A relativitáselmélet tanításáról

Hraskó Péter, Pécsi Tudományegyetem Elméleti Fizika tanszék

Az utóbbi tíz évben sokat foglalkoztam a relativitáselmélet tanításával és népszerűsítésével, ezért az elméletet a korábbinál alaposabban át kellett gondolnom. Eközben több olyan fogalom revideálására is rákényszerültem, amelyekben azelőtt semmi kivetnivalót sem találtam. Közöttük van a mozgási tömeg, amely bekerült az emelt szintű érettségi tételek közé. Erről a fogalomról lesz szó az alábbiakban.

A speciális relativitáselmélet egyik váratlan következménye az, hogy *minél nagyobb sebességgel mozog egy test, annál nehezebb tovább gyorsítani.* Pontosan ez lenne a helyzet akkor, ha a testek tömege nőne a sebesség növelésekor. De a gondolatmenet, amellyel a relativitáselméletben eljutunk ehhez a következtetéshez világosan mutatja, hogy a jelenség oka nem a tömeg megnövekedése, hanem az *idődilatáció*.

Képzeljünk el egy rakétát, amelyben automata adagoló biztosítja, hogy a hajtóműben minden másodpercben pontosan ugyananakkora legyen az üzemanyagfogyasztás, és vizsgáljuk a rakéta mozgását a pályájának egy viszonylag rövid szakaszán, amelyen az üzemanyag elhasználódásából származó tömegcsökkenés elhanyagolható a rakéta össztömegéhez képest. A newtoni mechanika szerint ilyen körülmények között a rakéta konstans gyorsulással fog mozogni. A tolóerő ugyanis állandó, és az

$$m \cdot dv = F \cdot dt \tag{1}$$

képletnek megfelelően a sebesség időegységre eső növekedése is konstans:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} = konstans. \tag{2}$$

A relativitáselmélet szerint azonban a külső megfigyelő számára a gyorsulás egyre kisebb és kisebb lesz, mert az adagoló berendezés az űrhajóbeli *sajátidő* ritmusában adagolja az üzemanyagot, és ez a sajátidő a $d\tau = dt\sqrt{1-v^2/c^2}$ képletnek megfelelően annál lassabban telik, minél nagyobb az űrhajó sebessége.

Kis sebességeknél ($v \longrightarrow 0$-nál) a newtoni mechanika a relativitáselméletben is érvényes, ezért az *űrhajóhoz képest* az (1) képlet igaz marad, csak időn természetesen az űrhajóbeli τ sajátidőt kell érteni:

$$m \cdot dv = F \cdot d\tau. \tag{3}$$

Ennek következtében az űrhajó gyorsulása *önmagához képest* továbbra is a konstans F/m-mel egyenlő. A földi megfigyelő által észlelt gyorsulást úgy kapjuk, hogy a (3) képletben a $d\tau$-t kifejezzük a földi időn keresztül:

$$m \cdot dv = F\sqrt{1-v^2/c^2} \cdot dt, \tag{4}$$

amelyből

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}\sqrt{1-v^2/c^2}. \tag{5}$$

Ez a képlet valóban azt mutatja, hogy a sebesség növekedésével a gyorsítás hatásossága csökken.

Az (5)-ben az idődilatációnak csak a gyorsulás okára (a gyorsító erő teljesítményére) kifejtett hatását vettük figyelembe. Nézzük most meg, mi lesz az idődilatáció hatása a sebességnövekedésre.

Jelöljük $\mathcal{I}'$-vel azt az inerciarendszert, amelyhez képest a rakéta a t pillanatban éppen nyugszik. A rakéta azonban $\mathcal{I}'$- höz képest is gyorsul, ezért a nyugalom állapota csak egy matematikai pillanatig tart, és a t időpillanatot követő rövid $d\tau$ sajátidő intervallumban a rakéta $\mathcal{I}'$-hez viszonyítva megtesz valamekkora — mondjuk dl_0 — utat. Ezalatt a rakéta sebessége $\mathcal{I}'$-ben (vagyis "önmagához képest") valamilyen dv'-vel nő meg. Mekkora dv sebességnövekedésként fog ez megjelenni az $\mathcal{I}$-beli megfigyelők számára?

Abban az $\mathcal{I}$ inerciarendszerben, amelyből a rakéta mozgását figyeljük, a dl_0-nak a Lorentz-kontrakció szerint $dl = dl_0\sqrt{1-v^2/c^2}$ távolság, a $d\tau$ sajátidő intervallumnak pedig $dt = d\tau/\sqrt{1-v^2/c^2}$ időintervallum felel meg. Logikus feltételezni, hogy dv ugyanúgy aránylik a dv'-höz, ahogy $\frac{dl}{dt}$ aránylik a $\frac{dl_0}{d\tau}$ -hoz:

$$dv : dv' = \frac{dl}{dt} : \frac{dl_0}{d\tau}.$$

De a Lorentz- kontrakció és az idődilatáció előbbi képletei szerint ez az arány $(1 - v^2/c^2)$-tel egyenlő, ezért

$$dv = (1 - v^2/c^2)dv'. \qquad (6)$$

A (3) képlet tehát további pontosításra szorul: A dv-t dv'-vel kell helyettesíteni benne:

$$m \cdot dv' = F \cdot d\tau. \qquad (7)$$

Ha most itt dv'-t és $d\tau$-t kifejezzük a földi megfigyelők által észlelt dv-n és dt-n keresztül, az űrhajó gyorsulására az

$$a = \frac{dv}{dt} = (1 - v^2/c^2)^{3/2}\frac{F}{m} \qquad (8)$$

képletet kapjuk.

Ezt a képletet — a könnyebb érthetőség kedvéért — a rakéta példáján vezettük le. A nagy sebességgel mozgó testek gyorsulását azonban töltött részecskék elektromágneses térben történő mozgásánál figyelték meg (Kaufmann kísérlet, 1901-1902). Érvényes-e (8) ebben az esetben is?

A legegyszerűbb eset az, amikor a Q töltésű részecske a konstans $\mathcal{E}$ elektromos térrel párhuzamosan mozog. Ekkor $F = Q\mathcal{E}$. De ebben az esetben a (7) képletben egy újabb módosítást kell végrehajtani. Az elektromos (és a mágneses) tér komponensei ugyanis általában megváltoznak, amikor új inerciarendszerre térünk át, ezért (7)-ben F-t az $\mathcal{I}\,'$-beli $F' = Q\mathcal{E}'$-vel kell helyettesíteni. Abban a speciális esetben azonban, amikor az inerciarendszerek relatív sebessége párhuzamos az elektromos térrel, az elektromos tér mindkét inerciarendszerben ugyanakkora: $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$. Így $F' = F$, (7)-n semmit sem kell változtatni, és a töltött részecskék gyorsulását is (8) határozza meg[1].

A (8) képlet korrekt, de az egyszerűsített gondolatmenet, amivel megkaptuk, tartalmaz egy olyan lépést, amelyet talán nem mindenki tartana meggyőzőnek (a (6) indoklására gondolok[2]). Az egyszerűsítés azonban olyan, hogy nem hamisítja meg, hanem inkább kiemeli a jelenség lényegét: Azért nehezebb a nagy sebességgel mozgó testet tovább gyorsítani, mert az idődilatáció egyre hatékonyabbá válik.

A gondolatmenetben az idődilatáción kívül a Lorentz-kontrakció is szerephez jutott, ezért a fenti indokláshoz a Lorentz-kontrakciót is hozzá lehet tenni. Magának a Lorentz-kontrakciónak a képletét azonban le lehet vezetni egyedül az idődilatációból (ld. a Függeléket), ezért úgy gondolom, hogy elég, ha csak az idődilatációra hivatkozunk.

Ismeretes, hogy a relativitáselméletben a v sebességgel mozgó test mozgási energiáját a

$$K = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right) \qquad (9)$$

képlet határozza meg. Ha ezt összehasonlítjuk a newtoni fizika $K = \frac{1}{2}mv^2$ képletével láthatjuk, hogy a relativitáselmélet szerint a mozgási energia a sebesség növelésekor gyorsabban nő, mint a newtoni fizika szerint: Amikor v tart a fénysebességhez, a két mozgási energia aránya végtelenhez tart.

Ez a tény egyenes következménye annak, hogy a nagyobb sebességgel mozgó testet nehezebb gyorsítani. A mozgási energia ugyanis a gyorsító erő munkájának rovására növekszik ($dK = F \cdot dx$), és egy adott sebességet nyilván hosszabb úton lehet csak elérni, ha a sebesség további növelése egyre nehezebbé válik.

Néhány alkalommal találkoztam olyan ellenvetéssel, hogy azért kell léteznie relativisztikus tömegnövekedésnek, mert a mozgó test nagyobb gravitációs hatást fejt ki, mint a nyugvó, és ha a tömeg mindkét esetben ugyanaz lenne, a gravitációs hatás se lehetne más.

Ez az ellenvetés azért hibás, mert a relativitáselmélet szerint (és itt már az általános relativitáselméletről van szó) a gravitációs hatás forrása nem a tömeg, hanem az energia (pontosabban az energia-impulzus tenzor, de ehhez a legfontosabb járulékot az energia adja). A mozgó test gravitációs hatása tehát valóban

[1] Amikor a töltött részecske gyorsulása merőleges a sebességére a $3/2$ hatványkitevő $1/2$-re módosul.

[2] A (6) pontos levezetése a relativisztikus sebességösszeadás képletéből a Függelékben megtalálható.

nagyobb a nyugvóénál, de nem a tömeg, hanem az energia megnövekedése miatt.

Mindezek alapján az a javaslatom, hogy a "mozgási tömeg" és a "relativisztikus tömegnövekedés" kifejezéseket ne használjuk, mert hamis magyarázatot sugallnak arra, hogy miért nehezebb a testeket tovább gyorsítani, amikor már gyorsan mozognak. Ha ezt elfogadjuk, akkor persze a "nyugalmi tömeg" terminusra sincs szükség. A "nyugalmi energia" kifejezést azonban, amely a "belső energia" szinonimája, kifejezetten célszerű használni, mert explicite utal rá, hogy a belső energia a nyugvó test energiájával azonos.

A fotonok zérus tömegű objektumok, de nagyon gyakran ezt úgy értik, hogy csak a nyugalmi tömegük nulla, a mozgási tömegük $h\nu/c^2$-tel egyenlő. Arról, hogy ez milyen hibás következtetésekre vezet, korábban már részletesen írtam[3], ezért az ottani érveimet most nem ismétlem meg.

A "mozgási tömeg" elnevezés az irodalomban nagyon elterjedt, de vannak figyelemre méltó kivételek. A *Speciális és általános relativitás elmélete* című könyvében Einstein nem használja ezt a kifejezést. A Landau-Lifsic sorozatban sem fordul elő, de a hiánya a tíz kötetben sehol sem okoz problémát. W. G. Dixon kompromisszumos megoldást választott[4]: Az $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ mennyiséget "látszólagos tömegnek" (apparent mass) hívja és m-re megtartja a nyugalmi tömeg nevet.

Hogyan került be a fizikába az az elképzelés, hogy a tömeg esetleg függhet a sebességtől? Az 1880-as évek elején J. J. Thomson kezdte el alkalmazni a Maxwell-egyenleteket az anyag tulajdonságainak a vizsgálatára. A kutatásnak, amelybe sokan bekapcsolódtak, az egyik fontos következtetése az volt, hogy mozgó töltés elektromágneses terében annál nagyobb térenergia van felhalmozva, minél gyorsabban mozog a test, és ez arra vezet, hogy egy töltött testet annál nehezebb gyorsítani, minél nagyobb a sebessége. Hamar szokásossá vált ezt az eredményt úgy fogalmazni, hogy a töltött testek tömege nő a sebességgel.

A XIX. század utolsó éveiben J. Larmor és W. Wien mondta ki azt a hipotézist, hogy mivel az anyag elektromosan töltött alkotórészekből áll, a tömeg (az elektromosan semleges testek tömege is!) esetleg tisztán az elektromágneses térenergia hatásának a megnyilvánulása (*a tömeg elektromágneses elmélete*).

W. Kaufmann már említett kísérleteit ezek az elképzelések inspirálták. A kísérletek igazolták, hogy az elektronokat annál nehezebb gyorsítani, minél nagyobb a sebességük, és a már megszokott szóhasználattal ezt tömegnövekedésként fogták fel. A tömeg elektromágneses elméletéről azonban hamar kiderült, hogy nem tartható, mert az elektromágneses kölcsönhatás önmagában nem tud stabil anyagot létrehozni, a relativitáselmélet viszont természetes magyarázatot kínál Kaufmann eredményeire. Ez a magyarázat nem a tömegnövekedésen, hanem a Lorentz-transzformáció sajátosságain alapul. Ennek ellenére ma is sokan gondolják úgy, hogy a relativitáselmélet is tömegnövekedésre vezeti vissza azt, hogy a gyorsan mozgó elektronokat nehezebb tovább gyorsítani, mint a lassan mozgókat.

Függelék

1) A (6) levezetése a sebességösszeadás képletéből:

Mozogjon az $\mathcal{I}\,'$ inerciarendszer V konstans sebességgel az $\mathcal{I}$ inerciarendszerhez képest mondjuk az x-tengely mentén. Figyeljünk meg mindkét inerciarendszerből egy ugyancsak x-mentén (változó sebességgel) mozgó objektumot. Az objektum sebessége a két inerciarendszerhez képest természetesen nem lesz ugyanaz. Ha a pályájának egy adott pontjában az objektum $\mathcal{I}\,'$-höz viszonyított sebessége v', akkor a relativisztikus sebességösszeadás törvénye szerint az $\mathcal{I}$-hez viszonyított sebességét a

$$v = \frac{v' + V}{1 + v'V/c^2} \tag{10}$$

képlet határozza meg. Amikor a v' sebesség egy kis dv'-vel megváltozik, akkor a v megfelelő megváltozása (10) alapján a következő:

$$dv = \frac{1 - V^2/c^2}{(1 + v'V/c^2)^2} dv'. \tag{11}$$

[3] Ekvivalens-e egymással a tömeg és az energia? *Fizikai Szemle* **53**, 330 (2003).
[4] *Special Relativity*, Cambridge University Press, (1978) 114. oldal.

Gondolatmenetünkben a megfigyelt test a rakéta (vagy az elektron) volt, amely a t pillanatban éppen nyugodott $\mathcal{I}'$-ben. Az $\mathcal{I}'$ V sebessége ekkor azonos a rakéta v sebességével, és $v' = 0$. Ebben a speciális esetben (11) valóban (6)-ra redukálódik.

2) A Lorentz-kontrakció képletének származtatása az idődilatációból:

Haladjon egy vonat nyílegyenes pályán konstans V sebességgel. A vonaton ülők a vonat hosszát a méterrudjukkal megmérik és l_0-nak találják. A vonat töltéshez viszonyított hosszát a legegyszerűbben úgy lehet meghatározni, hogy egy stopperel valaki a töltésen állva megméri, mennyi idő alatt halad el mellette a vonat. Ha erre $\Delta\tau$ időt kap, akkor a vonat hossza $l = V \cdot \Delta\tau$-val egyenlő. Az időt itt azért célszerű τ-val jelölni, mert ez annak a valakinek a sajátideje, aki a mérést végzi.

A vonatban ülők mindebből annyit látnak, hogy V sebességgel elsuhan mellettük egy ember stopperrel a kezében, és $\Delta t = l_0/V$ ideig tartózkodik a vonat mellett. Ha a vonaton ülők között van olyan, aki ismeri a relativitáselméletet, az azt is tudja, hogy a töltésen álló ember stopperjén eközben $\Delta t.\sqrt{1 - V^2/c^2} = \left(l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}\right)/V$ idő telt el. Ez az a $\Delta\tau$, amit a töltésen álló ember stopperje mutat, ezért a töltéshez képest a vonat hossza ennek az időnek a V-szerese: $l = l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$.

3) Miért éppen az $m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ mennyiséget szokás mozgási tömegnek (vagy akár látszólagos tömegnek) tekinteni? Azért, mert ez a kombináció szerepel az impulzus (lendület) relativisztikus képletében: $p = \dfrac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$. Ha azonban nem az impulzust, hanem a gyorsulást vennénk alapul, akkor (8) szerint nem ezt, hanem az $m/(1 - v^2/c^2)^{3/2}$ mennyiséget kellene mozgási (vagy látszólagos) tömegnek nevezni.

Ha a sebességnövekedéssel járó tömegnövekedés ugyanolyan reális folyamat volna, mint a belső energia növelésekor (például melegítéskor) bekövetkező tömegnövekedés, amelyet a $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ képlet határoz meg, akkor nem választás kérdése lenne, hogy hogyan függ egy test tömege a sebességétől. A szabad választás lehetősége mutatja, hogy a mozgási tömeg csupán egy *definíció*, amely — mint minden definíció — nem igaz vagy hamis, hanem hasznos vagy haszontalan. Szerintem egyáltalán nem hasznos, mert félrevezető.