két felirásmód között nincs különbség, mert m egész. Ha a T mátrixának a spintérben $+i\sigma_2$-t választjuk, a spintérben is /35/ alaku lesz a mátrixelem. Ezenkivül /35/ invariáns az impulzusmomentumok összeadásával szemben.

9/ Határozzuk még meg a T^2 operátor mátrixát impulzusmomentum-reprezentációban.

$$T|JMA\rangle = (-1)^{J-M}|J-MA\rangle$$

ahol A - "a többi kvantumszám".

$$T^2|JMA\rangle = (-1)^{J-M}T|J-MA\rangle = (-1)^{2J}|JMA\rangle$$

ahonnan

$$\langle J'M'A'|T^2|JMA\rangle = (-1)^{2J}\delta_{JJ'}\delta_{MM'}\delta_{AA'}$$

A T^2 operátor tehát JMA reprezentációban diagonális, és $-I$, ha J félegész, $+I$ ha J egész. Minthogy T^2 lineáris operátor, reprezentációtól függetlenül igaz, hogy

$$T^2 = \pm I$$

attól függően, hogy a rendszert alkotó részecskék között páros, vagy páratlan számu feles spinü részecske található.

Ez az eredmény összhangban van az I/7-ben mondottakkal és nem függ a T -ben levő határozatlan fázisfaktor értékétől.

10/ A $\psi_\alpha(\beta) \equiv \langle\beta|\alpha\rangle$ hullámfüggvény időtükrözöttjén az időtükrözött $|\alpha\rangle$ állapot hullámfüggvényét értjük β reprezentációban:

$$T\psi_\alpha(\beta) = \langle\beta|T|\alpha\rangle$$

A $T\psi_\alpha(\beta)$ meghatározására használhatjuk a T mátrixelemeit akár α, akár β reprezentációban.

Egy tetszőleges állapot időtükrözöttjét β reprezentációban a

$$T\psi_\alpha(\beta) = \sum_{\beta'} \langle\beta|T|\beta'\rangle\langle\beta'|\alpha\rangle^* = c_{T\beta}\langle T\beta|\alpha\rangle^* = c_{T\beta}\,\psi_\alpha^*(T\beta) \qquad /36/$$

összefüggés segitségével kapjuk meg, ahol $T\beta = \pm\beta$, attól függően, hogy a β mennyiség időtükrözéskor változatlan marad, vagy előjelet vált.

Egy adott α állapot időtükrözöttjét tetszőleges reprezentációban a

$$T\psi_\alpha(\beta) = \sum_{\alpha'} \langle\beta|\alpha'\rangle\langle\alpha'|T|\alpha\rangle = c_\alpha\langle\beta|T\alpha\rangle = c_\alpha\,\psi_{T\alpha}(\beta) \qquad /37/$$

összefüggéssel számithatjuk ki, ahol megint $T\alpha = \pm\alpha$.

A /36/ alapján pl.

$$T\psi_\alpha(\mathbf{r}) = \psi_\alpha^*(\mathbf{r})$$

minthogy $c_{\mathbf{r}} = 1$. A $\psi_{lmr}(\beta)$ időtükrözöttjére /37/ alkalmazásával azt találjuk, hogy

$$T\psi_{lmr}(\beta) = (-1)^{l-m}\,\psi_{l,-mr}(\beta)$$

minthogy $c_{lmr} = (-1)^{l-m}$

IV. Néhány alkalmazás

1/ Megmutatjuk, hogy az S mátrix impulzusmomentum-reprezentációban szimmetrikus.

Tekintsük az a_{JMA} és $a_{J'M'A'}$ állapotokat. Időtükrözési invariancia esetén érvényes /21/, tehát

$$(a_{J'M'A'}, S a_{JMA}) = (T a_{JMA}, S T a_{J'M'A'})$$

De /34/ szerint

$$T a_{J'M'A'} = (-1)^{J'-M'}\, a_{J',-M'A'}$$

$$T a_{JMA} = (-1)^{J-M}\, a_{J,-MA}$$

tehát

$$(a_{J'M'A'}, S a_{JMA}) = (-1)^{J'+J-M'-M} (a_{J,-MA}, S a_{J',-M'A'}) \qquad /38/$$

Az impulzusmomentum-megmaradás miatt a mátrixelem csak akkor különbözik zérustól, ha $J'=J, M'=M$ tehát $(-1)^{J'-J-M'-M} = 1$.

Legyen R_π az x-tengely körüli 180°-os forgatás operátora. Az S invariáns a forgatásokkal szemben, azaz

$$R_\pi^+ S R_\pi = S$$

Ezenkivül

$$R_\pi a_{JMA} = (-1)^{J-M} a_{J,-MA}$$

$$R_\pi a_{J'M'A'} = (-1)^{J'-M'} a_{J',-M'A'}$$

ugyanis [6]

$$\langle J'M' | R_\pi | JM \rangle = D^J_{M'M}(0\pi 0) = (-1)^{J+M} \delta_{M,-M'} = (-1)^{J-M} \delta_{M,-M'}$$

Tehát

$$(a_{J,-MA}, S a_{J',-M'A'}) = (a_{J,-MA}, R_\pi^+ S R_\pi a_{J',-M'A'}) =$$

$$= (a_{JMA}, S a_{J'M'A'}) \qquad /39/$$

mert

$$(-1)^{J+J'+M+M'} = 1$$

A /38/ és /39/ alapján

$$(a_{J'M'A'}, S a_{JMA}) = (a_{JMA}, S a_{J'M'A'})$$

tehát az S mátrix valóban szimmetrikus.

2/ Mátrixelemek realitási viszonyai.

Legyen F egy fizikai mennyiség operátora, U pedig egy unitér szimmetria operátor, és valamilyen speciális reprezentációban legyen $U_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}$. Teljesüljenek ezenkivül a következő összefüggések:

$$\text{a.)} \quad \begin{aligned} U^+ F U &= \pm F \\ \tilde{T} F T &= \pm F \end{aligned} \qquad \text{vagy} \qquad \text{b.)} \quad \begin{aligned} U^+ F U &= \pm F \\ \tilde{T} F T &= \mp F \end{aligned}$$

Vizsgáljuk az a.) esetet:

$$F_{\alpha\beta} = \pm \sum U^{+}_{\alpha\gamma} F_{\gamma\delta} U_{\delta\beta} = \pm \sum U^{*}_{\gamma\alpha} F_{\gamma\delta} U_{\delta\beta} =$$

$$= \pm \sum T^{*}_{\gamma\alpha} F_{\gamma\delta} T_{\delta\beta} = \pm \sum \tilde{T}_{\beta\delta} F^{*}_{\delta\gamma} T^{*}_{\gamma\alpha} =$$

$$= \pm (\tilde{T} F T)_{\beta\alpha} = F_{\beta\alpha} = F^{*}_{\alpha\beta}$$

tehát $F_{\alpha\beta}$ valós.

A b.) esetben hasonló módon azt kapjuk, hogy $F_{\alpha\beta}$ képzetes.

$U = P$ Legyen pl. a választott reprezentáció a p reprezentáció, és a tértükrözés operátora:

$$\langle p'|P|p\rangle = \langle p'|T|p\rangle = \delta(p'+p)$$

Minthogy L és r tértükrözésnél és időtükrözésnél ellentétesen transzformálódnak, mátrixelemeik p reprezentációban képzetesek. A Hamilton-operátor mindkét transzformációval szemben invariáns, mátrixelemei tehát p reprezentációban valósak.

Válasszuk most az $\ell m r$ reprezentációt és legyen $U = R_{\pi}$ az x-tengely körüli 180°-os forgatás operátora:

$$\langle \ell' m' r'|R_{\pi}|\ell m r\rangle = \langle \ell' m' r'|T|\ell m r\rangle = (-1)^{\ell - m} \delta_{\ell\ell'} \delta_{m,-m'} \frac{1}{r^2} \delta(r'-r)$$

Az $\ell m r$ reprezentációban x, p_y, p_z és H mátrixelemei valósak, y, z, p_x mátrixelemei képzetesek.

A JMA reprezentációt és $U = R_{\pi}$ operátort választva, azt találjuk, hogy egy forgásinvariáns Hamilton-operátor mátrixeleme JMA reprezentációban valós.

A talált realitási viszonyok természetesen a /26/ hullámfüggvények használata esetén érvényesek.

3/ Az alábbiakban a tértükrözési és az időtükrözési invarianciának a magreakciókban fellépő polarizációra gyakorolt hatását hasonlitjuk össze. Vegyük példaként polarizálatlan neutronok szóródását polarizálatlan magokon.

Legyen p_i a relativ impulzus a kezdeti állapotban. Válasszuk a z -tengelyt p_i -vel párhuzamosnak és legyen az $(y z)$ sik a reakciósik.

Válasszunk ki egy p_f végállapotbeli impulzust és vizsgáljuk a következő mennyiségek átlagértékét:

$$G=(\sigma\hat{p}_f) \qquad /40/$$

$$G=([\hat{p}_f\times[\hat{p}_f\times\hat{p}_i]]\sigma) \qquad /41/$$

$$G=([\hat{p}_f\times\hat{p}_i]\,\sigma) \qquad /42/$$

ahol $\hat{p}=\frac{1}{|p|}p$. A három G a neutron spinoperátorának három komponense: /40/ a p_f irányu, /42/ a reakciósikra merőleges, /41/ pedig erre a kettőre merőleges komponens. Jelöljük mindhárom operátor két lehetséges sajátértékét $\pm g$ -vel.

Legyen $P(g)$ annak valószinüsége, hogy a p_f impulzusu neutron g sajátértékhez tartozzon:

$$P(g)\sim\sum_{m_f m_i \mu}|M(g)|^2 \qquad /43/$$

ahol

$$M(g)=(a_f(p_f m_f g),H_i\Omega_+ a_i(p_i m_i \mu))$$

$$H=H_o+H_i$$

és μ, m_i a neutron és a mag spinvetülete a kezdeti állapotban, m_f a mag spinvetülete a végállapotban.

A /40/ és /41/-ben definiált G -k pszeudoskalárok:

$$P^+GP=-G$$

Megmutatjuk, hogy ennek következtében

$$P(g)=P(-g)$$

azaz a két G operátor átlagértéke zérus, a reakciósikban nincs polarizáció.

Feltesszük, hogy a Hamilton-operátor a tükrözéssel és a forgatással szemben invariáns, tehát

$$H_i\Omega_+=P^+H_i\Omega_+P$$

$$H_i\Omega_+=R_\pi^+H_i\Omega_+R_\pi$$

ahol R_π az x -tengely körüli 180^o-os forgatás operátora.

Felhasználjuk még a következő összefüggéseket:

$$P a_i(p_i m_i \mu) = c_i a_i(-p_i m_i \mu)$$

$$P a_f(p_f m_f g) = c_f a_f(-p_f m_f -g)$$

$$R_\pi a_i(p_i m_i \mu) = d_i a_i(-p_i, -m_i, -\mu)$$

$$R_\pi a_f(p_f m_f g) = d_f a_f(-p_f, -m_f, g)$$

ahol $|c_i|^2 = |c_f|^2 = |d_i|^2 = |d_f|^2 = 1$. A továbbiakban ezeket a fázisfaktorokat elhagyjuk, mert a /43/-ba történő behelyettesitésnél ugyis eltünnek.

A felirt összefüggések segitségével átalakitjuk $M(g)$-t:

$$M(g) = (a_f, H_i \Omega_+ a_i) = (a_f, P^+ H_i \Omega_+ P\, a_i) = (P a_f, H_i \Omega_+ P a_i) =$$

$$= \left(a_f(-p_f, m_f, -g), H_i \Omega_+ a_i(-p_i, m_i, \mu)\right) =$$

$$= \left(a_f(-p_f, m_f, -g), R_\pi^+ H_i \Omega_+ R_\pi a_i(-p_i m_i \mu)\right) =$$

$$= \left(a_f(p_f, -m_f -g), H_i \Omega_+ a_i(p_i, -m_i, -\mu)\right)$$

Ezt /43/-ba helyettesitve és az összegzőindexek előjelét megváltoztatva azt találjuk, hogy $P(g) = P(-g)$, tehát a reakciósikban valóban nem lép fel polarizáció.

A reakciósikra merőleges polarizáció létrejöttét - mint azt a fentiekhez hasonló gondolatmenettel könnyü észrevenni, - a paritás-megmaradás nem tiltja meg.

Ha a G -k időtükrözési tulajdonságát vizsgáljuk, látjuk, hogy /40/ és /41/ időtükrözésnél változatlan marad, mig /42/ előjelet vált. Vajon az, hogy /42/ időtükrözésnél előjelet vált, nem tiltja-e meg a reakciósikra merőleges polarizációt, ahhoz hasonlóan, ahogy /40/ és /41/ előjelváltása tértükrözésnél megtiltja a polarizációt a reakciósikban.

Vizsgáljuk tehát /42/-t:

$$\tilde{T} G T = -G$$

Minthogy

$$\tilde{T} H_i T = H_i\,; \quad \tilde{T} \Omega_+ T = \Omega_-$$

azt találjuk, hogy

$$H_i \Omega_+ = \tilde{T} H_i \Omega_- T$$

Ezenkivül

$$Ta_i(p_i m_i \mu) = a_i(-p_i, -m_i, -\mu)$$

$$Ta_f(p_f, m_f, g) = a_f(-p_f, -m_f, -g)$$

ahol a fázisfaktorokat megint elhagytuk.

$$\begin{aligned} M(g) &= (a_f, H_i \Omega_+ a_i) = (a_f, \tilde{T} H_i \Omega_- T a_i) = \\ &= (H_i \Omega_- T a_i, T a_f) = (T a_f, H_i \Omega_- T a_i)^* = \\ &= \left(a_f(-p_f, -m_f, -g), H_i \Omega_- a_i(-p_i, -m_i, -\mu)\right)^* \\ &= \left(a_f(-p_f, -m_f, -g), R_\pi^+ H_i \Omega_- R_\pi a_i(-p_i, -m_i, -\mu)\right)^* = \\ &= \left(a_f(p_f, m_f - g), H_i \Omega_- a_i(p_i, m_i, \mu)\right)^* \neq M^*(-g) \end{aligned} \qquad /44/$$

mert $\Omega_- \neq \Omega_+$.

Tehát a T -invariancia nem tiltja meg a reakciósíkra merőleges polarizáció létrejöttét.

Ha a H_i kölcsönhatás olyan gyenge, hogy a Born közelités alkalmazható, akkor /44/-ben $\Omega_+ = \Omega_- = 1$ helyettesithető. Ebben a közelitésben $M(g) = M^*(-g)$ és igy polarizáció nem lép fel.

Meggondolásaink nem érvényesek akkor, ha H_i abszorpciót is leir, tehát optikai potenciál:

$$H_i = U\left[1 + i\eta\right] + \alpha(\sigma L)$$

ugyanis

$$\tilde{T} H_i T = U\left[1 - i\eta\right] + \alpha(\sigma L) \neq H_i$$

Az előbbi levezetést megismételve azt találjuk, hogy Born közelitésben a reakciósikra merőleges polarizáció η -val arányos.

A tárgyalt példából azt az általános következtetést vonhatjuk le, hogy mig a paritás-megmaradás ellenőrizhető ugy, hogy egy pszeudoskalár mennyiség átlagértékét mérjük a végállapotban, addig az időtükrözési invariancia ellenőrzése egy időtükrözéssel szemben páratlan mennyiség átlagértékének mérése utján csak akkor lehetséges, ha eleve tudjuk, hogy az első Born közelités alkalmazható.

4/ Ha valamilyen átmenetet tárgyalhatunk Born közelitésben, akkor az átmenetet a kölcsönhatási Hamilton-operátor mátrixeleme irja le, és impulzusmomentum-reprezentációban ez a mátrixelem valós. A mátrixelem realitási viszonyairól azonban olyan esetekben is kaphatunk felvilágositást, amikor a Born közelités nem alkalmazható.

Tekintsünk példaként a $\Lambda \to n + \pi$ bomlást. Az átmenetet létesitő V kölcsönhatást tárgyalhatjuk Born közelitésben, az U mezon-nukleon kölcsönhatást azonban nem. Az átmeneti mátrixelem a következő [7] :

$$M_{ab} = \left(b(jm\ell), \Omega_-^+ V a(jm)\right)$$

ahol Ω_- a mezon-nukleon szórás operátora és igy csak U -tól függ. Természetesen $j = |m| = \frac{1}{2}$, $\ell = 0,1$. Az ℓ mindkét értéket felveheti, ugyanis a bomlás során a paritás nem marad meg. Ha feltételezzük a T -invarianciát:

$$\left(b(jm\ell), \Omega_-^+ V a(jm)\right) = \left(b(jm\ell), \tilde{T}\Omega_+^+ V T a(jm)\right) =$$

$$= \left(Tb(jm\ell), \Omega_+^+ V T a(jm)\right)^*$$

Az $\Omega_\pm$ operátorok általában nem unitérek [7] :

$$\Omega_\pm \Omega_\pm^+ = 1 - \sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| \qquad /45/$$

ahol az $|\alpha\rangle$ állapotok a $H_0 + U$ operátor kötött sajátállapotai. A /19/ és /45/ képletek alapján

$$\Omega_+^+ = \Omega_+^+\left[\Omega_- \Omega_-^+ + \sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|\right] = S^+\Omega_-^+ + \sum_\alpha \Omega_+^+ |\alpha\rangle\langle\alpha| = S^+\Omega_-^+$$

mert $\Omega_+^+|\alpha\rangle = 0$ [7] . Igy

$$M_{ab} = \left(Tb(jm\ell), S^+\Omega_-^+ V T a(jm)\right)^* =$$

$$= \left(Tb(jm\ell), S^+ Tb(jm\ell)\right) \left(Tb(jm\ell), \Omega_-^+ V T a(jm)\right)^*$$

ugyanis S a $jm\ell$ reprezentációban diagonális.*/ Az S mátrix invarianciája következtében

$$\left(Tb(jm\ell), S^+ Tb(jm\ell)\right) = \left(b(jm\ell), S b(jm\ell)\right) = e^{2i\delta_{j\ell}}$$

Igy

$$M_{ab} = e^{2i\delta_{j\ell}} \left(Tb(jm\ell), \Omega^+ V T a(jm)\right)^*$$

Minthogy

$$\Omega_-^+ V = -R_\pi^+ \Omega_-^+ V R_\pi$$

*/ Az egyszerüség kedvéért eltekintünk attól, hogy a kimenő csatornában reakció történhet, pl. $n + \pi^0 \to p + \pi^-$.

$$R_{\pi}Tb(jm\ell)=(-1)^{2j}b(jm\ell)$$

$$R_{\pi}Ta(jm\ell)=(-1)^{2j}a(jm)$$

ezért

$$M_{ab}=e^{2i\delta_{j\ell}}M_{ab}^{*} \qquad /46/$$

tehát

$$M_{ab}=\pm e^{i\delta_{j\ell}}|M_{ab}|$$

Az M_{ab} realitási viszonyait tehát egyedül a $\delta_{j\ell}$ fázisok határozzák meg.

5/ Az előző példában feltettük, hogy a Λ -hiperon egy csatornán keresztül bomlik és azt találtuk, hogy ebben az esetben a bomlási mátrixelem realitási viszonyait a végállapotbeli részecskék rugalmas ütközése szabja meg. Vegyük most tekintetbe azt, hogy a keletkező részecskék különböző reakciókban vehetnek részt. A Λ -hiperon pl. valójában bomolhat a

$$\Lambda \longrightarrow n+\pi^{0}$$

$$\Lambda \longrightarrow p+\pi^{-}$$

csatornákon keresztül és ugyanakkor a végállapotban a rugalmas szóráson kivül végbemehet az

$$n+\pi^{0} \rightleftarrows p+\pi^{-}$$

reakció.

Vizsgáljuk a problémát általánosan. Legyen a a bomló rendszer adott jm -hez tartozó állapotvektora, b_i $(i=1,\dots N)$ pedig az i -k csatornának megfelelő végállapot. A bomlást magát tárgyaljuk megint Born-közelitésben. Legyen M_i az i -k csatornán keresztül történő bomlás mátrixeleme:

$$M_i=(b_i,\Omega_-^{+}Va)$$

A 4/ példához hasonlóan V a bomlásért felelős Hamilton-operátor, Ω_- pedig a végállapotbeli részecskék kölcsönhatását leiró, V -t nem tartalmazó operátor. Az időtükrözési invariancia következtében

$$M_i=(b_i,\Omega_-^{+}Va)=(b_i,\tilde{T}\Omega_+^{+}VTa)=$$

$$=(Tb_i,\Omega_+^{+}VTa)^{*}$$

Az m -nek $-m$ -re változásától a forgatásokkal szembeni invariancia miatt eltekinthetünk, ezért

$$Tb_i = (-1)^{J-M} b_i$$

$$Ta = (-1)^{J-M} a$$

Ha még figyelembe vesszük a korábban levezetett $\Omega_+^\dagger = S^+ \Omega_-^\dagger$ összefüggést, kapjuk, hogy

$$M_i = (b_i, \Omega_+^\dagger V a)^* = (b_i, S^+ \Omega_-^\dagger V a)^* =$$

$$= \sum_j (b_i, S^+ b_j)^* (b_j \Omega_-^\dagger V a)^* = \sum_j S_{ji} \cdot M_j^*$$

ahol

$$S_{ji} \equiv (b_j, S b_i)$$

Az időtükrözési invariancia tehát az átmeneti mátrixelemek között az

$$M_i = \sum_j S_{ji} M_j^* \qquad /47/$$

összefüggésre vezet. Ez /46/ általánositása sok csatorna esetére.

A /47/ összefüggés elvben lehetővé teszi, hogy kiszámithassuk az M_i mátrixelemek fázisát, ha ismerjük az $|M_i|$ abszolut értékeket és az S_{ji} mátrixelemeket. Vezessük be az S -mátrix helyett a K -mátrixot:

$$S = \frac{1 + \frac{1}{2} i K}{1 - \frac{1}{2} i K}$$

Szorozzuk meg /47/ jobb- és baloldalát $(1 - \frac{1}{2} iK)_{i\ell}$ -el és összegezzünk i -re:

$$\sum_i M_i (1 - \tfrac{1}{2} iK)_{i\ell} = \sum_j \left[\sum_i S_{ji} (1 - \tfrac{1}{2} iK)_{i\ell} \right] M_j^*$$

Nyilván

$$\sum_i S_{ji} (1 - \tfrac{1}{2} iK)_{i\ell} = (1 + \tfrac{1}{2} iK)_{j\ell}$$

ezért

$$\sum_i M_i (\delta_{i\ell} - \tfrac{1}{2} i K_{i\ell}) = \sum_i M_i^* (\delta_{i\ell} + \tfrac{1}{2} i K_{i\ell})$$

Abból, hogy az S -mátrix impulzus-momentum reprezentációban szimmetrikus, következik, hogy a K -mátrix ugyanebben a reprezentációban valós és szimmetrikus, tehát $K_{i\ell}^* = K_{i\ell}$. Ezért

$$\sum_i M_i (\delta_{i\ell} - \tfrac{1}{2} i K_{i\ell}) = \text{valós}$$

tehát

$$\mathrm{Im} \left[\sum_i M_i (\delta_{i\ell} - \tfrac{1}{2} i K_{i\ell}) \right] = 0$$

Ide az $M_i = |M_i|(\cos\varphi_i + i\sin\varphi_i)$ kifejezést irva a fázisokra kapunk egyenletrendszert, amelyben ismert mennyiségként $|M_i|$ és K_{il} szerepel.

6/ Az instabil részecskék bomlását okozó gyenge kölcsönhatás nem invariáns a C töltéskonjugálással szemben, ezért egy részecske és a megfelelő antirészecske bomlásának nem kell feltétlenül azonos módon történnie. Lüders és Zumino [8] megmutatták, hogy pusztán a CPT invariancia következményeként a részecske és az antirészecske élettartama megegyezik. A CPT invariancia azonban nem elegendő ahhoz, hogy az egyes csatornákon keresztül történő bomlás relativ valószinüsége a részecske és az antirészecske esetén megegyezzen egymással. Ezt fogjuk most belátni.

A bomló részecske és a végállapotok adott jm -hez tartozó állapotvektorai legyenek megint a , illetve b_i , a megfelelő töltéskonjugált állapotok pedig a' és b_i' . Legyen $\Theta \equiv CPT$ és $M_i' = (b_i', \Omega_-^+ V a')$ az antirészecske i -k csatornában történő bomlását leiró mátrixelem.

CPT invariancia esetén

$$\Omega_-^+ V = \tilde{\Theta}\, \Omega_+^+ V \Theta$$

és egy 180^o-os forgatástól eltekintve

$$\Theta b_i' = \beta_i b_i$$

$$\Theta a' = \alpha \cdot a$$

$$|\alpha|^2 = |\beta_i|^2 = 1$$

Az M_i' -t ezek alapján átalakithatjuk a már alkalmazott eljárás segitségével:

$$M_i' = (b_i', \Omega_-^+ V a') = (b_i', \tilde{\Theta}\Omega_+^+ V \Theta a') =$$

$$= \beta_i \alpha^* (b_i, \Omega_+^+ V a) = \beta_i \alpha^* \sum_j S_{ji} \cdot M_j^*$$

tehát

$$M_i' = \beta_i \alpha^* \sum_j S_{ji} M_j^* \qquad /48/$$

A /48/ összefüggésből általában nem következik az

$$|M_i'|^2 = |M_i|^2 \qquad /49/$$

egyenlőség, kivéve azt a speciális esetet, amikor a bomlási csatornák között nincs átmenet, azaz $S_{ij} \sim \delta_{ij}$. A CPT -invariancia csak ebben az esetben vezet ahhoz, hogy a részecske és az antirészecske azonos valószinüséggel bomlik a megfelelő töltéskonjugált csatornákon keresztül.

Ha a CPT invariancián kivül még külön T -invariancia is van, akkor /48/ mellett a /47/ képlet is érvényes. Ez utóbbit /48/-ba helyettesitve az

$$M_i' = \beta_i \alpha^* M_i$$

összefüggésre jutunk és ebből már következik /49/. CPT és T -invariancia, azaz CP -invariancia esetén tehát a részecskék és az antirészecskék azonos módon bomlanak éppen ugy, mint ha létezne külön C -invariancia.

Köszönet illeti Frenkel Andort a problémakör részletes megbeszéléséért.

- . -

I r o d a l o m

[1] Wigner: Group Theory

[2] Huby: Proc.Phys.Soc. 67A, 1103 /1954/

[3] Wigner, Eisenbund: Phys.Rev. 72, 29 /1947/

[4] Blatt, Biedenharn: Rev.Mod.Phys. 24, 258 /1952/

[5] Балдин, Голданский: Кинематика ядерных реакций

[6] Edmonds: CERN 55-26, Geneva, 1955.

[7] Gell-Mann, Goldberger: Phys.Rev. 91, 398 /1953/

[8] Lüders, Zumino: Phys.Rev. 106, 385 /1957/

Érkezett: 1963. dec. 5.
KFKI Közl. 12.évf. 1. szám, 1964.