A relativitáselmélet alapjai

2017-ben az ELTE Doktori iskoláján elhangzott előadások diái

Hraskó Péter

1. A speciális relativitáselmélet első posztulátuma

A két posztulátum:

1. **A fénysebesség minden inerciarendszerben minden irányban ugyanazzal a *c*-vel egyenlő és független a fényforrás sebességétől;**

2. **A fizika törvényei minden inerciarendszerben egyformák.**

Ebben a fejezetben az első posztulátumról lesz szó.

Az első posztulátum állításai nem matematikai természetű posztulátumok, hanem *reális kísérletekre* vonatkozó kijelentések.

Következmény: Koordinátarendszerről (és „a távoli órák szinkronizációjáról”) az első posztulátummal kapcsolatban nem lehet szó, mert koordinátarendszer csak a képzeletünkben létezik, se a laboratóriumban, se máshol sem realizálható (gondoljunk a gömbi koordinátarendszerre, amelyben a bolygómozgást írjuk le). A koordinátarendszer ugyanis több, mint három egymásra merőleges tengely, mert a koordinátavonalak mindenütt sűrűn behálózzák a teret.

FONTOS TERMINOLÓGIAI KÖVETKEZMÉNY:

A posztulátumban szereplő inerciarendszeren nem szabad koordinátarendszert érteni.

Az inerciarendszer a *vonatkoztatási rendszerek* kategóriájába tartozik, amelyek olyan reálisan létező (vagy legalább is létezőként elgondolható) objektumokat értünk, amelyekhez a mozgást ténylegesen viszonyítjuk (labor, vasúti kocsi, űrhajó, stb).

Az inerciarendszer olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben érvényes a tehetetlenség törvénye: A hozzá képest nyugvó testek nyugalomban maradnak, a benne nyugvó giroszkópok megtartják a hozzá viszonyított tengelyirányukat.

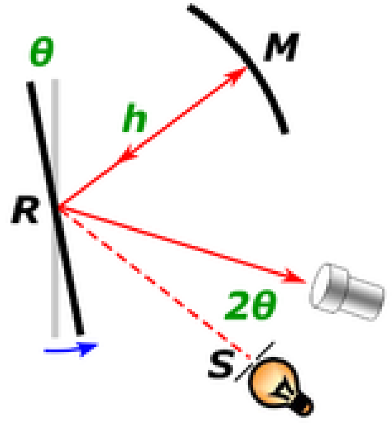
Az inerciarendszer állandó példája az egyenletesen haladó vasúti kocsi.

Az első posztulátum azt mondja ki, hogy ha az inerciarendszerekben (különböző sebességgel haladó vasúti kocsikban) *a kísérleti fizikában elfogadott módon* megmérjük a fénysebességet, minden irányban ugyanazt a *c* számot kapjuk.

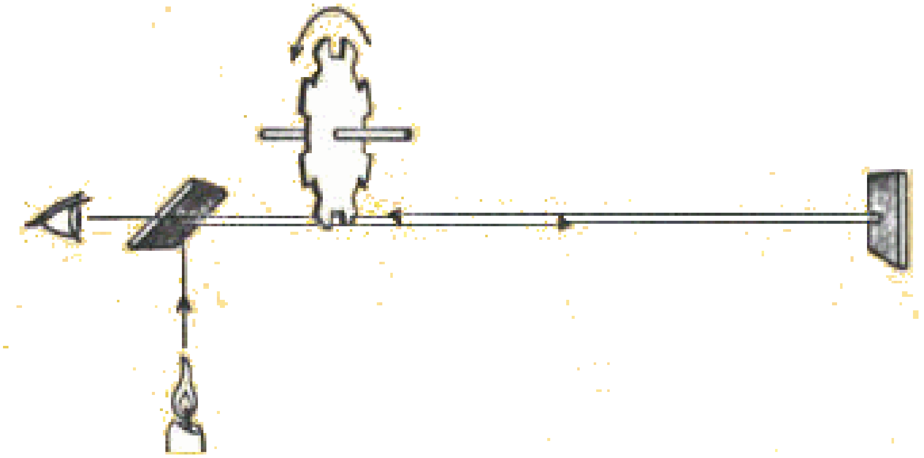
Ma már Foucault és Fizeau klasszikus kísérleteit tényleg el lehetne végezni egy vasúti kocsiban. AZ ELSŐ POSZTULÁTUMMAL KAPCSOLATBAN ILYEN KÍSÉRLETEKET KELL SZEM ELŐTT TARTANI.

A fénysebesség mérése:

Foucault forgótükrös módszere:



Fizeau forgótárcsás módszere:



Ezekben a klasszikus kísérletekben oda-vissza úton mérjük a fénysebességet. De ez csak a mérési pontosság növelését célozza, mert nincs elvi akadálya, hogy a fénysebességet bármilyen irányban megmérjük. Egy ilyen mérés sémáját látjuk a következő dián.

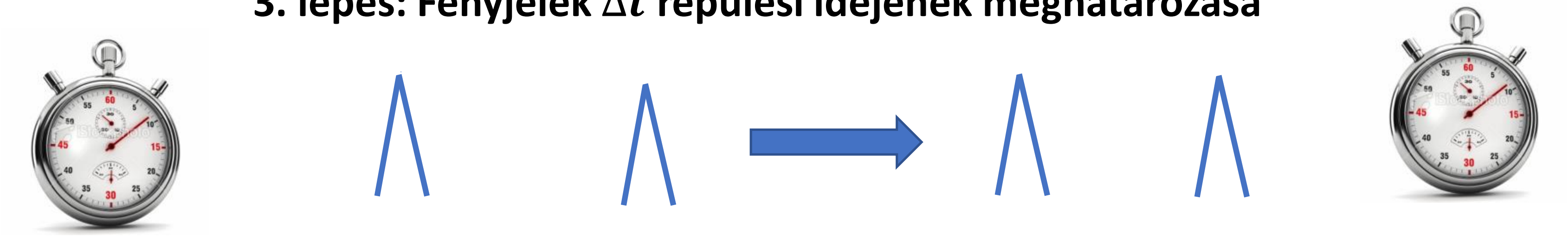
A fénysebesség mérése a → irányban két szimmetrikusan széthelyezett óra segítségével, amelyek egy jeladóra és vevőre vannak felszerelve.

1. lépés: Szinkronizálás egy helyen

2. lépés: Szimmetrikus széthelyezés l távolságra

P   Q

3. lépés: Fényjelek Δt repülési idejének meghatározása

P  Q

4. lépés: A fénysebesség kiszámítása az $l/\Delta t$ képlet alapján

Figyeljük meg pontosan, hogyan használjuk az órákat ezekben a valóságosan végrehajtható kísérletekben.

Foucault és Fizeau kísérletében *egyetlen órát* kellett használni, ezt is csak akkor, amikor a tükör ill. a fogaskerék szögsebességét bekalibrálták.

A harmadik kísérlethez két egyforma óra szükséges, amelyeket azonos állásba kell hozni (szinkronizálni kell egymással) *amikor egymás mellett állnak* (az Einstein-féle eljárás egymástól távoli órák szinkronizációjára vonatkozik).

Arról szó sincs, hogy ezeknek az óráknak valamiféle *rendszeridőbe* kellene illeszkedniük, mint pl. a vasútállomások óráinak, amelyeknek mindenütt pontosan ugyanazt az időt kell mutatniuk.

Ezekben a valóságosan elvégezhető kísérletekben természetesen valóságos órákkal dolgoznak. A kísérletek elvi jelentőségének az analízise szempontjából azonban ezeket olyan *ideális órák* többé-kevésbé sikerült realizációjának tekintjük, amelyek tökéletesen egyforma ritmusban járnak és immunisak minden külső behatással szemben.

Az első posztulátum a fényről két dolgot is állít:

(1) a sebessége minden inerciarendszerhez képest minden irányban ugyanakkora;
(2) nem függ a fényforrás sebességétől.

Önmagában véve egyik állítás se különösebben megdöbbentő, de a kettő együtt rendkívül paradoxális.

Ha a (2) nem lenne, akkor a fényjel a pisztolygolyóhoz lehetne hasonló, és (1) nyilvánvalóan teljesülne.
A korpuszkuláris fényelmélet ezt sugallaná.
Michelson 1913-as kísérlete és a kettős csillagok viselkedése azonban alátámasztja, hogy a fénysebesség nem függ a fényforrás sebességétől.

Ha (1) nem lenne, akkor a hullámelmélet segítene, mert a hullámok sebessége nem a forrásukhoz, hanem a terjedés közegéhez képest állandó.

A fényhullámok közege − az éter − azonban önellentmondó tulajdonságokkal rendelkező tisztán hipotetikus entitás (pl. a bolygók súrlódásmentesen mozognak benne).

Az első posztulátum *közvetlen* kísérleti ellenőrzése gyakorlatilag megvalósíthatatlan, mert nem állnak rendelkezésünkre olyan inerciarendszerek, amelyek relatív sebessége összemérhető lenne a fénysebességgel.

Egyedül a Michelson-Morley kísérlet sorolható ebbe a kategóriába, de a vonatkoztatási rendszerek relatív sebessége ebben a kísérletben csak kb. 60 km/s, a fénysebesség 0,2 ezreléke. A Föld keringési sebessége ugyanis 30 km/s, a pálya két szemközti pontján a relatív sebesség ennek kétszerese.

A relativitáselmélet rendkívüli teljesítőképessége alapján azonban aligha kételkedhetünk benne, hogy ha egyszer lehetőség lesz az első posztulátum meggyőző kísérleti ellenőrzésére, az eredmény összhangban lesz vele. Ezért az egyszerűség kedvéért a továbbiakban úgy tekintjük, hogy a tapasztalat igazolja az első posztulátum érvényességét.

2. A speciális relativitáselmélet második posztulátuma

Emlékeztetünk: A 2. posztulátum szerint fizika törvényei minden inerciarendszerben egyformák.

Az első posztulátummal ellentétben itt már alapvető szerepet játszanak a koordináták. Ennek az az oka, hogy a második posztulátum nem megfigyelések eredményeire, hanem törvényekre vonatkozik.

Példa: Az egyik Maxwell-egyenlet

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

A koordinátarendszert ezért úgy kell *elgondolnunk*, hogy az inerciarendszert kijelölő objektum nyugodjon hozzá képest. Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy a második posztulátum olyan koordinátarendszerekben érvényes, amelyeket inerciarendszerekhez *rögzítünk*.

A jelenség geometriája szempontjából csak a távolságnak van jelentősége, nem a koordinátarendszernek. Ez a szempont tünteti ki a lehetséges koordinátarendszerek közül a derékszögű koordinátarendszert, amelyben a legegyszerűbb a távolság koordináta-különbségeken keresztül kifejezett alakja:

$$l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

A relativitáselméletben a minőségi újdonság *az idő tulajdonságainak a feltárása*.

Mit kell pontosan érteni a *t*-n a tömegpont mozgását leíró

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

egyenletben?

Ennek a képletnek az értelme az, hogy ha akarnánk, akkor a térben sűrűn elhelyezhetnénk ideális órákat, és amikor a test tartózkodási helyén lévő óra *t* időt mutat, akkor ez a tartózkodási hely éppen a képlet által meghatározott koordinátákkal rendelkezik.

A fizika törvényeiben szereplő *t* időt tehát a térben sűrűn széthelyezett nyugvó ideális órák mutatnák, ha valóban ott volnának. Mivel valójában nincsenek ott, ezeket az órákat a továbbiakban *virtuálisaknak* fogjuk nevezni.

Ideálisak lévén ezek az órák mind pontosan ugyanabban a ritmusban járnak, de hogyan vannak egymáshoz képest *szinkronizálva*?

A newtoni szinkronizálás: Az összes órát egy közös helyen szinkronizáljuk egymással, majd a térben sűrűn széthelyezzük őket. A feltételezett ideális voltuk biztosítja, hogy a mozgatásuk közben a szinkronizáltságuk változatlan marad. De tényleg így van-e? (Ld. a 21. diát.)

Einstein alapvető felismerése: A két posztulátum a szinkronizálást egyértelműen rögzíti.

(1) Az első posztulátum szerint tapasztalatilag a fénysebesség minden inerciarendszerben minden irányban ugyanaz a *c*. Ez egyáltalán nem függ a *t* időt mutató virtuális óráktól.

(2) A második posztulátum szerint a Maxwell-egyenletek minden inerciarendszerben azonos matematikai alakban érvényesek.

(3) Ezekből az egyenletekből belátható, hogy a fénysebesség minden irányban ugyanazzal az $1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ -al egyenlő.

Ezek az állítások együtt csak akkor igazak, ha a *t* időt mutató virtuális órák *úgy vannak szinkronizálva*, hogy a fényjelek minden irányban ugyanazzal a *c* sebességgel terjednek, vagyis egyenletük a következő:

$$x = l \cdot c \cdot t \qquad y = m \cdot c \cdot t \qquad z = n \cdot c \cdot t \qquad (\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} = 1)$$

amelyben *l. m* és *n* az iránykoszinuszok *(Einstein-féle szinkronizálás)*.

Teljes félreértés lenne azt gondolni, hogy a fénysebesség állandóságát és izotrópiáját az Einstein-féle szinkronizálási eljárással *kényszerítjük ki*. Éppen ellenkezőleg. Ezek a tulajdonságok teszik *lehetővé és célszerűvé* ezt a szinkronizálási eljárást.

3. A kétfajta idő

Mozogjon egy óra az

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

trajektórián. A pálya *t* és *t + Δt* időponthoz tartozó pontjai között mennyi $\Delta\tau$ idő telik el rajta?

Ebben a fejezetben a *t* és a τ időnek a *fogalmáról* lesz szó, az összefüggésüket a következő fejezetben tárgyaljuk.

Terminológia: A *t* a *koordinátaidő*, a τ *a sajátidő.*

A koordinátaidő elnevezés nagyon szerencsés, mert

(1) a mozgás grafikus ábrázolásánál a *t*-tengely a koordinátatengelyek egyike;
(2) a *t* időt mutató órák ugyanúgy csak a képzeletünkben „vannak ott”, mint a koordinátavonalak;
(3) a térkoordináták különféle választásának a szinkronizálás különféle lehetőségei felelnek meg. A továbbiakban mindig az Einstein-féle szinkronizálást tételezzük fel.

A τ *sajátidő* legfontosabb *nyilvánvaló* sajátossága, hogy *független a koordinátarendszer megválasztásától (invariáns).*

Az első posztulátumban kizárólag sajátidőről van szó.

A tömegpont sajátideje a tömegponthoz rögzített(nek képzelt) ideális órán eltelt idő.
Következmény: A fényjelhez nem rendelhető sajátidő, csak koordinátaidő.

Két esemény időbeli sorrendje:

Legyen a két esemény *E* és *E'*. Ha létezik olyan (pontszerű) mozgó test, amely mindkét eseménynél „jelen van", akkor a két eseménynek van határozott időbeli sorrendje: Az, ahogy a mozgó testen követik egymást (időszerű eseménypár).

A két eseménynek akkor is határozott időbeli sorrendje van, ha fényjel „köti össze" őket egymással (fényszerű eseménypár): A fényjel forrásánál lévő esemény megelőzi a fényjel észlelésénél lévőt.

Ha a két esemény olyan gyorsan követi egymást, hogy még fényjellel se „köthetők össze", akkor egyik esemény se későbbi a másiknál, ezért ebben a tág (de abszolút) értelemben egyidejűek (térszerűek).

A térszerű E, E' eseménypárok <u>koordinátaidő</u> szerinti egyidejűsége relatív: Bizonyos inerciarendszerekben E, másokban E' történik előbb. És lesz egy olyan inerciarendszer, amelyben egyidejűek: $t_{E'} = t_E$.

Einstein vonatos gondolatkísérlete:

Tegyük fel, hogy egy vonat középpontjában fényfelvillanás történik, amelynek hatása a vonat elején és végén egy-egy robbanást vált ki. Ez a két robbanás az *E* és az *E'*.

Annak következtében, hogy *tapasztalatilag* (1. posztulátum!) a fény a vonathoz és az állomáshoz képest is mindkét irányban ugyanazzal a sebességgel terjed,

(a) a vonat nyugalmi rendszerében a robbanások egyidejűek,

(b) az állomás nyugalmi rendszerében a vonat végén a robbanás előbb történik, mint az elején.

4. A kétfajta idő kapcsolata

Konstans sebességgel mozgó test pályájának két pontja között $\boldsymbol{\Delta t}$ koordinátaidő telik el. Mennyi $\boldsymbol{\Delta\tau}$ sajátidő telik el ezalatt a testen?

$$\boldsymbol{\Delta\tau = F(\Delta t, v, c)}$$

Követelmények az *F* függvénnyel szemben:

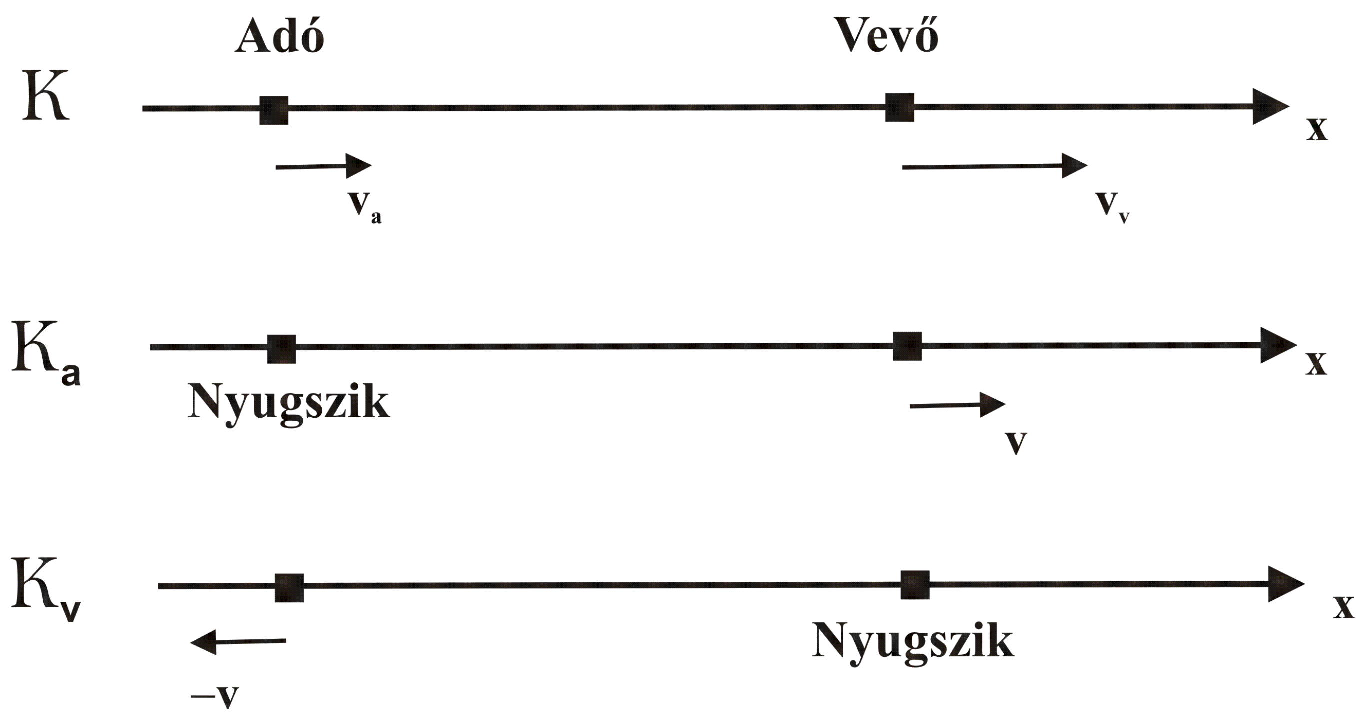
(a) $\boldsymbol{F(\Delta t, 0, c) = \Delta t}$;
(b) A fizikai dimenziója legyen *sec;*
(c) $\boldsymbol{F(\Delta t, -v, c)}$ = $\boldsymbol{F(\Delta t, v, c)}$.

$$\boldsymbol{F(\Delta t, v, c) = \Phi(v^2/c^2)\cdot\Delta t,\ \ \text{amelyben}\ \Phi(0) = 1}.$$

$$\boldsymbol{\Delta\tau = \Phi(v^2/c^2)\cdot\Delta t}$$

A feladat az egyváltozós Φ függvény megtalálása.

Módszer: Az optikai Doppler-effektus párhuzamos analízise az általános *K* koordinátarendszerből, valamint az adó ill. a vevő $\boldsymbol{K_a}$ és $\boldsymbol{K_v}$ nyugalmi rendszeréből nézve.



K-ban az adó v_a , a vevő v_v sebességgel mozog (távolodnak egymástól).

A *v* a vevő *relatív sebessége* az adóhoz képest –*v* pedig az adó relatív sebessége a vevőhöz képest.

Az adó Δt_a időközönként kibocsát egy éles fényimpulzust, amelyet a vevő Δt_v időközönként regisztrál:

$$\Delta t_v = \Delta t_a - \frac{\Delta x_a}{c} + \frac{\Delta x_v}{c} = = \Delta t_a - \frac{v_a}{c}\Delta t_a + \frac{v_v}{c}\Delta t_v$$

(A következő jelet az adó a vevőhöz Δx_a-val közelebbről indítja, de a vevő közben Δx_v-vel távolabbra kerül.)

$$\frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \frac{1 - v_a/c}{1 - v_v/c}$$

Doppler-arány (*DA*) = a vevő által megfigyelt és az adó által kibocsátott periódusidők hányadosa.

Állítás: $$DA \neq \frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \frac{1 - v_a/c}{1 - v_v/c} \qquad (*)$$

Igazolás: Tegyük fel, hogy DA a jobboldali törttel egyenlő, és alkalmazzuk ezt a képletet az adó, majd a vevő nyugalmi rendszerében:

$$DA_a = \frac{1}{1 - v/c} \qquad DA_v = 1 + v/c \qquad (**)$$

Ezek nyilván nem egyenlők, pedig egyenlőknek kellene lenniük, hiszen az adó és a vevő nyugalmi rendszere két egyenértékű inerciarendszer. Ez az ellentmondás igazolja a $(*)$ egyenlőtlenséget.

Az *akusztikai* Doppler-effektusban (**) érvényes, mert K_a és K_v két fizikailag különböző szituációra vonatkozik: Az első esetben az adó, a másodikban a vevő nyugszik a *levegőhöz* képest (amelyben a hangsebesség minden irányban *c*).

A Doppler-arány helyes matematikai megfogalmazása a következő:

$$DA = \frac{\Delta\tau_v}{\Delta\tau_a}$$

$$DA_a = \frac{\Phi(v^2/c^2)}{\Phi(0)} \cdot \frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \Phi \cdot \frac{1}{1 - v/c}$$

$$DA_v = \frac{\Phi(0)}{\Phi(v^2/c^2)} \cdot \frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \frac{1}{\Phi} \cdot (1 + v/c)$$

De ennek a két kifejezésnek ugyanazzal a *DA*-val kell egyenlőnek lennie. Az egyenlítésükből kapjuk meg a *Φ* függvényt:

$$\boldsymbol{\Phi = \sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$$

Ha ezt a Φ-t visszahelyettesítjük akár DA_a akár DA_v képletébe, megkapjuk *DA* mindkét inerciarendszerben érvényes formuláját:

$$\boldsymbol{DA = \sqrt{\frac{1+v/c}{1\ -v/c}}}$$

Most már könnyen megkaphatjuk a Doppler-arányt abban a *K* inerciarendszerben is, amelyben az adó is, a vevő is mozog:

$$\boldsymbol{DA} = \frac{\Delta\tau_v}{\Delta\tau_a} = \frac{\Phi(v_v^2/c^2)}{\Phi(v_a^2/c^2)} \cdot \frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \frac{\sqrt{1-v_v^2/c^2}}{\sqrt{1-v_a^2/c^2}} \cdot \frac{1-v_a/c}{1-v_v/c} = \sqrt{\frac{1+v_v/c}{1-v_v/c} \cdot \frac{1-v_a/c}{1+v_a/c}}$$

Az elsődleges célunk azonban a

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

képlet megkeresése volt.

A képlet azt fejezi ki, hogy az einsteini előírásnak megfelelő koordinátaidőhöz képest a mozgó testeken az idő lelassul. Ez az *idődilatáció.*

Ez a képlet sugallja, hogy a testek sebessége nem haladhatja meg a fénysebességet.

Visszatérünk az optikai Doppler-effektushoz.

A newtoni fizikában a jelenség egyedüli oka az adó és a vevő közötti távolság folyamatos változása.

A relativitáselméletben ehhez még társul az idődilatáció.

De a relativitáselmélet szerint a Doppler-effektusnak van olyan változata is, amikor *csak az idődilatáció* számít: Ez a *tranzverzális Doppler-effektus* (szembeállítva a *longitudinálissal*).

A tranzverzális Doppler-effektus tiszta formában akkor figyelhető meg, amikor a vevő körpályán kering az adó körül. A newtoni $DA_t = \frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = 1$, a relativisztikus pedig a következő:

$$DA_t = \frac{\Phi(v^2/c^2)}{\Phi(0)} \cdot \frac{\Delta t_v}{\Delta t_a} = \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

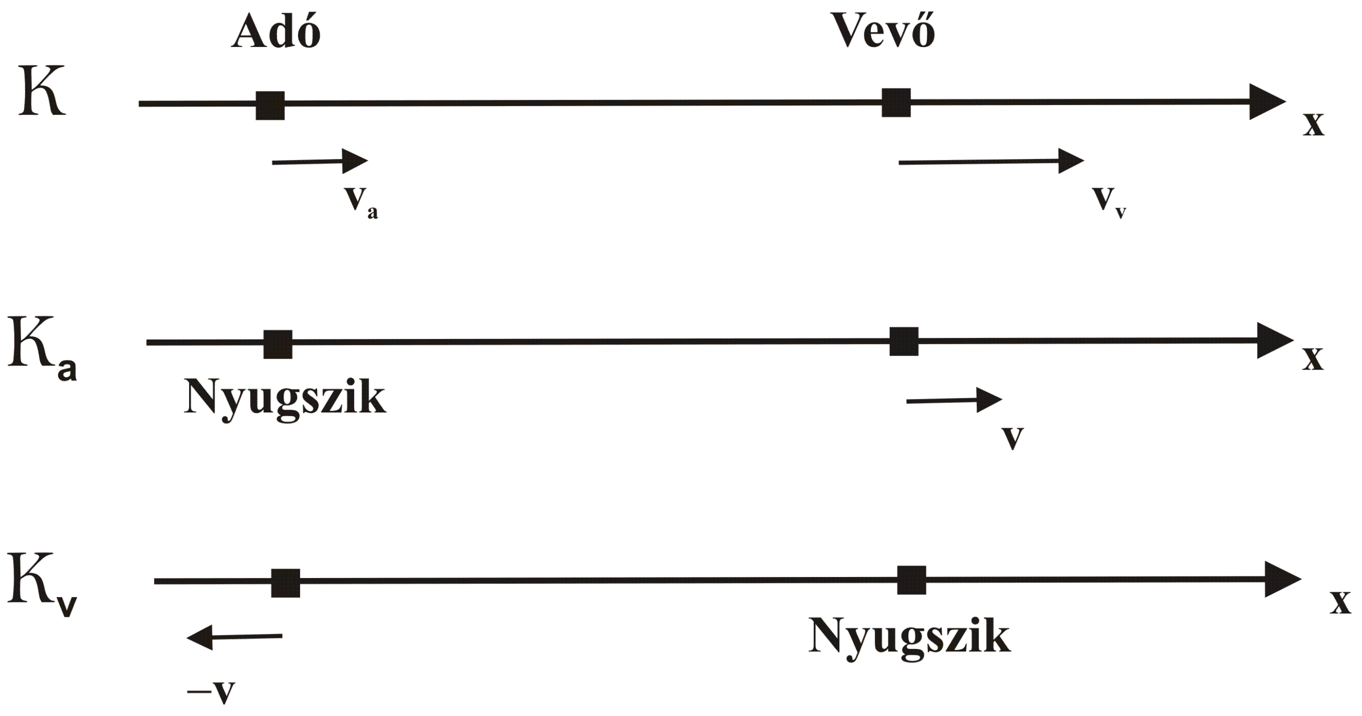
Az óraparadoxon (ikerparadoxon): **Két találkozás között a testeken különböző sajátidő telik el, mert az**

$$\int_{t_1}^{t_2} dt' \sqrt{1 - v^2(t')/c^2}$$

integrál értéke függ a pályától.

A 2. fejezetben tárgyalt „newtoni szinkronizálás” (10. dia) az ikerparadoxon miatt hibás: Ha az órákat az eredeti közös helyre visszavisszük, nem mutatják ugyanazt az időt. Az 5. dián azonban a szimmetrikus mozgatás nem rontja el az órák szinkronizáltságát.

5. A relatív sebesség és a sebességösszeadás



Kérdés: Hogyan fejezhető ki a *v* relatív sebesség a v_a-n és a v_v-n keresztül?

Azt kell kihasználni, hogy a *DA* ugyanaz, akár K-ban, akár K_a-ban, akár K_v-ben számítjuk ki.

A 19.dia két képletének egyenlítéséből (összevetéséből):

$$DA = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} = \sqrt{\frac{1+\ v_v/c}{1-\ v_v/c}\cdot\frac{1\ -\ v_a/c}{1+\ v_a/c}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{c}\left(\frac{v_v - v_a}{1-\frac{v_a v_v}{c^2}}\right)}{1-\frac{1}{c}\left(\frac{v_v - v_a}{1-\frac{v_a v_v}{c^2}}\right)}}$$

Átjelölés: $v_a \to\ v_1, v_v \to\ v_2$.

A 2. test relatív sebessége az 1.-hez képest: $$v = \frac{v_2 - v_1}{1 - v_2 v_1/c^2}$$ $(Ha\ v_2 = c$, *akkor* $v = c)$

A sebességösszeadás képlete: $$v_2 = \frac{v_1 + v}{1+\ v_1 v/c^2}$$ $(Ha\ v = c$, *akkor* $v_2 = c)$

Amikor a két sebesség nem kollineáris, a relatív sebesség és a sebességösszeadás képletét Lorentz-transzformáció (8. feladat) segítségével lehet megtalálni.

A relativitáselméletben a relatív sebesség képlete azért nem azonos a newtoni $v = v_2 - v_1$-el, mert az 1. test K_1 nyugalmi rendszerének koordinátaideje különbözik annak a K-nak a koordinátaidejétől, amelyben a sebességek v_1-el és v_2-vel egyenlő. Ezt az egyidejűség relativitása bizonyítja a legvilágosabban.

A $v_2 - v_1$ különbség fizikai értelme a relativitáselméletben: A két test közötti távolság növekedésének üteme K–ban.

Igazolás: $x_2 = v_2 t + x_{20}$ $\qquad$ $x_1 = v_1 t + x_{10}$

$$\Delta x \equiv x_2 - x_1 = (v_2 - v_1)t + (x_{20} - x_{10})$$

$$\frac{d\Delta x}{dt} = v_2 - v_1$$

6. A gyorsulásdeficit

Előkészítő feladat: **Egy v egyenletes sebességgel mozgó vonaton ülő utas hirtelen feláll és elindul a *vonathoz képest* Δv_0 sebességgel menetirányba. Mekkora Δv –vel nőtt meg a sebessége a *pályatesthez képest*?**

A sebességösszeadás törvénye alapján

$$v + \Delta v = \frac{v + \Delta v_0}{1 + v \cdot \Delta v_0 / c^2} \rightarrow \Delta v < \Delta v_0 \qquad (*)$$

Kulcsmondat: Az utas sebességnövekedése nagyobb a saját *nyugalmi rendszeréhez* képest, mint egy olyan rendszerhez képest, amelyhez képest mozgásban van.

A tárgyalandó probléma: **A vonat gyorsul. A vonatvezető ül a helyén, de érzi a gyorsulást, amelynek az értéke egy adott pillanatban a gyorsulásmérője szerint a_0-lal egyenlő. Mekkora a vonat a gyorsulása a pályatesthez képest?**

Nyilván $a = \frac{dv}{dt}$, de milyen képlet fejezi ki a_0-t, és hogyan számíthatjuk ki a és a_0 kapcsolatát?

Fizikai kép: A vonat a kiválasztott *t* pillanatig a konstans *v(t)* $\equiv$ *v*, a *t+dt* pillanat után pedig a konstans *v(t+dt)* $\equiv$ *v + dv* sebességgel mozog. A *dt* koordinátaidő alatt a vonatvezető óráján $d\tau$ sajátidő telik el, a sebessége pedig önmagához képest dv_0-lal változik meg, amely a (*) képlet szerint függ össze *dv*-vel. Ennek alapján $a_0 = \frac{dv_0}{d\tau}$.

A számítás: A dv és a dv_0 kapcsolata a (*) szerint a következő:

$$v + dv = \frac{v + dv_0}{1 + v \cdot dv_0/c^2}$$

A geometriai sor képletét felhasználva

$$v + dv = (v + dv_0)(1 - v \cdot dv_0/c^2 + \dots) \cong v + (1 - v^2/c^2)dv_0$$

$$dv = (1 - v^2/c^2)dv_0$$

$$a = \frac{dv}{dt} = (1 - v^2/c^2)\frac{dv_0}{dt} = (1 - v^2/c^2)\frac{d\tau}{dt} \cdot \frac{dv_0}{d\tau} = (1 - v^2/c^2) \cdot \sqrt{(1 - v^2/c^2)}\,a_0$$

A pályatestről megfigyelt *a koordináta gyorsulás* és az a_0 *sajátgyorsulás* közötti kapcsolat tehát a következő:

$$a = (1 - v^2/c^2)^{3/2} a_0 \qquad (**)$$

Mint látjuk, $a < a_0$. Ez a képlet fejezi ki a *gyorsulásdeficitet.* A newtoni fizikában nincs gyorsulásdeficit, mert $dv = dv_0$ és $d\tau = dt$, és ennek következtében $a = a_0$.

Vegyük észre: nem használtuk ki, hogy a vonat sebessége a (*t,t+dt*) intervallumon kívül konstans. Adjuk meg az a_0 definícióját enélkül a szükségtelen kikötés nélkül.

Mozogjon a K inerciarendszerben egy tömegpont gyorsulva az *x*-tengely mentén. A *t* pillanatban legyen a sebessége *v(t)*, a gyorsulása pedig *a(t)*. Tekintsük most az a K_0 inerciarendszert, amely a *konstans v(t)* sebességgel halad. A *t* pillanatban a test nyugalomban lesz K_0-hoz viszonyítva, ezért K_0-at a *t-beli pillanatnyi nyugalmi rendszernek* hívjuk. Az a_0 sajátgyorsulás nem más, mint a test K_0-beli gyorsulása, az *a* pedig a *K*-beli koordináta gyorsulása.

Mivel mindez az *x*-tengely mentén történik, ezért az előző dia $(**)$ képletét így is írhatjuk:

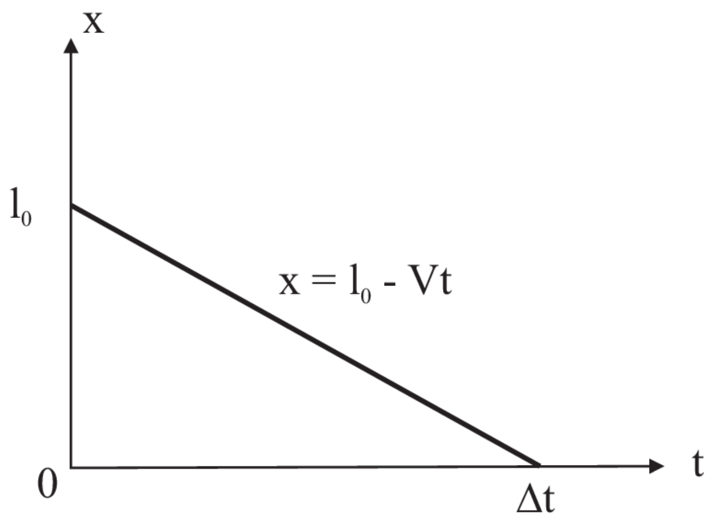
$$\boldsymbol{a_x = (1 - v^2/c^2)^{3/2} a_{0x}}.$$

A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy amikor a mozgás nem egyenesvonalú, akkor az a_x *longitudinális* gyorsuláson kívül általában van a_y és a_z *tranzverzális* gyorsulás is. A Lorentz-transzformáció segítségével megmutatható, hogy

$$\boldsymbol{a_y = (1 - v^2/c^2) a_{0y} \qquad a_z = (1 - v^2/c^2) a_{0z}}.$$

A továbbiakban csak a longitudinális gyorsulásról lesz szó, mert csak ez változtatja a sebesség nagyságát, és a legfontosabb elvi kérdések ezzel függenek össze.

A sajátgyorsulást a tömegponttal együttmozgó gyorsulásmérő folyamatosan mutatja, ezért a sajátgyorsulás független a koordinátarendszer választásától (invariáns). Ebben hasonlít a sajátidőhöz, amelyet egy együttmozgó óra mutat.



7. A Lorentz-kontrakció

Az egyetlen hosszú kocsiból álló mozgó *vonat l* hosszát úgy mérhetjük meg, hogy a töltésen állva egy stopperrel megmérjük, mennyi idő alatt haladt el mellettünk, és a kapott időtartamot megszorozzuk a vonat sebességével.

A vonaton utazók a vonat hosszát l_0-nak találják.

Milyen kapcsolat van a két hosszúság között?

A „mi" pályánk a vonaton ülők nézőpontjából (az *x*-tengely menetirányba mutat, a vonat vége az *x = 0* pont, az eleje az $x = l_0$ pont).

$$\boldsymbol{l \overset{a}{\overset{\frown}{=}} V \cdot \Delta\tau \overset{b}{\overset{\frown}{=}} V \cdot \Delta t \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2} \overset{c}{\overset{\frown}{=}} l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

a) A mozgó vonat hosszának a definíciója.
b) A vonaton utazók koordinátaideje szerint eltelt Δt idő és a „mi" stopperünkön mért $\Delta\tau$ sajátidőtartam kapcsolata.
c) A vonaton ülők azt tapasztalják, hogy „mi" $V = l_0/\Delta t$ sebességgel haladunk a vonathoz képest a vonat elejétől a végéig, ezért $V \cdot \Delta t = l_0$.

Megjegyzés: Nyilvánvaló, hogy a mozgásra merőleges méretek nem kontrahálódnak (5. feladat).

8. A Newton-egyenlet relativisztikus általánosítása

Eddig kizárólag a relativitáselmélet *kinematikájáról* volt szó. Ezzel a fejezettel térünk át a *dinamikára*.

Kiindulópont: Amikor $\mathbf{v} \ll c$ az $m\vec{a} = \vec{F}$ Newton-egyenlet biztosan érvényes. Ezt úgy építjük be az elméletbe, hogy feltesszük: A K_0 *pillanatnyi nyugalmi rendszerben* (amelyben a sebesség zérus, ld. a 27. diát), a Newton-egyenlet *pontosan* teljesül: $m_0\vec{a_0} = \vec{F_0}$.

Ezután már csak *ki kell fejezni* a K_0-ra vonatkoztatott három mennyiséget a tetszőleges K-ban érvényes értékeiken keresztül.

A lényeget már az egyenesvonalú (*x*-tengely menti) mozgás megvilágítja. Ekkor $m_0 a_0 = F_0$.

1. **A gyorsulás átírási szabályát már ismerjük: $a_0 = \dfrac{a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}$.**
2. **Az F_0 átírási szabálya függ az erő természetétől. A elektromágneses erő esetére Einstein ezt már az első cikkében tisztázta. Speciálisan *x*-irányú elektromos térben *e* ponttöltésre $F_0 = eE_0 = eE = F$.**
3. **A tömeg átírása új posztulátumot igényel. Einstein a legtermészetesebbet választotta: $m_0 = m$.**

A relativisztikus mozgásegyenlet tetszőleges *K*-ban érvényes alakja tehát a következő:

$$ma = (1 - v^2/c^2)^{3/2} F$$

Következtetés: Ugyanaz az erő a relativitáselméletben kisebb gyorsulást okoz, mint a newtoni fizikában. Ennek az oka a gyorsulásdeficit (nem pedig az, hogy a test tömege nő a sebességgel). Amikor $v \to c$, a gyorsulás nullához tart, és a test sohase éri el a fénysebességet.

9. A mozgási energia és az impulzus

Egy *v* sebességű test *K mozgási energiája* azzal a munkával egyenlő, amit a testre ható erő végez, miközben a kezdetben nyugvó testet *V* sebességre gyorsítja fel.

Newton:

$$K = \int_0^S F ds = \int_0^T F v \cdot dt = m \int_0^T a \cdot v \cdot dt = m \int_0^T \frac{dv}{dt} \cdot v \cdot dt = m \int_0^V dv \cdot v = \frac{1}{2} m V^2$$

Einstein:

$$K = \int_0^S F ds = \int_0^T F v \cdot dt = m \int_0^T \frac{a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \cdot v \cdot dt = m \int_0^V \frac{dv \cdot v}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - mc^2$$

Amikor $v \to c$, a relativitáselméletben a mozgási energia végtelenhez tart. A gyorsulásdeficit tehát növeli a mozgási energiát, mert az adott sebességet hosszabb úton lehet csak elérni, mint amikor a gyorsulásdeficit nulla. Ez az oka annak, hogy az adott *v*-hez tartozó mozgási energia a relativitáselméletben nagyobb, mint a newtoni fizikában.

Amikor $\frac{V^2}{c^2} \ll 1$, $\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \approx 1 + V^2/2c^2$, ezért ebben a *nemrelativisztikus határesetben* $K = \frac{1}{2} m V^2$.

Az impulzus definíciója: Írjuk át a mozgásegyenletet $\frac{dp}{dt} = F$ alakba. Impulzusnak azt a *p* mennyiséget nevezzük, amelyet a baloldalon az idő szerint deriválunk.

Speciálisan a newtoni fizikában $p = mv$, de _nem ez_ az impulzus általános definíciója.

Az $a = \frac{dv}{dt}$ definíció következtében az $\frac{ma}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = F$ relativisztikus mozgásegyenlet a közvetett deriválás $\frac{d}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{d}{dv} = a\frac{d}{dv}$ szabálya alapján a következő alakban is felírható:

$$\frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = F$$

Ez $\frac{dp}{dt} = F$ alakú, ezért a relativitáselméletben

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Nemrelativisztikus határesetben $p = mv$.

Fontos: A *v* sebességgel mozgó test tömege _nem egyenlő_ $m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ -tel, mert

1) **az impulzust nem a tömeg$\times$sebesség képlet definiálja és**
2) **korábban már _kihasználtuk_, hogy a tömeg független a sebességtől, ezért most nem jelenthetjük ki ennek az ellenkezőjét.**

10. A nyugalmi energia és a tömeg-energia reláció

A kinetikus energia képlete két tagból áll: $$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2$$

Van-e önálló fizikai jelentése az első és a második tagnak külön-külön?

A válaszhoz először az E_0 *belső energia* fogalmát kell tisztázni: az E_0 belső energián a *nyugvó testben* felhalmozott különböző természetű (hő, kémiai, elektromágneses, nukleáris, szubnukleáris, stb) energiák összegét értjük. Ezért az E_0-t *nyugalmi energiának* is nevezzük. Ennek a definíciónak az alapján azonban E_0-t nem tudjuk se kiszámítani, se megmérni, mert ehhez túl keveset tudunk az anyag szerkezetéről. Legfeljebb a belső energia ΔE_0 *megváltozásáról* tehetünk határozott kijelentéseket abban az esetben, ha elég jól ismert energia fajtával (pl. hőenergiával) kapcsolatos.

Ezt a helyzetet változtatja meg gyökeresen az

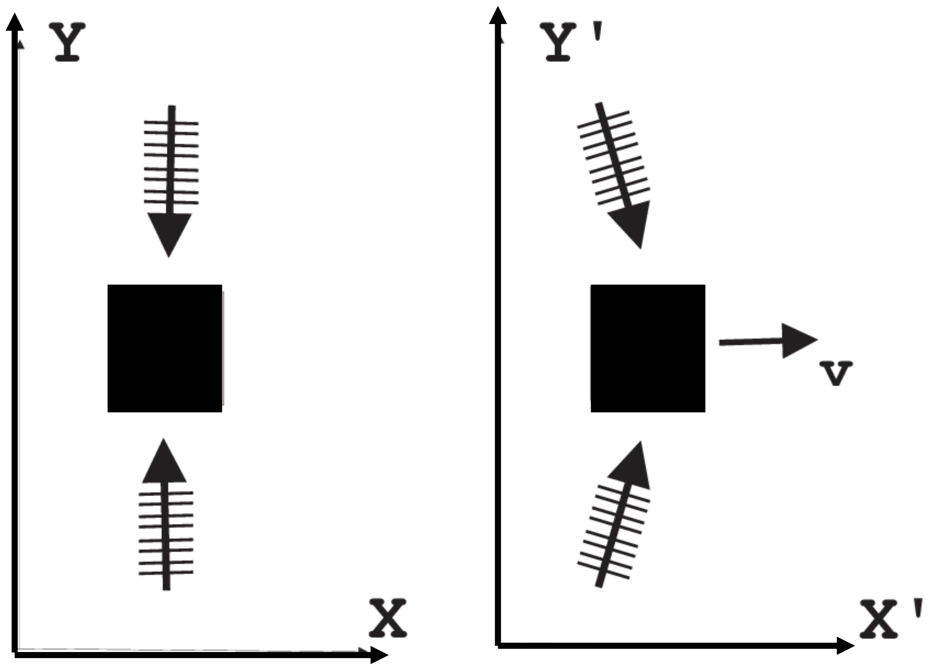
$$\boxed{E_0 = mc^2}$$

tömeg-energia reláció.

Fontos megjegyzések:

- **A tömeg nem *egyike* az energia fajtáknak, hanem a fentebb felsorolt energia fajták *közös mértéke*.**
- **A tömeg-energia reláció csak a belső (nyugalmi) energiára érvényes, a mozgási energiára nem. Mivel nyugvó foton nem létezik, a fotonokra se alkalmazható.**

A tömeg-energia reláció igazolása:



1. Egy test nyugszik az *XY* koordinátarendszerben. Két egyforma ellentétes irányú elektromágneses hullámcsomag esik rá, amelyeket abszorbeál. A csomagok energiája ε, az impulzusuk *ε/c.* A test nyugalomban marad, belső energiájának megváltozása $\Delta E_0 = 2\varepsilon$.

2. *Ugyanezt a folyamatot* nézzük a tetszőlegesen kis *v* sebességgel *–X* irányban mozgó *X'Y'* koordinátarendszerből, amelyhez képest a test +*v* sebességgel mozog a hullám-csomagok elnyelése *előtt és után egyaránt*. Az impulzusa azonban az elnyelt csomagok impulzusának *X* komponen-sével megnőtt, azaz $\Delta p = 2\cdot \varepsilon/c \cdot v/c = \Delta m \cdot v$ ($v \to 0$-nál az impulzus a tömeg és a sebesség szorzata a relativitáselmé-letben is). A test tömege tehát $\Delta m = 2\varepsilon/c^2$-tel megnőtt.

3. De láttuk, hogy $2\varepsilon = \Delta E_0$ ezért $\Delta m = \Delta E_0 / c^2$ és ez a tömeg-energia reláció differenciális alakja.

A speciális relativitáselméletben csak a $\Delta E_0 = \Delta m \cdot c^2$ differenciális alak igazolható közvetlenül a posztulátumok alapján, de az $E_0 = mc^2$ annyira jól illeszkedik az elmélet egészébe, hogy már ennek alapján biztosak lehetünk az érvényességében. Később ezt a képletet kísérletben is igazolták (36. dia). A delták nélküli $E_0 = mc^2$ képlet az általános relativitáselmélet keretei között igazolható elméletileg.

A $K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2$ mozgási energia képletében tehát a második tagnak *van* önálló fizikai jelentése: az E_0 belső energia negatívja.

Eszerint az $\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ első tag jelentése a mozgási és a belső energia $K + E_0$ összege, vagyis az *E teljes energia:*

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = K + E_0$$

Fontos figyelmeztetés: A tömeg-energia reláció nem alkalmazható magára az $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ teljes energiára, mert

1) **a tömeg-energia relációt *nyugvó testre* vezettük le, ezért csak az E_0 nyugalmi energiára érvényes, és**
2) **a mozgásegyenlet levezetésénél kihasználtuk, hogy a *v* sebességgel mozgó test tömege *nem* $\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, hanem m.**

Tapasztalati igazolás:

1) A $\Delta E_0 = \Delta m \cdot c^2$ igazolása deuteronra a $d + \alpha \rightarrow p + n + \alpha'$ magreakció segítségével:

a) Nyugvó deuteront bombázunk különböző energiájú alfa-részecskékkel. A deuteron dezintegrációja csak akkor következik be, ha az alfa-részecske energiája meghalad egy bizonyos küszöbértéket. Ennek az az oka, hogy a deuteronban a proton és a neutron *kötési energiája* $\Delta E_0 \approx$ 3.561·10^{-13} J = 2.226 MeV -el egyenlő. Ennyivel kisebb a deuteron belső energiája, mint két egymástól távol nyugvó proton és neutron belső energiájának összege: $\Delta E_0 = E_{0p} + E_{0n} - E_{0d}$. A ΔE_0 számértéke tehát *a magreakció* kísérleti vizsgálata alapján határozható meg.

b) A $\Delta m \equiv m_p + m_n - m_d$ *súlyméréssel* történő meghatározásához szükséges pontosság becslését megkönnyíti, ha a részecskék tömegét energia-egységben (vagyis a nyugalmi energiájukkal) adjuk meg: $m_p \approx m_n \approx$ 1000 Mev = 1 GeV.

A víz (H_2O) és a nehézvíz (D_2O) molekulájának tömege eszerint kb. 18 és 20 GeV, a különbségük kb. 2 Gev. Milyen pontossággal kell a két anyag súlyát megmérni ahhoz, hogy ki lehessen mutatni a proton és a deuteron tömegkülönbségében 2×2.226≈4.5 Mev eltérést? Ehhez néhány ezrelékes pontosság elegendő, ami elérhető (4.5MeV/2GeV$\approx 2 \cdot 10^{-3}$).

2. Az $E_0 = mc^2$ reláció igazolása nyugvó pozitrónium annihilációjából: $(e^- e^+) \rightarrow 2\gamma$.

Az elektron m_e tömegét jól ismerjük, mert ismerjük a töltését, valamint a mozgását elektromágneses térben: $m_e \approx$ 0.5 MeV. A pozitron az elektron antirészecskéje, ezért a tömege egyenlő az elektronéval. A pozitrónium tömege eszerint m≈1 MeV.

A pozitrónium E_0 nyugalmi energiája a két gamma-foton energiájával egyenlő, amely jól mérhető.

A két független kísérletben kapható *m* és E_0 eleget tesz az $E_0 = mc^2$ relációnak (vagyis a két gamma-foton összenergiája kb. 1 MeV).

Gondolatkísérletek a tömeg-energia reláció illusztrálására:

1) Ha egy testet melegítünk, nő a súlya (tömege).
2) A feltöltött akku (elem, kondenzátor) súlya nagyobb, mint a töltetlené.
3) A megfeszített rugó súlyosabb, mint a megfeszítetlen.

Jól látszik: *Nem a tömegnek van energiája, hanem az energiának van tömege*.

A legfontosabb alkalmazások:

- **Radioaktív bomlás: A bomló mag nyugalmi energiája *nagyobb*, mint a bomlástermékeké. A különbség a bomlástermékek mozgási energiájává alakul át.**
- **Maghasadás: Egy nehéz atommag nyugalmi energiája *nagyobb*, mint két közepes atommagé, amelyekre széthasad (atomreaktor).**
- **Fúzió: $d + t \rightarrow \alpha + n + 17.6\ Mev$ (fúziós reaktor, energiatermelés csillagokban)**

11. A tömegmegmaradás problémája

Az előző két dián analizált $d + \alpha \rightarrow p + n + \alpha'$ és $(e^- e^+) \rightarrow 2\gamma$ folyamatban a tömeg nem marad meg: $m_d < m_p + m_n$ és $m_{pozitronium} > 2m_\gamma = 0$.

Az ok az $E_0 = mc^2$ reláció, amely szerint a tömeg a részecskék *belső energiájával* arányos, és ezekben a folyamatokban csak az *E* = $\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ teljes energiának kell megmaradnia, a belső energiáknak külön nem.

Abban a jelenségkörben azonban, amely a newtoni fizika alapjául szolgál, a testek belső energiája vagy egyáltalán nem változik (pl. az égi mechanikában), vagy ha változik is, a tömegváltozás elhanyagolhatóan kicsi a résztvevő tömegekhez képest. Ezért a tömeg nagy pontossággal (de csak közelítően!) megmarad.

A 35. dián láttuk, hogy a deuteronban a proton és a neutron kötési energiája 2.226 MeV. Az ehhez tartozó tömegváltozás ugyan kicsi, de 10^{-3} pontosságú mérésben kimutatható. Azonban ez magfizikai folyamat, amellyel a fizika a 20. századig nem találkozott.

A kötési energia korábban a kémiában fordult elő. A deuteronhoz legközelebb eső kémiai példa a két hidrogénatom kötési energiája a hidrogén molekulában, amely 4.5 eV. Ez hat nagyságrenddel kisebb a deuteron kötési energiájánál, ezért a hozzá tartozó tömegváltozás kimutatása legalább 10^{-9} pontosságú tömegmeghatározást igényelne. A newtoni fizika ezt a változást tekinti nullának, vagyis ilyen pontossággal érvényes a newtoni jelenségkörben a tömegmegmaradás törvénye.

A tömegmegmaradás newtoni törvényéhez még ma is sokan ragaszkodnak annak a hibás elképzelésnek az alapján, hogy a tömeg-energia reláció nemcsak az E_0 nyugalmi energiára, hanem az *E* = $\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ teljes energiára is érvényes.

A $d+\ \alpha\ \rightarrow p+n+\ \alpha'$ magreakció példáján bemutatva az érvelésük a következő: Ebben a reakcióban érvényes az energiamegmaradás tétele: $E_d+\ E_\alpha=\ E_p+\ E_n+\ E_{\alpha'}$. Ha ezt a korrekt egyenletet végigosztjuk c^2-tel és minden tagra alkalmazzuk a tömeg-energia relációt, akkor *látszólag* az $m_d+\ m_\alpha=\ m_p+\ m_n+\ m_{\alpha'}$ tömegmegmaradásra jutunk. De ez hibás érvelés, mert az E/c^2 hányados csak *nyugvó* objektumoknál egyenlő a tömegükkel, márpedig ez a reakció mozgó részecskékkel megy végbe. Az így kapható tömegek nem is a valódi konstans tömegek, hanem sebességfüggő u.n. „mozgási tömegek” (ezért pl. $m_\alpha\neq m_{\alpha'}$), és ez ellentmond a tömeg sebességfüggetlenségéről szóló (a mozgásegyenlet levezetésénél ki is használt) feltevésünknek.

A lemondás a tömegmegmaradásról valószínűleg sokak számára azért nem fogadható el, mert a tömeg fogalmát azonosítják az anyag fogalmával, pedig ez két különböző fogalom. Azt gondolják, hogy ha a tömeg nem marad meg, akkor veszélybe kerül az a tétel, hogy „az anyag nem vész el, csak átalakul”.

A tömeg *terminus technicus,* azzal a mennyiséggel egyenlő, amely a Newton-egyenletben a gyorsulást szorozza. Az elektromágneses mezőhöz pl. nem rendelhető tömeg, mert a Maxwell-egyenletekben nem fordul elő gyorsulás. Ennek ellenére az elektromágneses mezőt is az anyag egy formájának tekintjük. Az $(e^-e^+)\rightarrow 2\gamma$ elektron-pozitron annihilációban pl. tömeges anyag alakul át tömeg nélküli elektromágneses sugárzássá. Mindkét objektum anyagi természetű, de csak az egyik rendelkezik tömeggel: az anyag nem vész el, csak átalakul.

12. Feladatok

1) **Egy kerékpáros *v* sebességgel hajt egy országút egyenes szakaszán. Az országúttal párhuzamos vasúti töltésen l_0 nyugalmi hosszúságú vonat jön vele szembe, amelynek a sebessége *V*. Mennyi idő alatt halad el a kerékpáros a vonat mellett a saját karórája szerint?**

A newtoni fizika válasza: $\boldsymbol{l_0/(V+v)}$

Válasszunk koordinátarendszert! A legtermészetesebb a vasúti töltéshez rögzített rendszer *(K)*.

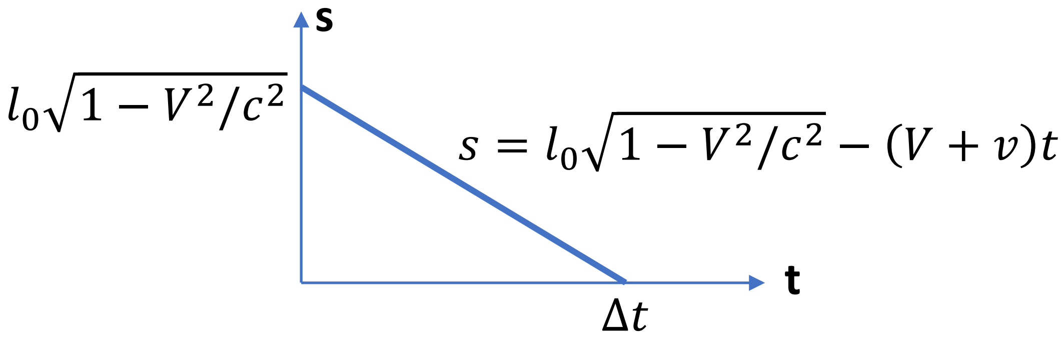
Milyen messze van a vonat vége a biciklistától, amikor ez éppen eléri a vonatot? $l_0\sqrt{1-V^2/c^2}$ **távolságra.**

Milyen ütemben csökken a távolság (*s*) a biciklista és a vonat vége között? $\boldsymbol{V+v}$ **sebességgel.**

Mennyi idő alatt csökken ez a távolság nullára? $\frac{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{V+v}$ **idő alatt.**

Ez koordinátaidő vagy sajátidő?

Koordinátaidő: $\Delta \boldsymbol{t} = \frac{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{\boldsymbol{V+v}}$



Ez a válasz a feladatban feltett kérdésre? **Nem, a biciklista óráján eltelt *sajátidőt* keressük.**

Akkor írjuk fel a megoldást: $\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{l_0\sqrt{1-v^2/c^2}\cdot\sqrt{1-V^2/c^2}}{V+v}$

Oldjuk meg a feladatot a vonathoz rögzített koordinátarendszerben is (*K'*)! A biciklista sebességét *K'*-ben jelöljük v'-vel.

Mennyi ideig teker a biciklista a vonat mellett? l_0/v' **ideig.**

Ez koordinátaidő vagy sajátidő? **Koordinátaidő:** $\Delta t' = l_0/v'$

Ez a válasz a feltett kérdésre? **Nem, sajátidőt keresünk, ezért a válasz** $\Delta\tau' = l_0 \frac{\sqrt{1-v'^2/c^2}}{v'}$

Az előző dián $\Delta\tau = l_0 \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}\cdot\sqrt{1-V^2/c^2}}{V+v}$ **-t kaptunk. Baj, ha ez nem ugyanakkora, mint** $\Delta\tau' = l_0 \frac{\sqrt{1-v'^2/c^2}}{v'}$ **?**

Baj, mert a biciklista óráján eltelt idő nem függ attól, hogyan választjuk a koordinátarendszert (*invariáns*). Ellenőrizzük!

$v' = \frac{v+V}{1+vV/c^2}$. **Helyettesítsük ezt** $\Delta\tau'$ **képletébe és a** $\Delta\tau$ **képletét megcélozva szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt**

$(1+vV/c^2)$**-tel:**

$$\Delta\tau' = l_0 \frac{\sqrt{(1+vV/c^2)^2(1-v'^2/c^2)}}{V+v}.$$

De $(1+vV/c^2)^2 v'^2 = (V+v)^2$**, ezért (ld. a 9. feladatot is a magyarázatért)**

$$\Delta\tau' = l_0 \frac{\sqrt{(1+vV/c^2)^2-(V+v)^2/c^2)}}{V+v} = l_0 \frac{\sqrt{1-v^2/c^2}\cdot\sqrt{1-V^2/c^2}}{V+v} = \Delta\tau.$$

Egyenlő-e Δt és $\Delta t'$?

Nem egyenlők egymással, mert $\Delta\tau = \Delta\tau'$-ből következik, hogy $\Delta t \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$ = $\Delta t' \cdot \sqrt{1 - v'^2/c^2}$ és ezért

$$\frac{\Delta t}{\Delta t'} = \sqrt{\frac{1 - v'^2/c^2}{1 - v^2/c^2}} \neq 1.$$

Baj ez? **Nem baj , mert a koordinátaidő a koordinátarendszer része, amelyet minden koordinátarendszerben különböző (virtuális) órák mutatnak. A vonat végpontjainak koordinátakülönbsége se ugyanaz *K*-ban és *K'*-ben: $\Delta x = l_0 \cdot \sqrt{1 - V^2/c^2},\ \Delta x' = l_0$. Einstein vonatos gondolatkísérletének (az egyidejűség relativitásának) is a $\Delta t' \neq \Delta t$ egyenlőtlenség a lényege.**

2) Einstein vonatos gondolatkísérlete (14.dia): Tegyük fel, hogy egy vasúti kocsi középpontjában fényfelvillanás történik, amelynek hatása a vonat elején és végén egy-egy robbanást vált ki. A vonat nyugalmi hossza l_0, a pályatesthez (*K*) viszonyított sebessége V. Mekkora az időkülönbség a két robbanás között a vonat K_0 nyugalmi rendszerében és *K*-ban?

Mekkora az időkülönbség K_0-ban? **Nulla, mert a fény a K_0-ban mindkét irányban *c*-vel egyenlő.**

Ez koordinátaidő vagy sajátidő? **Koordinátaidő: $\Delta t_0 = 0$.**

És mennyi sajátidő telik el a két esemény között? **A $\Delta\tau_0$ nincs értelmezve, mert az eseménypár térszerű (13.dia).**

A *K*-ban a két robbanás nem egyidejű. Miért? **Mert a fénysebesség *K*-ban is mindkét irányban *c*, de a vonat vége közeledik a fényjel felé, az eleje pedig távolodik tőle. Ezért a robbanás a vonat végén előbb történik, mint az elején.**

A különbség koordinátaidőben vagy sajátidőben értendő? **Koordinátaidőben:** $\Delta t = \Delta t_e - \Delta t_v$.

Hogyan fejezhetjük ki Δt_e-t *V*-n és l_0-on keresztül?
Mekkora a távolság a vonat eleje és középpontja között a fényjelek kibocsátásának pillanatában? $\frac{1}{2} l_0 \sqrt{1 - V^2/c^2}$

Ez milyen ütemben csökken? ***c*-*V* sebességgel.** **Mekkora a Δt_e?** $\Delta t_e = \frac{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}{2(c-V)}$.

Hogyan fejezhetjük ki Δt_v-t *V*-n és l_0-on keresztül? $\Delta t_v = \frac{l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}}{2(c + V)}$

Végül mivel egyenlő a keresett Δt?

$$\Delta t = \Delta t_e - \Delta t_v = l_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c-V} - \frac{1}{c+V}\right) = \frac{V \cdot l_0}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}}. \qquad (*)$$

Mivel lenne egyenlő Δt akkor, ha fényjelek helyett két egyidőben leadott pisztolylövéssel idéznénk elő a robbanásokat? (A pisztolygolyók torkolati sebessége v.)

Nem változna. Ha ugyanis a két lövés után $\left(\frac{l_0}{2v} - \frac{l_0}{2c}\right)$ idővel indítanánk el két fényjelet is, azok pont a lövedékekkel egyszerre érnék el a vonat két végét.

Általában: Ha egy adott K_0-ban két esemény egymástól l_0 távolságban egyidőben történik, akkor a *V* sebességgel mozgó *K*-ban a két esemény között mindig $\frac{V \cdot l_0}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}}$ idő telik el.

Melyik esemény történik később?

Az, amelyik a K_0 mozgásával egyirányba esik.

3)A „pajta-rúd paradoxon” egy változata: Egy l_0 hosszúságú alagúton halad át egy ugyanolyan nyugalmi hosszúságú vonat *V* sebességgel. A pályatest (az alagút) nyugalmi rendszerében a vonat rövidebb, mint az alagút, a vonat nyugalmi rendszerében viszont az alagút rövidebb, mint a vonat. Igaz ez?

Igen, igaz. Van-e ellentmondás a két állítás között?

Nincs, mert *<u>nem</u> ugyanannak a megfigyelésnek* az eredményéről teszünk egymással ellentétes kijelentéseket. Hogyan végezzük el a két hosszúság meghatározását?

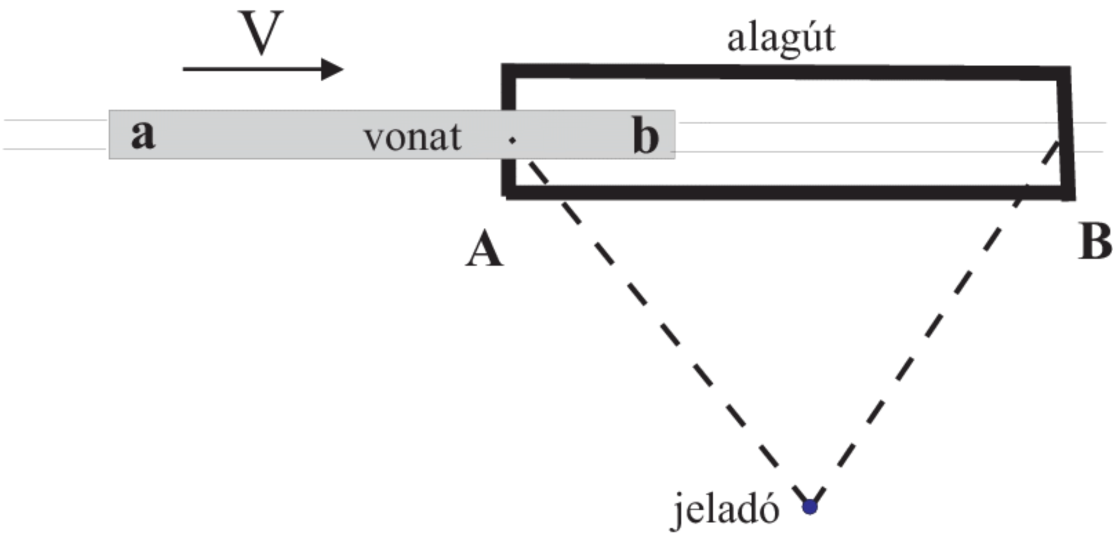
A mozgó vonat hosszát a pályatesten álló megfigyelő úgy méri meg, hogy az elhaladás időtartamát megszorozza a vonat sebességével.

Az alagút hosszát a vonaton álló megfigyelő úgy méri meg, hogy az alagútban való tartózkodása időtartamát megszorozza az alagút sebességével.

Mindketten ugyanazt az l_0-nál kisebb számot kapják. Ebben nincs semmi ellentmondás.

De most csavarjunk egyet a feladaton:

A vonat kincset szállít és egy banda ki akarja rabolni. A bandavezér tanult relativitáselméletet és tudja, hogy a mozgó vonat rövidebb az alagútnál. Ezért a banda az alagút két bejáratára titokban erős, kapuszerű sorompót szerel fel, amelyeket rádiójellel lehet lezárni. Az egyik bandatag az alagút két végétől egyenlő távolságra lévő pontban helyezkedik el a jeladóval és a bandavezértől azt a parancsot kapja, hogy amikor a vonat eltűnik az alagútban, hozza működésbe a sorompókat. Az alagútban rekedt vonatot azután a banda többi tagja elfoglalja és kifosztja.



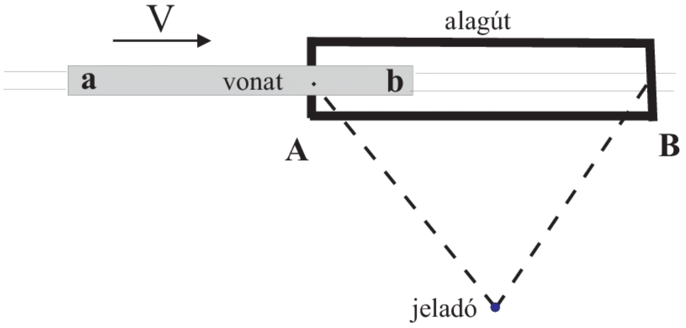
A vonat elindulása után a titkosszolgálat valahogy megneszeli a készülő rajtaütést és mobiltelefonon utasítja a vonatvezetőt, hogy azonnal állítsa le a vonatot. A vonatvezető azonban jó volt fizikából és megnyugtatja a titkosszolgálat emberét: Az alagút a vonathoz képest Lorentz-kontrakciót szenved, a vonatnak legalább az egyik vége biztosan ki fog lógni az alagútból, ezért a jeladónál figyelő bandatagnak nem lesz alkalma beindítani a sorompók működését.

Kinek van igaza, a bandavezérnek vagy a vonatvezetőnek? Nem lehet, hogy mindkettőnek?

Nem lehet, mert ugyanarra az eseményre (a kapuk lezáródására) vonatkozóan nem lehet egyszerre igaz két egymást kizáró állítás.

Hogyan érvelne a bandavezér?

Az alagút hossza $\boldsymbol{l_0}$, a vonaté $\boldsymbol{l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}$, ezért a vonat $\boldsymbol{\left(l_0 - l_0\sqrt{1-V^2/c^2}\right)/V}$ ideig az alagútban tartózkodik. A társunknak tehát van ideje a jeladót működésbe hozni.



Elfogadható-e ez a magyarázat? **Egyértelműen igen.**

De akkor a vonatvezető tévedett. Van-e az érvelésének *szembeszökően* bizonytalan pontja?

Igen, van. Nem gondolt rá, hogy a *vonat K' nyugalmi rendszerében a kapuk nem egyidőben záródnak be*.

Melyik kapu záródik később? **A *K'*-ben a vonat áll, az alagút mozog jobbról balra. Mivel a mozgásirányba eső esemény történik később, ezért a baloldali *A* kapu záródik később.**

Amikor a már lezárt kapu az alagút *B* végén beleütközik a vonat *b* elejébe, a vonat végéből milyen hosszú rész lóg még ki az alagútból?

A vonat hosszának és a megrövidült alagút hosszának a különbsége, azaz $\boldsymbol{l_0 - l_0\sqrt{1-V^2/c^2}}$ méter.

Akkor mégis a vonatvezetőnek volt igaza! Amikor az alagút *B* végén a sorompó beleütközött a vonat *b* elejébe, azonnal elkezdte tolni magával a vonatot, amelyből tehát $l_0 - l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$ méter ezután folyamatosan kilóg az alagútból.
A banda ügynöke a jeladót csak akkor hozhatta volna működésbe, amikor a vonat *eltűnt* az alagútban. De ezek szerint ilyen időpont nem létezik. Korrekt ez az érvelés?

Nem biztos, hogy korrekt, mert annak hatása, hogy a vonat eleje beleütközött a *B* kapuba, még a newtoni fizika szerint is véges idő alatt jut el a vonat végére. Emberi léptékben ez az idő észrevehetetlenül kicsi, de a relativitáselmélet szerint biztosan nagyobb, mint l_0/c. Csak ezután kezd el az egész vonat balra mozogni az alagúttal együtt. És ez a késés elég lehet ahhoz, hogy a balra mozgó alagút elnyelje a vonat még nyugvó *a* végpontját is. Tényleg elég hozzá?

Elég, mert az alagút *A* kezdőpontjának $\left(l_0 - l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}\right)/V$ időre van szüksége ahhoz, hogy elérje a vonat *a* végpontját (vagyis hogy elnyelje a vonatot), és ez az idő rövidebb, mint l_0/c.

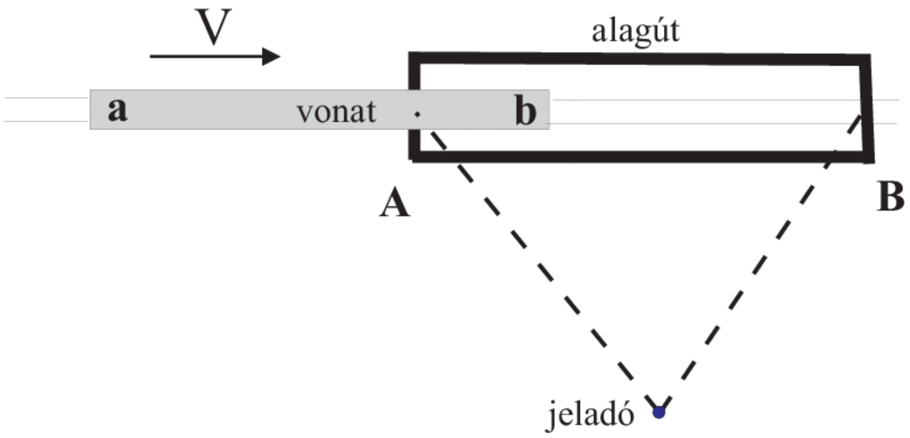
Igazoljuk ezt az állítást!

$$\left(l_0 - l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}\right)/V \overset{?}{<} l_0/c$$

$$1 - \sqrt{1 - V^2/c^2} \overset{?}{<} V/c$$

$$1 - V/c \overset{?}{<} \sqrt{1 - V^2/c^2}$$

$$\sqrt{1 - V/c} < \sqrt{1 + V/c}$$ **ami nyilván igaz.**

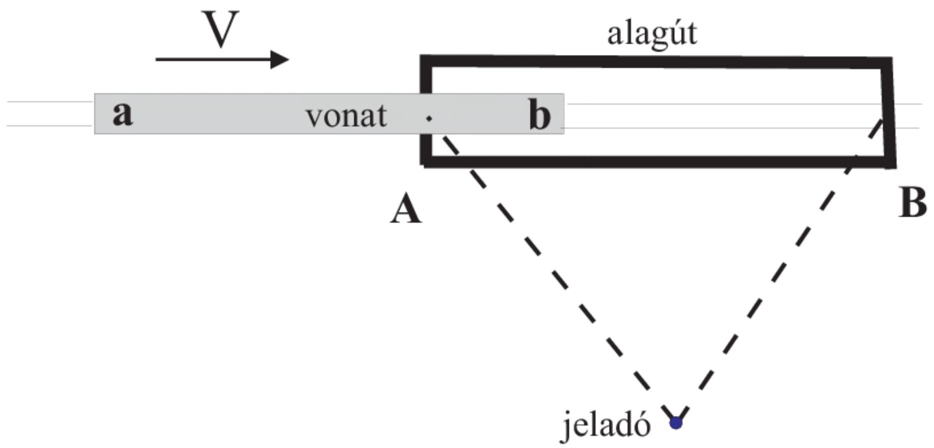


De nem csukódik-e rá közben a vonat végére az *A* kapu? Mi a feltétele annak, hogy ez ne következzen be?

Legyen E_a és E_b az a két esemény, amikor a vonat és az alagút megfelelő végei találkoznak egymással: a vonat *a* ill. *b* vége az alagút *A* ill. *B* végével. A jeladót a bandatag a két eseményt között bármikor működésbe hozhatja. Tegyük fel először, hogy közvetlenül az E_b (vagyis a vonat újra megjelenése) előtt hozza működésbe. Mi a feltétele annak, hogy az alagút a vonat *a* végét is elnyelje még az *A* kapu záródása előtt?

Az, hogy a kapuk záródása közötti $\Delta t'$ idő legyen nagyobb, mint az előző dián már diszkutált $\left(l_0 - l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}\right)/V$.

Hogyan lehet ellenőrizni, hogy ez a feltétel teljesül-e?



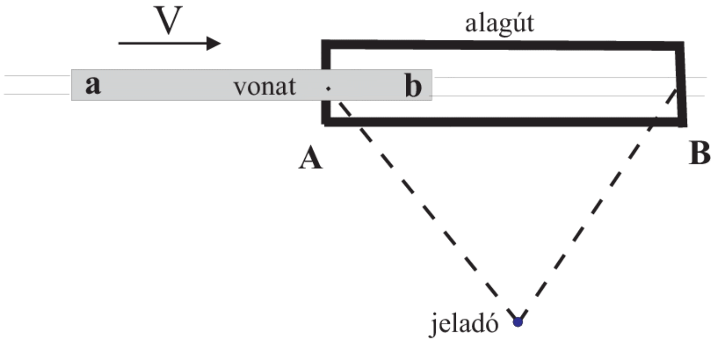
Az előző feladatból tudjuk, hogy $\Delta t' = \frac{V \cdot l_0}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}}$, ezért a kérdés a következő:

$$\frac{V \cdot l_0}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}} \overset{?}{>} \left(l_0 - l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}\right)/V$$

$$\frac{V^2/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \overset{?}{>} 1 - \sqrt{1 - V^2/c^2} = \frac{V^2/c^2}{1+\sqrt{1-V^2/c''}}$$ **és ez teljesül, mert a jobboldal nevezője nagyobb, mint a baloldalé.**

A vonat tehát foglyul esik az alagútban a *K'*-beli nézőpontból is.

Most nézzük azt az esetet, amikor a jeladó rögtön a vonat eltűnése után (vagyis az E_a-val praktikusan egyszerre) lép működésbe. Mi történik ekkor a vonat nyugalmi rendszeréből nézve?



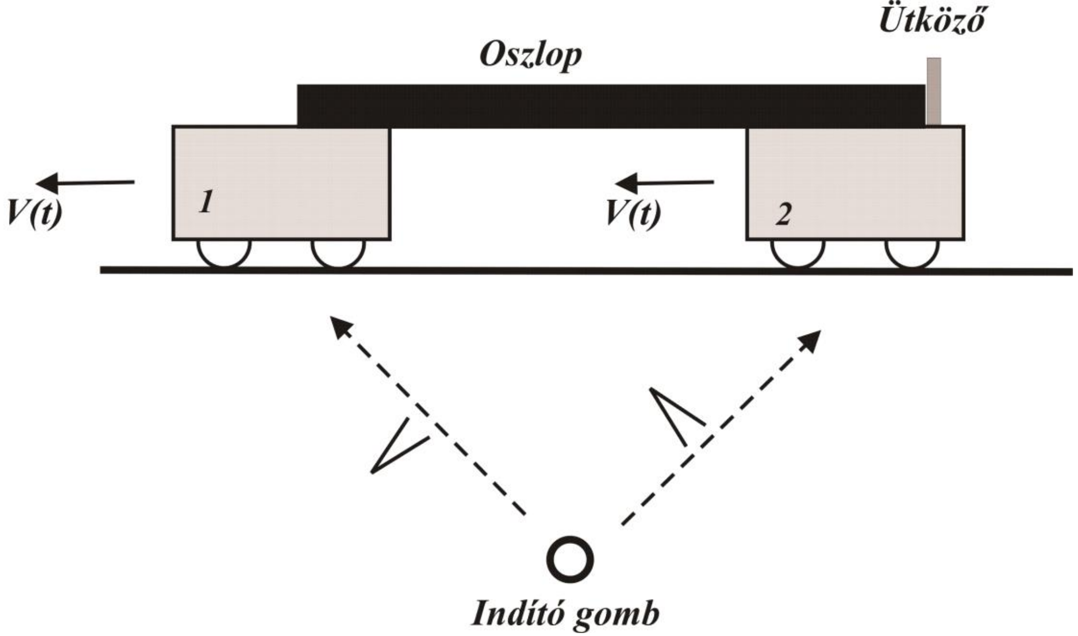
Amint az alagút *A* eleje áthaladt a vonat *a* végpontján, lezár a sorompója. Ha az alagút *B* végén nem lenne sorompó, az alagút Lorentz-kontrakciója miatt a vonatból $l_0 - l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$ méter kilógna az alagútból. De ez nem lehet, mert a *B*-sorompó már $\Delta t' = \frac{V \cdot l_0}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}}$ másodperccel *korábban* lezárt, és az előző dia

$$\frac{V \cdot l_0}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}} > \left(l_0 - l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}\right)/V$$

képlete következtében ekkor a vonat *b* eleje ekkor még az alagúton belül volt. Tehát a vonat megint bent ragad az alagútban, és nyilván ez történik akkor is, amikor a jeladó valamikor E_a és E_b között lép működésbe.

4) **Egy hosszú oszlopot két vasúti kocsin kell elszállítani valahova (ld. az ábrát). A kocsik gyorsulását egymástól függetlenül ugyanaz a program és egy-egy ideális óra szabályozza. A program egy olyan jeladó jelére indul, amely a kocsiktól egyenlő távolságra van, és egy (elég nagy) *V* végsebességig folyamatosan gyorsítja a kocsikat. Mi fog történni?**

1. **Az oszlop Lorentz-kontrakciót szenved, ezért egy bizonyos sebesség elérése után az 1. kocsin lévő vége lecsúszik a pályatestre.**
2. **Az oszlop mindig a kocsik tetején marad, mert a kocsik közötti távolság pontosan ugyanolyan mértékű Lorentz-kontrakciót szenved, mint az oszlop.**
3. **Valami egyéb.**



Az 1. válasz a helyes, mert a kocsik közötti távolság változásának üteme (ld. a 24. diát)

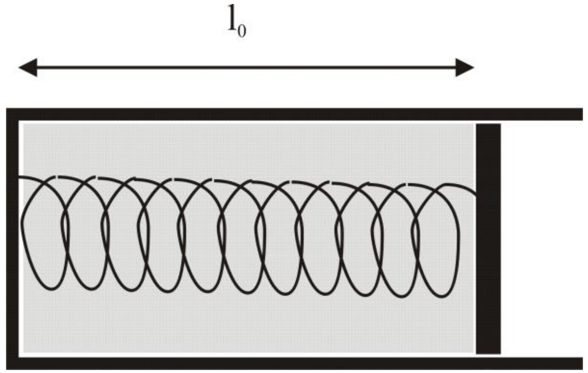
$$\boldsymbol{V_1(t) - V_2(t) = V(t) - V(t) = 0}.$$

Mi történik akkor, ha az oszlop végeit hozzácsavarozzuk a kocsikhoz, amelyeknek a gyorsulása változatlanul az eredeti program szerint nő?

A két motornak munkát kell befektetnie az oszlop megnyújtására, ezért megnő az üzemanyag fogyasztásuk. Az oszlop végül ketté is törhet.

Mi a lényeges különbség az oszlop hossza és a két kocsi távolsága között, ami miatt az egyik kontrahálódik, a másik nem?

Az oszlop hosszát természeti törvények határozzák meg, amelyek minden inerciarendszerben ugyanolyanok. Ezért ha a sebessége lassan nő, akkor mindig az aktuális sebességű vonatkoztatási rendszerhez viszonyítva veszi fel az eredeti hosszúságát és ennek következtében kontrahálódik a pályatest *K* nyugalmi rendszeréhez képest.



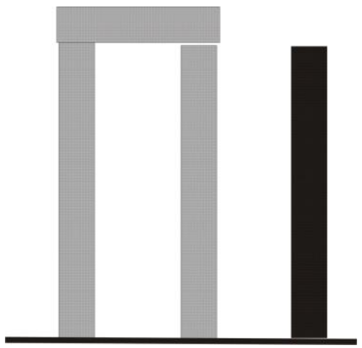
Ezt könnyebben meg lehet érteni, ha oszlop helyett az ábrán látható dugattyút szállítják a kocsik, és a dugattyú helyzetében (a rugó hosszában) bekövetkező kontrakcióra összpontosítunk, amelyet a nyomás és a rugóerő egyensúlya minden inerciarendszerben ugyanolyannak állít be.

A kocsik közötti távolságot azonban nem természeti törvény, hanem a két kocsin egy-egy független program („emberi törvény") szabályozza, amely az egyidejűség relativitása következtében *csak a K-hoz viszonyítva* gyorsítja szinkronban a kocsikat. *Ezért* állandó a kocsik közötti távolság *K*-ban. De ennek az az ára, hogy az oszlop K_t pillanatnyi inerciarendsze-rében a szinkronizáltság megszűnik és a kocsik közötti távolság megnő. A *K* ugyanis visszafele mozog a K_t -hez viszonyítva, ezért a 2. kocsi programja (gyorsulása) *késik* az 1. kocsi programjához képest.

Ezért ha az oszlop (lassan növekvő *V(t)* sebességgel mozgó) pillanatnyi nyugalmi rendszeréből nézve írjuk le a folyamatot, amelyben az oszlop hossza állandó, akkor is arra a következtetésre jutunk, hogy az oszlop leesik.

5) **Mutassuk meg, hogy ha a mozgás a sebességre merőleges méretet is változtatná, logikai ellentmondásra jutnánk.**

A nyugvó oszlop pontosan belefér a nyugvó kapuba. Tegyük fel, hogy a vízszintes irányú mozgás megváltoztatja (mondjuk megnöveli) a függőleges méreteket. Akkor az egyenletes sebességgel mozgó oszlop nem fér át a kapun. De ha *ugyanezt a szituációt* az oszlop nyugalmi rendszeréből figyeljük meg, akkor a mozgó kapu akadálytalanul áthalad a nyugvó oszlopon. Ez logikai ellentmondás, mert ugyanarról a tényről állítjuk hogy igaz is, meg hamis is.



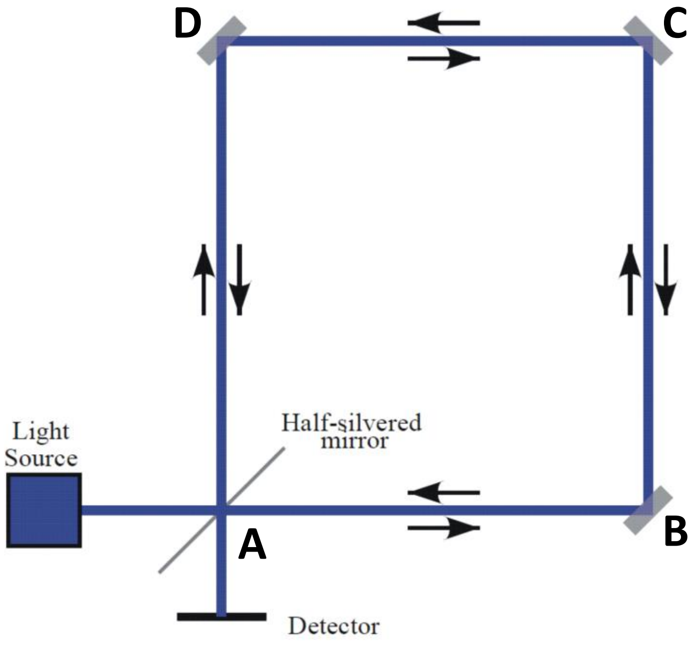
6) **Egy (nagy) nyugvó korong peremét méterrudakkal rakjuk körbe. Mi fog velük történni, ha a korongot lassan forgásba hozzuk? (A körvonalra merőleges pöckök nem engedik a rudakat elcsúszni.)**

Mivel a méterrudak maguk és a középpontjuk sebessége is érintő irányú, az intuíció azt sugallja, hogy a kerületi sebességnek megfelelő Lorentz-kontrakciót szenvednek és ezért *hézag keletkezik közöttük*.

De akkor magának a korong kerületének is kontrahálódni kellene, és nem jelennének meg hézagok a szintén kontrahált méterrudak között! Tényleg ez történne?

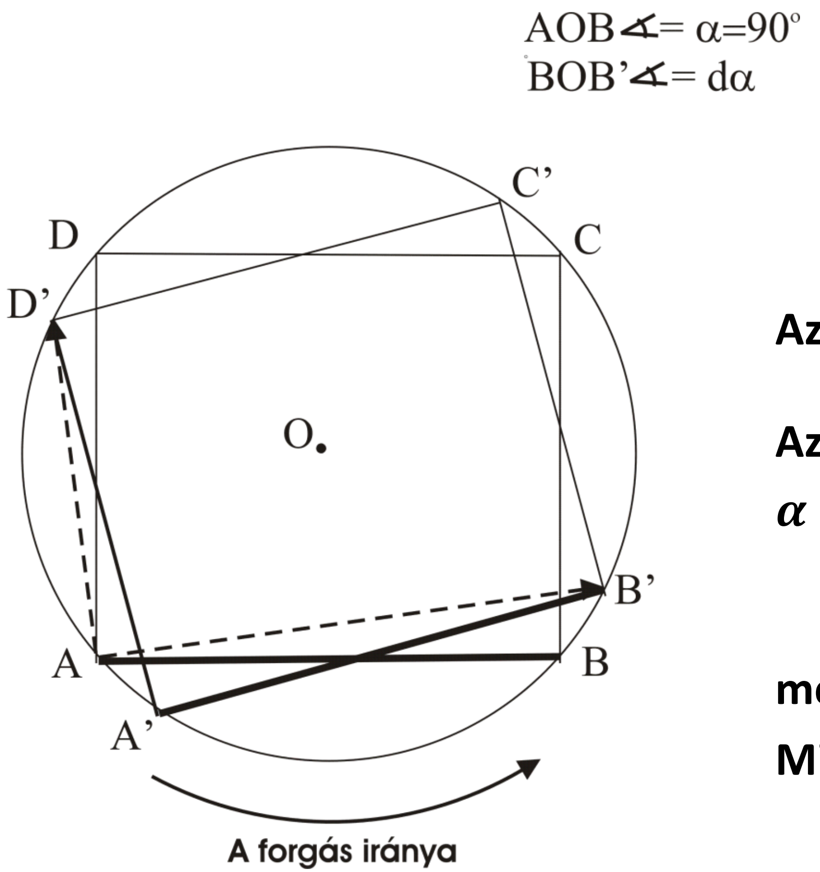
Nem ez történne. Ha a még nyugvó korong kerületét belekarcolnánk a talajba, a forgásba hozott korong pereme rajta maradna a karcolaton. Egy kiválasztott szegmens kontrakcióját a két szomszédos szegmens ugyanúgy megakadályozza, ahogy a 4. feladatban a két előírt mozgású kocsi megakadályozta a hozzájuk erősített rúd kontrakcióját. A szegmensek mozgásirányú megrövidülése összeegyeztethetetlen a korong alak és a sugár irányú méretek megőrzésével.

7) A Sagnac-effektus.



A Sagnac-interferométer: a fényforrás fényét a féligtükör két egymásra merőleges résznyalábra bontja, amelyek egymással ellentétes irányban haladnak végig a három tükör által meghatározott négyzeten, majd újra egyesülve a detektorban interferencia- képet hoznak létre.

Amikor az egész berendezést egyenletes Ω körfrekvenciájú forgásba hozzuk a nyugvó inerciarendszerhez képest, az interferenciakép a körfrekvenciával arányosan eltolódik.



A forgás következtében az $\overline{AB}$ oldalon haladó fénysugár optikai úthossza $\overline{AB'}$ -re *nő*, az $\overline{AD}$ oldalon ellentétes irányban haladó fénysugár optikai úthossza pedig $\overline{AD'}$-re *csökken*.

Az $\overline{AB} \to \overline{AB'}$ hatásának számítása a fénysugár fázisára Ω-ban lineáris pontossággal:

Az α középponti szöghöz tartozó húr hossza $l = 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$. Amikor $\alpha \to \alpha + d\alpha$, az l megváltozása

$$dl = \frac{dl}{d\alpha} \cdot d\alpha = R \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} R \cdot d\alpha,$$

mert $\alpha = 90°$.

Mivel az *ABCD* négyzet oldala $a = R \cdot \sqrt{2}$, ezért $dl = \frac{a}{2} \cdot d\alpha$.

A $d\alpha$ azzal a szögelfordulással egyenlő, amely alatt a fény az *A*-ból *B'*-be ér, ezért az Ω-ban lineáris pontossággal $d\alpha = \Omega \cdot \frac{a}{c}$. Ennek következtében az optikai úthossz megváltozása az egyik oldal mentén $dl = \frac{a^2}{2c} \cdot \Omega$, a teljes pálya mentén pedig ennek négyszerese. Az ehhez tartozó fázisváltozás $\Delta\varphi_+ = 2\pi \cdot \frac{4 \cdot dl}{\lambda} = \frac{4\pi a^2}{\lambda c} \cdot \Omega$. A forgással ellentétes irányban haladó fénysugárra $\Delta\varphi_- = -\Delta\varphi_+$, ezért az interferenciakép teljes eltolódása

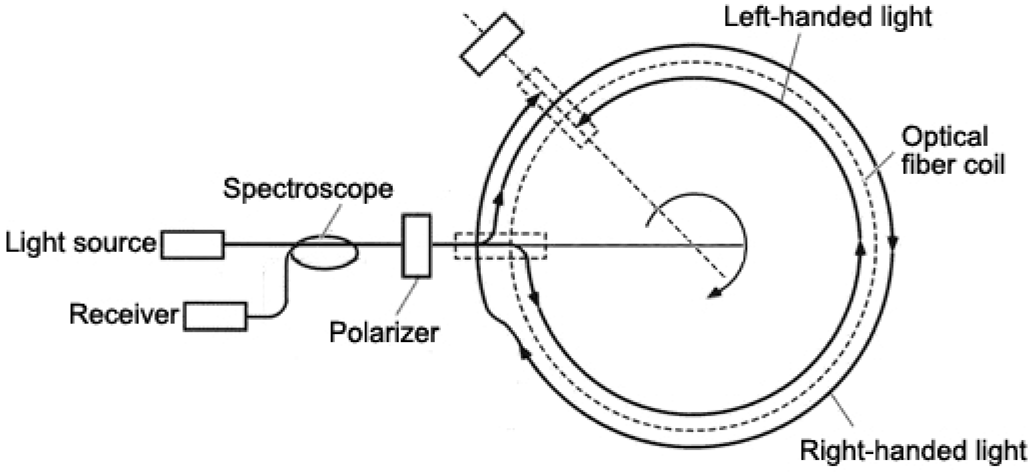
$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_+ - \Delta\varphi_- = \frac{8\pi a^2}{\lambda c} \cdot \Omega.$$

Vegyük észre, hogy a számítást abban az *inerciarendszerben* végeztük, amelyben az interferométer forog. Kihasználtuk, hogy (1) ez az inerciarendszer tetszőleges lehet, (2) a fénysebesség benne minden irányban *c,* és (3) nem függ a forrás (a tükrök) sebességétől.

A kísérlet elvi jelentősége: A newtoni fizika szerint a vonatkoztatási rendszerek egyenletes mozgása nem mutatható ki belső mechanikai megfigyelésekkel, de a forgásuk (a centrifugális és a Coriolis erő miatt) belső megfigyelésekkel is kimutatható. A relativitáselmélet szerint ugyanez érvényes az optikai jelenségekre is.

1926-ban Michelson, Gale és Pearson egy 1.9 km kerületű Sagnac-típusú interferométer segítségével észlelni tudta a Föld forgását.

Modern alkalmazás: Az optikai giroszkóp, amelyben a két ellentétes irányú fénysugár köralakú optikai szálban halad. Jelzi a repülőgép és a műhold saját forgását.



Az ábrán jól látható, hogy a forgás irányában és azzal ellentétesen haladó fénysugarak optikai úthossza különböző és annál nagyobb, minél nagyobb szög-sebességgel forog az eszköz.

8) **Egy $l_0 \equiv \Delta x_0$ hosszúságú vonat (K_0) halad *V* sebességgel a pályatesten (*K*). A vonat végén v_0 sebességű pisztolygolyót lövünk ki a vonat eleje felé, amely Δt_0 idő alatt éri el a vonat elejét. A pályatestről nézve a golyó Δt ideig repül és közben Δx utat tesz meg. Mi a kapcsolat a $\Delta x_0, \Delta t_0$, valamint a $\Delta x, \Delta t$ párok között?**

A newtoni fizikában nyilván $\Delta x = \Delta x_0 + V \cdot \Delta t$. Hogyan módosul ez a képlet a relativitáselméletben?

A Lorentz-kontrakció következtében $\Delta x_0 \to \Delta x_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$, ezért

$$\Delta x_0 = \frac{\Delta x - V\cdot\Delta t}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

A Δt_0-t is ki kell fejezni a $\Delta x, \Delta t$ páron keresztül. Ehhez nyilván szükség lesz a golyó sebességére, amely a vonathoz képest v_0, a pályatesthez képest v: $v_0 = \frac{\Delta x_0}{\Delta t_0}$, $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Hogyan induljunk el?

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta x_0}{v_0} = \frac{\Delta x - V\cdot\Delta t}{v_0\cdot\sqrt{1-V^2/c^2}}\ .$$

Mi a következő lépés? **Ide be kell helyettesíteni a relatív sebesség $v_0 = \frac{v-V}{1-vV/c^2} = \frac{\Delta x - V\cdot\Delta t}{\Delta t - V/c^2\cdot\Delta x}$ képletét:**

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t - V/c^2\cdot\Delta x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

A *Lorentz-transzformáció* képleteit kaptuk eredményül, amelynek tartalma világosabbá válik, ha a feladatot általánosabb formában fogalmazzuk meg, és a $K_0, \Delta x_0, \Delta t_0$-t átjelöljük *K'*, $\Delta x', \Delta t'$-re.

A *K'* mozogjon *K*-hoz képest *V* sebességgel. Történjen két esemény, amelyek koordináta- és időkülönbsége *K*-ban Δx és Δt. Akkor a két esemény koordináta- és időkülönbsége *K'*-höz képest

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - V\cdot\Delta t}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \quad \text{és} \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - V/c^2\cdot\Delta x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

De a levezetés csak *időszerű eseménypárra* vonatkozott (13. dia). Érvényes-e akkor is, ha az eseményeket fényjel köti össze egymással? Hogyan lehet ezt ellenőrizni?

Azt kell megmutatni, hogy ha $\Delta x = c\cdot\Delta t$, akkor $\Delta x' = c\cdot\Delta t'$. Ez behelyettesítéssel azonnal látható.

És mi a helyzet, ha az eseménypár térszerű, mint pl. Einstein vonatkísérletében?

Ekkor $\Delta t' = 0$ és $\Delta x' = l_0$. Ha ezeket a fenti két egyenletbe behelyettesítjük és kiejtjük belőlük Δx-t, akkor Δt-re a helyes $\frac{V\cdot l_0}{c^2\sqrt{1-V^2/c^2}}$ eredményt kapjuk.

Mi van a tranzverzális (*y,z)* irányokkal?

Amikor a pisztolygolyó *x* irányban repült, a newtoni fizika szerint $\Delta x = \Delta x_0 + V \cdot \Delta t \neq \Delta x_0$. De ha a repülés iránya *x*-re merőleges (pl. *z*), akkor nyilván $\Delta z = \Delta z_0$, mert a vonat *V* sebessége nem játszik szerepet. A mozgásra merőleges méretek nem is kontrahálódnak, ezért a $\Delta z = \Delta z_0$ egyenlőség a relativitáselméletben is érvényben marad. A Lorentz-transzformáció teljes alakja tehát a következő:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - V/c^2 \cdot \Delta x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \qquad \Delta x' = \frac{\Delta x - V \cdot \Delta t}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z.$$

Ha az első esemény (példánkban a pisztoly elsülése) a *K* és a *K'* átfedése pillanatában közös origójukban az ott nyugvó (virtuális) órák szerint a *t=t'=0* időpontban történik, akkor a Δ-k elhagyhatók:

$$t' = \frac{t - V/c^2 \cdot x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \qquad x' = \frac{x - V \cdot t}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

Ez a képlet kapcsolja össze egy adott pontszerű, pillanatszerű esemény (a példánkban a pisztolygolyó becsapódása) koordinátáit és időpontját a két egymáshoz képest *V* sebességgel mozgó koordinátarendszerben, ha a két koordinátarendszer origójának egybeesése a $t = t' = 0$ pillanatban történő esemény.

A newtoni fizika megfelelő képlete a *Galilei-transzformáció:*

$$t' = t, \qquad x' = x - V \cdot t, \quad y' = y, \quad z' = z,$$

amely a Lorentz-transzformációból a $c \to \infty$ határesetben kapható meg.

9) **Mutassuk meg, hogy új koordinátarendszerre áttérve két időszerű esemény között a sajátidő változatlan marad.**

A *K'*-ben a két eseményt $\left(\frac{\Delta x'}{\Delta t'}, \frac{\Delta y'}{\Delta t'}, \frac{\Delta z'}{\Delta t'}\right)$ sebességű „óra" köti össze egymással, ezért

$$\Delta\tau' = \Delta t' \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta y'}{\Delta t'}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta z'}{\Delta t'}\right)^2}$$

$$\Delta\tau'^2 = \Delta t'^2 - \frac{1}{c^2}\left(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2\right)$$

Ha a jobboldalon az 58. dia első képlete szerint a vesszős differenciákat vesszőtleneken keresztül fejezzük ki, rövid átalakítás után a

$$\Delta\tau'^2 = \Delta t'^2 - \frac{1}{c^2}\left(\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2\right) = \Delta t^2 - \frac{1}{c^2}\left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right) = \Delta\tau^2 \qquad (*)$$

egyenlőségre jutunk.

A sajátidő-különbség a fogalma szerint nem függhet a koordinátarendszertől. Az 1. feladat megoldása ezzel összhangban volt. Most azt is látjuk, hogy inerciarendszereknél ez a tény a Lorentz-transzformáció következménye, a Lorentz-transzformáció igazolásához pedig csak azokra a tulajdonságokra (sajátidő és koordinátaidő kapcsolata, sebességösszeadás, Lorentz-kontrakció) volt szükség, amelyeket a feladat megoldásához is felhasználtunk.

13. Záró megjegyzés

Az előző dián a (*) képlet igazolásánál csak a Lorentz-transzformációt használtuk ki, de azt nem, hogy az eseménypár időszerű. Ezért *tetszőleges típusú* eseménypárra igaz, hogy a $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$ *négyestávolság négyzet* – *a* (*) c^2*-szerese* – invariáns a Lorentz-transzformációkkal szemben:

$$\Delta s'^2 = c^2\Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \Delta s^2.$$

Ennek a képletnek és a Lorentz-transzformációnak az ismeretében most már rá lehetne térni a speciális relativitáselmélet tárgyalásának hagyományos útjára (Minkowski ábrák, négyesvektorok, stb). De mivel az elmélet posztulátumait a szokásosnál részletesebben diszkutáltuk és az elmélet legalapvetőbb fogalmait és jellegzetességeit nem a Lorentz-transzformáció formális következményeként, hanem közvetlenül a posztulátumokból származtattuk, ezzel talán csökkentettük a relativitáselmélettel kapcsolatos még ma is gyakori félreértések veszélyét.

A gondolatmenetünket visszaidézve láthatjuk, hogy a Lorentz-transzformáció képletét a posztulátumok *egyetlen következményéből* vezettük le: Abból, hogy az optikai Doppler-effektus csak a relatív sebességtől függhet.