

# Elméleti fizika I.

Elméleti mechanika

Hraskó Péter

Pécs, 2002.

## Tartalomjegyzék

1.1. A mozgás leírása Descartes-koordinátákkal. . . . .	2
1.2. A Newton-egyenletek. . . . .	4
1.3. A Newton-egyenletek érvényességének rejtett feltételei. . . . .	10
1.4. A tömeg . . . . .	13
1.5. Az erő komponensei általános koordinátákban . . . . .	14
1.6. Az erőfüggvény . . . . .	17
1.7. Az energia . . . . .	20
1.8. A Newton-egyenletek görbevonalú koordinátákban . . . . .	24
1.9. Lagrange-függvény, Lagrange-egyenletek . . . . .	26
1.10. A Lagrange-eljárás invarianciája . . . . .	30
1.11. A hatás . . . . .	31
1.12. A hatáselv . . . . .	34
1.13. A Lagrange-egyenletek származtatása a hatáselvből . . . . .	36
1.14. Az általánosított impulzus . . . . .	38
1.15. Szimmetriák és mozgásállandók kapcsolata . . . . .	39
1.16. Az energiamegmaradás . . . . .	44
1.17. Általános megjegyzések a mozgásegyenletek megoldásáról . . . . .	47
1.18. A centrálszimmetrikus kéttestprobléma . . . . .	48
1.19. A Kepler-probléma . . . . .	50
1.20. Kitekintés a Naprendszerre . . . . .	59
1.21. A kényszermozgások tárgyalása a hatáselv alapján. . . . .	64
1.22. A lineáris harmonikus oszcillátor . . . . .	77
1.23. Csatolt rezgések. . . . .	83
1.24. A relativitás elve . . . . .	93
1.25. A gyorsuló koordinátarendszer . . . . .	95
1.26. A mozgásegyenlet gyorsuló koordinátarendszerben (tisztá transláció) . . . . .	98
1.27. A mozgásegyenlet gyorsuló koordinátarendszerben (tisztá forgás) . . . . .	100
1.28. A mozgásegyenlet gyorsuló koordinátarendszerben (általános eset) . . . . .	101
1.29. Relatív és abszolút mozgás . . . . .	107
1.30. A konfigurációs tér és a fázistér . . . . .	110
1.31. A kanonikus- vagy Hamilton-egyenletek . . . . .	114
1.32. Az adiabatikus invariánsok elmélete . . . . .	118
1.33. A merev test helye és orientációja . . . . .	124
1.34. Forgás . . . . .	125
1.35. A merev test általános mozgása . . . . .	126
1.36. A merev test mozgásegyenletei . . . . .	128
1.37. A tömegközéppont . . . . .	130
1.38. Az $O'$ -re vonatkoztatott impulzusmomentum és forgatónyomaték . . . . .	132
1.39. A tehetetlenségi nyomaték . . . . .	133
1.40. A merev test mozgási energiája . . . . .	137
1.41. Az Euler-egyenlet . . . . .	139

1.42. A szimmetrikus pörgettyű reguláris precessziója . . . . .	140
1.43. A földgolyó reguláris precessziója . . . . .	144

### 1.1. A mozgás leírása Descartes-koordinátákkal.

A kurzus első részében tömegpontokból álló rendszerekkel foglalkozunk. *Tömegpontnak* az olyan testet nevezzük, amelynek belső struktúrájától az adott feladat szempontjából eltekinthetünk, és kielégítően jellemezhetjük három helykoordinátával. A helykoordináták jellege — a dimenziójukat is beleértve —, függ a koordinátarendszer típusától. Az első néhány fejezetben csak Descartes-koordinátákkal dolgozunk, amelyeket különböző módokon jelölhetünk:

$$\begin{array}{llll} 1 \text{ tömegpont esetén} & x, y, z & \text{vagy} & x_1, x_2, x_3 \\ n \text{ tömegpontnál} & x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha & \text{vagy} & x_i^{(\alpha)}, \end{array}$$

de lehet másképpen is. Itt  $\alpha = 1, \dots, n$  ( $n$  a tömegpontok száma),  $i$  a koordinátatengely jele (térbeli mozgásnál 1, 2, 3, síkbelinél 1, 2).

A Descartes-koordináták kifejezése hengerkoordinátákon és síkbeli polár-koordinátákon keresztül

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi, \quad (1)$$

gömbi koordinátákon keresztül pedig

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi \quad z = r \cos \theta. \quad (2)$$

A szabadsági fokok száma  $f$  a független koordináták számával egyenlő.

A tömegpont trajektóriája térben a mozgást leíró három

$$x = f(t) \quad y = g(t) \quad z = h(t)$$

függvény (képe) (síkban, egyenesen a függvények száma 2, ill. 1).

1.Feladat: Írjuk fel az egyenletes egyenesvonalú mozgás trajektóriáját.

Megoldás:

$$x = pt + a \quad y = qt + b \quad z = st + c$$

$a, b, c, p, q, s$  konstansok<sup>1</sup>.♣

2.Feladat: Ugyanez, amikor a mozgás az  $x$  tengely mentén történik. Ábrázoljuk a trajektóriát az  $xt$  síkon.♣

3.Feladat: Határozzuk meg a trajektóriát  $R$  sugarú körön egyenletes sebességgel mozgó tömegpontra.

Megoldás: Ha  $t = 0$ -ban a test iránya  $\alpha$  szöget zár be az  $x$ -tengellyel, akkor

$$x = R \cdot \cos(\omega t + \alpha) \quad y = R \cdot \sin(\omega t + \alpha). \clubsuit$$

4.Feladat: Ugyanez  $R$  sugarú gömb főkörén mozgó tömegpontra.

---

<sup>1</sup>A ♣ a feladat végét jelzi.

Megoldás: A főkör hajlásszöge az  $xy$ -síkhöz képest legyen  $\epsilon$ , és  $t = 0$ -ban a test legyen az  $x$ -tengelyen. Akkor

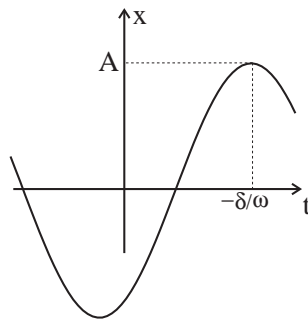
$$x = R \cdot \cos \omega t \quad y = R \cdot \cos \epsilon \cdot \sin \omega t \quad z = R \cdot \sin \epsilon \cdot \sin \omega t.$$

Megjegyzés: A gömbfelületen végzett *tehetlenségi mozgás* mindig *főkör* mentén történik. Erről a következő módon győzhetjük meg magunkat. Legyen a test az adott pillanatban a gömbfelület  $P$  pontjában. Az  $\vec{OP}$  helyzetvektor és a  $\vec{v}$  sebességvektor kijelöl egy meghatározott síkot, amely áthalad az origón, és a gömböt egy főkörben metszi. A mozgás e főkör mentén megy végbe. Ha nem így történne, és a tömegpont elhagyná a főkört, akkor a két félgömb közül, amelyeket a szóbanforgó főkör határol, az *egyikre* kerülne. De a két félgömb tökéletesen egyenértékű, nincs egyik sem kitüntetve a másikhoz képest. Ezért a test végig a kezdőhelyzet és a kezdősebesség által kijelölt főkörön mozog.

Egészítsük ki a gondolatmenetet egy észrevétellel. Vegyük fel a Descartes-koordinátarendszert úgy, hogy az  $xy$  sík essen egybe a kezdőhelyzet által kijelölt főkörrel. Akkor a  $z$ -tengely a két félgömb közül az egyik felé mutat, és ez látszólag kitünteti az egyik félgömböt a másikhoz képest. A jobb- és a balsodrású koordinátarendszer azonban pont abban különbözik egymástól, hogy  $z$ -tengelyük melyik félgömb felé mutat, és egyik sincs kitüntetve a másikhoz képest. Ezért ez az észrevétel sem alkalmas arra, hogy a sík két oldala közül az egyiket kitüntetettnek tekinthessük a másikhoz képest.♣

5.Feladat: Tömegpont az  $x$ -tengely mentén harmonikus rezgőmozgást végez az origóhoz képest. Határozzuk meg a trajektóriát és ábrázoljuk az  $xt$  síkon.

Megoldás:  $x = A \cos(\omega t + \delta)$ .



A tömegpont *pályája* azon pontok mértani helye, amelyeken a mozgás során áthalad.♣

6.Feladat: Állapítsuk meg a pályát az eddigi feladatokban.♣

Ugyanaz a pálya különböző trajektóriákhoz is tartozhat, mert a test különféle „időbeosztással” futhat végig rajta.

7.Feladat: Adjunk meg különféle trajektóriákat, amelyekhez ugyanaz a körpálya tartozik az  $xy$  síkon.♣

A tömegpont *sebessége* az a vektor, amelynek komponensei a trajektória idő szerinti első deriváltjai:

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \left( \frac{df(t)}{dt}, \frac{dg(t)}{dt}, \frac{dh(t)}{dt}, \right). \quad (3)$$

A sebességvektor iránya megegyezik a pálya érintőjének az irányával.

A tömegpont *gyorsulása* az a vektor, amelynek komponensei a trajektória idő szerinti második deriváltjai:

$$\vec{a} \equiv \ddot{\vec{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = \left( \frac{d^2f(t)}{dt^2}, \frac{d^2g(t)}{dt^2}, \frac{d^2h(t)}{dt^2}, \right). \quad (4)$$

8.Feladat: Mi a sebesség és a gyorsulás az 1. és a 3. feladatban?

Megoldás: Az 1.feladatban

$$v_x = p = v_{0x} \quad v_y = q = v_{0y} \quad v_z = s = v_{0z}.$$

A kezdeti értéket null-indexszel különböztetjük meg (így  $a = x_0$ ,  $b = y_0$ ,  $c = z_0$ ).

A 3.feladatban az egyszerűség kedvéért legyen  $\alpha = 0$ . Akkor

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t) \\ \vec{a} &= (-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t) \end{aligned}$$

Az  $|\vec{a}| \equiv a = R\omega^2$  neve: centripetális gyorsulás.  $\vec{a} \perp \vec{v}$ , mert  $(\vec{a} \cdot \vec{v})$  skalárszorzatuk zérus.

Megjegyzés: két tetszőleges vektorra

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \gamma$$

ahol  $\gamma$  a vektorok által bezárt szög.

## 1.2. A Newton-egyenletek.

A Newton-egyenletek a tömegpontok egy-egy koordinátájának második időbeli deriváltját fejezik ki az összes koordináta, az összes sebesség-komponens, valamint az idő függvényében (az alább következő általános képletekben a sebességektől való függést a képletek rövidítése érdekében nem tüntetjük fel). A Newton-egyenletek *közön-séges differenciál-egyenlet rendszert* alkotnak, amelynek ismeretleni a tömegpontok

trajektóriáit meghatározó időfüggvények. Az ilyen típusú feladatok a matematika legnehezebb feladatai közé tartoznak, a megoldásukra nem létezik általános módszer.

Egyetlen tömegpont Newton-egyenletei a következők:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(x, y, z, t) \equiv X(x, y, z, t) \\ m\ddot{y} &= F_y(x, y, z, t) \equiv Y(x, y, z, t) \\ m\ddot{z} &= F_z(x, y, z, t) \equiv Z(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Két tömegpontnál az egyenletrendszer hat egyenletből áll:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= X_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t) \\ m_1\ddot{y}_1 &= Y_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t) \\ m_1\ddot{z}_1 &= Z_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t) \\ m_2\ddot{x}_2 &= X_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t) \\ m_2\ddot{y}_2 &= Y_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t) \\ m_2\ddot{z}_2 &= Z_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, t) \end{aligned}$$

Általános eset:

$$m_\alpha \ddot{x}_i^{(\alpha)} = X_i^{(\alpha)}(x, t),$$

ahol  $x \equiv (x_1^{(1)}, \dots, x_3^{(n)})$  a koordináták összeségét jelenti.

A Newton-egyenletek *általános megoldásán* a rendszert alkotó tömegpontok olyan trajektóriáit értjük, amelyek eleget tesznek a következő két feltételnek:

1) Ha behelyettesítjük őket az egyenletekbe, azonosságokat kapunk (azaz kielégítik az egyenleteket);

2) Összeségükben  $2f$  darab *önkéntesen választható* konstansot tartalmaznak.

A konstansok célszerű választásával állíthatjuk be a kívánt kezdőfeltételeket. Ha csak 1) teljesül a megoldást partikulárisnak nevezzük. Ha csak megoldást mondunk, rendszerint az általános megoldást értjük rajta.

9.Feladat: Írjuk fel a szabad tömegpont(ok) mozgásegyenletét és megoldását.♣

10.Feladat: Ugyanaz egyetlen tömegpontra homogén gravitációs térben.

Megoldás:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0 & m\ddot{y} &= 0 & m\ddot{z} &= -mg \\ x &= v_{0x}t + x_0 & y &= v_{0y}t + y_0 & z &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0. \end{aligned}$$

Válasszuk meg a konstansokat úgy, hogy a megoldás függőleges hajítást írjon le. Diskutáljuk a mozgást<sup>2</sup>.♣

<sup>2</sup>A továbbiakban ezt a kérdést minden feladatba automatikusan beleértjük.

11.Feladat: Az előző feladatban vegyük figyelembe a légellenállást (tekintsük a sebességgel arányosnak).

Megoldás:

$$m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} \quad m\ddot{y} = -\lambda\dot{y} \quad m\ddot{z} = -mg - \lambda\dot{z}.$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{mv_{0x}}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda t/m}\right) + x_0 \\ y &= \frac{mv_{0y}}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda t/m}\right) + y_0 \\ z &= \left(\frac{mv_{0z}}{\lambda} + \frac{m^2g}{\lambda^2}\right) \left(1 - e^{-\lambda t/m}\right) - \frac{mg}{\lambda}t + z_0. \end{aligned}$$

Megjegyzés:  $\lambda \rightarrow 0$ -nál ez a megoldás átmegy a 10.feladat megoldásába. A  $z$  esetében pl. az

$$1 - e^{-\lambda t/m} = \frac{\lambda}{m}t - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{m}\right)^2 t^2 + o(\lambda^3)$$

kifejtés behelyettesítése után a  $\lambda$  eltűnik a nevezőből, és a  $\lambda \rightarrow 0$  határátmenet végrehajtható.♣

12.Feladat: Három dimenzióban az origó felé mutató rugalmas erő hat (*izotróp harmonikus oszcillátor*). Írjuk fel a mozgásegyenleteket és megoldásukat.

Megoldás:

$$m\ddot{x} = -Dx \quad m\ddot{y} = -Dy \quad m\ddot{z} = -Dz$$

$$\begin{aligned} x &= A \cdot \cos(\omega t + \alpha) \\ y &= B \cdot \cos(\omega t + \beta) \\ z &= C \cdot \cos(\omega t + \gamma) \end{aligned}$$

ahol  $\omega = \sqrt{D/m}$ . A sebesség és a gyorsulás innen differenciálással kapható.

A pálya mindig egy síkban fekszik (a bizonyítás a 4.feladathoz hasonló gondolatmenettel történik). Válasszuk a koordinátarendszert úgy, hogy a pályasík a  $z = 0$  sík legyen (ez egyenértékű az  $C = 0$  választással). A maradék négy konstans különféle megválasztásával kaphatunk egyenesszakaszt ( $\alpha = \beta$ ), ellipszist, amelynek főtengelyei az  $x$ ,  $y$  tengelyekkel párhuzamosak ( $\alpha - \beta = \pi/2$ ), vagy kört (ha még  $A = B$  is teljesül).♣

\*\*\*

Megjegyzés: Az alábbi fontos diff.egyenlet

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \kappa f = 0$$



általános megoldásánál két esetet kell megkülönböztetni:

1)  $\kappa = \omega^2 > 0$ :

$$f = \begin{cases} A \cdot \cos(\omega t + \alpha) \\ A \cdot \cos \omega t + B \cdot \sin \omega t \\ A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t}. \end{cases} \quad (5)$$

2)  $\kappa = -\omega^2 < 0$ :

$$f = \begin{cases} A \cdot \cosh(\omega t + \alpha) \\ A \cdot \cosh \omega t + B \cdot \sinh \omega t \\ A_+ e^{\omega t} + A_- e^{-\omega t}. \end{cases} \quad (6)$$

\*\*\*

13.Feladat: Térben két tömegpont mozog, közöttük rugalmas erő hat. Írjuk fel a mozgásegyenletet és az általános megoldást.

Megoldás:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -D \cdot (x_1 - x_2) & m_2 \ddot{x}_2 &= +D \cdot (x_1 - x_2) \\ m_1 \ddot{y}_1 &= -D \cdot (y_1 - y_2) & m_2 \ddot{y}_2 &= +D \cdot (y_1 - y_2) \\ m_1 \ddot{z}_1 &= -D \cdot (z_1 - z_2) & m_2 \ddot{z}_2 &= +D \cdot (z_1 - z_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} A \cdot \cos(\omega t + \alpha) + pt + a \\ x_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} A \cdot \cos(\omega t + \alpha) + pt + a \\ y_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} B \cdot \cos(\omega t + \beta) + qt + b \\ y_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} B \cdot \cos(\omega t + \beta) + qt + b \\ z_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} C \cdot \cos(\omega t + \gamma) + st + c \\ z_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} C \cdot \cos(\omega t + \gamma) + st + c \end{aligned}$$

ahol

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\mu}} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

A  $\mu$  neve: redukált tömeg.

14.Feladat: Tömegpont síkban vagy térben olyan centrális vonzóerő hatása alatt mozog, amely fordítva arányos az origótól mért távolság négyzetével. Írjuk fel a mozgásegyenleteket.

Megoldás: A Newton-egyenletek síkban

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\gamma \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ m\ddot{y} &= -\gamma \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

azaz

$$m\ddot{\vec{r}} = -\gamma \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \vec{r},$$

térben pedig

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\gamma \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ m\ddot{y} &= -\gamma \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ m\ddot{z} &= -\gamma \cdot \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

azaz

$$m\ddot{\vec{r}} = -\gamma \cdot \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \vec{r}.$$

Az erő itt külső, mert forrása az origóban rögzített pontszerű test. Ez a felfogás akkor jogos, ha a forrás  $M_f$  tömege sokkal nagyobb  $m$ -nél.♣

15.Feladat: Ugyanebben a centrális erőterében két tömegpont mozog, amelyek rugalmas erővel hatnak kölcsön. Írjuk fel a mozgásegyenleteket.

Megoldás:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\vec{r}}_1 &= -\gamma \cdot \frac{1}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{3/2}} \vec{r}_1 - D \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ m_1\ddot{\vec{r}}_2 &= -\gamma \cdot \frac{1}{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{3/2}} \vec{r}_2 + D \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \end{aligned}$$

16.Feladat: Tömegpont mozog térben két erő hatása alatt. Az egyik az  $O$  pont felé irányuló gravitációs vonzás, a másik az  $O'$  pont felé irányuló harmonikus erő ( $|OO'| = a$ ). Írjuk fel a mozgásegyenleteket.

Megoldás: Az  $O$  legyen az origó, az  $O'$  pedig a  $(0, 0, a)$  koordinátájú pont. Akkor

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{\gamma \cdot x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - Dx \\ m\ddot{y} &= -\frac{\gamma \cdot y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - Dy \\ m\ddot{z} &= -\frac{\gamma \cdot z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - D(z - a) \end{aligned}$$

17.Feladat: Ponttöltés mozog homogén mágneses térben. Írjuk fel a mozgásegyenletet és az általános megoldást.

Megoldás: A ponttöltés nagysága legyen  $q$ . A koordináta rendszer  $z$ -tengelyét válasszuk a térrel párhuzamosnak:  $\vec{B} = (0, 0, B)$ . A mozgásegyenletek:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= q(\vec{v} \times \vec{B})_x = qyB \\ m\ddot{y} &= q(\vec{v} \times \vec{B})_y = -qxB \\ m\ddot{z} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

A megoldás:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos(\omega t + \alpha) + x_0 \\ y &= -R \sin(\omega t + \alpha) + y_0 \\ z &= v_{0z}t + z_0 \end{aligned} \right\} \quad \omega = \frac{qB}{m}. \quad (8)$$

A pálya  $xy$ -vetülete  $R$ -sugarú kör, az  $x_0, y_0$  integrációs konstansok a kör középpontjának koordinátái (nem kezdeti értékek)♣.

Megjegyzés:  $(\vec{a} \times \vec{b})$  a két vektor vektorszorzata, amelynek alábbi tulajdonságai elegendők a vektorszorzat kiszámításához:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) &= -(\vec{b} \times \vec{a}) \\ (\alpha \vec{a} \times \vec{b}) &= \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) \\ (\vec{a} + \vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}), \end{aligned}$$

és ha  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  három egymásra merőleges egységvektor, amelyek jobbrendszert alkotnak, akkor  $(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{c}$ .

18.Feladat: Az előző feladatot egészítsük ki homogén elektromos mezővel.

Megoldás: A koordinátarendszert válasszuk úgy, hogy az elektromos mező az  $yz$ -síkkal legyen párhuzamos:  $\vec{E} = (0, E_y, E_z)$ . Akkor

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= q(\vec{v} \times \vec{B})_x = qyB \\ m\ddot{y} &= q(\vec{v} \times \vec{B})_y + qE_y = -qx B + qE_y \\ m\ddot{z} &= qE_z. \end{aligned} \right\}$$

A megoldás:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \cos(\omega t + \alpha) + x_0 + \frac{E_y}{B} t \\ y &= -R \sin(\omega t + \alpha) + y_0 \\ z &= \frac{qE_z}{2m} t^2 + v_{0z} t + z_0. \end{aligned} \right\} \omega = \frac{qB}{m}.$$

Vegyük észre, hogy a ponttöltés  $E_y/B$  átlagsebességgel "sodródik" (*drift*) a terekre merőleges irányba. ♣

### 1.3. A Newton-egyenletek érvényességének rejtett feltételei.

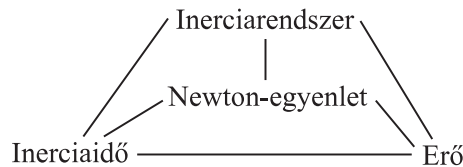
Ezek a feltételek a következők:

- a) A Descartes-rendszernek, amihez a testeket viszonyítjuk, *inerciarendszernek* kell lennie.
- b) Az óráknak, amiken az időpontokat leolvassuk, az *inerciaidőt* kell mutatniuk.
- c) Az egyenletek jobboldala csak akkor különbözhet nullától, ha rá tudunk mutatni azokra az objektumokra, amelyek *az erőhatás forrásai: izolált* (magányos) tömegpontnál a jobboldalon nullának kell állnia.

Itt három fogalmat vezetünk be (az inerciarendszert és az inerciaidőt, valamint az erőt). Első látásra az volna egyedül elfogadható, ha előbb ezeket definiálnánk, és csak ezután, e definíciók birtokában vezetnénk be a Newton-egyenleteket. Az a) szerint például a Newton-egyenletek csak inerciarendszerben érvényesek, ezért előbb meg kellene mondani, mi az, hogy inerciarendszer, és ennek ismeretében a Newton-egyenletek bevezetését úgy kellene elkezdni, hogy "vegyünk egy inerciarendszert...". Teljesen hasonló a helyzet az inerciaidővel és az erővel is.

Valójában ez a követelmény nem valósítható meg, mert *az inerciarendszernek, az inerciaidőnek és az erőnek csak a Newton-egyenletekkel összefüggésben van határozott jelentése*, amely ezek szerint csak a Newton-egyenletek posztulálásával párhuzamosan adható meg. E három fogalom tehát a Newton-egyenletekkel együtt egy olyan *komplex fogalmat* alkot, amelyen belül mindegyik elem magyarázatánál fel kell használni a másik hármat. Csak a komplex fogalmat lehet értelmezni, az elemeit külön-külön nem.

Ábrázolás rajzban:



(9)

Vizsgáljuk meg részletesebben a három fogalmat külön-külön:

1) *Inerciarendszernek* azokat a vonatkoztatási rendszereket nevezzük, amelyekben a Newton-egyenletek érvényesek.

Ezekben a rendszerekben érvényes a *tehetetlenség törvénye*: az izolált tömegpont megtartja nyugalmi állapotát vagy egyenletes egyenesvonalú mozgását. (Pontrendszernél a kijelentés a tömegközéppont mozgására vonatkozik, ld. alább az erő diszkuszióját.) Nyilvánvaló, hogy ez a törvény nem teljesül tetszőleges mozgásállapotú koordinátarendszerben, és ezért alkalmas az inerciarendszerek kiválasztására.

A tehetetlenség törvényének indoklása: Az a) szerint inerciarendszerben a Newton-egyenletek érvényesek, a c) szerint izolált tömegpontra nem hat erő. Így ekkor

$$m\ddot{x} = m\ddot{y} = m\ddot{z} = 0,$$

amelynek általános megoldása — mint már láttuk — egyenletes egyenesvonalú mozgást ír le, tehát a tehetetlenség törvénye valóban teljesül. A mozgás egyenletességének a megállapításához azonban szükséges, hogy óránk az inerciaidőt mérje (a nyugalmi állapot megtartásáról azonban enélkül is meg lehet bizonyosodni).

Ha  $\mathcal{K}$  inerciarendszer, a hozzá képest egyenletes egyenesvonalú mozgást végző rendszerek is azok.

Az olyan rendszert, amely nem inerciarendszer, *gyorsulónak* nevezzük.

Megjegyzés: A koordinátarendszerek csak a képzeletünkben léteznek, csak azok a testek valóságosak, amelyekhez a koordinátarendszert gondolatban hozzárendeljük. A koordinátarendszer mozgásállapota ezeknek a testeknek a mozgásállapotával egyezik meg. Ha csak ezekre a testekre gondolunk koordinátatengelyek nélkül, a "vonatkoztatási rendszer" kifejezést használhatjuk.

2) *Inerciaidőt* azok az órák mutatnak, amelyekhez viszonyítva a Newton-egyenletek igazak.

Válasszunk egy olyan dinamikai rendszert, amelyben a hatóerőket nagyon jól ismerjük, vagyis a Newton-egyenleteket pontosnak tekinthetjük. Legyünk inerciarendszerben. Oldjuk meg az egyenleteket és ellenőrizzük (valamelyik) kísérleti következményüket. Ehhez óra is kell. Ha azt találjuk, hogy a mozgás pontosan a megoldásnak megfelelően megy végbe, akkor az óránk az inerciaidőt mutatja. Ha eltérést találunk, az órát ennek alapján átkalibrálhatjuk inerciaidőre. Amennyiben a választott mozgás periódikus, önmaga szolgálhat olyan óráként, amely az inerciaidőt jelzi.

A gyakorlati időmérésnél ezek a követelmények csak közelítően teljesülnek. Egy ideális ingaórát pontosnak tekintünk, noha nem inerciarendszerben nyugszik és a környezeti hatásokat sem ismerjük pontosan. A csillagászatban hosszú időskálán van szükség az inerciaidő minél pontosabb ismeretére, ezért a földi órák kalibrálását a Naprendszer mozgása alapján végzik. A Naprendszer valóban izoláltnak tekinthető és a benne ható gravitációs erőtvény minden jel szerint igen pontos. Azt az időritmust, amit ezzel a módszerrel kapnak, és amely minden valószínűség szerint az inerciaidő ritmusa, efemerisz időnek nevezik.

3) Az erő:

Ha inerciarendszerben és inerciaidő használata mellett a tömegpont *nem* végez egyenletes egyenesvonalú mozgást, akkor nem lehet izolált, és valamilyen objektum erővel hat rá. Ez az objektum az erőhatás forrása.

Matematikailag ez a szituáció abban jut kifejezésre, hogy az egyenletek jobboldalára valamilyen zérustól különböző kifejezés kerül, amely egyenletekben az erőhatást reprezentálja. Ezt a matematikai kifejezést nevezzük erőnek. Mint látjuk, az *erőhatás* és az *erő* fogalmát megkülönböztetjük egymástól: az erő az érzékeinkre ható erőhatás matematikai megjelenési formája a Newton-egyenletben. Hallgatólagosan ezt a terminológiát használjuk, amikor a Newton-egyenletet ezekkel a szavakkal olvassuk el: "tömegszer gyorsulás egyenlő erő".

Az erő függvényalakját — a független változók a koordináták, a sebességek és az idő —, *erőtörvénynek* nevezzük.

Ha az erő forrása nem tartozik a rendszerhez (nincs önálló szabadsági foka), akkor az erőt *külső erőnek*, ellenkező esetben *belső erőnek* nevezzük. Ha a rendszer egyetlen tömegpontot tartalmaz, csak külső erő hathat rá.

Az erő általános tulajdonságait az alábbi öt pontban foglalhatjuk össze:

- A) Megtalálható az az objektum, amely az erőhatás forrása.
- B) Létezik meghatározott erőtvény (bár esetleg nem ismerjük), amely a Newton-egyenletekben reprezentálja az erőhatást.
- C) Az erő vektormennyiség (mivel a gyorsulás az):

$$\left. \begin{array}{l} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{array} \right\} \iff m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}.$$

D) Érvényes a hatás-ellenhatás törvénye: Ha az erő forrása  $\vec{F}$  erővel hat a tömegpontra, akkor a tömegpont  $-\vec{F}$  erővel hat a forrásra. Ez az elv külső és belső erőkre egyaránt érvényes.

E) Ha több különböző forrásból származó erő hat egy testre, hatásuk vektoriálisan adódik össze. Ez nem következik automatikusan C)-ből, mert még azt is jelenti, hogy egy erőforrás hatását nem változtatja meg, ha ugyanarra a tömegpontra más erő is hat. A források *egymásrahatása* azonban természetesen megváltoztathatja maguknak a forrásoknak a szerkezetét és ezen keresztül az általuk kifejtett erőhatást.

Megjegyzések:

$\alpha$ ) Mondottuk, hogy izolált pontrendszernél a tehetetlenség törvénye a tömegközéppontra vonatkozik. A D) alapján ez így igazolható (két test példáján):

A Newton-egyenletek:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{2\rightarrow 1} \quad m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{1\rightarrow 2}$$

ahol  $\vec{F}_{i \rightarrow j}$  az  $i$ -ik test mint forrás által a  $j$ -ikre ható erő. A D) szerint

$$\vec{F}_{i \rightarrow j} + \vec{F}_{j \rightarrow i} = 0,$$

ezért ha a két egyenletet összeadjuk, a

$$\frac{d^2}{dt^2}(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) = 0$$

egyenlőségre jutunk. Ez valóban azt fejezi ki, hogy az  $\vec{R}$  tömegközéppont gyorsulása nulla, ugyanis

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

$\beta$ ) Ha egy tömegpontra két vagy több erő hat, ezek kiolthatják egymást. Ilyenkor a tömegpontra nem hat erő, noha mindegyik forrás erőhatást gyakorol a tömegpontra. Az erő kifejtés önmagában tehát nem jár szükségképpen együtt gyorsulással.

$\gamma$ ) Az "erő" kifejezést szokás használni olyan esetekben is, amikor a felsorolt öt tulajdonság közül bizonyosak nem teljesülnek. Mint még szó lesz róla, az inerciaerők (pl. a centrifugális erő) nem tesznek eleget az A) tulajdonságnak (és ennek következtében a D)-nek sem). Az ilyen erőket *fiktív erőkknek* nevezzük, szemben a *valódi erőkkkel*, amelyeknek meghatározott fizikai objektumok a forrásai. Fiktív erők akkor lépnek föl a mozgásegyenletben, amikor az eredetileg csak valódi erőket tartalmazó Newton-egyenletet valamilyen matematikai átalakításnak vetjük alá (például inerciarendszerről gyorsuló rendszerre térünk át). Szigorúan véve tehát az ilyen áttranszformált Newton-egyenleteket a fiktív erők jelenléte miatt már nem is nevezhetnénk Newton-egyenletnek. Ennyire persze nem kell szőrszálhasogatónak lenni, de néha, amikor a megkülönböztetés valamilyen okból lényeges, a fiktív erőket is tartalmazó transzformált Newton-egyenletet nem Newton-egyenletnek, hanem mozgásegyenletnek fogjuk hívni.

$\delta$ ) A Newton-egyenletek, valamint az inerciarendszer, az inerciaidő és az erő használata során bizonyára sok olyan hallgatóságos előfeltevést használunk öntudatlanul, amelyekről nem esett szó. Ez egyébként minden fogalom esetében így van. Céltalan, és alighanem lehetetlen lenne ezeket mind felderíteni: Az egyenletek megtanulása és gyakorlása során a készséggel együtt automatikusan sajátítjuk el őket.

## 1.4. A tömeg

A newtoni felfogás szerint a tömeg a testre jellemző paraméter, amely a mozgásegyenletben a gyorsulást szorozza és értéke független attól, hogy milyen erő hat a testre. Az egyenletben elfoglalt helye alapján a tömeg a "tehetetlenség mértéke": két test közül az áll ellen jobban egy adott erő gyorsító hatásának, amelynek nagyobb a tömege.

A tömeg azonban az egyenlet jobboldalán is megjelenik a gravitációs erőtvényben.

Állítsuk párhuzamba a Föld felszínén lévő homogén gravitációs mezőben lefolyó mozgást a ponttöltés síkkondenzátorbeli mozgásával, amikor a mozgásegyenlet  $m\ddot{z} = -qE$  ( $\vec{E} = (0, 0, -E)$ ). A „gravitációs térerősség” az  $\vec{E}$  analogonja, jelöljük tehát  $\vec{E}_g$ -vel, a  $q$  elektromos töltéssel analóg „gravitációs töltést” pedig  $q_g$ -vel. A gravitációs mozgásegyenlet ekkor  $m\ddot{z} = -q_g E_g$ .

Tapasztalati módon azonban azt találjuk, hogy a *gravitációs gyorsulás* — a kondenzátorban fellépő gyorsulással ellentétben —, *univerzális*, minden testre  $g = 9,81\text{m/s}^2$ -el egyenlő. A mozgásegyenlet csak akkor adja ezt az eredményt, ha a testek „gravitációs töltése” szigorúan arányos a tömegükkel:  $q_g = k \cdot m$ , ahol  $k$  univerzális állandó. Ezt beállíthatjuk 1-nek úgy, hogy egy kiválasztott standard test  $q_g$ -jét a tömegével vesszük egyenlőnek és így rögzítjük a „gravitációs töltés” egységét. De akkor — a gravitációs gyorsulás univerzalitása következtében — minden test  $q_g$ -je megegyezik a tömegével, és a mozgásegyenlet alapján  $E_g$  egyenlővé válik  $g$ -vel. Ezt az egységválasztást feltételezve szokás  $q_g$ -t gravitációs töltés helyett *súlyos tömegnek* nevezni, és a gravitációs gyorsulás univerzalitását úgy fogalmazni, hogy *minden test súlyos tömege megegyezik  $m$  tehetetlen tömegével*, amely a Newton-egyenletben a gyorsulást szorozza.

A newtoni mechanikában nincs magyarázat arra, miért teljesül hihetetlen pontossággal ez az egyenlőség, amelynek mindmáig egyik legpontosabb igazolása Eötvös Loránd nevéhez fűződik. Einstein általános relativitás-elméletében azonban a gravitációnak olyan tárgyalását adta meg, amely empirikusan a newtoninál pontosabb, és a struktúrája olyan, hogy benne egyetlen tömeg lép csak fel, amely a gyorsulás szorzójaként a tehetetlen tömeg, az erőtvényben pedig a súlyos tömeg szerepét játssza, és ily módon a két tömeg különbözőségének a lehetősége föl sem merül<sup>3</sup>.

A newtoni mechanikában a gyorsulást szorzó tömegnek csak a Newton-egyenletekkel összefüggésben van értelme — hiszen ez a mennyiség definíció szerint az a tömegpontot jellemző paraméter, amely az egyenletben a gyorsulást szorozza —, és ezért a (9) diagrammon lenne a helye. Az általános relativitás elmélet szerint azonban ez a paraméter lényegében megegyezik a test súlyával (a rugós mérleg rugójának megnyúlásával), és ebben az értelemben független a Newton-egyenletektől. Ezért tárgyaljuk külön fejezetben.

## 1.5. Az erő komponensei általános koordinátákban

Alapelv: a feladat szimmetriájához símuló koordinátarendszer alkalmazása megkönnyíti az egyenletek diszkusszióját és megoldását. Meg kell tehát tanulnunk a Newton-egyenleteket Descartes-koordinátákról általános koordinátákra átírni (áttranszformálni). A továbbiakban csak henger- (síkbeli polár-) és térbeli gömbi koordinátákat fogunk használni (a Descartes-koordinátákon kívül), ezért ezeknek a tárgyalására korlátozódunk. Ebben a fejezetben csak az erő (a jobboldal) átalakításáról lesz szó, a baloldal (a gyorsulás) transzformációját néhány fejezettel később tárgyaljuk.

<sup>3</sup>A kérdésre a gyorsuló vonatkoztatási rendszerek tárgyalásánál röviden visszatérünk.



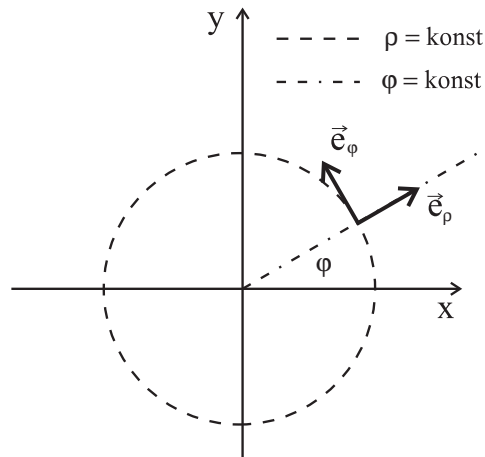
Példa: Síkbeli mozgás, az erő centrális,  $1/\rho^2$ -ként függ az origótól mért távolsággal.  
A Descartes-komponensek:

$$F_x = -\gamma \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\gamma \cdot \frac{\cos \varphi}{\rho^2}$$

$$F_y = -\gamma \cdot \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\gamma \cdot \frac{\sin \varphi}{\rho^2}.$$

Itt a Descartes-komponenseket írtuk fel a polárkoordináták függvényeként, de célszerűbb a komponenseket a koordinátarendszerhez simuló *lokális bázisra* vonatkoztatni. Ez olyan bázis, amelynek egységvektorai a koordinátavonalak érintői: a bázis  $\vec{e}_q$  egységvektora azt a koordinátavonalat érinti, amely mentén csak a  $q$  változik, és a  $q$  növekedési irányába mutat.

Ha a lokális bázis ortogonális, a koordinátarendszert magát is ortogonálisnak nevezzük. A henger-, polár- és a gömbi koordinátarendszer ortogonális. Mivel azonban görbevonalúak, a különböző pontokhoz tartozó lokális bázisok nem párhuzamosak egymással. Az alábbi rajz a síkbeli polárkoordinátarendszer egyik pontjához tartozó lokális bázist ábrázolja.



Az erő támadási pontja a lokális bázis origója.

A lokális bázisok transzformációs képletei:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + \sin \varphi \cdot \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \cdot \vec{e}_x + \cos \varphi \cdot \vec{e}_y \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos \varphi \cdot \vec{e}_\rho - \sin \varphi \cdot \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y &= \sin \varphi \cdot \vec{e}_\rho + \cos \varphi \cdot \vec{e}_\varphi \end{aligned} \quad (11)$$

Az erő komponenseinek transzformációja az

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y = \\ &= (F_x \cdot \cos \varphi + F_y \cdot \sin \varphi) \vec{e}_\rho + (-F_x \cdot \sin \varphi + F_y \cdot \cos \varphi) \vec{e}_\varphi = F_\rho \vec{e}_\rho + F_\varphi \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

felbontások alapján:

$$\begin{aligned}F_\rho &= \cos \varphi \cdot F_x + \sin \varphi \cdot F_y \\ F_\varphi &= -\sin \varphi \cdot F_x + \cos \varphi \cdot F_y\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}F_x &= \cos \varphi \cdot F_\rho - \sin \varphi \cdot F_\varphi \\ F_y &= \sin \varphi \cdot F_\rho + \cos \varphi \cdot F_\varphi\end{aligned}\tag{13}$$

A példában

$$F_\rho = -\frac{\gamma}{\rho^2}, \quad F_\varphi = 0,$$

polárkoordinátákban tehát az erő csak az egyik koordinátától ( $\rho$ -tól) függ, és csak az egyik komponense különbözik zérustól. Ez jelentős egyszerűsítés.

A fenti képletek hengerkoordinátákra is vonatkoznak. Gömbi koordinátáknál

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_y + \cos \vartheta \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_\vartheta &= \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_y - \sin \vartheta \cdot \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \cdot \vec{e}_x + \cos \varphi \cdot \vec{e}_y\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_x &= \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_r + \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_\vartheta - \sin \varphi \cdot \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y &= \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_r + \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_\vartheta + \cos \varphi \cdot \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z &= \cos \vartheta \cdot \vec{e}_r - \sin \vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}F_r &= \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot F_x + \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot F_y + \cos \vartheta \cdot F_z \\ F_\vartheta &= \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot F_x + \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot F_y - \sin \vartheta \cdot F_z \\ F_\varphi &= -\sin \varphi \cdot F_x + \cos \varphi \cdot F_y\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}F_x &= \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot F_r + \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot F_\vartheta - \sin \varphi \cdot F_\varphi \\ F_y &= \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot F_r + \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot F_\vartheta + \cos \varphi \cdot F_\varphi \\ F_z &= \cos \vartheta \cdot F_r - \sin \vartheta \cdot F_\vartheta\end{aligned}\tag{17}$$

19.Feladat: Írjuk fel az izotróp harmonikus oszcillátorban ható erőt alkalmas koordinátákra.

Megoldás:

$$F_r = -Dr \quad F_\vartheta = F_\varphi = 0. \clubsuit$$

20.Feladat: Írjuk át az alábbi vektormezőt alkalmas koordinátákra:

$$F_x = \frac{-y}{(x^2 + y^2)} \quad F_y = \frac{x}{(x^2 + y^2)} \quad F_z = 0.$$

Megoldás:

$$F_\varphi = \frac{1}{\rho} \quad F_\rho = F_z = 0. \clubsuit$$

21.Feladat: Ugyanaz a feladat a  $z$  tengely körül  $\omega$  szögsebességgel forgó test sebességmezőjére.

Megoldás:

$$v_\varphi = \omega\rho \quad v_\rho = v_z = 0.$$

Megjegyzés: A „sebességmező” kifejezés jelentésének a megállapításánál abból kell kiindulni, hogy egy mező mindig a *tér pontjaihoz* rendel valamilyen mennyiséget. A sebességmező esetében ez a mennyiség a *tér* minden  $(x, y, z)$  pontjában az a sebességvektor, amellyel a test azon pontja rendelkezik, amely az adott pillanatban éppen az  $(x, y, z)$  pontban tartózkodik. ♣

22.Feladat: Ugyanaz arra az erőterre, amellyel egy origóban nyugvó  $q^*$  mágneses töltés<sup>4</sup> hat egy  $q$  elektromos ponttöltésre.

Megoldás: A ponttöltésre az  $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$  Lorentz-erő hat, amelyben  $\vec{B} = \frac{q^*}{4\pi r^2} \vec{e}_r = B\vec{e}_r$  az origóbeli  $q^*$  mágneses töltés "Coulomb-tere". Ezért

$$\vec{F} = q \left\{ v_r \underbrace{(\vec{e}_r \times \vec{e}_r)}_0 + v_\varphi \underbrace{(\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r)}_{-\vec{e}_\varphi} + v_\varphi \underbrace{(\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_r)}_{\vec{e}_\varphi} \right\} B.$$

(Kihasználtuk, hogy az  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$  bázisvektorok jobbsodrású rendszert alkotnak). Így

$$F_r = 0 \quad F_\varphi = qv_\varphi B = \frac{qq^*}{4\pi r^2} v_\varphi \quad F_z = -qv_\varphi B = -\frac{qq^*}{4\pi r^2} v_\varphi. \clubsuit$$

## 1.6. Az erőfüggvény

Vizsgáljunk olyan erőt, amely a koordináták és az idő valamilyen  $U$  függvényének a negatív gradiense. Az ilyen erőteret *potenciálosnak* (vagy *gradiens-mezőnek*), az  $U$ -t pedig *erőfüggvénynek* nevezzük.

Egyetlen tömegpontnál  $U = U(x, y, z, t) \equiv U(\vec{r}, t)$  és

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\vec{\nabla}U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\left( \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \\ &= -(\partial_x U, \partial_y U, \partial_z U) = -\partial_x U \cdot \vec{e}_x - \partial_y U \cdot \vec{e}_y - \partial_z U \cdot \vec{e}_z, \end{aligned}$$

<sup>4</sup>A mágneses töltések (monopólusok) megfigyelésére irányuló kísérletek mindeddig negatív eredménnyel zárultak. A problémát az elektrodinamikában tárgyaljuk részletesebben.

$n$  tömegpontnál  $U = U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) \equiv U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$  és

$$\begin{aligned}\vec{F}_\alpha &= -\vec{\nabla}^\alpha U = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}^\alpha} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial U}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial U}{\partial z_\alpha}\right) = \\ &= -(\partial_x^\alpha U, \partial_y^\alpha U, \partial_z^\alpha U) = -\partial_x^\alpha U \cdot \vec{e}_x - \partial_y^\alpha U \cdot \vec{e}_y - \partial_z^\alpha U \cdot \vec{e}_z,\end{aligned}$$

ahol  $\alpha = 1, 2, \dots, n$ . Világos, hogy  $U$  és  $U + konst$  ugyanazt az erőt határozza meg.

A gradiensképzésnél  $t$  konstansnak tekintendő, és amikor az  $\alpha$ -ik tömegpont koordinátái szerint deriválunk, a többi tömegpont koordinátái is konstansok. Ezért a gradiensvektor geometriai jelentésének a vizsgálatánál korlátozódhatunk egyetlen tömegpont  $U(x, y, z)$  típusú erőfüggvényére.

Azokat a felületeket, amelyeken  $U(x, y, z)$  értéke konstans, *szintfelületeknek* nevezük. Ha  $\vec{r} = (x, y, z)$  és  $\vec{r} + d\vec{r} = (x + dx, y + dy, z + dz)$  két közeli pont, akkor

$$dU = U(x + dx, y + dy, z + dz) - U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = (\vec{\nabla}U \cdot d\vec{r}).$$

Legyen először  $d\vec{r}$  a szintfelület érintője. A két pont ekkor *ugyanazon* a szintfelületen fekszik, így  $dU = 0$  és ezért

$$(\vec{\nabla}U \cdot d\vec{r}) = 0.$$

Ebből a képletből leolvasható, hogy  $\vec{\nabla}U(x, y, z)$  merőleges az  $(x, y, z)$  ponton áthaladó szintfelületre.

Ezután válasszuk  $d\vec{r}$ -t a szintfelületre merőlegesnek (azaz  $\vec{\nabla}U$ -val párhuzamosnak) úgy, hogy  $U$  növekedési irányába mutasson. Ekkor

$$dU = |\vec{\nabla}U| \cdot ds,$$

ahol  $ds = |d\vec{r}|$ . Ez a képlet mutatja, hogy a  $\vec{\nabla}U$  vektor hossza  $\frac{dU}{ds}$ -el, az  $U$  *ívhozsúság* szerinti deriváltjával egyenlő (vagyis az  $U$  egységnyi útra jutó megnövekedésével a szintfelületre merőleges irányban).

Ennek a geometriai képnek az alapján könnyen felírhatjuk a gradiens komponenseit az előző fejezetben tárgyalt lokális bázisokban. Legyen  $\vec{e}_q$  a bázisvektorok egyike. A  $\vec{\nabla}U$   $\vec{e}_q$  irányú komponensének a nagysága  $\frac{dU}{ds_q}$ -val egyenlő, ahol  $ds_q$  a  $dq$  koordinátakülönbséghez tartozó távolság (ha pl.  $q \equiv \varphi$  a hengerkoordináta azimutszöge, akkor  $ds_\varphi = \rho \cdot d\varphi$ ).

Eszerint

$$\left. \begin{aligned}\vec{\nabla}U &= \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \\ &= \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

23.Feladat: Adjuk meg a 19.feladat erőteréhez tartozó erőfüggvényt, ha van ilyen.

Megoldás:  $U = \frac{D}{2}r^2 \clubsuit$ .

24.Feladat: Ugyanaz a 20.feladatra.

Megoldás:  $U = -\varphi \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad \rho \neq 0 \clubsuit$ .

25.Feladat: Ugyanaz a 14.feladatra

Megoldás: Síkban  $U = -\frac{\gamma}{\rho}$ , térben  $U = -\frac{\gamma}{r} \clubsuit$ .

26.Feladat: ugyanaz a 15.feladatra.

Megoldás:  $U = -\frac{\gamma}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} - \frac{\gamma}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} + \frac{1}{2}D((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2) \clubsuit$

27.Feladat: Ugyanaz a 21.feladat sebességmezőjére.

Megoldás: Ez a  $\vec{v}$  nem gradiensmező.

Magyarázat: Ha  $\vec{v}$  gradiensmező, akkor a  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$  egyenlőség bizonyosan teljesül, ui.  $v_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$  következtében a  $\frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}$  azonosságra redukálódik. A feladatban azonban Descartes koordinátákban  $\vec{v} = \omega \cdot (-y, x, 0)$ , ezért  $\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\omega \neq \frac{\partial v_y}{\partial x} = +\omega$ , tehát ez a  $\vec{v}$  nem gradiensmező.  $\clubsuit$

Tanulság: Az  $\vec{F}(x, y, z)$  akkor gradiensmező, ha

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}.$$

28.Feladat: Ugyanaz a 17.feladat erőterére.

Megoldás: Ez az erőter nem gradiensmező, mert sebességfüggő.  $\clubsuit$

29.Feladat: Határozzuk meg az

$$U = \frac{(\vec{d} \cdot \vec{r})}{r^3} \quad (\vec{d} \text{ konstans vektor}) \quad (19)$$

erőfüggvényhez tartozó erőtvényt (dipóltér).

Megoldás: Amikor  $U$  Descartes-koordinátákban az  $\vec{r}$  helyzetvektort tartalmazó skalárszorzatokon keresztül van kifejezve, a gradienst az  $\vec{r}$ -szerinti deriválással is képezhetjük:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} = -\frac{\frac{\partial(\vec{d} \cdot \vec{r})}{\partial \vec{r}} \cdot r^3 - \frac{\partial r^3}{\partial \vec{r}} (\vec{d} \cdot \vec{r})}{r^6} = \frac{3(\vec{d} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{d}}{r^5}. \quad (20)$$

Felhasználtuk, hogy

$$\frac{\partial r}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla} r = \frac{\partial(\vec{r} \cdot \vec{r})^{1/2}}{\partial \vec{r}} = \frac{1}{2(\vec{r} \cdot \vec{r})^{1/2}} \cdot 2\vec{r} = \frac{1}{r}\vec{r}.$$

Az erő támadási pontja az  $\vec{r}$  helyzetvektor végpontja.

Megjegyzés: Az utóbbi képletekkel az elektrosztatikában találkozunk. Ha ugyanis a (20)-ban elvégezzük a

$$\vec{d} = q \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{p}$$

helyettesítést, akkor az  $\vec{F} = q\vec{E}$  képletre jutunk, amelyben

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5}$$

az origóban elhelyezkedő  $\vec{p}$  dipólnyomatékú pontszerű dipól elektromos tere.♣

## 1.7. Az energia

Ha egy erőtér olyan erőfüggvényből származtatható, amely nem függ *explicit*e az időtől, *konzervatív*nak nevezjük. Az elnevezés magyarázata az, hogy ekkor a  $K + U = E$  összeg — amelyben  $K$  a kinetikus energia —, mozgásállandó. Az összeget (teljes energiának, az  $U$ -t pedig az energia kifejezésében játszott szerepe miatt potenciális energiának nevezjük (akkor is, ha *explicit*e is függ az időtől).

Megjegyzések:

1) Ha egy dinamikai mennyiség csak a benne szereplő koordinátákon és sebességeken keresztül függ az időtől, akkor *implicit időfüggés*ről beszélünk. Az *explicit időfüggés* azt jelenti, hogy az argumentumok között szerepel külön az idő is.

2) *Mozgásállandónak* (mozgásintegrálnak) a koordináták és a sebességek olyan függvényét nevezjük, amely megtartja állandó értékét, amikor a koordináták és a sebességek a mozgásegyenleteknek megfelelően változnak.

Az energiatétel igazolása (először egyetlen külső erőtérben mozgó tömegpontra):

A mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ m\ddot{z} &= F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}$$

Szorozzuk az egyenleteket rendre  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ -vel:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\dot{x} &= -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} \\ m\ddot{y}\dot{y} &= -\frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ m\ddot{z}\dot{z} &= -\frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Adjuk össze a három egyenletet:

$$\begin{aligned} \text{baloldal} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{dK}{dt} \\ \text{jobboldal} &= -\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}, \end{aligned}$$

(ld. a megjegyzést), ahonnan

$$\frac{d}{dt}(K + U) = \frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Amikor tehát  $U$  nem függ expliciten az időtől  $\left(\frac{\partial U}{\partial t} = 0\right)$ ,  $E$  valóban mozgásállandó.

\*

Megjegyzés a parciális és a teljes idő szerinti derivált különbségéről és kapcsolatáról:

Legyen  $f = f(x, y, z, t)$ .

$\frac{\partial f}{\partial x} dx$  az  $f$  megváltozása annak következtében, hogy  $x$  megváltozik  $dx$ -el, miközben az összes többi független változó állandó marad.

$\frac{df}{dt} dt$  az  $f$  megváltozása  $dt$  idő alatt az *összes* argumentum változása következtében.

A kis hatások additivitása alapján

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Ezt az egyenletet  $dt$ -vel megszorozott alakjában is használjuk.

\*

Az általános esetben  $x$ ,  $y$ ,  $z$ -t  $x_\alpha$ ,  $y_\alpha$ ,  $z_\alpha$ -val helyettesítjük, és természetesen

$$K = \sum_{\alpha} K_{\alpha} = \sum_{\alpha} \left( \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{y}_{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_{\alpha} \dot{z}_{\alpha}^2 \right).$$

A bizonyítás lépései ugyanazok, mint előbb.

Az  $\vec{F}$  erő  $d\vec{r}$  elmozduláson

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

*munkát végez a tömegponton (a  $dW$  előjeles mennyiség). Az energiátétel következtében ez a munka a kinetikus energiát növeli a potenciális energia rovására:*

$$dK = -dU = -\frac{\partial U}{\partial x} dx - \frac{\partial U}{\partial y} dy - \frac{\partial U}{\partial z} dz = F_x dx + F_y dy + F_z dz = dW.$$

30.Feladat: Igazoljuk, hogy a mágneses térben mozgó ponttöltés kinetikus energiája mozgásállandó.

Igazolás:

Szorozzuk az

$$m\vec{a} = e(\vec{v} \times \vec{B})$$

mozgásegyenlet mindkét oldalát skalárisan a sebességgel. A jobboldalon nullát kapunk, mert  $(\vec{v} \times \vec{B}) \perp \vec{v}$ , a baloldalon pedig  $m\vec{a}\vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = \frac{dK}{dt}$ .♣

31.Feladat: Írjuk fel a mozgási energiát polár-, henger- és gömbi koordinátákban.

Megoldás: Ha a  $dt$  idő alatt megtett út  $ds$ , akkor

$$K = \frac{m}{2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2.$$

Ugyanazt a  $ds$  elmozdulást a különböző koordinátarendszerekben a következő képletek fejezik ki:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2,$$

ahonnan

$$K = \begin{cases} \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) \\ \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + \dot{z}^2 \\ \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2). \clubsuit \end{cases} \quad (21)$$

Mint láttuk, amikor  $U$  explicite függ az időtől, a rendszer energiája nem marad meg

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t},$$



az energia változási sebessége az erőfüggvény idő szerinti parciális deriváltjával egyezik meg.

Az  $U$  explicit időfüggése külső erők jelenlétére utal. A belső erőket és a hozzájuk tartozó erőfüggvényt ugyanis a rendszerhez tartozó testek helyzete (koordinátája) határozza meg, amelynek változásait a mozgásegyenletek szabályozzák, és ezért nem függhetnek expliciten (előre megadott módon)  $t$ -től. A külső erők forrásai azonban olyan objektumok, amelyek nem tartoznak a rendszerhez, ezért a külső erők időfüggését a rendszer mozgásától függetlenül adhatjuk meg. Ha a külső erők forrásait is besoroljuk a rendszerbe (a rendszert nyitottból zárttá tesszük), az új "nagy" rendszer energiája már szükségképpen mozgásállandó lesz. Ez a megfontolás mutatja, hogy az eredeti nyitott rendszer energiájának a megváltozását a források energiája fedezi.

*Energiatétel:* Izolált (zárt) rendszer energiája megmarad.

32.Feladat: Lineáris harmonikus oszcillátor  $D$  rugalmas állandója adiabatikusan változik (pl. hő vagy kémiai folyamatok hatására). Hogyan változik a rezgés energiája?

Megoldás: Az adiabatikusság fogalmát akkor használjuk, amikor egy rendszerben két egymástól nagyon különböző időskálájú (egy gyors és egy lassú) folyamat megy végbe, és a gyors folyamat tárgyalásánál a lassú változástól eltekinthetünk. A példánkban a direkción konstans változása olyan lassú, hogy hatása a rezgőmozgásra, amely a "gyors" folyamat, csak nagyon sok periódus után vehető észre, ezért a rezgés minden pillanatban határozott amplitudóval, körfrekvenciával, periódussal, fázissal rendelkezik. A harmonikus oszcillátor energiája

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{D}{2}x^2,$$

amelyben a második tag a potenciális energia, ezért az energia változási sebességét a

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{dD}{dt} \cdot x^2$$

képlet határozza meg. Az adiabatikusság miatt a rezgési periódus alatt  $D$  is,  $\frac{dD}{dt}$  is konstansnak tekinthető. Ezért az energia egy periódusra átlagolt változási sebességét a

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dD}{dt} \overline{x^2} = \frac{1}{4} \frac{dD}{dt} A^2$$

képlet adja meg. (Felhasználtuk, hogy  $x^2$  egy periódusra átlagolt értéke

$$\overline{x^2} = A^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} A^2,$$

és  $\frac{dE}{dt}$  átlagára meghagytuk a  $\frac{dE}{dt}$  jelölést.) Mivel  $E = \frac{1}{2} DA^2$ , ezért ez a képlet

$$\dot{E} = \frac{E}{2D} \dot{D}$$

alakban is írható. Deriválással meggyőződhetünk róla, hogy ennek a diff.egyenletnek a megoldása

$$E = C \cdot \sqrt{D} \quad (C = \text{konstans}).$$

Ezzel választ kaptunk a kérdésünkre:  $E$  (átlaga) a direkción konstans négyzetgyökével arányosan változik (ha  $t = 0$ -ban  $E = E_0$ ,  $D = D_0$ , akkor  $C = \frac{E_0}{\sqrt{D_0}}$ ).

Mivel  $\sqrt{D} = \omega\sqrt{m}$ , ezt az eredményt inkább az

$$\frac{E}{\omega} = \text{inv}$$

alakban szokták felírni, és azt mondják, hogy az energia és a körfrekvencia hányadosa *adiabatikus invariáns*: a  $D$  adiabatikus változásakor ez az arány időben állandó.♣

Kérdés: Hőmérséklet változás következtében  $D$  a négyszeresére nő. Hogyan változik meg az amplitúdó?

Válasz:  $D \rightarrow 4D$ ,  $E \rightarrow 2E$ ,  $A \rightarrow (1/\sqrt{2})A$ .♣

## 1.8. A Newton-egyenletek görbevonaltú koordinátákban

Ebben a fejezetben a Newton-egyenletek baloldalának (a gyorsulásnak) a transzformációjával foglalkozunk polár-, henger-, ill. gömbi koordinátákra.

Példaként egyetlen tömegpont síkbeli mozgását vizsgáljuk:

$$m\ddot{x} = F_x \quad m\ddot{y} = F_y.$$

Alakítsuk ezeket az egyenleteket úgy, hogy a jobboldalon  $F_\rho$ ,  $F_\varphi$  álljon.

Az átalakítás két lépésből áll. Először a (12) alapján az egyenleteket össze kell adni, miután sorban  $\cos \varphi$ -vel és  $\sin \varphi$ -vel, majd pedig  $-\sin \varphi$ -vel és  $\cos \varphi$ -vel szoroztuk őket:

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi) &= F_\rho \\ m(-\ddot{x} \sin \varphi + \ddot{y} \cos \varphi) &= F_\varphi. \end{aligned}$$

Második lépésként az  $\ddot{x}$ -t és az  $\ddot{y}$ -t az

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = \rho \sin \varphi$$

kétszeri deriválásával ki kell fejezni  $\rho$ ,  $\varphi$ -n keresztül:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{\rho} \cos \varphi - 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \sin \varphi - \rho\ddot{\varphi} \sin \varphi - \rho\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ \ddot{y} &= \ddot{\rho} \sin \varphi + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \cos \varphi + \rho\ddot{\varphi} \cos \varphi - \rho\dot{\varphi}^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

Ezek alapján kapjuk a keresett mozgásegyenleteket:

$$\begin{aligned} m\ddot{\rho} &= F_\rho + m\rho\dot{\varphi}^2 \\ m\rho\ddot{\varphi} &= F_\varphi - 2m\dot{\rho}\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Az egyenleteket úgy rendeztük, hogy hasonlók legyenek a Descartes-koordinátákban érvényes egyenletekhez annyiban, hogy a baloldalon csak a második időderiváltat tartalmazó tag álljon, és a jobboldalon külön tagként maradjanak meg az  $\vec{F}$  erő eredeti komponensei. Ez utóbbiak mellett a jobboldalon megjelenik az

$$\vec{F}^c = (F_\rho^c, F_\varphi^c) = (m\rho\dot{\varphi}^2, -2m\dot{\rho}\dot{\varphi})$$

*fiktív erő*, amelyet *koordinátaerő*nek fogunk nevezni és *c*-indexszel különböztetünk meg a valódi erőktől. Az  $F_\rho^c$  a centrifugális, az  $F_\varphi^c$  a Coriolis-erővel azonos, mint azt később, a gyorsuló koordinátarendszerek tárgyalásánál látni fogjuk (74.feladat).

A koordinátaerő a Descartes-komponensekben felírt mozgásegyenlet baloldalából származik, ezért arányos annak a testnek a tömegével, amire hat. Ez a tulajdonság a fiktív erők sajátja, és nem jellemző a valódi erőkre.

Koordinátaerő akkor lép fel, amikor Newton-egyenleteket a descartesitól eltérő koordinátarendszerbe transzformáljuk át. A koordinátaerő funkciója a szabad mozgás ( $\vec{F} = 0$ ) tárgyalásánál látszik világosan. Ekkor a mozgásegyenletek polárkoordinátákban a következők:

$$m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 \quad m\rho\ddot{\varphi} = -2m\dot{\rho}\dot{\varphi}. \quad (22)$$

Ha koordinátaerők nem jelennének meg, és a jobboldalon nulla állna, mint Descartes-koordinátákban, a megoldások között megtalálnánk például a  $\rho = konst$   $\varphi = \omega t$  egyenletes körmozgást annak ellenére, hogy a valódi szabad mozgás egyenes egyenesvonalú.

A Descartes-koordinátákat az tünteti ki, hogy a koordinátarendszerek között ez símul a tehetetlenség törvényéhez: csak Descartes-koordinátákban igaz, hogy a koordinátavonalak megegyeznek a tehetetlenségi mozgás pályájával.

33.Feladat: Írjuk fel a mozgásegyenleteket gömbi koordinátákban.

Megoldás:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2\vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) &= F_r \\ m(r\ddot{\vartheta} - r\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \dot{\varphi}^2 + 2\dot{r}\dot{\vartheta}) &= F_\vartheta \\ m(r\sin\vartheta \cdot \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\vartheta + 2r\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\vartheta) &= F_\varphi, \end{aligned} \quad (23)$$

Megfelelő átrendezéssel megkaphatjuk a koordinátaerő képleteit gömbi koordinátákban.♣

Megjegyzés: Az átalakítás második lépésében az első két egyenlet baloldalán húsz tag jelenik meg, amelyek zöme kiejti egymást úgy, hogy végül csak három tag marad. Gyanítható, hogy létezik a feladat megoldásának olyan egyszerűbb módja, amelynek minden lépésében csak a lényeges tagok jelennek meg. Ilyen hatékonyabb és áttekinthetőbb eljárás a Lagrange-módszer.

## 1.9. Lagrange-függvény, Lagrange-egyenletek

Az előző fejezetben meggyőződhattünk róla, hogy a mozgásegyenletek átírása új koordinátákra bonyolult feladat. A Lagrange-módszer (egyik) előnye az, hogy ezt az áttérést lényegesen egyszerűsíti.

A módszer alapja az, hogy nagyon sok esetben a dinamikai rendszer összes tulajdonsága összefoglalható egyetlen függvényben — ez a *Lagrange-függvény* —, amely a koordináták, a sebességek és az idő függvénye. A Lagrange-függvényből univerzális (tetszőleges koordinátákban érvényes) eljárással származtathatók a mozgásegyenletek, ezért a koordinátatranszformációkat nem a mozgásegyenletekben, hanem a Lagrange-függvényben célszerű elvégezni, ami igen nagy egyszerűsítés.

A koordináták természetét az általános tárgyalásban nem szükséges specializálnunk, ezért *általános koordinátákkal* fogunk dolgozni, amiket  $q_1, q_2, \dots, q_n$ -el jelölünk. A  $q_i$ -k között lehetnek távolságok, szögek, stb. tehát a fizikai dimenziójuk is különbözhet. Csak az lényeges, hogy a  $q_i$ -k megadása egyértelműen rögzítse a rendszer *konfigurációját*.

Tegyük fel most, hogy dinamikai rendszerünkhöz rendelhető Lagrange-függvény, amelyet

$$L = L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = L(q, \dot{q}, t)$$

-vel jelölünk. A Lagrange-függvény  $i$ -k koordináta szerinti Lagrange-deriváltjának az

$$L_i \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

kifejezést nevezzük. Ebben a kifejezésben a koordináták és a sebességek szerinti parciális deriválással együtt szerepel a  $\frac{d}{dt}$  teljes idő szerinti derivált is, amelynek a jelentését a 7.fejezetben tárgyaltuk: az  $L_i$  első tagja a  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  változási sebessége annak következtében, hogy benne a koordináták, a sebességek és az idő változik.

Az  $L$ -ből a mozgásegyenletek az

$$L_i \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n. \quad (24)$$

szabály alapján számíthatók ki. Ezeket az egyenleteket nevezzük *Lagrange-egyenleteknek*.

Hogyan rendelhetünk adott dinamikai rendszerhez Lagrange-függvényt? Ha a mozgásegyenleteket (erőket) már ismerjük, az egyetlen szempont az, hogy a Lagrange-egyenletek *egyezzenek meg* a mozgásegyenletekkel. Ha a mozgásegyenletek (még) nem ismeretesek, olyan  $L$ -t kell választani, amelyhez tartozó Lagrange-egyenletek a tapasztalattal megegyező mozgásokat írnak le.

Az  $L$  megválasztását megkönnyítik a következő szempontok:

1) Ha van erőfüggvény, akkor  $L = K - U$ .

2) Az  $L$  nem tartalmazza a sebességek kvadratikusnál magasabb hatványait.

3) Független rendszerek Lagrange-függvényei összeadódnak.

A következő fejezetben fogjuk bizonyítani, hogy a Lagrange-egyenleteket a koordináták természetétől függetlenül mindig (24) alapján kell származtatni. Fogadjuk ezt most el, és nézzünk példákat, amelyekben különféle dinamikai rendszerek  $L$ -jét kell megtalálni és le kell belőle származtatni a Lagrange-egyenleteket.

34. Feladat: Egyetlen tömegpont szabad mozgása Descartes-koordinátákban.

Megoldás:

$$K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad U = 0,$$

ezért

$$L = K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Az  $x$ -változóhoz tartozó Lagrange-egyenlet a következő:

$$L_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

amelyben

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \longrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

A keresett Lagrange-egyenlet tehát

$$m\ddot{x} = 0,$$

megegyezik a szabad mozgás Newton-egyenletével. Nyilván ugyanez a helyzet az  $L_y = 0$ ,  $L_z = 0$  egyenletekkel, tehát az  $L$ -t helyesen választottuk. ♣

35. Feladat: Ugyanaz hengerkoordinátákban.

Amikor csak koordinátarendszert változtatunk, az  $L$  ugyanaz marad, csak ki kell fejezni az új koordinátákon keresztül. Ez történhet behelyettesítéssel, de egyszerűbb, ha vesszük a  $K$  (21)-ből már ismert alakját:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

Az  $L_\rho = 0$  egyenlet származtatása:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= m\dot{\rho}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} &= m\ddot{\rho}, & \frac{\partial L}{\partial \rho} &= m\rho\dot{\varphi}^2 \\ L_\rho &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial \rho} &= m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Az  $L_\varphi = 0$ ,  $L_z = 0$  egyenletek levezetése hasonló:

$$L_\varphi = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m\rho^2\ddot{\varphi} + 2m\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0$$

$$L_z = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot{z} = 0.$$

Az első két egyenlet azonos (22)-vel, de a Lagrange-módszerrel történő származtatás egyszerűbb, mert csak differenciálásokat igényel, nincs szükség egyenletek összekombinálására.♣

36.Feladat: Homogén elektromos térben mozgó ponttöltés.

Megoldás:  $U = -q(\vec{r} \cdot \vec{E})$ .♣

37.Feladat: Egyetlen tömegpont mozgása erőterben gömbi koordinátákban.

Megoldás:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) - U(r, \vartheta, \varphi).$$

A Lagrange-egyenletek (23)-mal azonosak.

A leggyakoribb eset az, amikor az erő centrális (az erőfüggvény csak  $r$ -től függ). Ekkor

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) - U(r), \quad (25)$$

és a mozgásegyenletek a következők:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) &= -U'(r) \\ r\ddot{\vartheta} - r\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2 + 2\dot{r}\dot{\vartheta} &= 0 \\ r\sin \vartheta \cdot \ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \vartheta + 2r\dot{\vartheta}\dot{\varphi} \cos \vartheta &= 0. \clubsuit \end{aligned} \quad (26)$$

38.Feladat: Két tömegpont között centrális erő hat.

Megoldás:

$$L = \frac{m_1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) - U(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}).$$

Célszerű bevezetni új koordinátaként az  $\vec{r} = (x, y, z)$  relatív koordinátákat és a tömegközéppont  $\vec{R} = (X, Y, Z)$  koordinátáit:

$$x = x_1 - x_2 \quad y = y_1 - y_2 \quad z = z_1 - z_2$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \\ Y &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \\ Z &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Az inverz transzformáció:

$$\begin{aligned}x_1 &= X + \frac{m_2}{m_1 + m_2}x, & y_1 &= Y + \frac{m_2}{m_1 + m_2}y, & z_1 &= Z + \frac{m_2}{m_1 + m_2}z \\x_2 &= X - \frac{m_1}{m_1 + m_2}x, & y_2 &= Y - \frac{m_1}{m_1 + m_2}y, & z_2 &= Z - \frac{m_1}{m_1 + m_2}z \\L &= \frac{M}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{\mu}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),\end{aligned}$$

ahol

$$M = m_1 + m_2 \quad \mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}.$$

A transzformáció eredménye az, hogy a Lagrange függvény két független részre esik szét (*szeparálódik*):

$$L = L_{TK}(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}) + L_{rel}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

Világos, hogy  $L_{rel}$ -ban célszerű gömbi koordinátákra áttérni:

$$\begin{aligned}L &= \frac{M}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) - U(r) = \\&= L_{TK}(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}) + L_{rel}(r, \vartheta, \varphi, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}).\end{aligned}$$

Az  $L_{TK}$  a tömegközéppont mozgását, az  $L_{rel}$  a relatív koordináták változását (a "relatív mozgást") határozza meg. A tömegközéppontra vonatkozó tag szabad mozgást ír le: a tömegközéppont egyenletes egyenvalú mozgást végez. A relatív koordináta Lagrange-függvénye — az  $m \rightarrow \mu$  helyettesítéstől eltekintve — megegyezik az előző feladat Lagrange-függvényével, (25)-tel: a *relatív* koordináta pontosan ugyanúgy változik, mint az origó centrális erőterében mozgó egyetlen  $\mu$  tömegű test koordinátája. ♣

39.Feladat: Ponttöltés mozog homogén mágneses térben (17.feladat). Keressük meg próbálgatással a feladat Lagrange-függvényét.

Megoldás: A (7) mozgásegyenletekre vezető Lagrange-függvény lehet a következő:

$$L = K - \frac{q}{2}(y\dot{x} - x\dot{y})B,$$

vektoriális alakban pedig

$$L = K + \frac{q}{2}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{B}.$$

Emellett azonban az  $L = K + qxyB$  is megfelelő választás, adott mozgásegyenlethez tehát több különböző Lagrange-függvény is található. ♣

40.Feladat: Mutassuk meg, hogy  $L(q, \dot{q}, t)$  és

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt} = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial f(q, t)}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f(q, t)}{\partial t}$$

ugyanarra a mozgásegyenletre vezet:  $L$  és  $L'$  *ekvivalens* Lagrange-függvények. Mivel a Lagrange-függvénynek nincs önálló fizikai jelentése, az egyértelműség hiánya nem jelent problémát: az ekvivalens Lagrange-függvények közül dolgozhatunk bármelyikkel. ♣

### 1.10. A Lagrange-eljárás invarianciája

A Lagrange-módszer hatékonysága azon múlik, hogy a (24) képlet tetszőleges koordinátaválasztásnál érvényes. Ezt azonban bizonyítani kell.

Tegyük fel, hogy valamilyen  $q_1, q_2, \dots, q_n \equiv q$  koordinátákat használunk, amelyekben a Lagrange-függvény  $L = L(q, \dot{q}, t)$ , és a mozgásegyenletek a következők:

$$L_{q_i} \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (27)$$

Ezután áttérünk az  $x_1, x_2, \dots, x_n \equiv x$  új általános koordinátákra a

$$q_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \equiv f_i(x, t) \quad (i = 1, \dots, n)$$

képletek segítségével.

A feltevésünk, amit bizonyítani szeretnénk, az, hogy az új változóknak a mozgásegyenletek ugyancsak a Lagrange-egyenletek:

$$L_{x_i} \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (28)$$

amelyekben  $L = L(x, \dot{x}, t)$ .

(Megjegyzés: Az  $L(x, \dot{x}, t)$  és az  $L(q, \dot{q}, t)$  a saját változóiknak természetesen különböző alakú függvényei, mégis ugyanazt az  $L$  jelet használjuk mindkettőnél. Ezzel utalunk arra, hogy ugyanannak a rendszernek a Lagrange-függvényéről van szó különböző koordinátákban. A változó, amely szerint  $L$ -t deriváljuk, mutatni fogja, hogy a két lehetőség közül melyik függvényt kell  $L$ -n érteni.)

Az állításunkat a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n c_{ij} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \quad (29)$$

egyenlőség bizonyításával igazoljuk. Ha ui. ez igaz, akkor (27) teljesülése maga után vonja (28) teljesülését és megfordítva (hacsak  $\det c_{ij} \neq 0$ , amit felteszünk).

A (29) bizonyítását  $n = 1$ -re végezzük, mert a lényeg már ebből is világos. Legyen tehát

$$q = f(x, t), \quad \dot{q} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial t},$$

ahonnan

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \dot{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

A feladat az, hogy az  $L$   $x, \dot{x}$  szerinti deriváltjairól a  $q, \dot{q}$  szerinti deriváltjaira térjünk át a közvetett függvény deriválási szabálya segítségével:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$$



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Ha a két kifejezés különbségét vesszük az utolsó tagok kiejtik egymást, és azt találjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = c \cdot \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right), \quad c = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

ami (29) speciális esete  $n = 1$ -re.

Ezzel a Lagrange-egyenletek invarianciáját beláttuk. A bizonyítás azonban hiányérzetet hagy az emberben: az az érzésünk, hogy a Lagrange-egyenletek invarianciájának bizonyára van valami "mélyebb oka", vagyis kell lennie olyan nézőpontnak, amelyből ez az invariancia "ránézésre", minden matematikai levezetés nélkül is látszik. Ilyen új nézőpont a hatáselv, amelyet a következő néhány fejezetben ismertetünk.

### 1.11. A hatás

A Newton-egyenletek általános megoldásában a szabad konstansokat legtöbbször a kezdeti koordináták és a kezdősebességek megadásán keresztül rögzítjük. Eljárhatunk azonban másképpen is: a kezdősebességek helyett megadhatjuk a koordináták értékét egy tetszőleges későbbi időpontban. Ez a gyakorlati feladatok megoldásánál ritkán előforduló, de az elméleti megfontolások szempontjából nagyon fontos eljárás így fogalmazható meg:

Válasszunk két időpontot,  $t_i$ -t és  $t_f$ -t ( $t_i < t_f$ <sup>5</sup>). A  $t_i$ -ben a koordináták legyenek  $q_{i1}, q_{i2}, \dots, q_{in} \equiv q_i$  (kezdőállapotú koordináták), a  $t_f$ -ben pedig  $q_{f1}, q_{f2}, \dots, q_{fn} \equiv q_f$  (végállapotú koordináták). Határozzuk meg a mozgásegyenleteknek azt a partikuláris megoldását, amely ezekkel a feltételekkel összefér.

41.Feladat: A  $t_i = 0$ -ban függőlegesen feldobott kő  $t_f = T$ -ben ér földet. Határozzuk meg a trajektóriáját.

Megoldás: Az  $m\ddot{z} = -mg$  Newton-egyenlet általános megoldása

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0.$$

A feladat feltételei szerint  $z_i = z_f = 0$ , ezért

$$z(0) = z_i = 0 \quad z(T) = z_f = 0,$$

vagyis

$$z_0 = 0 \quad -\frac{1}{2}gT^2 + v_0T + z_0 = 0.$$

Ez a két algebrai egyenlet meghatározza az általános megoldásban szereplő  $z_0, v_0$  szabad konstansokat:

$$z_0 = 0 \quad v_0 = \frac{1}{2}gT.$$

<sup>5</sup>Az  $i$  és az  $f$  index az "initial" (kezdeti) és a "final" (végső) angol szavakra utal.

A feladat feltételeit kielégítő partikuláris megoldás tehát a következő:

$$z(t) = \frac{1}{2}g(T-t)t. \clubsuit \quad (30)$$

42.Feladat: Határozzuk meg a ferde hajítás trajektóriáját, ha a test  $T$  idő alatt  $a$  távolságra jut el.

Megoldás: A kezdeti időpontot önkényesen választhatjuk, hiszen a gravitáció nem változik időben. Legyen megint  $t_i = 0$ . Akkor  $t_f = T$ . Hasonlóan szabadon választhatjuk meg a kezdeti és a végállapot  $x, y$  koordinátáit, azzal az egy feltétellel, hogy a távolságuk legyen  $a$ . Válasszuk őket így:

$$x_f = a \quad x_i = y_i = y_f = z_i = z_f = 0.$$

A mozgásegyenlet általános megoldása:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{0x}t + x_0 \\ y(t) &= v_{0y}t + y_0 \\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0. \end{aligned}$$

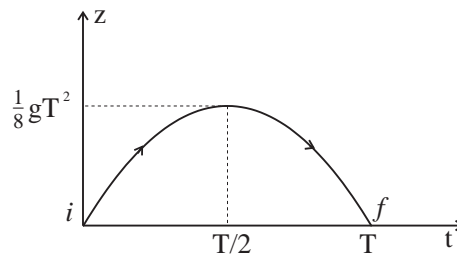
Könnyen beláthatjuk, hogy a feladat feltételeinek megfelelő konstansok a következők:

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0, \quad v_{0x} = \frac{a}{T} \quad v_{0y} = 0 \quad v_{0z} = \frac{1}{2}gT.$$

Ezeket az értékeket az általános megoldásba helyettesítve kapjuk a keresett partikuláris megoldást:

$$x(t) = \frac{a}{T}t \quad y(t) = 0 \quad z(t) = \frac{1}{2}g(T-t)t. \clubsuit$$

A 41.feladat (30) megoldását az alábbi ábrán rajzoltuk fel:



Az  $i$  és az  $f$  pont jelzi a kezdeti állapot és a végállapot koordinátáit (a *kezdeti és végállapot konfigurációt*), amelyeket a (30) fordított parabola-szegmens köt össze egymással.

Világos, hogy az  $i$  és az  $f$  pontot végtelen sok trajektóriával köthetjük össze, de ezek közül egyedül a (30) parabola-szegmens elégíti ki a Newton-egyenletet. Ezt úgy fejezzük ki, hogy egyedül (30) a *megvalósuló* trajektória, az összes többi nem-megvalósuló (virtuális)<sup>6</sup>.

Forduljunk most a Lagrange-függvényhez. Ha a Lagrange-függvényben a koordináták és a sebességek helyébe valamelyik — megvalósuló vagy virtuális — trajektória koordinátáit és sebességkomponenseit helyettesítjük be, a Lagrange-függvény a  $t$  explicit függvényévé válik. A 41.feladatban pl.  $L(z, \dot{z}, t) = \frac{m}{2}\dot{z}^2 - mgz$ . A (30) megvalósuló trajektórián ez az  $L$  a  $t$  idő

$$\frac{m}{2} \left( \frac{1}{2}gT - gt \right)^2 - mg \cdot \frac{1}{2}g(T-t)t = mg^2 \left[ \frac{1}{8}T^2 - (T-t)t \right]$$

függvénye.

Ezek szerint ha kiválasztunk egy trajektóriát, a Lagrange-függvényt ezen a trajektórián integrálhatjuk  $t$  szerint a  $(t_i, t_f)$  intervallumban. Ennek az integrálnak az értékét nevezzük *hatásnak*, és  $S$ -el jelöljük:

$$S[q(t)] = \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (31)$$

Ez a képlet minden  $q(t) \equiv q_1(t), q_2(t) \cdots q_n(t)$  trajektóriához egy számot — az  $S[q(t)]$  hatást — rendel hozzá. Az olyan matematikai objektumokat, amelyek függvényekhez számot rendelnek, *funkcionálnak* nevezzük (szemben a függvényekkel, amelyek számokhoz rendelnek számot). A (31)-ben definiált  $S$  hatás nyilván funkcionál, hiszen ahhoz, hogy az értékét kiszámíthassuk, meg kell adnunk egy trajektóriát  $n$  darab  $q_j(t)$  függvény segítségével. Ezek a függvények — amelyeket  $q(t)$  szimbolizál — az  $S$  argumentumai. A  $q(t)$  argumentumot azért tettük sarkos zárójelbe, hogy kihangsúlyozzuk:  $S$  nem a  $q_j(t)$  függvények  $t$ -ben felvett értékeinek a függvénye, hanem az egész  $(t_i, t_f)$  intervallum-beli  $q_j(t)$  függvények funkcionálja. A hatásfunkcionál (30) trajektóriához tartozó értéke

$$S[(30)] = \int_0^T mg^2 \left[ \frac{1}{8}T^2 - (T-t)t \right] dt = -\frac{1}{24}mg^2T^3. \quad (32)$$

A hatást nem a fizikai jelentése teszi fontossá az elméleti fizika számára. Valójában nincs is megfogható fizikai jelentése, ami már abból is érezhető, hogy — az impulzussal, impulzusmomentummal, energiával ellentétben — nem egy adott időpillanat-beli koordináták és sebességek függvénye, hanem egy egész időintervallumban lefolyó mozgás funkcionálja.

---

<sup>6</sup>Azt természetesen feltesszük, hogy a virtuális trajektóriák is egyértékű függvényei  $t$ -nek ("nem kanyarodnak vissza" az időben).

### 1.12. A hatáselv

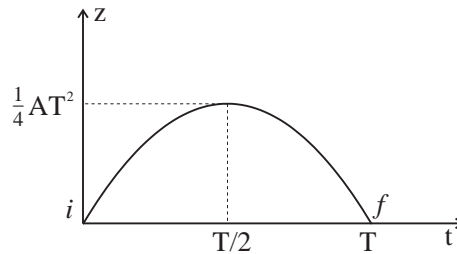
A hatás jelentőségét a *hatáselven* betöltött szerepe adja.

A hatáselv: A  $t_i$ -beli kezdeti és a  $t_f$ -beli végállapotú konfigurációt összekötő *megvalósuló* trajektória az, amelyre nézve a (31) hatásfunktiónak szélső értéke (extrémuma) van. A megvalósuló trajektóriát ezért *extremálisnak* is nevezik.

Illusztrációért forduljunk megint a függőleges hajításhoz, és számítsuk ki a hatást minden

$$z_A(t) = A \cdot (T - t)t \quad (33)$$

trajektóriára, amelyben  $A$  önkényes állandó.



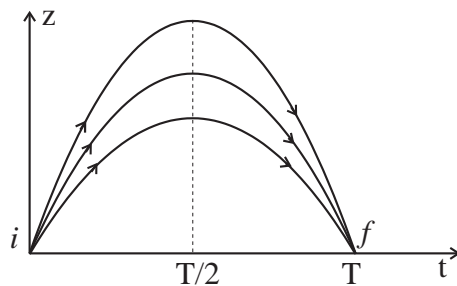
A (30)-ból tudjuk, hogy a megvalósuló trajektóriához  $A = \frac{1}{2}g$  tartozik, és az összes olyan trajektória, amelyre  $A \neq \frac{1}{2}g$ , virtuális. Ha a hatáselv igaz, akkor az

$$\begin{aligned} S[A] &= \int_0^T \left[ \frac{m}{2} \dot{z}_A^2 - mgz_A \right] dt = \int_0^T \left[ \frac{m}{2} A^2 (T - 2t)^2 - mgA(T - t)t \right] dt = \\ &= \frac{1}{6} m T^3 (A^2 - gA) \end{aligned} \quad (34)$$

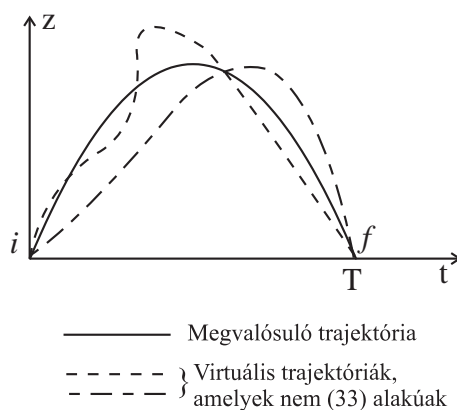
funkciónak<sup>7</sup>  $A = \frac{1}{2}g$ -nél szélső értékének kell lennie. Ez teljesül is, ugyanis az  $(A^2 - gA)$  függvénynek valóban  $A = \frac{1}{2}g$ -nél van minimuma, ahol (34) jobb oldala a korábban is kiszámított  $-\frac{1}{24}mg^2T^3$ -el egyenlő.

Ebben a megfontolásban természetesen a virtuális trajektóriáknak csak nagyon kis részét vettük figyelembe — azokat, amelyek (33) alakúak:

<sup>7</sup>Minden  $A$ -hoz tartozik egy trajektória, ezért indexelhetjük őket  $A$ -val, ahogy azt  $S$  argumentumában tettük.

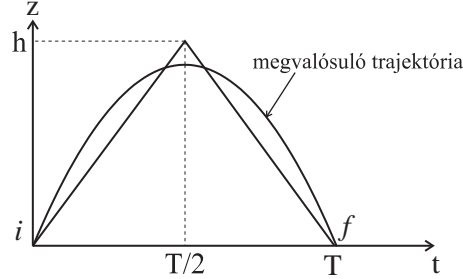


A hatáselv szerint a megvalósuló trajektórián a hatásfunkcionálnak az *összes lehetőség* virtuális pályához viszonyítva van szélső értéke:



Ennek az általános alakú szélsőérték problémának a matematikai megfogalmazása is lehetséges, és a szélső érték feltételeként a Lagrange-egyenlet teljesülését követeli meg.

43.Feladat: A függőleges hajításnál (41.feladat) számítsuk ki a hatást arra a virtuális trajektóriára, amely egyenlőszárú háromszög alakú (ld.az ábrát), és olyan, hogy az alatta levő terület megegyezik a (30) megvalósuló trajektória által határolt területtel. Hasonlítsuk össze az eredményt a megvalósuló trajektóriához tartozó hatással.



Megoldás: A (30) alatti terület  $\frac{1}{12}gT^3$ -el egyenlő, ezért  $\frac{1}{2}hT = \frac{1}{12}gT^3$ , ahonnan  $h = \frac{1}{6}gT^2$ , és  $|\dot{z}| = \frac{2h}{T} = \frac{1}{3}gT$ . Ezen a speciális trajektórián

$$S[h] = \frac{m}{2} \left( \frac{1}{3}gT \right)^2 \cdot T - mg \cdot \frac{1}{2}hT = -\frac{1}{36}mg^2T^3 > -\frac{1}{24}mg^2T^3 = S[(30)]. \clubsuit$$

### 1.13. A Lagrange-egyenletek származtatása a hatáselvből

Legyen  $q(t)$  extrémális, amelyen a (31) funkcionálnak szélső értéke van. Ez a tény matematikailag abban jut kifejezésre, hogy ha a  $q(t) + \delta q(t)$  a  $q(t)$ -hez közeli trajektória, amely ugyanazt a kezdeti és végállapotot köti össze, mint  $q(t)$ , akkor az  $S[q(t) + \delta q(t)]$  és az  $S[q(t)]$  különbsége  $\delta q(t)$ -ben lineáris pontossággal zérus:

$$\delta S \equiv S[q(t) + \delta q(t)] - S[q(t)] = o(\delta q(t)^2), \quad (35)$$

ahol  $\delta q(t) \equiv \delta q_1(t), \delta q_2(t), \dots, \delta q_n(t)$  a  $q(t)$  kis megváltozása, amely a

$$\delta q_j(t_i) = \delta q_j(t_f) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (36)$$

feltételtől eltekintve teljesen önkényes.

Indoklás: Ha lenne olyan  $\delta q(t)$ , amelynél  $\delta q(t)$ -ben lineáris pontossággal  $\delta S > 0$ , akkor  $-\delta q(t)$ -nél  $\delta S < 0$  volna, tehát  $S$ -nek nem lenne  $q(t)$ -nél szélső értéke (gondoljunk a függvény szélső értékére:  $f(x)$ -nek ott van szélső értéke, ahol  $\delta f(x) \equiv f(x + dx) - f(x) = o(\delta x^2)$ ).

Keressük (35) teljesülésének matematikai feltételét!

Fejtsük ki (35)-ben a hatásfunkcionálok különbségét  $\delta q(t)$ -ben lineáris pontossággal:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_i}^{t_f} \left[ L \left( q + \delta q, \dot{q} + \frac{d}{dt} \delta q, t \right) - L(q, \dot{q}, t) \right] dt = \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{t_i}^{t_f} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} \cdot \delta q_j(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{d}{dt} \delta q_j(t) \right] dt + o(\delta q(t)^2). \end{aligned} \quad (37)$$

A jobboldal utolsó kifejezését integráljuk parciálisan:

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{d}{dt} \delta q_j(t) \cdot dt &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \delta q_j(t) \right] dt - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \delta q_j(t) dt = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \delta q_j(t) \right] \right|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \cdot \delta q_j(t) dt. \end{aligned}$$

Az első tag (36) következtében zérus. Ha a megmaradt második tagot behelyettesítjük (37)-be, a

$$\delta S = \sum_{j=1}^n \int_{t_i}^{t_f} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] \delta q_j(t) \cdot dt$$

kifejezésre jutunk, amelynek integráljában a zárójelben éppen az  $L_{q_j}$  Lagrange-derivált negatívja áll:

$$\delta S = - \sum_{j=1}^n \int_{t_i}^{t_f} L_{q_j}(q, \dot{q}, t) \cdot \delta q_j(t) \cdot dt. \quad (38)$$

Mit fejez ki ez a képlet?

Az integrandusban az  $L_{q_j}(q, \dot{q}, t)$  tényezők minden adott trajektórián — azaz adott  $q(t) \equiv q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$  mellett — a  $t$  idő explicit függvényei. Ha a választott trajektória éppen a megvalósuló trajektória, akkor a hatáselv szerint a (38) integrálnak *minden (36)-al összeférő*  $\delta q_1(t), \delta q_2(t), \dots, \delta q_n(t) \equiv \delta q(t)$ -nél *el kell tűnnie*. Könnyen meggyőzhetjük magunkat róla, hogy ez csak akkor lehetséges, ha a megvalósuló trajektórián mindegyik  $L_{q_j}(q, \dot{q}, t)$  maga zérus: *a  $q(t)$  trajektória csak akkor lehet megvalósuló, ha kielégíti a Lagrange-egyenleteket.*

\*

A Lagrange-egyenletek invarianciája egyenes következménye annak, hogy ezeket az egyenleteket az a trajektória elégíti ki, amelyen a hatásfukcionálnak szélső értéke van. Valóban, egy adott trajektórián a hatásfukcionál értéke nem függ attól, milyen koordinátarendszerhez viszonyítva adjuk meg ezt a trajektóriát: a trajektória egyes pontjaiban az  $L$  értéke ugyanis nem változik meg attól, ha új koordinátákra térünk át, és a trajektória pontjaihoz tartozó időpontok sem függenek a koordinátarendszer választásától. *Ezért* nem függ a koordinátázás módjától az, hogy melyik trajektória az extrémális. És mivel a Lagrange-egyenleteket éppen az extrémális elégíti ki, az sem függhet a koordinátarendszer megválasztásától, hogy egy trajektória kielégíti-e a Lagrange-egyenleteket vagy sem: ha az egyikben kielégíti őket, az összes többiben is eleget tesz nekik.

### 1.14. Az általánosított impulzus

A  $q_i$  koordináta-hoz rendelt *általánosított impulzus*nak a

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (39)$$

kifejezést nevezzük. Ennek a fogalomnak a segítségével a Lagrange-egyenlet a

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (40)$$

alakot ölti. Ez az egyenlet hasonlít a Newton-egyenlethez, hiszen pl.  $m\ddot{x} = \frac{d}{dt}(mx) = \dot{p}_x$ . Emiatt  $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ -t (néha) az általánosított erő  $i$ -komponensének nevezik.

Amikor  $q_i$  dimenziója nem hosszúság ( $L$ ), a  $p_i$  dimenziója különbözik  $MLT^{-1}$ -től, az impulzus dimenziójától. Pl. hengerkoordinátákban  $p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}$ , aminek a dimenziója  $ML^2T^{-1}$ -el, az impulzusmomentum (perdület) dimenziójával egyezik meg. Írjuk át  $p_\varphi$ -t Descartes-koordinátákba:

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x},$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{\dot{y}x - \dot{x}y}{x^2} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2},$$

$$p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = (xp_y - yp_x) = (\vec{r} \times \vec{p})_z,$$

tehát  $p_\varphi$  az impulzusmomentum  $z$ -komponense. Ezzel szemben a  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = m(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  vektor  $\varphi$ -komponense (12) alapján

$$m(-\sin \varphi \cdot \dot{x} + \cos \varphi \cdot \dot{y}) = m[-\sin \varphi (\dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}) + \cos \varphi (\dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \cdot \dot{\varphi})] = m\rho\dot{\varphi}$$

-tal egyenlő. Ezt a mennyiséget is  $p_\varphi$ -vel kellene jelölnünk, de ezt sohasem fogjuk megtenni:  $p_\varphi$ -n (és általában  $p_i$ -n) *mindig* a (39) által definiált kifejezést fogjuk érteni és ezért az "általánosított" jelzőt elhagyhatjuk.

Az általánosított erővel — amire azonban nem vezetünk be külön jelölést —, hasonló a helyzet.  $\frac{\partial L}{\partial \varphi}$  dimenziója pl.  $ML^2T^{-2}$ , ami nem egyezik meg az erő dimenziójával ( $MLT^{-2}$ -vel). Ennek így is kell lennie. Ha  $p_\varphi$  az impulzusmomentum  $z$ -komponense, akkor (40) alapján  $\frac{\partial L}{\partial \varphi}$  nem lehet más, mint a forgatónyomaték  $z$ -komponense.

Ha valamelyik  $q_i$ -nek csak az időderiváltja fordul elő  $L$ -ben, akkor  $q_i$ -t *ciklikus koordinátának* nevezzük. A (40) mutatja, hogy *ciklikus koordináta*hoz tartozó *általánosított impulzus mozgásállandó*.



44.Feladat: Igazoljuk, hogy síkban centrális erő hatása alatt mozgó tömegpontra teljesül Kepler 2.törvénye.

Megoldás: A 2.törvény a területi sebesség állandóságát mondja ki. Mivel  $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - U(\rho)$ , a  $\varphi$  ciklikus koordináta és  $p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}$  mozgásállandó. De a területi sebesség ugyancsak  $\rho^2\dot{\varphi}$ -vel arányos, mivel a  $\rho(t)$  és a  $\rho(t + dt)$  által bezárt szegmens területe  $\frac{1}{2}\rho^2(t)d\varphi$ -vel egyenlő. Ezért  $p_\varphi$  állandósága egyenértékű a területi sebesség állandóságával.♣

### 1.15. Szimmetriák és mozgásállandók kapcsolata

Ha egy dinamikai rendszer tömegpontjait egyidejűleg el lehet mozdítani úgy, hogy közben viszonylagos helyzetük ne változzon meg se egymáshoz, se a külső erők forrásaihoz képest, akkor ezt az elmozdítást *szimmetriának* nevezzük. A szimmetria a külső erőket létrehozó objektumok konfigurációjának a sajátossága, hiszen ha az adott külső körülmények között egy rendszernek van valamilyen szimmetriája, akkor minden olyan rendszer rendelkezik fog ugyanezzel a szimmetriával, amelyre ugyanazok a külső erők hatnak.

A szimmetria lehet *diszkrét* vagy *folytonos* aszerint, hogy az elmozdítás mértéke csak diszkrét értékeket vehet fel vagy a nullától kezdve folytonosan változhat. Az alábbiakban csak folytonos szimmetriákról lesz szó.

*Eltolási (transzlációs) szimmetriánál* például a tömegpontok elmozdítása egy adott  $\vec{n}$  irányban történő tetszőleges, de minden tömegpontra nézve azonos nagyságú eltolás.

45.Feladat: Mutassunk rá az alábbi mechanikai rendszerek eltolási szimmetriáira:

- a)Egyetlen szabad tömegpont.
- b)Két, egymással centrális erővel kölcsönható tömegpont.
- c)Egyetlen tömegpont rögzített centrum erőterében.
- d)Egyetlen tömegpont *két* rögzített centrum erőterében.
- e)Egymással centrális erőkön keresztül kölcsönható tömegpontok a földfelszín homogén gravitációs erőterében.
- f)Ponttöltések végtelen síkkondenzátorban, amelyek egymással elektrosztatikusan hatnak kölcsön.
- g)Ugyanilyen ponttöltések egy rögzített végtelen hosszú elektromosan töltött vezető elektrosztatikus terében.♣

A szimmetria fenti definíciójából következik, hogy *szimmetriatranszformációnál*  $U$  *változatlan marad*. Eltolási szimmetria esetében célszerű olyan koordinátákat választani, amelyben a három koordinátavonal-sereg közül legalább az egyik párhuzamos egyenesekből áll (Descartes- vagy hengerkoordináták). Vegyük fel a  $z$ -tengelyt  $\vec{n}$ -irányúnak. Ekkor az  $U$  változatlansága (invarianciája)  $\vec{n}$  irányú, infinitezimális<sup>8</sup>  $\delta a$

<sup>8</sup>Itt használjuk ki, hogy a szimmetria folytonos.

nagyságú eltolásnál így fogalmazható meg:

$$U(* * * * *, z_1 + \delta a, \dots, z_N + \delta a) = U(* * * * *, z_1, \dots, z_N)$$

(a csillagozott helyen a változatlan argumentumok állnak), vagyis

$$dU = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial U}{\partial z_{\alpha}} \cdot \delta a = 0 \longrightarrow \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial U}{\partial z_{\alpha}} = 0.$$

*Noether tétele:* A rendszer minden folytonos szimmetriájához tartozik egy megmaradó mennyiség (mozgásintegrál).

Igazolás:  $\vec{n}$ -irányú eltolási szimmetriánál a választott koordinátarendszerben a kinetikus energia nem tartalmazza a  $z$  változót, ezért az  $U$  invarianciája egyben  $L$  invarianciája is:

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial L}{\partial z_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^N \underbrace{\left( \frac{\partial K}{\partial z_{\alpha}} - \frac{\partial U}{\partial z_{\alpha}} \right)}_0 = 0. \quad (41)$$

Írjuk fel most a  $z_{\alpha}$ -hoz tartozó Lagrange-egyenleteket

$$\frac{dp_{\alpha z}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial z_{\alpha}} \quad \alpha = 1, \dots, N$$

és adjuk őket össze. A (41) következtében azt találjuk, hogy

$$\frac{dP_z}{dt} = 0,$$

ahol

$$P_z = \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha z}$$

a rendszer teljes  $\vec{P}$  impulzusának  $z$ -komponense. Mivel  $z$ -t  $\vec{n}$ -irányúnak választottuk, eredményünk így fogalmazható meg:  $\vec{n}$ -irányú eltolási szimmetria esetén a  $\vec{P}$  teljes impulzus  $\vec{n}$ -irányú vetülete ( $P_n$ ) mozgásállandó.

46.Feladat: A teljes impulzus mely komponensei maradnak meg az előző feladatban felsorolt rendszereknél? ♣

*Forgási (rotációs) szimmetriánál* a tömegpontok elmozdítása egy adott  $\vec{n}$  irányú  $\mathcal{T}$  tengely körül történő tetszőleges, de minden tömegpontra nézve azonos nagyságú elfordítás.

47.Feladat: Mutassunk rá a 45.feladatban felsorolt mechanikai rendszerek forgási szimmetriáira. ♣

Célszerű hengerkoordináta-rendszert választani, amelynek  $z$ -tengelye egybeesik  $\mathcal{T}$ -vel. Ekkor  $z$  szimmetriatengely, ezért

$$U(\varphi_1 + \delta\varphi, \dots, \varphi_N + \delta\varphi) = U(\varphi_1, \dots, \varphi_N),$$

vagyis

$$dU = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial U}{\partial \varphi_\alpha} \cdot \delta\varphi = 0 \longrightarrow \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial U}{\partial \varphi_\alpha} = 0.$$

$\mathcal{T}$ -körüli forgási szimmetriánál a választott koordinátarendszerben a kinetikus energia nem tartalmazza a  $\varphi$  változót, ezért az  $U$  invarianciája egyben  $L$  invarianciája is:

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N \underbrace{\left( \frac{\partial K}{\partial \varphi_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial \varphi_\alpha} \right)}_0 = 0. \quad (42)$$

Írjuk fel most a  $\varphi_\alpha$ -hoz tartozó Lagrange-egyenleteket

$$\frac{dp_{\alpha\varphi}}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \varphi_\alpha} \quad \alpha = 1, \dots, N$$

és adjuk őket össze. A (42) következtében azt találjuk, hogy

$$\frac{dL_\alpha}{dt} = 0,$$

ahol<sup>9</sup>

$$L_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha\varphi}$$

a rendszer teljes  $\vec{L}$  impulzusmomentumának  $z$ -komponense. Mivel  $z$ -t  $\vec{n}$ -irányúnak választottuk, eredményünk így fogalmazható meg:  $\vec{n}$ -irányú tengely körüli forgási szimmetria esetén az  $\vec{L}$  teljes impulzusmomentum  $\vec{n}$ -irányú vetülete ( $L_n$ ) mozgásállandó.

Külön ki kell emelni a zárt rendszerek esetét. Ekkor *tetszőleges*  $\vec{n}$  irányú eltolás és *tetszőleges*  $\vec{n}$ -irányú körüli forgatás szimmetria, mivel egy zárt rendszer tömegpontjai ezeknek a műveleteknek a során az üres tér ekvivalens pontjaiba kerülnek. Mai fizikai világképünk szerint ugyanis az üres tér homogén (nincs benne kitüntetett pont) és izotróp (nincs benne kitüntetett irány). A Noether-tétel következtében tehát *zárt rendszer teljes  $\vec{P}$  impulzusa és  $\vec{L}$  impulzusmomentuma megmarad.*

Megjegyzések:

---

<sup>9</sup>Az impulzusmomentumot és a Lagrange-függvényt egyaránt  $L$ -el jelöljük, de a kontextusból mindig világos, mikor melyikről van szó.

1) A Noether-tétel bizonyítása közvetlenül nem  $U$ , hanem  $L$  invarianciáján alapul, ezért olyan esetekben is tartozik mozgásintegrál a szimmetriákhoz, amikor nincs erőfüggvény (de van  $L$ ).

2) Ekvivalens  $L$ -k létezése nem okoz problémát. Egy adott szimmetriához tartozó mozgásintegrál meghatározásához az ekvivalens  $L$ -k közül azt kell választani, amelyek a szimmetriatranszformációnál változatlan marad. Ilyen feladattal azonban a továbbiakban nem fogunk találkozni.

3) Egy általános dinamikai rendszernek a szimmetriákkal összefüggő mozgásállandókon kívül természetesen lehetnek olyan mozgásállandói is, amelyek nem kapcsolatosak észrevehető szimmetriákkal.

48. Feladat: Végtelen hosszú egyenletesen töltött szabályos spirál elektrosztatikus terében ponttöltések mozognak. Keressünk mozgásintegrált.

Megoldás:

A szimmetriatengelyt válasszuk a hengerkoordináták  $z$ -tengelyeként. A menetmagasság legyen  $a$ .

$$U(***, z_1 + \delta z, \dots, z_N + \delta z, \varphi_1 + \frac{2\pi}{a} \delta z, \dots, \varphi_N + \frac{2\pi}{a} \delta z) = U(***, z_1, \dots, z_N, \varphi_1, \dots, \varphi_N),$$

vagyis

$$dU = \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial z_{\alpha}} + \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\alpha}} \right) \cdot \delta z = 0 \longrightarrow \sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{\partial U}{\partial z_{\alpha}} + \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varphi_{\alpha}} \right) = 0.$$

Hengerkoordinátákban a kinetikus energia nem függ  $z_{\alpha}$ -tól és  $\varphi_{\alpha}$ -tól, ezért

$$\sum_{\alpha=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial z_{\alpha}} + \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{\partial L}{\partial \varphi_{\alpha}} \right) = 0,$$

és a Lagrange-egyenletekből

$$\frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^N \left( p_{\alpha z} + \frac{2\pi}{a} \cdot p_{\alpha \varphi} \right) = 0,$$

$$P_z + \frac{2\pi}{a} L_z = \text{konstans.} \clubsuit$$

\*

49. Feladat: Két tömegpont centrális erővel hat egymásra. Igazoljuk, hogy a relatív impulzusmomentum mozgásállandó.

Megoldás: Mindenekelőtt a relatív impulzusmomentum fogalmát világítjuk meg.

A 38.feladatban láttuk, hogy amikor két tömegpont centrális erővel hat egymásra, a Lagrange-függvény két tag összegére bontható: Az egyikben csak a tömegközéppont koordinátái, a másikban csak az ún. relatív koordináták szerepelnek. Ennek a szeparálódásnak az a következménye, hogy a két fajta koordináta sohasem fordul elő ugyanabban a mozgásegyenletben: a tömegközéppont mozgása és a relatív koordináták változása független egymástól. A relatív koordináták változását — amelyet a Lagrange-függvény  $L_{rel}$  része határoz meg —, nevezzük relatív mozgásnak. A relatív mozgás impulzusait, energiáját, impulzusnyomatékát az  $L_{rel}$ -ből az általános szabályok szerint képezzük. Így pl. a relatív impulzusmomentum  $z$ -komponense  $p_\varphi = \frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{\varphi}} = \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})_z$ . Itt  $\vec{r}$  a relatív koordináta ( $x = x_1 - x_2$  stb), és azért szerepel a képletben a redukált tömeg, mert  $L_{rel}$ -ban is ez szerepel tömegként.

A relatív mozgás vizuális elképzelése érdekében emlékeztetünk rá, hogy tömegpontokból álló zárt rendszer tömegközéppontja egyenesen egyenesvonalú mozgást végez. Ennek következtében az a (forgásmentes) koordinátarendszer, amelynek az origója a tömegközéppont, inerciarendszer. Ezt a koordinátarendszert nevezzük *tömegközépponti koordinátarendszernek (TKR)*. A TKR-t — mivel inerciarendszer —, választhatjuk vonatkoztatási rendszerként. *A relatív mozgás az, amit ebben a vonatkoztatási rendszerben figyelünk meg.* Két tömegpont esetén pl. azt látjuk, hogy mindkét tömeg az origón áthaladó közös egyenesen van rajta az origó különböző oldalán, és az origótól mért távolságuk fordítottan arányos a tömegeikkel: tökéletes szinkronban mozognak az origóhoz viszonyítva. Mivel az egyikük mozgása meghatározza a másikat, ezért elég *egyetlen* vektor a leírásukhoz: ez az  $\vec{r}$  relatív koordináta, amely az egyik tömegpontból mutat a másik felé és nagysága a tömegpontok távolságával egyezik meg. A relatív impulzusmomentum, energia nem más, mint ezen mennyiségek TKR-ben felvett értéke.

A rel. impulzusmomentum  $z$ -komponense tehát

$$l_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{\varphi}}.$$

Mivel  $\varphi$  ciklikus változó,  $l_z$  mozgásintegrál. A  $z$ -tengely tetszőleges irányú lehet, ezért az

$$\vec{l} = \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

mint vektor megmarad.

A Noether-tétel szerint a rendszer teljes

$$\vec{L} = m_1(\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1) + m_2(\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2)$$

impulzusmomentuma is mozgásállandó. Könnyen ellenőrizhető, hogy a tömegközéppont  $\vec{L}_{TK} = M(\vec{R} \times \dot{\vec{R}})$  impulzusmomentuma az  $\vec{L} - \vec{l}$  különbséggel egyenlő. Ezért  $\vec{L}_{TK}$  is mozgásállandó.♣

Megjegyzések:

1) Az impulzus esetében a fentiekkel analóg mennyiségek más kapcsolatban állnak egymással. Az  $\vec{r}$  relatív koordináta egyik komponense sem ciklikus, mert  $U$  függ  $r$ -től, ezért a relatív impulzus nem mozgásállandó. A tömegközéppont definíciója következtében pedig a  $\vec{P} = m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2$  teljes impulzus *egyenlő* a tömegközéppont  $\vec{P}_{TK} = M\dot{\vec{R}}$  impulzusával (és speciálisan a TKR-ben zérus).

2) Ha a tömeg a redukált tömeget értjük, a *rögzített* centrum körül történő mozgás *matematikai szempontból* ugyanaz, mint a relatív mozgás a kéttest problémában. Már egyedül ebből az észrevételből is következik, hogy  $\vec{l} = \mu(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$  mozgásállandó, a relatív impulzus azonban nem.

### 1.16. Az energiamegmaradás

Jelenlegi ismereteink szerint az idő nem homogén, mert van benne kitüntetett időpont, a Nagy Robbanás. Olyan időskálán azonban, amely a Nagy Robbanás óta eltelt időhöz ( $\sim 16$  milliárd év) képest kicsi, az időt homogénnek, az időbeli eltolást pedig szimmetriának tekinthetjük. Tartozik-e hozzá mozgásintegrál?

Időbeli eltolási szimmetriánál

$$U(\text{*****}, t) = U(\text{*****}, t + \delta t),$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial t} \delta t = 0 \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

vagyis az időbeli translációs szimmetriát az jelzi, hogy  $U$  nem függ explicit az időtől. Már láttuk, hogy ebben az esetben az energia megmarad, tehát a keresett mozgásintegrál az energia. Az energia megmaradhat nyitott rendszernél is (amennyiben a külső erők időben nem változnak), de zárt rendszer esetében az idő feltételezett homogenitása miatt az energiamegmaradás tételének mindig teljesülnie kell.

Az energia kifejezése  $L$ -n keresztül a következő:

$$E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L. \quad (43)$$

Amikor  $L = K - U$ , ez a képlet az ismert  $E = K + U$ -ra redukálódik. Valóban,  $\sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum \dot{q}_i \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i}$ , és ez a kifejezés Euler homogén függvényekre vonatkozó tétele következtében  $2K$ -val egyenlő. Így  $E = 2K - L = K + U$ .

Homogén mágnesen térben történő mozgásnál  $L = K + L_1$ , ahol  $L_1$  a sebességben homogén első fokú kifejezés (ld. a 39.feladatot), ezért  $\sum \dot{q}_i \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} = L_1$ . Így ekkor  $E = 2K + L_1 - L = 2K + L_1 - (K + L_1) = K$ , amint azt már a 30.feladatban láttuk.

\*

Euler-tétele a homogén  $l$ -d fokú függvényekről:

$f(x_1, \dots, x_n)$ -t homogén  $l$ -d fokúnak nevezzük, ha tetszőleges  $\lambda$ -nál

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^l f(x_1, \dots, x_n).$$

Deriváljuk ezt a képletet  $\lambda$  szerint:

$$\frac{\partial f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)}{\partial(\lambda x_1)} \cdot \frac{\partial(\lambda x_1)}{\partial \lambda} + \dots + \frac{\partial f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)}{\partial(\lambda x_n)} \cdot \frac{\partial(\lambda x_n)}{\partial \lambda} = l \cdot \lambda^{l-1} f(x_1, \dots, x_n),$$

azaz

$$x_1 \frac{\partial f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)}{\partial(\lambda x_1)} + \dots + x_n \frac{\partial f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)}{\partial(\lambda x_n)} = l \cdot \lambda^{l-1} f(x_1, \dots, x_n).$$

Ha itt  $\lambda = 1$ -t veszünk kapjuk Euler-tételét:

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = l \cdot f(x_1, \dots, x_n).$$

Mivel  $K$  a sebesség homogén 2-d fokú függvénye, ezért  $\sum \dot{q}_i \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} = 2K$ .

\*

Most számítsuk ki  $E$  teljes idő szerinti deriváltját:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[ \ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{dL}{dt}.$$

Az utolsó tag

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \right],$$

míg a mozgásegyenletek következtében

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

Ezeket  $\frac{dE}{dt}$  kifejezésébe írjuk és összevonunk:

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (44)$$

Az energia akkor marad meg, ha  $L$  nem függ explicit  $t$ -től.  $L = K - U$  esetén (44) természetesen az 1.7 fejezetben megismert  $\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t}$ -re redukálódik, de általánosabb nála. Ezt a következő feladat mutatja.

50.Feladat: Mozogjon töltött tömegpont homogén mágneses térben. Határozzuk meg  $E$  változását, amikor  $B$  adiabatikusan változik.

Megoldás: A 39.feladatban láttuk, hogy

$$L = K + qxyB.$$

A mozgásegyenletek megoldása  $\omega = \frac{qB}{m}$  frekvenciájú körmozgás:

$$\begin{aligned} x &= R \cos(\omega t + \alpha) \\ y &= -R \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned}$$

Az  $L$  kifejezésében csak  $B$  függ az időtől, ezért

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} = -qxy \frac{dB}{dt}.$$

Az adiabatikusság miatt  $xy$ -t átlagolhatjuk a körmozgás periódusára:

$$xy = -R^2 \omega \cos^2(\omega t + \alpha) \longrightarrow -\frac{1}{2}R^2 \omega.$$

Átlagolás után tehát

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q}{2}R^2 \omega \frac{dB}{dt} = \frac{qv^2}{2\omega} \frac{dB}{dt} = \frac{q}{m\omega} \cdot E \frac{dB}{dt} = \frac{E}{B} \frac{dB}{dt}.$$

Behelyettesítéssel igazolható, hogy ennek a diff. egyenletnek a megoldása  $E = konst \cdot B$ , azaz

$$\frac{E}{B} = \text{adiabatikus invariáns}.$$

A mágneses mező adiabatikus növelése tehát gyorsítja a töltéseket.

Ha a fenti kifejezésben  $E$ -t az

$$E = \frac{mR^2\omega^2}{2} = \frac{q^2}{2m}R^2B^2$$

képlet alapján  $R$ -el helyettesítjük, akkor az

$$R^2B = \text{adiabatikus invariáns}$$

képletre jutunk. Ez azt fejezi ki, hogy a töltés pályája által határolt mágneses fluxus adiabatikus invariáns. Ezen alapul a mágneses csapdák működése.♣

51.Feladat: Két tömegpont centrális erővel hat egymásra. Mutassuk meg, hogy a relatív mozgás energiája mozgásállandó.



Megoldás: Megint a 38.feladatról van szó. A változók szeparálódásának a következtében

$$\begin{aligned}
 E &= E_{rel} + E_{TK}, \\
 E_{rel} &= \dot{r} \frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{r}} + \dot{\vartheta} \frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{\vartheta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L_{rel}}{\partial \dot{\varphi}} - L_{rel} = K_{rel} + U(r), \\
 E_{TK} &= \dot{X} \frac{\partial L_{TK}}{\partial \dot{X}} + \dot{Y} \frac{\partial L_{TK}}{\partial \dot{Y}} + \dot{Z} \frac{\partial L_{TK}}{\partial \dot{Z}} - L_{TK} = K_{TK}. \\
 \frac{dE_{rel}}{dt} &= - \frac{\partial L_{rel}}{\partial t} = 0.
 \end{aligned}$$

$E_{rel}$  tehát mozgásintegrál és ugyanez igaz  $E_{TK}$ -ra is (és persze  $E$ -re).

### 1.17. Általános megjegyzések a mozgásegyenletek megoldásáról

Egy diff.egyenlet-rendszert megoldottnak tekintünk, ha *kvadratúrákra vezettük vissza*, vagyis ha a megoldást olyan alakban állítottuk elő, amelyben már csak kijelölt integrálásokat kell elvégezni és adott algebrai egyenleteket kell megoldani. E két művelet ui. "egyszerű" abban az értelemben, hogy ismert eljárások segítségével numerikusan mindig tetszőleges pontossággal elvégezhető, míg egy diff.egyenlet-rendszerre nincs univerzális megoldási módszer.

A kvadratúrákra való visszavezethetőség szempontjából a különféle rendszereket három csoportba sorolva tárgyaljuk. Az egyes csoportok között nincs éles határ.

**A)** Ide azokat a feladatokat soroljuk, amelyek ismert megoldású vagy könnyen integrálható egyenletekre vezetnek. Ezek az olyan egyszerű feladatok, mint pl. a szabad mozgás, mozgás homogén erőterben, a harmonikus oszcillátor.

**B)** Ha egy  $f$  szabadsági fokú rendszernek ismerjük  $f$  mozgásintegrálját, akkor a mozgásegyenletek elsőrendű diff.egyenlet rendszerré alakíthatók. Jelöljük a mozgásállandókat  $I_j$ -vel. Ezek akkor ismertek, ha tudjuk, hogyan függenek a koordinátáktól és a sebességektől:

$$I_j = I_j(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f) \quad j = 1, \dots, f. \quad (45)$$

Ez egy elsőrendű diff.egyenlet rendszer a koordinátákra, ami jobban látszik, ha a sebességekre oldjuk meg őket:

$$\dot{q}_j = k_j(q_1, \dots, q_f, I_1, \dots, I_f) \quad j = 1, \dots, f. \quad (46)$$

Az  $I_j$ -k mozgásállandók, ezért határozott számértéket adhatunk nekik.

Sajnos ennek a diff.egyenlet-rendszer típusnak sincs általános megoldási algoritmus, de ha a  $k_j$ -k elég egyszerű függvényei a koordinátáknak, visszavezethető kvadratúrákra. Ha pl. valamelyik  $k_j$  függvény csak a "saját"  $q_j$  koordinátájától függ (a  $q_j$  változó szeparálódik), akkor a  $j$ -ik egyenlet átrendezhető

$$\frac{dq_j}{k_j(q_j, I_1, \dots, I_f)} = dt$$

alakba, amelyből

$$t = \int \frac{dq_j}{k_j(q_j, I_1, \dots, I_f)} + \text{konstans}, \quad (47)$$

és ezzel  $q_j$  meghatározását kvadratúrára vezettük vissza. Ha ugyanis az integrál  $K_j(q_j)$ -vel egyenlő, akkor a  $K_j(q_j) = t + \text{konstans}$  algebrai egyenletet  $q_j$ -re megoldva megkapjuk  $q_j$ -t mint az idő és a mozgásintegrálok függvényét. Ha a maradék  $f - 1$  egyenletből megint integrálható az egyik (ehhez a már ismert  $q_j$  is felhasználható), akkor az eljárás folytatható és esetleg megtalálható a rendszer általános megoldása.

Létezik az  $I_j$ -kre egy teszt, amelynek teljesülése esetén alkalmas koordinátarendszerben az *összes* változó szeparálódik. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az  $I_j$ -k *involúcióban vannak*. Ezt a fogalmat érdemes használnunk annak ellenére, hogy magára a tesztelési eljárásra nincs módunk kitérni. Eszerint a B) csoportba azokat a rendszereket soroljuk, amelyeknek ismerjük  $f$  darab egymással involúcióban lévő mozgásintegrálját — ezeket a feladatokat *integrálhatónak* nevezzük. A legnevezetesebb ilyen feladat a centrálszimmetrikus kéttestprobléma, speciálisan a Kepler-probléma.

Az elmondottakból következik, hogy ha egy 1-szabadsági fokú rendszernek ismerjük egy mozgásintegrálját, akkor a mozgásegyenlete a (47) mintájára visszavezethető kvadratúrára. Belátható továbbá, hogy ha egy 2-szabadsági fokú rendszer két ismert mozgásintegrálja közül az egyik az energia, akkor a mozgásintegrálok involúcióban vannak egymással, tehát a feladat integrálható.

C) A feladatok túlnyomó többsége olyan, hogy nem rendelkeznek elegendő mozgásállandóval (nem integrálhatók). A leghíresebb ide tartozó feladat a gravitációs háromtest-probléma. Ilyen esetekben a tipikus az, hogy a mozgás *kaotikus*, amin nagyjából azt értjük, hogy praktikus kritériumok alapján nem különböztethető meg a véletlenszerűtől. Létezhet azonban a Lagrange-függvényben lévő paramétereknek olyan tartománya, amelyben a feladat közelítően integrálhatóvá válik és nem lép fel káosz (kaotikusság). A továbbiakban C) típusú feladatokkal nem foglalkozunk.

## 1.18. A centrálszimmetrikus kéttestprobléma

A 38.feladatból indulunk ki:

$$\begin{aligned} L &= L_{TK}(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}) + L_{rel}(r, \vartheta, \varphi, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}) \\ L_{TK} &= \frac{M}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) \\ L_{rel} &= \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) - U(r). \end{aligned}$$

Csak a relatív mozgás érdekes, ezért feltehetjük, hogy a tömegközéppont nyugszik. Ekkor  $\vec{l} = \vec{L}$ , valamint  $E_{rel} = E$ . Ezek a feladat mozgásállandói.

A centrálszimmetria miatt a mozgás síkban történik (ld. a 4.feladat érvelését: a kezdeti  $\vec{r}$  és  $\vec{\dot{r}}$  által kijelölt sík két oldala egyenértékű), amely a tömegközépponton

áthaladó bármelyik sík lehet. Az  $\vec{L} = \text{konstans}$  ezzel összhangban van: mind a síkra merőleges, mind a síkba eső komponensek mozgásállandók (ez utóbbiak nullák).

A mozgás síkját tehát önkényesen rögzíthetjük. Legyen ez az  $xy$  sík, amelyen  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ . Így

$$L_{rel} = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2) - U(r).$$

Ez a síkbeli polárkoordinátákban érvényes képlet, csak megtartottuk az  $r$ -t a sugár jelölésére.

A Lagrange-egyenletek:

$$\begin{aligned} L_r &\equiv \mu\ddot{r} - \mu r\dot{\varphi}^2 + \frac{dU(r)}{dr} = 0 \\ L_\varphi &\equiv \mu r^2\ddot{\varphi} + 2\mu r\dot{\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Ahelyett, hogy ezeket elkezdénénk megoldani, tekintsük a feladatot B) típusúnak és írjuk fel az  $L_{rel}$  két mozgásállandóját:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) \\ L_z &= \mu r^2\dot{\varphi}. \end{aligned}$$

Fejezzük ki a másodikból  $\dot{\varphi}$ -t és írjuk be az elsőbe:

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z}{\mu r^2} \quad (48)$$

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} + U(r). \quad (49)$$

A második egyenletre már alkalmazható a (47) képlet. Oldjuk meg  $\dot{r}$ -ra:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - U(r)) - \frac{L_z^2}{\mu^2 r^2}}. \quad (50)$$

A (47) mintájára innen megkapható  $r$  mint a  $t$  függvénye. Ezt a megoldást (48)-ba írva a jobboldal  $t$  függvényévé válik és a  $t$ -szerinti integrálás megadja  $\varphi$ -t mint a  $t$  függvényét. Ezzel meghatároztuk az  $r = r(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$  trajektóriákat. Az általános megoldást kapjuk, mert a két integrálásnál megjelenő egy-egy integrációs konstans, valamint  $E$  és  $L_z$  önkényesen választhatók. Két további állandó jelenik meg, ha a pálya síkja lehet általános helyzetű. Végül a tömegközéppont mozgása behoz hat újabb konstansot. Ez összesen 12 önkényes konstans.

A Kepler-problémára történő specializálás előtt analizáljuk (49)-t, amely

$$K_r + U + \frac{L_z^2}{2\mu r^2} = E \quad (51)$$

alakban is írható.  $K_r = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2$  a radiális mozgás kinetikus energiája,  $K_r + U$  pedig a radiális mozgás (teljes) energiája. Ez kisebb, mint  $E$  és a különbség természetesen nem lehet más, mint az azimutális mozgás  $K_\varphi = \frac{\mu}{2}r^2\dot{\varphi}^2$  kinetikus energiája. Az  $L_z$  állandósága következtében azonban  $K_\varphi$  értékét *egyértelműen* meghatározza az origótól mért távolság:  $K_\varphi = \frac{L_z^2}{2\mu r^2}$ . Ebben a formában szerepel a  $\varphi$ -mozgás kinetikus energiája (51)-ben és így ez a kinetikus energia a radiális mozgás szempontjából potenciális energiaként lép fel — a  $K_\varphi$ -nek ez a "kétarcúsága" teszi lehetővé a kvadratúrára való visszavezetést. Logikus tehát bevezetni az

$$U_{cf}(r) = \frac{L_z^2}{2\mu r^2}$$

*centrifugális potenciált* (potenciális energiát), ui. ez a kifejezés a centrifugális erő erőfüggvénye:

$$-\frac{dU_{cf}}{dr} = \frac{L_z^2}{\mu r^3} \stackrel{(48)}{=} \mu r \dot{\varphi}^2 = F_r^c,$$

és ez a képlet csak az  $r \leftrightarrow \rho$  átjelölésben különbözik a centrifugális erő 1.8 fejezetben talált képletétől.

A centrifugális potenciál funkciójának az érzékeltetésére tekintsük pl. a mozgásnak azt a fázisát, amikor  $r$  nő. Az  $U_{cf}$  ekkor csökken, és ennek így is kell lennie, hiszen  $L_z$  állandósága miatt a sebesség  $\varphi$ -komponensének és ezzel együtt  $K_\varphi$ -nek csökkennie kell. Ezért energia áramlik át az azimutális mozgásból a radiális mozgásba a centrifugális erő által végzett munka képében:

$$d(K_r + U) = -dU_{cf} = +F_r^c \cdot dr = dW_{cf}.$$

### 1.19. A Kepler-probléma

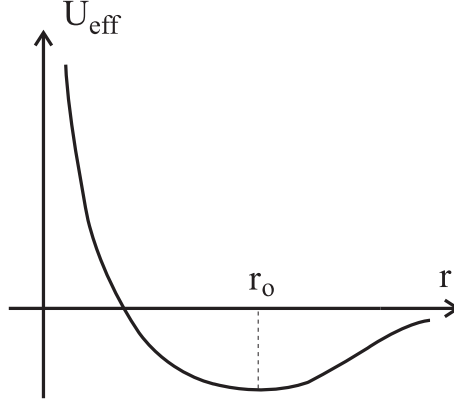
Így nevezzük a gravitációs kéttestproblémát, amelynél

$$U(r) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r}.$$

Vizsgáljuk először a radiális mozgást. Vezessük be az

$$U_{eff}(r) = U(r) + U_{cf}(r) = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r} + \frac{L_z^2}{2\mu r^2}$$

*effektív potenciált* (potenciális energiát), amelyet az alábbi ábrán fel is rajzoltunk.



Az effektív potenciálnak egy bizonyos  $r_0$ -nál minimuma van.  $r \ll r_0$ -nál  $U_{cf} \gg |U|$ , ezért  $r \rightarrow 0$ -nál  $U_{eff}$  plusz végtelenhez tart.  $r \gg r_0$ -nál  $|U| \gg U_{cf}$ , ezért  $r \rightarrow \infty$ -nél  $U_{eff}$  negatív irányból tart a nullához.

Az  $U_{eff}$  felhasználásával (51) a

$$K_r + U_{eff}(r) = E \quad (52)$$

alakban írható. Ha az  $U_{eff}$ -t bemutató ábrán feltüntetjük az  $E = konstans$  vízszintes egyenest is, akkor könnyen leolvashatjuk a radiális mozgás határait. A  $K_r$  ui. nem lehet negatív, ezért (52) szerint a mozgás azokra az  $r$ -kre terjed ki, amelyeknél  $U_{eff}(r) \leq E$ .

Amikor  $E < U_{eff}(r_0)$  ilyen tartomány nincs. Amikor  $E = U_{eff}(r_0)$ , a relatív mozgás egyenletes körmozgás. A pálya  $r_0$  sugara a

$$\frac{dU_{eff}}{dr} = \frac{dU}{dr} + \frac{dU_{cf}}{dr} = -(F + F_r^c) = 0$$

gyöke, tehát arra a jól ismert következtetésre jutunk, hogy egyenletes körmozgásnál a gravitációs vonzás és a centrifugális erő éppen kompenzálja egymást.

$E > U_{eff}(r_0)$ -nál a mozgás jellege  $E$  előjelétől függ.

Amikor  $U_{eff}(r_0) < E < 0$ , a radiális mozgás *korlátos*, egy  $r_{min}$  és egy  $r_{max}$  koordinátájú *fordulópont* között ismétlődő oszcilláció, amelynek periódusát  $T$ -vel fogjuk jelölni. Az  $r_{min}$  és az  $r_{max}$  az  $U_{eff}(r)$  görbe és az  $E = konstans$  egyenes metszéspontjainak a radiális koordinátái, vagyis az

$$U_{eff}(r) = E \quad (53)$$

egyenlet gyökei. Az  $r = r_{min}, r_{max}$  pontokban a radiális sebesség zérus, a gyorsulás azonban véges. A radiális erő ugyanis, ami  $U_{eff}$  negatív deriváltja,  $r = r_{min}$ -ban pozitív,  $r = r_{max}$ -ban pedig negatív, és a fordulópontokban ennek megfelelő előjelű a gyorsulás.

Amikor  $E > 0$ , az (53)-nak csak egy gyöke van, az  $r_{min}$ , és a mozgás az  $r \geq r_{min}$  félegyenesen történik (végtelen mozgás). Ha egy időpillanatban  $\dot{r} > 0$ , akkor a tömegpont csökkenő, de a véges  $\sqrt{\frac{2E}{\mu}}$  értékhez közelítő radiális sebességgel tart a végtelenhez. Ha a kezdőpillanatban  $\dot{r} < 0$ , akkor a tömegpont addig közeledik a centrumhoz, amíg el nem éri az  $r_{min}$  koordinátájú egyetlen fordulópontot, amelyben a sebessége nullává válik. De itt kifelé mutató erő hat rá, ezért mozgásiránya megfordul és a mozgás pozitív sebességgel folytatódik újabb irányváltás nélkül. A belső ( $r = r_{min}$  koordinátájú) fordulópont  $U_{cf}$  következménye, ez akadályozza meg, hogy a gravitációs vonzás következtében a tömegpont a centrumba zuhanjon. Ezért  $U_{cf}$ -t gyakran *centrifugális gátnak* is nevezik. Ez a gát csak *centrális ütközésnél* nem működik, ekkor ui.  $L_z = 0$ .

A tömegpont a radiális mozgás mellett azimutális mozgásban is résztvesz. A 2.Kepler-törvényből tudjuk, hogy  $\varphi$  folyamatosan — de nem egyenletesen — nő (egyedüli kivétel a centrális ütközés, amikor  $\varphi = konstans$ ).

Az előző fejezetben láttuk, hogyan vezethető vissza a centrálszimmetrikus kéttest-probléma kvadratúrára. Ezzel a módszerrel a Kepler-probléma általános megoldása is megtalálható. Ezt azonban mellőzzük, és csak a még nem igazolt két Kepler-törvény bizonyítására korlátozódunk.

Az 1.Kepler-törvény azt mondja ki, hogy a pálya ellipszis, amelynek egyik fókuszpontja a vonzóerő centruma (a Nap). Ez természetesen a korlátos mozgásra ( $E < 0$ ) vonatkozik. Amikor  $E > 0$ , a pálya hiperbola (üstökőspálya). Az  $E = 0$  határesetben a pálya parabola.

A *pályát* (ld. az 1.1 fejezetet) akkor ismerjük, ha minden  $\varphi$ -hez megadjuk  $r$  értékét (vagy megfordítva). Az *időnek* ebben nincs szerepe. Ezért a pálya differenciálegyenletét úgy kapjuk, hogy (50)-t (48)-al osztva kiejtjük belőlük az időt:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\mu r^2}{L_z} \sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E + \frac{\gamma m_1 m_2}{r} \right) - \frac{L_z^2}{\mu^2 r^2}},$$

Ez az egyenlet a változók szeparálásával integrálható:

$$\varphi = \int \frac{\frac{L_z}{r^2} dr}{\sqrt{2\mu \left( E + \frac{\gamma m_1 m_2}{r} \right) - \frac{L_z^2}{r^2}}} + \varphi_0.$$

Az  $u = 1/r$  változót bevezetve a

$$\varphi = -L_z \int \frac{du}{\sqrt{2\mu(E + \gamma m_1 m_2 \cdot u) - L_z^2 u^2}} + \varphi_0$$

integrálra jutunk, amelynek a primitív függvénye a Bronstein-Szemengyajev táblázatban a 241. szám alatt található:

$$\varphi = -\arcsin \frac{\frac{L_z}{r} - \frac{\mu \cdot \gamma m_1 m_2}{L_z}}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2 \cdot (\gamma m_1 m_2)^2}{L_z^2}}} + \varphi_0.$$

Ez a kifejezés a

$$p = \frac{L_z^2}{\mu \cdot \gamma m_1 m_2} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{\mu(\gamma m_1 m_2)^2}} \quad (54)$$

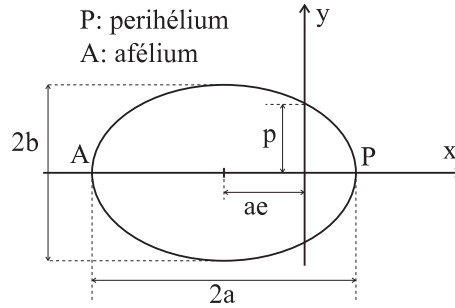
paraméterek segítségével a

$$\varphi = -\arcsin \frac{p-r}{er} + \varphi_0$$

alakra hozható. Célszerű  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ -t választani és mindkét oldal koszinuszát venni:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cdot \cos \varphi. \quad (55)$$

Ez az ellipszis egyenletének ismert polárkoordinátás alakja. A fókuszpont az origóban van,  $e$  az excentricitás,  $p$  a fokális paraméter.  $E < 0$  következtében  $e \leq 1$ .



A nagy- és a kistengely hossza

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{\gamma m_1 m_2}{2|E|} \quad (56)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{|L_z|}{\sqrt{2\mu|E|}}, \quad (57)$$

a fordulópontok radiális koordinátája pedig

$$r_{min} = \frac{p}{1 + e} = a \cdot (1 - e) \quad r_{max} = \frac{p}{1 - e} = a \cdot (1 + e).$$

A 3. Kepler-törvényt abból az észrevételből vezethetjük le a legegyszerűbben, hogy a  $p_\varphi = L_z$  impulzusmomentum-komponens arányos az  $\dot{S}$  területi sebességgel (ld. a 44. feladatot):  $|L_z| = 2\mu\dot{S}$ . Ha ezt az egyenletet a  $0 \leq t < T$  intervallumra integráljuk és figyelembe vesszük, hogy  $L_z$  mozgásállandó, az  $|L_z|T = 2\mu S$  kifejezésre jutunk, amelyben  $S$  az ellipszis területe:  $S = \pi ab$ . Így

$$T = \frac{2\pi\mu ab}{|L_z|}. \quad (58)$$

De

$$\frac{b}{|L_z|} = \frac{1}{\sqrt{2\mu|E|}} = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sqrt{\frac{a}{\gamma m_1 m_2}},$$

ezért a periódusidő

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{\mu}{\gamma m_1 m_2}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\gamma(m_1 + m_2)}}$$

alakban írható. Ha itt  $m_1 = M_\odot$  a Nap tömege, amely mellett a bolygók  $m_2$  tömege elhanyagolható, akkor azt látjuk, hogy a  $\frac{T^2}{a^3}$  arány minden bolygóra azonos: A bolygók keringési időinek négyzetei úgy aránylanak egymáshoz, mint pályáik nagytengelyeinek köbei. Ez Kepler 3. törvénye.

Megjegyzés: A Kepler-problémában az a  $T'$  idő, ami alatt a  $\varphi$   $2\pi$ -t változik, azonos a radiális mozgás  $T$  periódusidejével: ha nem így volna, a pálya nem lehetne ellipszis, ami *zárt* görbe. Egy általános centrálszimmetrikus kéttestproblémában azonban, amikor az erőfüggvény nem arányos  $1/r$ -el, a  $T'$  és a  $T$  különbözik egymástól, és ennek az a következménye, hogy a pálya önmagát átmetsző görbe, amely rendszerint egy körgyűrűt tölt ki a mozgás síkjában.

\*

Az ellipszis polárkoordinátás alakjának a levezetése:  
Az ellipszis egyenletének jól ismert alakja a következő:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\begin{aligned} 2a &= \text{nagy tengely hossza} \\ 2b &= \text{kis tengely hossza} \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} &= \text{fókusz távolság fele} \\ (\pm c, 0) &= \text{fókuszpontok koordinátája} \\ e = \frac{c}{a} &= \text{excentricitás } (e \leq 1). \end{aligned}$$



Helyezzük át az ellipszist  $c$  hosszegységgel balra. A jobboldali fókusz ekkor az origóba kerül. Az új egyenlet:

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ez az ellipszis az  $y$ -tengelyt a  $\pm p$  értéknél metszi:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1,$$

és innen

$$p = \frac{b^2}{a}$$

az u.n. (fokális) paraméter.

Az új egyenletben  $a, b, c$ -t kifejezzük  $e, p$ -n keresztül:

$$a = \frac{p}{1-e^2} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \quad c = \frac{ep}{1-e^2},$$

és némi átalakítás után az

$$x^2 + y^2 = (p - ex)^2$$

egyenletre jutunk. Most áttérünk polárkoordinátákra és megkapjuk az ellipszis egyenletét  $r, \varphi$ -n keresztül kifejezve:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi,$$

vagy

$$r = r(\varphi) = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

\*

52.Feladat: Mutassuk meg, hogy a Kepler-problémában  $2\overline{K}_{rel} = -\overline{U}$ , ahol a felülhúzás a relatív mozgás periódusára vett átlagértéket jelenti (az un. *virial-tétel* egy speciális esete).

Megoldás: Legyünk TKR-ben, ahol  $K_{rel} = K$ . Nyilván

$$\begin{aligned} 2K &= m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = m \frac{d}{dt}(x \cdot \dot{x} + y \cdot \dot{y} + z \cdot \dot{z}) - (x \cdot m\ddot{x} + y \cdot m\ddot{y} + z \cdot m\ddot{z}) = \\ &= m \frac{d}{dt}(x \cdot \dot{x} + y \cdot \dot{y} + z \cdot \dot{z}) + \left( x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \\ &= m \frac{d}{dt}(x \cdot \dot{x} + y \cdot \dot{y} + z \cdot \dot{z}) - U. \end{aligned}$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy  $U$  a koordináták homogén  $(-1)$ -d rendű függvénye (ld.az 1.16 fejezetet).

Az időbeli átlagolásnál  $t$  szerint integrálunk a  $(0, T)$  intervallumra és az integrált osztjuk  $T$ -vel. Mivel  $T$  a mozgás periódusa, az első tag átlaga zérus, ezért

$$2\overline{K} = -\frac{1}{T} \int_0^T U \cdot dt = -\overline{U}.$$

Ebből az is következik, hogy

$$E = \overline{K} + \overline{U} = -\overline{K} = +\frac{1}{2}\overline{U}.$$

Körpályán történő mozgásnál ezek a képletek átlagolás nélkül is érvényesek.♣

53.Feladat: Igazoljuk, hogy a közegellenállás növeli a (mesterséges) bolygó sebességét.

Megoldás: A közegellenállás következtében a mechanikai mozgás energiájának egy része a közeg hőenergiájává alakul át. Ezért az  $E$  mechanikai energia csökken, és  $E = -\overline{K}$  következtében a mozgási energia egy periódusra vett átlaga nő. Az  $\overline{U}$  csökken (az abszolút értéke nő) és ez azt jelenti, hogy a test közeledik a centrumhoz.♣

54.Feladat: Jellemezzük azokat a Kepler-pályákat, amelyeknek közös fókuszpontja és azonos energiája van, és a nagytengelyeik iránya, valamint a pályasíkjuk is közös.

Megoldás: Ezek a pályák  $L_z$ -ben különböznek egymástól. Az (54) alapján  $0 \leq L_z^2 \leq \frac{\mu \cdot (\gamma m_1 m_2)^2}{2|E|}$ . A nagytengelyeik egyforma hosszú. Az  $L_z^2$  maximális értékénél a pálya  $2a$  átmérőjű kör,  $L_z = 0$ -nál pedig a fókuszpontból kiinduló  $2a$  hosszúságú egyenesszakasz.  $L_z$ -hez és  $-L_z$ -hez egybevágó ellipszisek tartoznak, csak a mozgás iránya különbözik rajtuk.♣

55.Feladat: Tegyük fel, hogy a centrális test tömege adiabatikusan változik. Hogyan hat ez a bolygómozgásra?

Megoldás: A (44) szerint

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}(K - U) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U\right).$$

Tegyük fel, hogy az  $m_1$  a centrális test tömege. Az első tagban ez  $\mu$ -ben fordul elő és

$$\dot{\mu} = \frac{\dot{m}_1 m_2 (m_1 + m_2) - \dot{m}_1 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{\dot{m}_1}{m_1} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \mu.$$

Az  $U$  arányos  $m_1$ -el, így

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\dot{m}_1}{m_1} U.$$

Ezek alapján

$$\dot{E} = -\frac{\dot{m}_1}{m_1} \left[ \frac{m_2}{m_1 + m_2} K - U \right].$$

Az adiabatikusság miatt a pályamozgásra átlagolhatunk és ezután felhasználhatjuk a viriál tételt:

$$\dot{E} \rightarrow -\frac{\dot{m}_1}{m_1} \left[ \frac{m_2}{m_1 + m_2} \overline{K} - \overline{U} \right] = -\frac{\dot{m}_1}{m_1} \left[ \frac{m_2}{m_1 + m_2} (-E) - 2E \right] = \frac{\dot{m}_1}{m_1} \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} + 2 \right) \cdot E.$$

Mivel minden időpillanatban  $m_1 \gg m_2$ , ezért a zárójelben lévő törtet elhagyhatjuk a 2 mellett és hasonló okból a továbbiakban már  $\mu$ -t  $m_2$ -nek vehetjük. Így

$$\frac{\dot{E}}{E} = 2 \frac{\dot{m}_1}{m_1},$$

ahonnan

$$\frac{E}{m_1^2} = \text{inv.}$$

Az  $m_1$  változása nem sérti meg a forgásszimmetriát, ezért  $L_z$  időben változó  $m_1$ -nél is mozgásállandó. Ezért (54) felhasználásával azt találjuk, hogy

$$e = \text{inv.},$$

míg (56) alapján

$$am_1 = \text{inv.}$$

A centrális égitest tömegének lassú változásakor tehát a bolygópálya excentricitása nem változik, a nagytengely hossza a tömeg reciprokával, a mozgás energiája pedig a tömegnégyzettel arányosan változik. ♣

56. Feladat: Mi az oka annak, hogy a Hold a Földön *két* dagálydudort idéz elő: egyet a Hold felőli, egyet a Holddal ellentétes oldalon?

Magyarázat: Ennek a lényegében kvalitatív kérdésnek a vizsgálatánál eltekinthetünk a Nap hatásától, valamint a Föld forgásától, azaz feltehetjük, hogy a Föld is mindig ugyanazt az oldalát fordítja a Hold felé<sup>10</sup>. A Föld-Hold rendszer relatív mozgását fogjuk vizsgálni, ezért a TKR-t választjuk vonatkoztatási rendszernek.

Legyen  $O_F$  a Föld,  $O_H$  a Hold centruma. A koordinátarendszer  $O$  origója a centrumokat összekötő egyenesen fekszik és az  $O_F O_H$  szakaszt a tömegekkel fordított arányban osztja:

$$|O_H O| = \frac{M}{M+m} R, \quad |O_F O| = \frac{m}{M+m} R, \quad |O_F O_H| = R$$

( $M$  a Föld,  $m$  a Hold tömege). A két égitest közös  $\omega$  szögsebességgel kering  $O$  körül. Az  $\omega$ -t a gravitációs vonzás és a centrifugális erő egyensúlya határozza meg:

$$\frac{Mm}{M+m} R \cdot \omega^2 = \frac{\gamma Mm}{R^2}.$$

<sup>10</sup>A tengely körüli forgásból származó centrifugális erő egyenletes belépülést idéz elő, de nem hoz létre dagályhullámot.

Ez az egyenlet egyaránt vonatkoztatható a Földre (baloldal =  $M \cdot |O_F O| \cdot \omega^2$ ) és a Holdra (baloldal =  $m \cdot |O_H O| \cdot \omega^2$ ). Innen

$$\omega^2 = \frac{\gamma(M+m)}{R^3}.$$

Legyenek  $A$  és  $B$  az égitestek centrumait összekötő egyenes és a földfelszín metszéspontjai és legyen

$$|O_H A| = R - r \quad |O_H B| = R + r$$

( $r$  a Föld sugara). Számítsuk ki azt a  $\delta F_A$ ,  $\delta F_B$  erőt, amely az  $A$ ,  $B$  pontban elhelyezett  $\delta M$  tömegre hat. Válasszuk — mondjuk — a centrifugális erő irányát pozitívnak:

$$\begin{aligned} \delta F_A &= \delta M \cdot \left( R \frac{m}{M+m} - r \right) \cdot \omega^2 - \frac{\gamma m \cdot \delta M}{(R-r)^2} = \\ &= \delta M \cdot \gamma \cdot \left[ \left( R \frac{m}{M+m} - r \right) \frac{M+m}{R^3} - \frac{m}{(R-r)^2} \right] = \\ &= \frac{\delta M \cdot \gamma}{R^2} \left[ m - (M+m) \frac{r}{R} - \frac{m}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2} \right] = \\ &= \frac{1}{R^2} \left[ -(M+3m) \delta M \cdot \gamma \cdot \frac{r}{R} + o\left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

$\delta F_B$ -t  $r \rightarrow -r$  helyettesítéssel kapjuk. Eszerint  $r \ll R$ -nél

$$\delta F_A = -\delta F_B = -(M+3m) \delta M \cdot \gamma \cdot \frac{r}{R^3}. \quad (59)$$

Az  $A$  környékén lévő tömegekre tehát a Hold irányába mutató, a  $B$  körül lévőkre a Holddal ellentétes irányú netto erő hat. Ezt a földi anyag molekuláris erői (rugalmasság, felületi feszültség) egyenlítik ki, de ilyen erők csak  $\delta F_A$ ,  $\delta F_B$  irányú deformáció eredményeképpen jönnek létre. Az (59) árapályerő oka tehát röviden az, hogy a gravitáció és a centrifugális erő csak az égitestek centrumában egyenlíti ki egymást pontosan, a középpontokat összekötő szakaszon belül a gravitációs vonzás, azon kívül a centrifugális taszítás dominál.

Megjegyzés: Noha gyorsuló vonatkoztatási rendszerekkel csak egy későbbi fejezetben foglalkozunk, korábbról már bizonyára ismeretes, hogy centrifugális erő csak forgó koordinátarendszerben lép fel. A feladatban TKR-t használtunk, amely inerciarendszer, ezért a magyarázatban nem lett volna szabad a centrifugális erőre hivatkozni. Azt, hogy "a centrifugális erő kiegyenlíti (nem egyenlíti ki) a vonzást" úgy kell érteni, hogy az adott  $\omega$ -ból számítható centripetális gyorsulás egyenlő (nem egyenlő) a gravitációs vonzásnak megfelelő gyorsulással. De majd látni fogjuk, hogy ha gondolatban együtt forgunk az égitestekkel, akkor  $R$  állandóságát valóban a vonzás és a centrifugális erő egyensúlya magyarázza. ♣

57.Feladat: A Nap sokkal nagyobb erővel vonzza a Földet mint a Hold. Miért jelentősebb mégis a Hold által okozott dagály?

Magyarázat: A Nap vonzóereje kb. 180-szorosa a Holdénak, a Hold által okozott (12,42 órás periódusú) dagály mégis 2,17-szer nagyobb, mint a Nap (12 óra periódusú) dagálya. A magyarázat az, hogy a gravitációs vonzás  $1/R^2$ -el, az (59) árapályerő  $1/R^3$ -el arányos, ezért az árapályerő gyorsabban csökken a távolság növekedtével, mint a vonzóerő.♣

58.Feladat: Hogyan hat vissza a Hold által gerjesztett földi dagály a Hold mozgására?

Diszkusszió: Ennek a kérdésnek a szempontjából már lényeges a Föld forgása. Ez a forgás azonos irányú a Hold keringésével és kb. 30-szor nagyobb szögsebességű. A súrlódás következtében a Föld részlegesen magával ragadja a dagálydudorokat, a maximumukat összekötő egyenes  $\sim 2,2^\circ$ -al megelőzi a Hold aktuális irányát. A súrlódás fékezi a Föld forgását, aminek következtében a napok hossza növekszik (kb. 10-20 sec-el millió évenként). A Föld-Hold rendszer teljes impulzusmomentumának azonban meg kell maradnia, ezért részletes számítás nélkül is tudható, hogy a dudorok olyan erővel hatnak a Holdra, amely a Hold  $L_z$ -jét növeli.

Feltehetjük, hogy a Hold körpályán kering. Az 54.feladatban láttuk, hogy ekkor  $L_z^2$  arányos  $\frac{1}{|E|}$ -el. Ezért a földi dagály hatására  $|E|$  csökken, a viriál tétel következtében  $|U|$  is csökken, a Föld-Hold távolságnak tehát nőnie kell. A Hold távolodási sebessége ennek a hatásnak a következtében kb. 3 m/évszázad.

Megjegyzés: A feladatban tárgyalt folyamat során a Föld forgási energiája a súrlódás következtében folyamatosan hőenergiává alakul át, ezért a mechanikai mozgás *energiája* csökken. Nyilvánvaló azonban, hogy a lassulással együttjáró impulzusmomentum-csökkenés nem a hőmozgás impulzusmomentumát növeli, hiszen a rendezetlenség miatt a molekuláknak nincs a hőmozgásból eredő netto impulzusnyomatéka. Ezért a mechanikai mozgás *impulzusmomentuma* — az energiával ellentétben — megmarad.♣

## 1.20. Kitekintés a Naprendszerre

A bolygók nem pontosan a Kepler-megoldás szerint mozognak, mert mozgásukat a többi bolygó hatása *perturbálja*.

Az ellipszispályák helyzete valójában nem állandó, hanem a síkjukban lassan forognak (*perihélium-vándorlás*). Ezt a mozgást legpontosabban a Merkúrnál lehet megfigyelni, ui. a Merkúrpályának a legnagyobb az excentricitása (a Merkúrnál  $e = 0.2066$ , a Földnél  $e = 0.0167$ ). A Merkúr-pálya forgási sebessége az állócsillagokhoz képest a megfigyelések szerint  $\sim 573$  szögmásodperc/évszázad. Ebből  $280''$  a Vénusz,  $150''$  a Jupiter,  $100''$  a többi bolygó hatása. A hiányzó  $43''$ -re Einstein gravitáció-elmélete (az általános relativitás-elmélet) ad magyarázatot, amely szerint a tömegvonzás törvénye igen kis mértékben eltér a newtonitól.

Az excentricitás maga is változik, rövid idejű (néhány éves) ingadozások mellett hosszú idejű, ún. *szekuláris* változásokat is mutat. Ez utóbbiak időskálája 10000 év nagyságrendű és a Föld esetében a 0 és a 0,068 közötti értékekre terjed ki. Lehetséges, hogy az  $e$  szekuláris változása szerepet játszik a jégkorszakok kialakulásában (nagy excentricitásnál a bolygó sokkal rövidebb ideig tartózkodik Napközelben).

A Naprendszer mint egész természetesen C-típusú (1.14 fejezet). A mozgása láthatóan nem kaotikus. A 60-s években bebizonyították, hogy a Naprendszerhez hasonló pontrendszerek (a tömeg túlnyomó része a centrális testben van, a bolygópályák közel egy síkban fekszenek és nem metszik egymást) stabilak (nem alakul ki bennük káosz). Sajnos, a Neptun és a Pluto pályája valójában metszi egymást, ezért a tétel szigorúan véve a valóságos Naprendszerre nem vonatkoztatható, és a Naprendszer további sorsa — a keletkezéséhez hasonlóan — a megoldatlan problémák közé tartozik.

A Naprendszer távoli jövőjét csak számítógépes módszerekkel tudjuk vizsgálni. 1988-ban publikálták a LONGSTOP (Long-term Gravitational Study of the Outer Planets) program keretében a Londoni Egyetem Cray szuperszámítógépén végzett vizsgálatot, amelyben 100 millió évre előre sikerült megoldást kapni. Tapasztaltak váratlan energiakicserélődést a külső bolygók között, de instabilitásra utaló jel nem volt.

Az MIT-ben (Massachusetts Institute of Technology) célszámítógép készült a Naprendszer-dinamika tanulmányozására, amely 850 millió évre képes előre számolni (a Naprendszer életkora 4-5 milliárd év). A Pluto mozgásában káosz jeleit találták, ami elvben kihathat az egész Naprendszerre.

Egy 1989-ben publikált számítás 200 millió évre előre jóslott. A Laplace-óta alkalmazott sorfejtéses módszert használta és a sorok mintegy 150000 tagját vette figyelembe. Azt találta, hogy a belső bolygók (Merkúr, Vénusz, Föld) mozgása a *pályájuk mentén* kaotikus: ha pl. a Föld helyzetében ma 15 métert tévedünk, akkor 100 millió év múlva a Földet egyenletes valószínűséggel találjuk meg a pálya bármely pontjában.

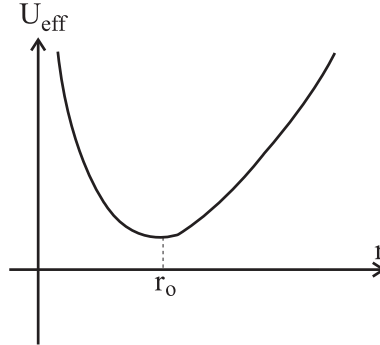
A Naprendszer bolygói körül számos hold található, amelyeknek a mozgásában az árapály-erőknek van meghatározó szerepe. A holdutazások miatt különösen nagy erőfeszítések történnék a mi Holdunk pályájának a számítására. Jelenleg a Hold pályáját kb. 1 méter pontossággal ismerjük.

\*

59.Feladat: Határozzuk meg  $U_{eff}(r)$ -t az izotróp harmonikus oszcillátorra és analizáljuk a radiális mozgást (az analízishez használjuk a 12.feladatot).

Megoldás: Az 1.15-1.16 fejezetek képleteit kell alkalmazni  $U(r) = \frac{1}{2}Dr^2$ -el.

$$U_{eff}(r) = \frac{1}{2}Dr^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} \quad L_z = \text{konst.}$$



Az  $r_0$  meghatározása az  $\frac{dU_{eff}}{dr} = 0$  egyenletből történik, amely — mint az 1.19 fejezetben láttuk, — a rugalmas vonzás és a centrifugális taszítás egyensúlyát fejezi ki:

$$Dr_0 = \frac{L_z^2}{mr_0^3} \longrightarrow r_0^2 = \frac{|L_z|}{\sqrt{mD}}.$$

A jobboldal azonban  $mr_0\dot{\varphi}^2$  alakban is írható, ahonnan  $r_0$ -al történő egyszerűsítés után

$$|\dot{\varphi}| = \sqrt{\frac{D}{m}} \equiv \omega.$$

A mozgás analízise az energia szerint:

$E$  nem lehet kisebb  $U_{eff}(r_0)$ -nál.

Amikor  $E = U_{eff}(r_0)$ , a mozgás körmozgás  $\omega$  körfrekvenciával az  $r_0$  sugáron.

$E > U_{eff}(r_0)$ -nál a radiális mozgás oszcilláció  $r_{min}$  és  $r_{max}$  között, amelyek az  $E = U_{eff}(r)$  egyenlet gyökei.

A 12.feladatból tudjuk, hogy az  $xy$  síkban a trajektória

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) \quad y = B \sin(\omega t + \beta).$$

Legyen  $\beta = \alpha - \pi/2$  és  $A, B$  helyett használjunk kisbetűt. A pályát  $t$  kizárásával kapjuk:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ez is ellipszis, de a vonzás centruma ezúttal nem a fókuszpontban van, hanem a geometriai középpontban. Nyilván  $a \equiv r_{max}$ ,  $b \equiv r_{min}$ .

Mint a Kepler-problémában tettük, jelöljük most is az azimutális mozgás periódusát  $T'$ -vel. Nyilván  $T' = \frac{2\pi}{\omega}$ , a radiális mozgás periódusa pedig  $T = \frac{1}{2}T'$ .

Mint látjuk  $T' \neq T$  és a pálya mégis zárt, nem tölti ki sűrűn az  $r_{min} \leq r \leq r_{max}$  körgyűrűt. Ennek az az oka, hogy  $T'/T$  egész szám. Belátható, hogy a Kepler-problémán és az izotróp harmonikus oszcillátoron kívül nincs több olyan  $U(r)$ , amelyek az összes pályája ilyen tulajdonságú (*Bertrand-tétel*).♣

60.Feladat: Vezessük le az izotróp harmonikus oszcillátorra is a viriál-tételt ( $\overline{K}$  és  $\overline{U}$  kapcsolatát).

Megoldás: Most  $U$  a koordináták homogén *kvadrátikus* függvénye, ezért

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} = +2U.$$

A 45.feladatban ezt a változtatást elvégezve a  $\overline{K} = \overline{U}$  relációra jutunk, ami  $E = 2\overline{K} = 2\overline{U}$  alakban is írható.♣

61.Feladat: Analizáljuk a síkinga mozgását.

Megoldás: A síkinga egy  $l$  hosszúságú súlytalan merev rúdra erősített tömeg, amely a földfelszín homogén gravitációs terében vízszintes tengelyre felfüggesztve végez lengéseket. A mozgás 1-szabadsági fokú, a  $\varphi$ -t (a függőlegetől való eltérés szögét) választjuk koordinátaként.

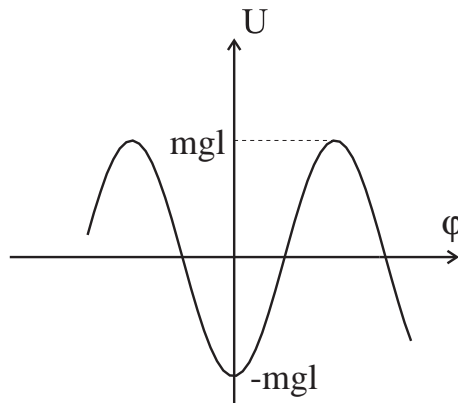
$$K = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 \quad U = -mgl \cos \varphi$$

(a potenciális energia nullpontját a felfüggesztés magasságában vettük fel).

$$L = K - U = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi$$

$$L_{\varphi} = ml^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0.$$

Ez nem A) típusú egyenlet, de a feladat az energiamegmaradás kihasználásával B) típusúként visszavezethető kvadratúrára.



A mozgás analízise az energia szerint:

$$E = K + U = \frac{ml^2}{2} \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi,$$



tehát  $U(\varphi)$  tölti be azt a szerepet, amit a Kepler-problémában és az izotróp harmonikus oszcillátornál  $U_{eff}(r)$  játszott (nincs centrifugális potenciál). Vegyük észre, hogy  $-r$ -el ellentétben,  $-\varphi$  lehet negatív is.

$E$  nem lehet kisebb  $-mgl$ -nél.

Amikor  $E = -mgl$ , az inga az alsó (stabil) egyensúlyi helyzetben nyugszik.

Amikor  $-mgl < E < mgl$ , az inga  $0 < \Phi < \pi$  amplitúdójú lengéseket végez:  $-\Phi < \varphi < \Phi$  (korlátos mozgás). A  $\Phi$  az  $U(\Phi) = E$  egyenlet pozitív megoldása:

$$\Phi = \arccos\left(\frac{E}{-mgl}\right).$$

Amikor  $E > mgl$ , az inga forog (végtelen mozgás).

Az  $E = mgl$  határesetben az inga a felső (instabil) egyensúlyi helyzetben nyugszik.

A lengési periódus számítása: Az energia

$$E = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mgl \cdot \cos \varphi$$

kifejezését megoldjuk  $\dot{\varphi}$ -ra

$$\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2}{ml^2}} \cdot \sqrt{E + mgl \cdot \cos \varphi}.$$

Ez az egyenlet a (47) mintájára integrálható:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{E + mgl \cdot \cos \varphi}} = \sqrt{\frac{2}{ml^2}}(t - t_0).$$

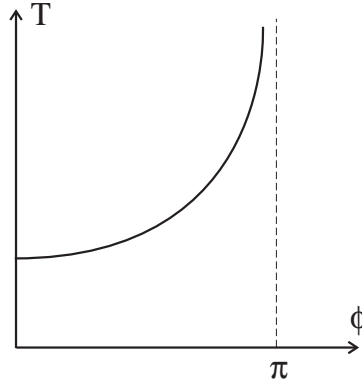
Az integrál nem fejezhető ki elemi függvényekkel, de numerikusan minden kiszámítható.

$|E| < mgl$ -nél a  $T$  lengési idő

$$T = 4\sqrt{\frac{ml^2}{2}} \cdot \int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\sqrt{E + mgl \cdot \cos \varphi}} = \sqrt{\frac{8l}{g}} \int_0^\Phi \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \Phi}}.$$

Az integrandus sorfejtésével belátható, hogy

$$T(\Phi) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \frac{1}{16}\Phi^2 + \frac{91}{12288}\Phi^4 + \dots \right].$$



A lengési periódus *függ* az amplitúdótól,  $\Phi \rightarrow \pi$ -nél végtelenhez tart. Kis amplitúdónál azonban ez a függés gyenge: a kis amplitúdójú tartományban a lengési periódus az amplitúdótól független  $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$  érték (*izokronizmus*).

A *kis amplitúdójú* lengéseket végző ingát gyakran matematikai ingának nevezik. A matematikai inga Lagrange-függvényét úgy kapjuk, hogy a sikinga Lagrange-függvényében  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2$  helyettesítést végzünk. Mivel a Lagrange-függvényből a konstansok elhagyhatók, ezért

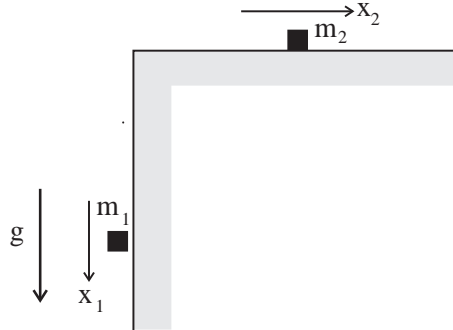
$$L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{mgl}{2}\varphi^2 = \frac{ml^2}{2}(\dot{\varphi}^2 - \omega^2\varphi^2) \quad (60)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \clubsuit$$

### 1.21. A kényszermozgások tárgyalása a hatáselv alapján.

Eddig csak egymástól független tömegpontokból álló rendszerekkel foglalkoztunk. Ahhoz, hogy véges kiterjedésű objektumokat is tárgyalhassunk, tisztáznunk kell, hogyan módosítják a mozgást a tömegpontokra kirótt *kényszerfeltételek* (*kényszerek*).

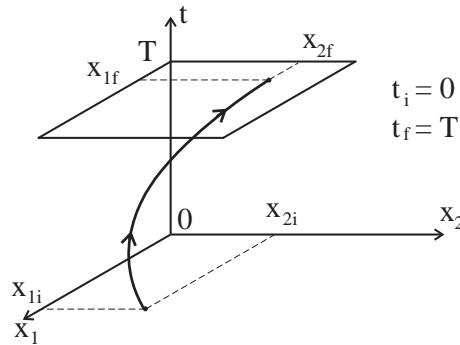
A hatáselv ideálisan alkalmas ennek a feladatnak a megoldására. Vegyünk pl. egy  $m_1$  és egy  $m_2$  tömegű tömegpontot, amelyek közül az egyik vízszintes tengelyen végez súrlódásmentes mozgást, a másik pedig függőlegesen zuhanhat a földfelszín homogén gravitációs terében (ld. az ábrát). Mit mond a hatáselv ennek az egyszerű rendszernek a mozgásáról?



Jellemezzék az  $i$  kezdeti konfigurációt az  $(x_{1i}, x_{2i})$  koordináták, az  $f$  végállapoti konfigurációt pedig az  $(x_{1f}, x_{2f})$  koordináták. A Lagrange-függvény:

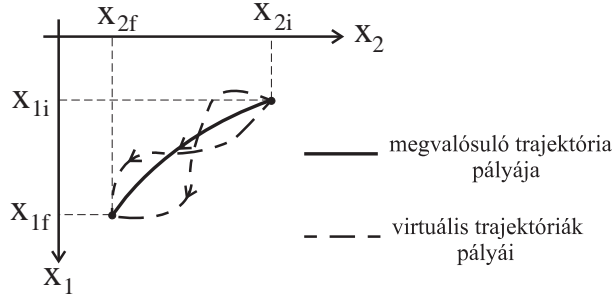
$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 + m_1 g x_1.$$

A rendszer trajektóriáit egy háromdimenziós koordinátarendszerben ábrázolhatjuk, amelynek — mondjuk — függőleges tengelye az idő, vízszintes tengelyei pedig a tömegpontok  $x_1, x_2$  koordinátái (ld. az ábrát, amelyen felrajzoltunk egy  $i$ -t és  $f$ -t összekötő trajektóriát).



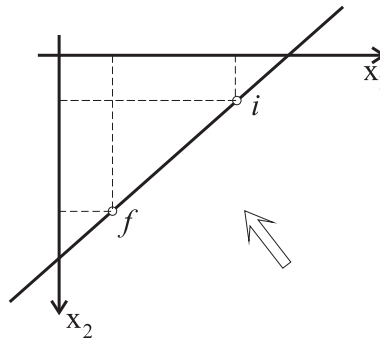
A hatáselv szerint a megvalósuló pálya az lesz, amely mellett az  $S = \int_{t_i}^{t_f} L \cdot dt$  hatásfukcionálnak szélső értéke van.

A feladat egyszerűsége miatt könnyen megállapíthatjuk, milyen jellegű a megvalósuló trajektória: az 1.tömegpont  $g$  gyorsulású szabadesést végez, a 2. pedig egyenletesen mozog. A két mozgás eredője parabolapálya. A következő ábrán az  $x_1 x_2$ -síkon ábrázoltunk egy ilyen parabolapályát (a trajektória vetületét erre a síkra), és összehasonlításul még néhány virtuális trajektória pályáját is.



De hogyan mozog a rendszer akkor, amikor a két tömeget  $l$  hosszúságú kötél kapcsolja össze? A válasz elég nyilvánvaló: a virtuális trajektóriák csak olyanok lehetnek, amelyeknek minden pontjában — a kezdeti és a végállapotú konfigurációt is beleértve, — teljesül az  $x_1 + x_2 = l$  kényszer(feltétel). Ezek közül a virtuális trajektóriák közül kell kiválasztani azt, amelynél a hatásfukcionálnak szélső értéke van (a hatásfukcionál ugyanaz, mint amikor még nem volt kényszerfeltétel). Ez az új extrémális lesz a kényszerfeltétel mellett megvalósuló mozgás trajektóriája.

A kényszerfeltételnek eleget tevő trajektóriák mind egy  $K$  síkban fekszenek. Ez a sík párhuzamos a  $t$ -tengellyel, és az  $x_1 x_2$  koordinátasíkokat az  $x_1 + x_2 = l$  egyenesben metszi (ld. az ábrát).



A virtuális trajektóriákat — amelyek száma most is végtelen, — akkor "láthatjuk", ha a nyíl irányából nézünk a  $K$  síkra. Közöttük lesz a keresett megvalósuló trajektória is, amelyet az alábbi egyszerű gondolatmenet alapján találhatunk meg.

A kényszer következtében csak 1 független koordinátánk van. Legyen ez — mondjuk — az  $x_1$  koordináta (de választhattuk volna  $x_1$  és az  $x_2$  bármely kombinációját — pl. az  $x_1 - x_2$  különbséget —, amely a kényszerfeltétellel együtt egyértelműen meghatározza a két tömegpont konfigurációját). Ha  $x_1$ -t megadjuk, ismerjük  $x_2$ -t is:  $x_2 = l - x_1$ . Helyettesítsük ezt  $L$ -be, és az új, már csak  $x_1$ -t és  $\dot{x}_1$ -t tartalmazó

Lagrange-függvényt jelöljük  $\mathcal{L}$ -el:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}_1^2 + m_1 g x_1.$$

Az ehhez tartozó határfunkcionál  $\mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L} \cdot dt$ . A megvalósuló trajektória az, amely-nél  $\mathcal{S}$ -nek szélső értéke van.

Mivel bebizonyítottuk (13.fejezet), hogy a határfunkcionálnak annál a trajek-tóriánál van szélső értéke, amely eleget tesz a Lagrange-egyenleteknek, ezért a kény-szerfeltételes probléma mozgásegyenlete nem más, mint az  $\mathcal{L}$ -ből származtatható Lagrange-egyenlet:

$$\mathcal{L}_1 = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 - m_1 g = 0,$$

azaz

$$\ddot{x}_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g \equiv a_1,$$

amelynek megoldása

$$x_1 = x_{10} + v_{10}t + \frac{1}{2}a_1 t^2.$$

Az  $x_2$  a kényszerfeltétel alapján számíthatjuk ki  $x_1$  ismeretében:

$$x_2 = l - x_1 = (l - x_{10}) - v_{10}t - \frac{1}{2}a_1 t^2.$$

A példának szánt egyszerű feladatot ezzel megoldottuk, és egyben általános mód-szert találtunk a hasonló természetű feladatok megoldására. A módszer lényege így foglalható össze: Ha van  $n$  koordinátánk és közöttük  $k$  kényszerfeltétel, akkor a szabadsági fokok száma  $f = n - k$  és mindig kiválaszthatunk  $f$  *független ko-ordinátát*, amelyek a kényszerfeltételekkel együtt meghatározzák a rendszer konfigurációját. Ezután nem kell mást tennünk, mint az  $L$ -ről az  $\mathcal{L}$ -re áttérni, azaz a Lagrange-függvényben a koordinátákat a független koordinátákon keresztül kifejezni. A feladat független mozgásegyenletei ( $f$  darab) az  $\mathcal{L}$  Lagrange-függvényhez tartozó Lagrange-egyenletek lesznek<sup>11</sup>.

Még három problémát kell megvizsgálnunk: az energia és a kényszererők számítási módszerét, valamint azokat a feltételeket, amelyeket a kényszereket megvalósító ob-jektumoknak teljesíteniük kell ahhoz, hogy az itt ismertetett elmélet alkalmazható legyen.

**a)** A kényszermozgás energiáját természetesen úgy kapjuk meg, hogy az eredeti  $L$ -ből (43) alapján kapható  $E$ -ben a koordinátákat és a sebességeket a független ko-ordinátákon és sebességeken keresztül fejezzük ki. Az így kapható új függvényt  $\mathcal{E}$ -vel jelöljük. Példánkban

$$\mathcal{E}(x_1, \dot{x}_1) = \dot{x}_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - L \Big|_{x_2=l-x_1} = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_1^2 - m_1 g x_1.$$

<sup>11</sup>A síkinga tárgyalásánál (61.Feladat) hallgatólagosan ezt az előírást alkalmaztuk, amikor egyetlen független koordinátát használtunk (a  $\varphi$ -t).

Feltéve, hogy a kényszerfeltételek nem függnek expliciten az időtől, ugyanezt az energiát közvetlenül  $\mathcal{L}$ -ből is megkaphatjuk (43) segítségével:

$$\mathcal{E} = \dot{x}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} - \mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_1^2 - m_1 g x_1.$$

Amikor azonban a kényszerfeltételben expliciten szerepel a  $t$  idő, az  $\mathcal{L}$ -ből a (43) segítségével képzett mennyiség nem azonos  $\mathcal{E}$ -vel, ezért a második módszer ilyenkor nem használható az energia számítására.

Az állítás igazolásához tegyük fel, hogy feladatunkban a kötélen hossza időben megadott módon változik, azaz  $x_1 + x_2 = l(t)$ , ahol  $l(t)$  az idő ismert függvénye. Ekkor

$$\mathcal{L}(x_1, \dot{x}_1, t) = L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)|_{x_2=x_1-l(t)} = L(x_1, l(t) - x_1, \dot{x}_1, \dot{l}(t) - \dot{x}_1),$$

ezért — a közvetett függvény deriválási szabálya alapján —

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = \left[ \frac{\partial L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)}{\partial \dot{x}_2} \cdot \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \dot{x}_1} \right]_{x_2=l(t)-x_1}.$$

Azonban  $\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \dot{x}_1} = -1$ , így

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = \left[ \frac{\partial L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)}{\partial \dot{x}_2} \right]_{x_2=x_1-l(t)}.$$

Ennek a képletnek az alapján azt találjuk, hogy

$$\dot{x}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} - \mathcal{L} = \left[ \dot{x}_1 \frac{\partial L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)}{\partial \dot{x}_1} - \underbrace{\dot{x}_1}_{\uparrow} \frac{\partial L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)}{\partial \dot{x}_2} - L \right]_{x_2=l(t)-x_1}.$$

Helyettesítsük a nyíllal megjelölt  $\dot{x}_1$ -t  $(\dot{l}(t) - \dot{x}_2)$ -vel, és némileg rendezzük át a kapott képletet. Ezt kapjuk:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} - \mathcal{L} &= \left[ \dot{x}_1 \frac{\partial L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)}{\partial \dot{x}_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)}{\partial \dot{x}_2} - L \right]_{x_2=l(t)-x_1} \\ &- \dot{l}(t) \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right)_{x_2=l(t)-x_1}, \end{aligned}$$

amit

$$\dot{x}_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} - \mathcal{L} = \mathcal{E} - \dot{l}(t) \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right)_{x_2=l(t)-x_1}$$

alakban is felírhatunk. Mint látjuk, a baloldal csak akkor egyenlő  $\mathcal{E}$ -vel, ha  $\dot{l}(t) = 0$ .

**b)** A kényszererők számítása:

Tegyük fel, hogy az  $F_1^\#, F_2^\#$  kényszererők valamilyen  $U^\#$  erőfüggvényből számíthatók. Ha ismernénk  $U^\#$ -t, akkor az  $L^\# = L - U^\#$  Lagrange-függvényhez tartozó  $L_1^\# = 0$ ,  $L_2^\# = 0$  Lagrange-egyenletek lennének a mozgásegyenletek. Ezek

$$L_1 = -\frac{\partial U^\#}{\partial x_1} \quad L_2 = -\frac{\partial U^\#}{\partial x_2}$$

alakban is írhatók. A jobboldalon azonban

$$-\frac{\partial U^\#}{\partial x_1} = +F_1^\# \quad -\frac{\partial U^\#}{\partial x_2} = +F_2^\#,$$

ezért a kényszererőket az

$$\begin{aligned} F_1^\# &= L_1 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{\partial L}{\partial x_1} \\ F_2^\# &= L_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{aligned}$$

egyenletek segítségével lehet kiszámítani úgy, hogy a jobboldalon a deriválás elvégzése után kihasználjuk a kényszerfeltételeket.

Esetünkben

$$\begin{aligned} F_1^\# &= L_1 = m_1 \ddot{x}_1 - m_1 g = m_1 (a_1 - g) = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \\ F_2^\# &= L_2 = m_2 \ddot{x}_2 = m_2 (-a_1) = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g. \end{aligned}$$

A kényszererők (kötélerő) tehát egyenlő nagyságúak és a testeket a kötélt irányába húzzák (mivel negatívak,  $x_1$ -t és  $x_2$ -t csökkenteni igyekeznek).

**c)** A kényszererők olyan valódi (külső vagy belső) erők, amelyeket egy előre megadott erőtvény helyett abból a geometriai feltételből határozunk meg, hogy a rendszer az előírt kényszerfeltételekkel összhangban mozogjon.

A kényszererők forrásai a kényszerfeltételeket biztosító különféle objektumok (rudak, felületek, kötelek stb). Ezeknek feltétlenül *deformálódniuk* kell ahhoz, hogy kényszererők ébredjenek bennük. Másrészt a méreteiket meg kell őrizniük annak érdekében, hogy pontosan az *előírt* kényszerfeltételeket róják ki a rendszerre. Hogyan lehet összeegyeztetni ezt a két nyilvánvalóan ellentmondó követelményt?

Azt a kényszerfeltételt pl., hogy két tömegpont mindig ugyanabban az  $R$  távolságban legyen egymástól  $((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = R^2)$  egy súlytalan merev rúd valósítja meg, amely egy könnyű, igen nagy rugalmas állandójú rúd idealizációja. A terheletlen (feszültségmentes) rúd hossza legyen az előírt  $R$ , a megnyúlást pedig jelöljük  $x$ -el (az  $x$  természetesen lehet negatív is). Kis megnyúlásnál (az  $x$  első rendjében) a rúdban ébredő feszültség  $F = -Dx$ . Ez a lineáris oszcillátorból jól ismert

direkciós erő képlete, amelyhez az  $U = \frac{1}{2}Dx^2$  potenciális energia tartozik: ekkora rugalmas energia halmozódik fel a rúdban (kis)  $x$  megnyúlásnál.

Az  $F$  feszültség a rúd által kifejtett kényszererő, amelynek a mozgás minden adott pillanatában meghatározott értéket kell felvennie ahhoz, hogy a tömegpontok  $R$  távolságra maradjanak egymástól. Rögzítsük tehát  $F$ -t és közelítsük a rudat az ideálshoz:  $D \rightarrow \infty$ . Mivel  $|F| = |D| \cdot |x|$ , ekkor  $x \rightarrow 0$ , tehát bármekkora kényszererő elérhető tetszőlegesen kis deformáció mellett. Ezért nincs ellentmondás abban, hogy a kényszerfeltételek pontos teljesülésével egyidejűleg kényszererők létezését is megengedjük.

Hasznos lesz az ideális kényszereknek ezt a tulajdonságát az energia fogalmának a segítségével is kifejezni. Az előző képletek felhasználásával a rúd rugalmas energiája  $U = \frac{1}{2}|F| \cdot |x|$  alakban is felírható, amiből következik, hogy  $D \rightarrow \infty$ -nél  $F = konstans$  következtében  $U \rightarrow 0$ : ideális határesetben a kényszerek úgy fejtik ki a hatásukat, hogy a belső rugalmas energiájuk állandó (zérus). Mivel azt is feltételezzük, hogy a kényszereket megvalósító tárgyak (rudak, kötelek, stb) tömege elhanyagolható, ezért nemcsak rugalmas energiájuk, hanem mozgási energiájuk is zérus. Összefoglalva tehát azt mondhatjuk, hogy az ideális kényszerek úgy hatnak, hogy működésükkel nem változtatják meg a rendszer energiáját.

A fenti gondolatmenetben kimondatlanul feltettük, hogy a kényszerfeltételek nem függenek explicit az időtől. Amikor ez nem teljesül, a kényszererők munkája még ideális esetben sem zérus a kényszerfeltételekkel összeférő mozgás során. Ezt elegendő egyetlen példával illusztrálni. Tekintsünk egy tömegpontot, amely surlódásmentesen mozog a  $z = 0$  vízszintes síkon a földfelszín gravitációs terében. A  $z = 0$  kényszerfeltétellel nem függ  $t$ -től és a példa egyszerűsége miatt nyilvánvaló, hogy a kényszererő — amely a  $z = 0$  síkra merőlegesen felfelé mutat —, a kényszerfeltétellel összeférő (vízszintes irányú) mozgás során nem végez munkát<sup>12</sup>. Ha azonban a vízszintes sík egy lift padlója, amely konstans  $v$  sebességgel mozog felfelé (a kényszerfeltétel  $z - vt = 0$  expliciten függ az időtől), akkor a tömegpont elmozdulásában lesz függőleges komponens akkor is, amikor az elmozdulás a kényszerfeltétellel összhangban történik, és ezért a kényszererő munkája nem lesz zérus.

Az ideális kényszereknek ezeket a tulajdonságait nevezik a *virtuális munka elvének*. Ez az elv azt fejezi ki, hogy a kényszerfeltételekkel összeférő infinitézimális elmozdulások során a kényszererők munkája zérus. A "virtuális" jelző arra utal, hogy amikor a kényszerfeltételek expliciten függenek az időtől, a szóbanforgó infinitézimális elmozdulások nem felelnek meg pontosan a kényszerfeltételeknek: a kényszererők munkája csak az adott pillanatban befagyasztott kényszerfeltételekkel összeférő elmozdulásokon zérus.

A kényszermozgások elmélete erre az elvre alapozva is kidolgozható. Mi ehelyett a határelvből indultunk ki. Tárgyalásunkban a kényszerek ideális voltát az a feltevés

<sup>12</sup>Ebből a példából azonban *nem szabad* arra következtetni, hogy a kényszererő mindig merőleges az elmozdulásra: gondoljunk pl. az Atwood-féle ejtőgépre (csigán átvett kötél végein két tömeg lóg).

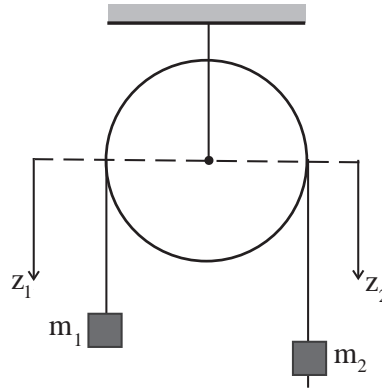


fejezi ki, hogy az energiát az eredeti, kényszermentes mozgás energiaképlete alapján számítjuk úgy, hogy azt a független koordinátákon és sebességeken keresztül fejezzük ki ( $E = \mathcal{E}$ ). Amikor a kényszerfeltételek explicite függnek az időtől, az  $\mathcal{E}$  — és az  $\mathcal{L}$  is — tartalmazni fogja a  $t$  változót. Ez mutatja, hogy a rendszer energiája nem marad meg, és vagy a kényszererők végeznek munkát a rendszeren, vagy a rendszer végez munkát a kényszerfeltételeket megvalósító objektumokon.

62.Feladat: Súlytalan csigán átvett súlytalan kötél egyik végére  $m_1$  tömeget erősítünk, a másik szálon  $m_2$  tömegű majom kúszik a kötélhez képest  $a = konstans$  gyorsulással. Analizáljuk a mozgást a Lagrange-módszerrel!

Megoldás:

$$K = \frac{m_1}{2} \dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{z}_2^2 \quad U = -g(m_1 z_1 + m_2 z_2).$$



A kényszerfeltétel

$$z_1 + z_2 = l - \frac{1}{2}at^2, \quad (61)$$

a felfelé kúszásnak  $a > 0$  felel meg.

A  $z_1$ -t tekintjük függetlennek:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m_1}{2} \dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2} (-at - \dot{z}_1)^2 + g[m_1 z_1 + m_2(l - \frac{1}{2}at^2 - z_1)] = \\ &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{z}_1^2 + am_2 t \cdot \dot{z}_1 + g(m_1 - m_2)z_1 + [\frac{m_2}{2}a^2 t^2 + gm_2(l - \frac{1}{2}at^2)]. \end{aligned}$$

Az utolsó tagot elhagyhatjuk, mert nincs benne se koordináta, se sebesség. Így az

$$\mathcal{L}' = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{z}_1^2 + am_2 t \cdot \dot{z}_1 + g(m_1 - m_2)z_1$$

ekvivalens Lagrange-függvénnyel számolhatunk.

A mozgásegyenlet

$$\mathcal{L}'_1 = (m_1 + m_2)\ddot{z}_1 + am_2 - g(m_1 - m_2) = 0,$$

$$\ddot{z}_1 = \frac{(m_1 - m_2)g - m_2a}{m_1 + m_2} \equiv a_1$$

$$\ddot{z}_2 = -a - \ddot{z}_1 = \frac{(m_2 - m_1)g - m_1a}{m_1 + m_2} \equiv a_2.$$

A majom tehát  $a_2$ , a súly  $a_1$  gyorsulással mozog a földhöz képest függőlegesen lefelé (vagyis  $a_i > 0$ -nál  $m_i$  lefelé gyorsul).

A kötél erő

$$F_1^\# = L_1 = m_1\ddot{z}_1 - gm_1 = m_1(a_1 - g) = -\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(a + 2g),$$

és  $F_2^\#$  ugyanekkora. Az 1, 2 indexet tehát elhagyhatjuk.

A kötélt csak húzóerőt képes kifejteni, ezért csak addig működik rendeltetésszerűen, amíg  $F^\# < 0$ , azaz  $a > -2g$ . Amikor éppen  $a = -2g$ , a majom a földhöz képest  $g$  gyorsulással mozog lefelé, tehát akár el is engedheti a kötelet ( $F^\# = 0$ ). Ekkor a súly is  $g$  gyorsulással esik, ezért  $-2g$  a majom gyorsulása a kötéltől képest.

Az (61) kényszerfeltétel explicite függ az időtől, ezért  $E$  nem számítható  $\mathcal{L}$ -ből, hanem közvetlenül  $L$ -ből kell kiindulni:

$$E = K + U = \frac{m_1}{2}\dot{z}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{z}_2^2 - g(m_1z_1 + m_2z_2).$$

Ide a

$$z_1 = z_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_1t^2$$

$$z_2 = (l - z_0) - v_0t + \frac{1}{2}a_2t^2$$

általános megoldás helyettesítendő:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m_1}{2}(v_0 + a_1t)^2 + \frac{m_2}{2}(-v_0 + a_2t)^2 - g\left[m_1\left(z_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_1t^2\right)\right. \\ &+ \left. m_2\left(l - z_0 - v_0t + \frac{1}{2}a_2t^2\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}[m_1a_1(a_1 - g) + m_2a_2(a_2 - g)]t^2 + E_0 = -\frac{1}{2}aF^\#t^2 + E_0, \end{aligned}$$

ahol  $E_0$  a  $t = 0$ -beli energia.

Mint látjuk, az energia nem marad meg. A kényszerfeltétel explicit időfüggése miatt ugyanis az időbeli eltolás nem szimmetria.

A kényszererők teljesítménye

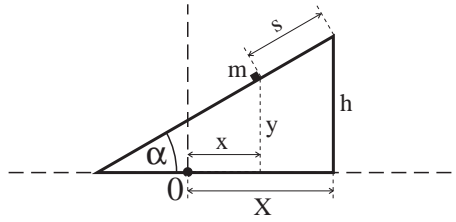
$$\dot{E} = -at \cdot F^\# = +at \cdot |F^\#|,$$

vagyis  $a > 0$ -nál a kényszererő (a majom) végez munkát a rendszeren. A majom mozgásiránya a kötéltől képest ekkor egybeesik a majomra ható kötélerő irányával. Amikor azonban  $-2g < a < 0$ , akkor  $\dot{E} < 0$ , és a rendszer végez munkát a kényszererő ellenében. ♣

63.Feladat:  $M$  tömegű lejtő súrlódásmentesen csúszik vízszintes síkon. A lejtőn  $m$  tömegű test csúszik szintén súrlódásmentesen. Analizáljuk a mozgást Lagrange-módszerrel!

Megoldás:

$$L = K - U, \quad K = \frac{M}{2} \dot{X}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad U = mgy.$$



Most  $n = 3$ , de  $X, x, y$  között van egy kényszer:

$$h - y = (X - x) \operatorname{tg} \alpha.$$

Így  $f = 2$ . Legyen a két független koordináta  $X$  és  $s$ :

$$x = X - s \cdot \cos \alpha \quad y = h - s \cdot \sin \alpha.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{M}{2} \dot{X}^2 + \frac{m}{2} \left[ (\dot{X} - \dot{s} \cdot \cos \alpha)^2 + (-\dot{s} \cdot \sin \alpha)^2 \right] - mg(h - s \cdot \sin \alpha) = \\ &= \frac{M + m}{2} \dot{X}^2 + \frac{m}{2} \dot{s}^2 - m \cdot \cos \alpha \cdot \dot{X} \dot{s} + mg \sin \alpha \cdot s - mgh. \end{aligned}$$

Az  $X$  ciklikus koordináta, a hozzá tartozó

$$P = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} = (M + m) \dot{X} - m \cos \alpha \cdot \dot{s} \quad (62)$$

általánosított impulzus — az impulzus vízszintes komponense, — mozgásállandó. Ez a megmaradó mennyiség tartozik a vízszintes eltoláshoz, amely szimmetriája a rendszernek.

$$\mathcal{E} = \dot{X} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} + \dot{s} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} - \mathcal{L} = \frac{M+m}{2} \dot{X}^2 + \frac{m}{2} \dot{s}^2 - m \cdot \cos \alpha \cdot \dot{X} \dot{s} - mg \sin \alpha \cdot s + mgh.$$

$\dot{X}$ -t helyettesíthetjük (62)-ből:

$$\dot{X} = \frac{P + m \cos \alpha \cdot \dot{s}}{M + m}.$$

Ezt  $\mathcal{E}$  kifejezésébe írva és összevonva az

$$\mathcal{E} = \frac{M'}{2} \dot{s}^2 - mg \sin \alpha \cdot s + mgh + \frac{P^2}{2(M+m)}. \quad (63)$$

egyenletre jutunk, amelyben

$$M' = \frac{m}{M+m} (M + m \cdot \sin^2 \alpha).$$

A feladatot ezzel visszavezettük kvadratúrára, ui.

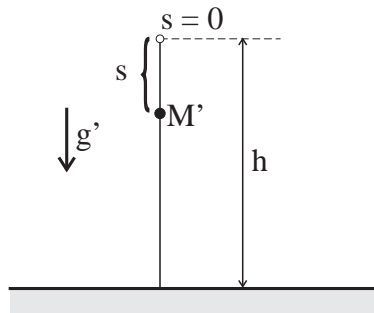
$$t = \sqrt{\frac{2}{M'}} \int \frac{ds}{\sqrt{(\mathcal{E}' - mgh) + mg \sin \alpha \cdot s}} + t_0.$$

ahol

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E} - \frac{P^2}{2(M+m)}.$$

A megoldás azonban egyszerűbben is megtalálható, ha észrevesszük, hogy — a lényegtelen additív állandótól eltekintve, — (63) nem más, mint egy szabadon eső  $M'$  tömegű test energiája az  $s$  megtett út függvényében (ld. az ábrát), feltéve, hogy a nehézségi gyorsulás nem  $g$ , hanem

$$g' = \frac{m \sin \alpha}{M'} g = \frac{(M+m) \sin \alpha}{M + m \cdot \sin^2 \alpha} g.$$



A vesszős konstansokkal felírva

$$\mathcal{E} = \frac{M'}{2}\dot{s}^2 - g'M' \cdot s + mgh.$$

Ennek az energiaképletnek az egyenletesen gyorsuló mozgás tesz eleget. Speciálisan az  $s = \dot{s} = 0$  kezdőfeltétel mellett

$$s = \frac{1}{2}g't^2 = \frac{(M+m)\sin\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)}gt^2.$$

A test tehát konstans  $g'$  gyorsulással mozog a lejtőhöz képest.

A lejtő mozgása: Ha  $t = 0$ -ban a lejtő is nyugodott, akkor (62)-ben  $P = 0$  és

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \frac{m\cos\alpha}{M+m}\dot{s} = \frac{mg\sin 2\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)}t \\ \ddot{X} &= \frac{mg\sin 2\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)}.\end{aligned}$$

Ezzel a konstans gyorsulással mozog a lejtő.

A lejtőre ható kényszererő (reakcióerő) vízszintes komponense

$$F_X^\# = L_X = M\ddot{X} = \frac{Mmg\sin 2\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)}.$$

A lejtőn csúszó tömegre ható kényszererő komponensei:

$$\begin{aligned}F_x^\# &= L_x = m\ddot{x} = m(\ddot{X} - \ddot{s}\cos\alpha) = -\frac{Mmg\sin 2\alpha}{2(M+m\sin^2\alpha)} \\ F_y^\# &= L_y = m\ddot{y} + mg = -m\sin\alpha \cdot \ddot{s} + mg = \frac{Mmg\cos^2\alpha}{M+m\sin^2\alpha}.\end{aligned}$$

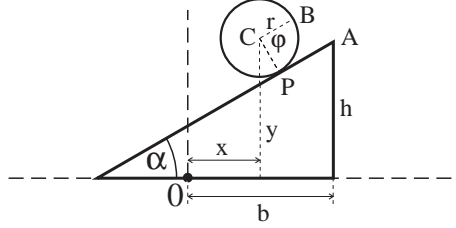
Látjuk, hogy a vízszintes komponensekre teljesül a hatás-ellenhatás törvénye.

Az  $\vec{F}^\#$  kényszererő a lejtőre merőleges irányú (ugyanis  $F_x^\# \cos\alpha + F_y^\# \sin\alpha = 0$ ), és nagysága  $\frac{M}{M+m\sin^2\alpha}mg\cos\alpha$ . Ez kisebb, mint a rögzített — vagy végtelen  $M$  tömegű — lejtő esetében fellépő  $mg\cos\alpha$  kényszererő.

64.Feladat: Rögzített lejtőn  $m$  tömegű,  $r$  sugarú tengelyszimmetrikus tömegeloszlású abroncs gördül csúszásmentesen. Analizáljuk a mozgást Lagrange-módszerrel!

Megoldás: A tehetetlenségi nyomaték  $\Theta = mr^2$ , ezért

$$L = K - U, \quad K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2, \quad U = mgy.$$



A csúszásmentességet az  $\overline{AP} = r\varphi$  egyenlőség fejezi ki ( $\varphi = 0$ -nál  $A$  és  $B$  egybeesik). Eszerint

$$\left. \begin{aligned} x &= b - r(\varphi \cos \alpha + \sin \alpha) \\ y &= h - r(\varphi \sin \alpha - \cos \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Az egyetlen független koordinátaként célszerű  $\varphi$ -t választani.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2} \left[ (-r \cos \alpha \cdot \dot{\varphi})^2 + (-r \sin \alpha \cdot \dot{\varphi})^2 \right] + \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 \\ &- mg[(h + r \cos \alpha) - r \cdot \sin \alpha \cdot \varphi] = \\ &= mr^2 \dot{\varphi}^2 + mgr \sin \alpha \cdot \varphi - mg(h + r \cos \alpha), \\ \mathcal{E} &= mr^2 \dot{\varphi}^2 - mgr \sin \alpha \cdot \varphi + mg(h + r \cos \alpha). \end{aligned} \quad (65)$$

Az  $\mathcal{L}_\varphi = 0$  Lagrange-egyenletből a  $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$  kezdőfeltételhez tartozó megoldás

$$\varphi = \frac{1}{2} \beta t^2,$$

ahol

$$\beta = \frac{g \sin \alpha}{2r}$$

a szöggyorsulás.

A kényszererők közül először a  $\varphi$ -hez tartozót számoljuk ki, amely — mivel a  $\varphi$  szögváltozó, — nem erő, hanem forgatónyomaték (ld. a 14.fejezetet):

$$F_\varphi^\# = mr^2 \ddot{\varphi} = mr^2 \beta = \frac{1}{2} mrg \sin \alpha.$$

Ezt a forgatónyomatékot az  $\frac{F_\varphi^\#}{r} = \frac{1}{2} mg \sin \alpha$  tapadási súrlódási erő hozza létre, amely a tapadási pontban hat a hengerre, és a lejtő mentén fölfelé mutat (ez felel meg a  $\varphi$  növekedési irányának).

$$F_x^\# = m\ddot{x} = -mr\ddot{\varphi} \cdot \cos \alpha = m \cdot \frac{g \sin \alpha}{2} \cdot \cos \alpha,$$

$$F_y^\# = m\ddot{y} + mg = -mr\ddot{\varphi} \sin \alpha + mg = -m \frac{g \sin \alpha}{2} \cdot \sin \alpha + mg.$$

Világosabb fizikai jelentése van azonban az  $\vec{F}^\# \equiv (F_x^\#, F_y^\#)$  erő lejtőre merőleges és a lejtővel tangenciális komponensének, amelyek a következők:

$$F_n^\# = -F_x^\# \sin \alpha + F_y^\# \cos \alpha = mg \cos \alpha,$$

$$F_t^\# = F_x^\# \cos \alpha + F_y^\# \sin \alpha = \frac{1}{2} mg \sin \alpha = \frac{F_\varphi^\#}{r}.$$

Mint látjuk, a lejtő teljesen kompenzálja a súly lejtőre merőleges komponensét, a lejtővel párhuzamos komponensnek pedig a felét kompenzálja (a tapadási súrlódás segítségével).♣

## 1.22. A lineáris harmonikus oszcillátor

Lineáris harmonikus oszcillátornak nevezzük azokat az 1-szabadsági fokú rendszereket, amelyeknek a Lagrange-függvénye

$$L = C(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2) \quad (C, \omega \text{ konstansok}) \quad (66)$$

alakú. Ide tartozik pl. a rugóra erősített tömeg ( $C = \frac{m}{2}, \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ ) és a matematikai inga ( $C = \frac{ml^2}{2}, \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , ld. (60)-t). Az alábbiakban a határozottság kedvéért rugóra gondolunk,  $\omega$  helyett  $\omega_0$ -t és a  $q$  helyett  $x$ -t használunk:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega_0^2 x^2). \quad (67)$$

A mozgásegyenlet

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (68)$$

Az általános megoldást (5) adja:

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Szótár<sup>13</sup> :

$A$	—	amplitúdó
$\omega_0$	—	(kör)frekvencia
$(\omega_0 t + \alpha)$	—	fázis
$\alpha$	—	fázisállandó
$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$	—	periódus(idő).

<sup>13</sup>Az alábbiakból világos lesz, hogy az  $\omega_0$  teljes meghatározása: a csillapítatlan szabad rezgés körfrekvenciája.

65.Feladat: Keressük (68)-nak azt a partikuláris megoldását, amely  $x_0, v_0$  kezdősebességű és kezdőhelyzetű rezgést ír le.

Megoldás: Az általános megoldásban

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0} \clubsuit$$

Csillapítás: Feltesszük, hogy a közegellenállás arányos a sebességgel:  $F_k = -\beta \dot{x}$ . A rugó mozgásegyenlete a közegellenállás figyelembevételével

$$m\ddot{x} + \beta \dot{x} + Dx = 0, \quad (69)$$

ami a  $\kappa = \frac{\beta}{2m}$  konstans segítségével a (68)-nak megfelelő

$$\ddot{x} + 2\kappa \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (70)$$

alakban is írható.

Az energia disszipációjának a sebessége

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{D}{2} x^2 \right) = \dot{x}(m\ddot{x} + Dx) \stackrel{(69)}{=} -\beta \dot{x}^2.$$

Az  $\dot{x}$ -tal arányos csillapítási tagot is tartalmazó (69) mozgásegyenlethez nem található olyan Lagrange-függvény, amely a körülmények explicit időtől való függetlenségének megfelelően maga sem függ expliciten  $t$ -től. Ez a Noether-tételből következik: Ha létezne ilyen  $L$ , akkor — mivel feltevés szerint nem függ expliciten  $t$ -től, — a mozgás során az energia megmaradna, és ez ellentmond a fentebbi képletnek. Ez a példa mutatja, hogy a Lagrange-elmélet érvényességi köre szűkebb, mint a Newton-egyenleteké.

A (70) megoldása a csillapítás mértékétől függően három típusba sorolható:

i)  $\kappa < \omega_0$  (gyenge csillapítás).

Az általános megoldás ekkor

$$x = A \cdot e^{-\kappa t} \cos(\omega t + \alpha), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}.$$

Ez egy  $\omega$  körfrekvenciájú rezgés, amelynek az amplitúdója exponenciálisan csökken:  $\tau = 1/\kappa$  idő alatt csökken az  $e$ -d részére. A  $\tau$  neve: időállandó.

ii)  $\kappa > \omega_0$  (erős csillapítás).

$$x = e^{-\kappa t} \cdot (A \cdot e^{\lambda t} + B \cdot e^{-\lambda t}), \quad \lambda = \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}.$$

Ez a megoldás két exponenciálisan csökkenő tag összege, oszcillációt nem tartalmaz.

iii)  $\kappa = \omega_0$ .

$$x = (A_0 + A_1 t) \cdot e^{-\kappa t}.$$



A továbbiakban a határozottság kedvéért mindig a gyenge csillapításról lesz szó, ez az eset fordul elő a legtöbbször a gyakorlatban.

66.Feladat: Igazoljuk a fenti megoldások helyességét. ♣

Tegyük fel most, hogy a csillapított oszcillátorra külső *gerjesztő erő* is hat, amely megadott módon függ az időtől. A mozgásegyenlet ekkor

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Dx = F(t),$$

ami az

$$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{1}{m}F(t). \quad (71)$$

alakban is írható.

Legyen a külső erő periódikus,  $\Omega$  körfrekvenciával (*gerjesztési frekvencia*):  $F(t) = f \cdot \cos \Omega t$ ,  $f = \text{konstans}$ . Akkor

$$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{f}{m} \cdot \cos \Omega t. \quad (72)$$

A (70) egyenlet különlegessége az, hogy *homogén lineáris*: ha  $x_1(t)$  és  $x_2(t)$  két megoldás, akkor  $c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$  is megoldás tetszőleges  $c_1, c_2$  konstansokkal. A (72) pedig *lineáris inhomogén* egyenlet, amelynek általános megoldása a (70) homogén egyenlet általános megoldásának (amelyet *szabad rezgésnek* nevezünk) és (72) egy partikuláris megoldásának az összege. Mivel (70) általános megoldását már ismerjük, a (72) egy partikuláris megoldását kell megtalálnunk.

Ezt célszerű komplex alakban keresni. Vegyük észre, hogy  $\cos \Omega t = \Re e^{i\Omega t}$ . Legyen  $z = x + iy$ . Ekkor (72) megegyezik a

$$\ddot{z} + 2\kappa z + \omega_0^2z = \frac{f}{m}e^{i\Omega t} \quad (73)$$

komplex egyenlet valós részével. A partikuláris megoldást célszerű

$$z = \mathcal{A} \cdot e^{i(\Omega t + \delta)}$$

alakban keresni ( $\mathcal{A}$  pozitív valós konstans). Amikor ui. ezt a próbakifejezést (73)-ba írjuk, az  $e^{i\Omega t}$  exponenciális faktor kiegyszerűsödik, és  $\mathcal{A}e^{i\delta}$ -ra algebrai egyenlet marad vissza. Az időfüggő exponensnek ez a kiesése indokolja a komplex alak használatát. Eszerint

$$\begin{aligned} (-\Omega^2 + 2i\kappa\Omega + \omega_0^2)\mathcal{A}e^{i\delta} &= \frac{f}{m}, \\ \mathcal{A}e^{i\delta} &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i \cdot 2\kappa\Omega} \cdot \frac{f}{m}. \end{aligned}$$

Az  $\mathcal{A}$  amplitúdó ennek a komplex kifejezésnek az abszolút értéke

$$\mathcal{A} = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\kappa^2\Omega^2}}, \quad (74)$$

a  $\delta$  pedig a fázisa:

$$\delta = -\arctg \frac{2\kappa\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (75)$$

Ezek a képletek a

$$\Re z = \mathcal{A} \cdot \cos(\Omega t + \delta)$$

partikuláris megoldást, amelyet *kényszerrezgés*nek nevezünk, egyértelműen meghatározzák.

Írjuk fel az általános megoldást gyenge csillapításnál:

$$x(t) = A \cdot e^{-\kappa t} \cdot \cos(\omega t + \alpha) + \mathcal{A} \cdot \cos(\Omega t + \delta), \quad (76)$$

ahol  $\kappa = \frac{\beta}{2m}$ ,  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}$ ,  $\mathcal{A}$ -t és  $\delta$ -t pedig (74), (75) határozza meg. A két önkényesen választható konstans  $A$  és  $\alpha$ . Ezeket a kezdőfeltételekből határozhatjuk meg. Amikor pl. az oszcillátor a gerjesztés bekapcsolásáig nyugodott, az  $A$  és az  $\alpha$  az

$$\begin{aligned} x(0) &= A \cos \alpha + \mathcal{A} \cos \delta = 0 \\ \dot{x}(0) &= -\kappa A \cos \alpha - A\omega \sin \alpha - \mathcal{A}\Omega \sin \delta = 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldásai.

Látjuk, hogy a két önkényes konstans a (76) első tagjában fordul csak elő, amely a homogén egyenlet megoldása, és *néhányszor  $\tau$  idő után teljesen elhanyagolhatóvá válik (tranziens)*: a konkrét kezdeti feltételek "elfelejtődnek", és a megoldás a kényszerrezgésbe megy át.

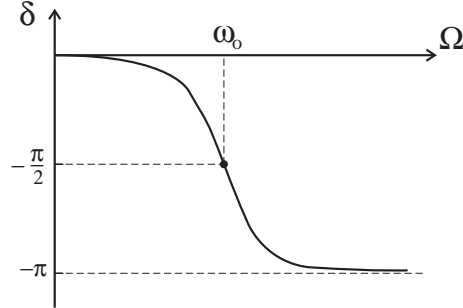
Amikor  $\Omega$ -t az  $\omega_0$  környezetében változtatjuk, a kényszerrezgés  $\mathcal{A}$  amplitúdója egy bizonyos  $\Omega_r$  frekvenciánál maximális (*rezonancia-frekvencia*). Vegyük észre, hogy  $\mathcal{A}$  az ekvivalens

$$\mathcal{A} = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - 2\kappa^2 - \Omega^2)^2 + 4\kappa^2(\omega_0^2 - \kappa^2)}} \quad (77)$$

alakban is írható, ahonnan nyilvánvaló, hogy

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\kappa^2}.$$

Ha a (75) alapján felrajzoljuk  $\delta$ -t az  $\Omega$  gerjesztési frekvencia függvényében, nullából induló monoton csökkenő görbét kapunk, amely  $\Omega \rightarrow \infty$ -nél  $-\pi$ -hez tart. A kitérés fázisa tehát mindig késik a gerjesztő erőhöz képest ( $\delta < 0$ ). Speciálisan  $\Omega = \omega_0$ -nál  $\delta = -\pi/2$ .



A továbbiakban az energia disszipációját analizáljuk a kényszerrezgés során. Ekkor

$$x = \mathcal{A} \cos(\Omega t + \delta) \quad \dot{x} = -\Omega \mathcal{A} \sin(\Omega t + \delta),$$

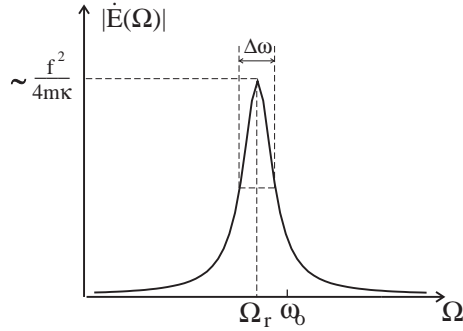
ezért

$$|\dot{E}(\Omega)| = \beta \dot{x}^2 = 2m\kappa\Omega^2 \mathcal{A}^2 \sin^2(\Omega t + \delta).$$

Ezt a kifejezést átlagoljuk a rezgési periódusra, de az átlagolt mennyiségre nem vezetünk be új jelölést. Átlagolás után tehát

$$|\dot{E}(\Omega)| = m\kappa\Omega^2 \mathcal{A}^2 \stackrel{(77)}{=} \frac{\kappa\Omega^2 f^2}{m \left[ (\Omega^2 - \Omega_r^2)^2 + 4\kappa^2(\omega_0^2 - \kappa^2) \right]}. \quad (78)$$

Korlátozódjunk a nagyon gyenge csillapítás esetére ( $\kappa \ll \omega_0$ ). Ekkor a (78) jobb-  
oldala  $\Omega \neq \Omega_r$ -nél praktikusán nulla ( $\kappa$ -val arányos),  $\Omega = \Omega_r$ -nél pedig nagyon nagy  
( $1/\kappa$ -val arányos): a görbe egyetlen keskeny magas csúcsból áll az  $\Omega_r$  rezonancia-  
frekvenciánál (*rezonancia-görbe*):



A rezonancia-görbe  $\Delta\Omega$  (*rezonancia*)*szélességét* (vagy *sávszélességét*) a görbe alatti

területnek és a görbe magasságának a hányadosa jellemzi:

$$\Delta\Omega = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |\dot{E}(\Omega)| d\Omega}{|\dot{E}(\Omega_r)|}.$$

A nevező a  $\kappa$  legalacsonyabb rendjében  $f^2/4m\kappa$ -val egyenlő. A számlálóbeli integrál kiszámítható és  $\kappa \rightarrow 0$ -nál  $\pi f^2/2m$ -hez tart. Így a *rezonancia-szélességet* a  $\Delta\Omega = 2\pi\kappa$  képlet adja. Látjuk, hogy a  $\kappa$  csillapítási állandó közvetlenül meghatározza a rezgés két egészen különböző tulajdonságát: a szabad rezgések lecsengési időállandóját ( $\tau = 1/\kappa$ ), valamint azt az  $\Omega_r - \Delta\Omega/2 < \Omega < \Omega_r + \Delta\Omega/2$  gerjesztési frekvenciatartományt (*rezonancia-tartomány*), amelyben az oszcillátor effektíven gerjeszthető. Az egyik tulajdonságot mérve a másikat is automatikusan megkapjuk.

A  $\Delta\Omega = 2\pi\kappa$  képletet átírhatjuk

$$\tau \cdot \Delta\Omega = 2\pi \quad (79)$$

alakba, amely azt fejezi ki, hogy a rezonanciaszélesség és az időállandó valamelyikének növelése a másik olyan csökkenését idézi elő, hogy a szorzatuk állandó maradjon.

A disszipációt vizsgálhatjuk a gerjesztő erő oldaláról is, amelynek a teljesítménye

$$P = \dot{x}F = -\mathcal{A}\Omega \sin(\Omega t + \delta) \cdot f \cos \Omega t = \frac{1}{2}\mathcal{A}\Omega f[-\sin(2\Omega t + \delta) - \sin \delta].$$

Ez a teljesítmény akkor maximális, amikor a []-ben az első tag +1, ezért

$$P_{max} = \frac{1}{2}\mathcal{A}\Omega f[1 - \sin \delta].$$

Másrészt az átlagteljesítmény, amit ugyancsak  $P$ -vel fogunk jelölni,

$$P = -\frac{1}{2}\mathcal{A}\Omega f \sin \delta \quad (80)$$

-val egyenlő, és így

$$\frac{P}{P_{max}} = \frac{\sin \delta}{\sin \delta - 1}.$$

Láttuk, hogy amikor  $\Omega$ -val 0-tól végtelen felé tartunk, a  $\delta$  fázis 0-ról  $-\pi$ -re csökken. Nagyon gyenge csillapításnál ez a csökkenés szinte ugrásszerűen következik be az  $\omega_0$  frekvenciánál, amely előtt  $\delta$  praktikusán nulla, utána pedig  $-\pi$ . Ennek következtében  $P/P_{max}$  is csak a rezonancia-frekvencia közvetlen környezetében különbözik észrevehetően zérustól, ahol 1/2 magasságú csúcsa van.

Átlagolás után természetesen  $|\dot{E}| = P$ , amint az a képleteink segítségével közvetlenül is ellenőrizhető: a kényszerrezgés során az oszcillátor *átlagosan* annyi energiát veszít ( $|\dot{E}|$ ), amennyit a gerjesztő erő forrása beletáplál ( $P$ ). Ha az oszcillátor hasznos

munkát végez (pl. óraművet hajt), akkor  $P$  a hasznos teljesítmény. A gerjesztő erő forrásának azonban  $P_{max}$  teljesítmény leadására kell képesnek lennie. Optimális esetben ( $\delta = -\pi/2$ ) ez a  $P$  kétszerese. Ettől eltérő fázisértékeknél azonban  $P_{max}$  lényegesen nagyobb lehet  $2P$ -nél, ugyanis jelentős mennyiségű energia ingadozik a gerjesztő erő forrása és az oszcillátor között, és ez fölöslegesen terheli a forrást. Nyilvánvaló, hogy ebből a szempontból célszerű a paramétereket úgy választani, hogy  $\delta$  a  $-\pi/2$  közelében legyen.

\*

A soros kapcsolású  $RCL$ -kontúr, mint csillapított harmonikus oszcillátor:  
Egy ilyen kontúr differenciálegyenlete

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = \mathcal{U}.$$

A (71)-t megelőző egyenlettel való összevetés alapján a  $Q$  töltésnek a rugónál az  $x$  kitérés, az  $\mathcal{U}$  feszültségnek az  $F$  gerjesztő erő felel meg, továbbá

$$m \longleftrightarrow L \quad \beta \longleftrightarrow R \quad D \longleftrightarrow 1/C,$$

$$\omega_0 \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \kappa \longleftrightarrow \frac{R}{2L} \quad \Delta\Omega \longleftrightarrow \frac{\pi R}{L}.$$

A  $\delta$  a  $Q$  relatív fázisa  $\mathcal{U}$ -hoz képest, de az áramköröknél inkább a  $\dot{Q} = \mathcal{I}$  áram  $\mathcal{U}$ -hoz képesti relatív fázisát használják, amelyet  $\varphi$ -vel jelölnek. Az oszcillátor nyelvén ez a szög az  $\dot{x} = -\mathcal{A}\Omega \sin(\Omega t + \delta) = \mathcal{A}\Omega \cos(\Omega t + \delta + \pi/2)$  sebesség relatív fázisa  $F = f \cos \Omega t$ -hez képest, azaz  $\varphi = \delta + \pi/2$  ( $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ ).

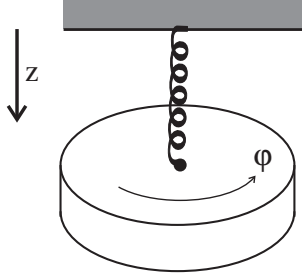
Mivel  $f \mathcal{U}_{max}$ -nak,  $\mathcal{A}\Omega$  pedig  $\mathcal{I}_{max}$ -nak felel meg, ezért áramköröknél a (80) a

$$P = \frac{1}{2} \mathcal{I}_{max} \mathcal{U}_{max} \cos \varphi = IU \cos \varphi$$

alakot ölti, ahol  $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{I}_{max}$  és  $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{U}_{max}$  az  $\mathcal{I}$  és a  $\mathcal{U}$  négyzetátlagából vont négyzetgyökök. Az áramforrás terhelése — mint jól ismert — akkor optimális, amikor  $\varphi$  közel van a nullához.

### 1.23. Csatolt rezgések.

Induljunk ki az un. Wilberforce-inga példájából, amely egy rugóra függesztett korong. Mint az ábrán látható, az ingának két szabadsági foka, és ennek megfelelően két független koordinátája van. A  $z$  koordináta írja le a függőleges irányú rezgést, a  $\varphi$  pedig a korong torziós mozgását a vízszintes síkban.



Mi lesz a Lagrange-függvény? A kinetikus energiával nincs probléma, ez nyilván

$$K = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + \frac{\Theta}{2} \dot{\varphi}^2,$$

ahol  $m$  és  $\Theta$  a korong tömege és szimmetriatengelyéhez viszonyított tehetetlenségi nyomatéka. A potenciális energiát azonban nem ismerjük, csak annyit tudhatunk róla, hogy

$$U(z, \varphi) = -mgz + U_r(z, \varphi),$$

ahol  $U_r$  a rugóban tárolt rugalmas — nyúlási és torziós — energia. A mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} L_z &= m\ddot{z} - mg + \frac{\partial U_r}{\partial z} = 0 \\ L_\varphi &= \ddot{\varphi} + \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned}$$

Fizikai okokból nyilvánvaló, hogy a rendszernek van stabil egyensúlyi állapota, amelyben  $z$  és  $\varphi$  konstans. A mozgásegyenletek szerint ezeket a konstans értékeket a

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -mg + \frac{\partial U_r}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} = 0 \quad (81)$$

egyenletek határozzák meg.

Állapodjunk meg abban, hogy  $z$  és  $\varphi$  kezdőpontját az egyensúlyi helyzettől számítjuk, azaz nyugalmi helyzetben  $z = \varphi = 0$ . E megállapodás mellett (81) azt fejezi ki, hogy az  $U(z, \varphi)$  függvénynek az origóban ( $z = \varphi = 0$ -nál) szélső értéke van. A szélső értéknek minimumnak kell lennie, mivel a szóbanforgó egyensúlyi helyzet stabil.

Korlátozódjunk a stabil egyensúlyi helyzet körüli kis elmozdulásokra (*kis rezgés közelítés*). Az elmozdulásokat abban az esetben tekintjük kicsinek, ha az  $U(z, \varphi)$

potenciális energia  $z = \varphi = 0$  körüli hatványsorában a kvadratikusnál magasabb tagok elhanyagolhatóan kicsik, azaz, ha

$$U(z, \varphi) \approx U_0 + z \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 + \varphi \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)_0 + \frac{1}{2} z^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_0 + \frac{1}{2} \varphi^2 \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right)_0 + z\varphi \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \varphi} \right)_0 \quad (82)$$

(a 0-indexszel megjelölt mennyiségek  $z = \varphi = 0$ -nál számítandók).

A (81)-ből következik, hogy (82)-ben a két lineáris tag koefficiense zérus

$$\left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 = \left( \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)_0 = 0 \quad (z = \varphi = 0 \text{ egyensúlyi helyzet.}),$$

az  $U_0$  konstansot pedig el lehet hagyni.

A  $z^2$ -es tag a rugó *megnyúlásból* származó potenciális energiája, ezért logikus  $\frac{1}{2} D z^2$ -ként felírni, vagyis  $\left( \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right)_0$  azonos a  $D$  rugalmas állandóval. Hasonlóan, a  $\varphi^2$ -es tag a rugó *torzióból* származó potenciális energiája, amelyet  $\frac{1}{2} k \varphi^2$ -ként szokás felírni, vagyis  $\left( \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right)_0$  azonos a  $k$  torziós konstanssal.

Kis rezgés közelítésben tehát a Lagrange függvény a következő:

$$L = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + \frac{\Theta}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{D}{2} z^2 - \frac{k}{2} \varphi^2 - \alpha \cdot z\varphi. \quad (83)$$

Az utolsó tagban bevezettük az  $\alpha = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \varphi} \right)_0$  konstansot, amely a függőleges megnyúlás és a torzió egymásrahatását leíró *kölcsönhatási állandó*.

Valóban, amikor  $\alpha = 0$ , ez a két rezgésfajta egymástól teljesen független, ugyanis ekkor  $L$  a függőleges rezgések

$$L^{(f)} = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - \frac{D}{2} z^2$$

Lagrange-függvényének, és a torziós lengések

$$L^{(t)} = \frac{\Theta}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{k}{2} \varphi^2$$

Lagrange-függvényének összege, és ennek következtében a két változó a mozgásegyenletekben *szeparálódik* (ld.a 38.feladatot).

Mind  $L^{(f)}$  mind  $L^{(t)}$  alakilag azonos a harmonikus oszcillátor Lagrange függvényével, ezért csillapítatlan rezgéseket írnak le<sup>14</sup>. A függőleges rezgések körfrekvenciája  $\omega_1 = \sqrt{D/m}$ , a torziós lengéseké  $\omega_2 = \sqrt{k/\Theta}$ .

<sup>14</sup>A mozgásegyenletekbe természetesen szükség esetén be lehet írni  $\dot{z}$ -al és  $\dot{\varphi}$ -al arányos súrlódási erőt.

Látjuk, hogy kis rezgés közelítésben az  $U_r(z, \varphi)$  ismeretlen függvény helyett három konstans szerepel a Lagrange-függvényben. Ezeknek jól meghatározott fizikai jelentése van, ezért empirikusan viszonylag egyszerűen meghatározhatók.

Amikor  $\alpha \neq 0$ , a mozgásegyenletek mindegyike tartalmazza mindkét változót:

$$\begin{aligned} L_z &= m\dot{z} + Dz + \alpha\varphi = 0 \\ L_\varphi &= \Theta\dot{\varphi} + k\varphi + \alpha z = 0. \end{aligned}$$

Ezek az egyenletek *lineárisak*, ezért könnyen megoldhatók (a 17.fejezet osztályozása szerint A-típusúak). Mindenekelőtt hozzuk őket standard alakra a

$$z = \frac{1}{\sqrt{m}}q_1 \quad \varphi = \frac{1}{\sqrt{\Theta}}q_2$$

transzformáció segítségével. Az új változók függvényében  $L$  a következő:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega_1^2 q_1^2 - \omega_2^2 q_2^2 - 2\eta q_1 q_2), \quad (84)$$

ahol  $\eta = \frac{\alpha}{\sqrt{m\Theta}}$ . Nagyon sok különböző konkrét feladat hozható kis rezgés közelítésben erre az alakra, ezért további képleteink általános jellegűek, nem korlátozódnak a Wilberforce-ingára<sup>15</sup>.

Az (84)-beli potenciális energia a következő:

$$U = \frac{1}{2}(\omega_1^2 q_1^2 + \omega_2^2 q_2^2 + 2\eta q_1 q_2).$$

A  $q_1 = q_2 = 0$ -hoz tartozó egyensúlyi állapot akkor stabil, ha ez az  $U$  pozitív definit, vagyis értéke semmilyen  $q_1, q_2$  értékpárnál sem negatív. Ez feltételt jelent az  $U$ -ban szereplő konstansokra, amelyet a következő módon kaphatunk meg. Legyen  $q_2 = xq_1$ .

Akkor  $U = \frac{q_1^2}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2 x^2 + 2\eta x)$ . Ennek a kifejezésnek  $x = -\eta/\omega_2^2$ -nél van minimuma, ahol a  $\frac{q_1^2}{2} \left( \omega_1^2 - \frac{\eta^2}{\omega_2^2} \right)$  értéket veszi fel. Ez nem lehet negatív, ezért a stabilitás feltétele a következő:

$$\omega_1 \omega_2 > |\eta|. \quad (85)$$

Ha (84)-ben valamelyik koordinátát nullának rögzítjük, a másik koordinátához tartozó *parciális rendszer* Lagrange-függvényét kapjuk:

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 - \omega_1^2 q_1^2) & (q_2 = 0\text{-nál}) \\ L^{(2)} &= \frac{1}{2}(\dot{q}_2^2 - \omega_2^2 q_2^2) & (q_1 = 0\text{-nál}). \end{aligned}$$

<sup>15</sup>A (84)-be beleírhatunk még egy  $\dot{q}_1 \dot{q}_2$ -vel arányos tagot is, de ettől az egyszerűség kedvéért egyelőre eltekintünk.



Az  $\omega_1, \omega_2$  körfrekvenciák a parciális rendszerek *parciális (kör)frekvenciái*. Amikor valamelyik koordinátát nullánál "befagyasztjuk", a rendszer ezen körfrekvenciák valamelyikével rezeg.

A rendszer azonban akkor is képes határozott körfrekvenciájú mozgásra, amikor egyik szabadsági foka sincs befagyasztva. Az ilyen mozgás körfrekvenciája a *normálfrekvenciáknak* nevezett  $\Omega_1, \Omega_2$  körfrekvenciák egyike. A normálfrekvenciák kiszámítása érdekében írjuk fel a (84)-ből származtatható mozgásegyenleteket:

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \eta q_2 = 0 \quad \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \eta q_1 = 0, \quad (86)$$

és keressük a határozott  $\Omega$  frekvenciájú

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A \cos(\Omega t + \gamma) \\ q_2 &= B \cos(\Omega t + \gamma) \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

megoldásokat. Helyettesítsük (87)-t (86)-ba. A koszinusszal történő egyszerűsítés után ezt kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} (\omega_1^2 - \Omega^2)A + \eta B &= 0 \\ +\eta A + (\omega_2^2 - \Omega^2)B &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (88)$$

Ez egy homogén lineáris egyenletrendszer az  $A, B$  ismeretlenre, amelynek csak akkor van nullától különböző megoldása, ha determinánsa zérus (vagyis amikor az egyik egyenlet a másik konstansszorososa):

$$\begin{vmatrix} (\omega_1^2 - \Omega^2) & \eta \\ \eta & (\omega_2^2 - \Omega^2) \end{vmatrix} = (\omega_1^2 - \Omega^2)(\omega_2^2 - \Omega^2) - \eta^2 = 0,$$

ahonnan

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\eta^2} \right]. \quad (89)$$

A gyök alatti kifejezés nyilván pozitív, ezért  $\Omega_1^2$  és  $\Omega_2^2$  egyaránt valós. Ráadásul mindkettő pozitív, ezért  $\Omega_1$  és  $\Omega_2$  szintén valós és — definíció szerint — pozitív. (Igazolás:  $\Omega_{1,2}^2$  akkor pozitív, ha

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 > \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4\eta^2}.$$

De ez igaz, mert ha négyzetre emeljük, a (85) egyenlőtlenségre jutunk, ami a feltételezett stabilitás következtében teljesül.)

Állapodjunk meg abban, hogy a két normálfrekvencia közül mindig a kisebbiket jelöljük  $\Omega_1$ -el. Könnyen igazolható, hogy mindig teljesül az

$$\Omega_1 < \omega_1, \quad \omega_2 < \Omega_2 \quad (90)$$

egyenlőtlenség: a nagyobbik normálfrekvencia nagyobb, mint a nagyobbik parciális frekvencia, és a kisebbik normálfrekvencia kisebb, mint a kisebbik parciális frekvencia.

Amikor a rendszer valamelyik normálfrekvenciával rezeg, azt mondjuk, hogy *normálrezgést végez*. Számítsuk ki az  $A/B$  arányt a két normálrezgésnél. A (88) — mondjuk — második egyenletében legyen  $\Omega = \Omega_1$ , és rendezzük át ezt az egyenletet:

$$B_1 = \frac{\eta}{\Omega_1^2 - \omega_2^2} A_1 \equiv k_1 A_1$$

(az  $A_1$  és a  $B_1$  indexe jelzi, hogy az  $\Omega_1$  frekvenciájú normálrezgés amplitúdójáról van szó). Hasonlóan,  $\Omega = \Omega_2$  helyettesítéssel ezt kapjuk:

$$B_2 = \frac{\eta}{\Omega_2^2 - \omega_2^2} A_1 \equiv k_2 A_2.$$

A (90) alapján látható, hogy  $k_1$  és  $k_2$  különböző előjelű.

Mint látjuk, normálrezgésnél (87)-ben a két koordináta amplitúdójának aránya nem lehet tetszőleges: vagy  $k_1$ -el, vagy  $k_2$ -vel egyenlő. Azt szokás mondani, hogy ezekben az esetekben valamelyik *normálmódus* van gerjesztve.

Térjünk ki arra a fontos esetre, amikor  $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$ . Ekkor  $\Omega_{1,2}^2 = \omega^2 \pm |\eta|$  (speciálisan *gyenge csillapításnál* az

$$\Omega_1 \approx \omega - \frac{|\eta|}{2\omega} \quad \Omega_2 \approx \omega + \frac{|\eta|}{2\omega} \quad \text{ha } |\eta| \ll \omega^2, \quad (91)$$

képletek érvényesek), továbbá

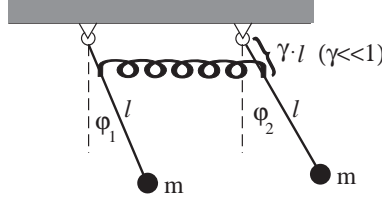
$$k_1 = -\frac{\eta}{|\eta|} \quad k_2 = \frac{\eta}{|\eta|}. \quad (92)$$

Ha eleve tudjuk, hogy csak az egyik normálmódus van gerjesztve, akkor csak két szabadon választható konstansunk van: az  $A$  amplitúdó és a  $\gamma$  fázis. Az általános esetben az egyenletek linearitása következtében a megoldást kereshetjük a két normálmódus szuperpozíciójaként. Ebben az esetben a szabad konstansok száma négy (az  $A_1$ ,  $A_2$  amplitúdó és a két  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  fázisszög), és két szabadsági foknál az általános megoldásnak pontosan négy szabad konstansot kell tartalmaznia. A (86) általános megoldása tehát a következő:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_1 \cos(\Omega_1 t + \gamma_1) + A_2 \cos(\Omega_2 t + \gamma_2) \\ q_2 &= k_1 A_1 \cos(\Omega_1 t + \gamma_1) + k_2 A_2 \cos(\Omega_2 t + \gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Példaként tekintsünk két tökéletesen egyforma síkingát (61.feladat), amelyek azonos síkban mozognak, és gyenge, súlytalan rugó kapcsolja őket össze, amelynek megfeszítetlen hossza az ingák felfüggesztési pontjainak távolságával egyenlő<sup>16</sup>:

<sup>16</sup>A rugót az ingák minden helyzetében vízszintesnek tekintjük, ami azért nem baj, mert úgylis kis rezgés közelítésre térünk át, ahol ez a közelítés igaz.



A potenciális energia

$$U = -mgl(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) + \frac{1}{2}D\gamma^2 l^2(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)^2,$$

és kis rezgés közelítésben (kvadratikus pontossággal)

$$U = \frac{1}{2}mgl(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{2}D\gamma^2 l^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2 = \frac{l}{2}(mg + D\gamma^2 l)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) - D\gamma^2 l^2 \varphi_1 \varphi_2.$$

Az egyensúlyi helyzetben nyilván  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . A Lagrange függvény:

$$L = \frac{1}{2}ml^2(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) - \frac{l}{2}(mg + D\gamma^2 l)(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + D\gamma^2 l^2 \varphi_1 \varphi_2.$$

$\varphi_1 = q_1/\sqrt{ml^2}$ ,  $\varphi_2 = q_2/\sqrt{ml^2}$  helyettesítés után ez a Lagrange függvény a (84) standard alakot veszi fel, amelyben

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{mg + D\gamma^2 l}{ml}} \quad \eta = -\frac{\gamma^2 D}{m}. \quad (94)$$

A (85) stabilitási feltétel nyilván teljesül.

A normálfrekvenciák a következők:

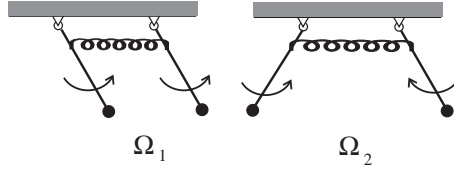
$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{g}{l} + \frac{D\gamma^2}{m} \pm \frac{D\gamma^2}{m},$$

azaz

$$\Omega_1^2 = \frac{g}{l} \quad \Omega_2^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{D\gamma^2}{m}.$$

Az intuícióval összhangban  $\Omega_1$  megegyezik a *csatolatlan* ingák frekvenciájával, de — ennek ellenére — (90) teljesül.

Mivel  $\eta < 0$ , a (92) szerint  $k_1 = +1$ ,  $k_2 = -1$ , ezért a kisebb normálfrekvenciájú módusban az ingák azonos fázisban, a nagyobb normálfrekvenciájú módusban pedig ellentétes fázisban lengenek:



Milyen lesz az a mozgás, amelyben az 1. inga kezdeti kitérése maximális, a 2.-ingáé nulla, és mindkét inga kezdősebessége zérus? A (93) szerint ez a mozgás a két normálrezgés szuperpozíciójaként áll elő az  $A_1 = A_2 = \Phi$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$  választás mellett:

$$\varphi_1 = \Phi \cdot (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t) = 2\Phi \cdot \cos \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2} t$$

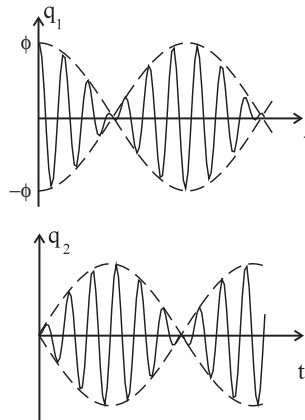
$$\varphi_2 = \Phi \cdot (\cos \Omega_1 t - \cos \Omega_2 t) = 2\Phi \cdot \sin \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} t \cdot \sin \frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2} t.$$

A  $\gamma$  csökkentésével  $|\eta|$  tetszőlegesen kicsivé tehető. Ezért (91) alkalmazható, és a fenti megoldás

$$\varphi_1 = 2\Phi \cdot \cos \frac{|\eta|}{2\omega} t \cdot \cos \omega t$$

$$\varphi_2 = 2\Phi \cdot \sin \frac{|\eta|}{2\omega} t \cdot \sin \omega t$$

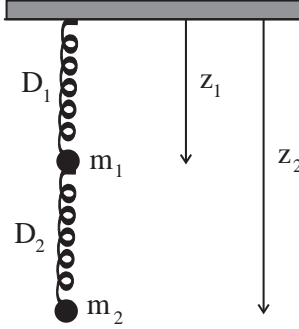
alakban is írható. A képlet azt fejezi ki, hogy a két inga ellentétes fázisban  $|\eta|/2\omega \ll \omega$  frekvenciával *lebeg*:



Mint látjuk, a lebegés két közeli normálfrekvenciájú normálrezgés szuperpozíciójaként áll elő. A parciális frekvenciák azonosságát — vagy majdnem azonosságát —

szokás kifejezni úgy, hogy a két inga (a két parciális rendszer) rezonanciában van egymással.

67.Feladat: Határozzuk meg az ábrán látható kettős rugó normálfrekvenciáit.



Megoldás:

$$U = -m_1gz_1 - m_2gz_2 + \frac{1}{2}D_1(z_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2}D_2(z_1 - z_2 - l_2)^2$$

( $l_1$  és  $l_2$  a megfeszítetlen rugók hossza).

Az egyensúlyi helyzetben a tömegpontok koordinátája legyen — mondjuk —  $\bar{z}_1$  és  $\bar{z}_2$ . Vezessük be a  $z'_1, z'_2$  új változókat a

$$z_1 = z'_1 + \bar{z}_1 \quad z_2 = z'_2 + \bar{z}_2$$

képletekkel. Egyensúlyban  $z'_1 = z'_2 = 0$ , ezért eleve bizonyos, hogy a vesszős változókon keresztül kifejezett potenciális energia nem tartalmaz a változóiban lineáris tagokat, ennek következtében a  $\bar{z}_1, \bar{z}_2$  kiszámítása nélkül is megállapíthatjuk, hogy konstans erejéig

$$U = \frac{1}{2}D_1z_1'^2 + \frac{D_2}{2}(z_1' - z_2')^2 = \frac{1}{2}(D_1 + D_2)z_1'^2 + \frac{1}{2}D_2z_2'^2 - D_2z_1'z_2'.$$

(A  $z_1, z_2$  tényleges kiszámításához természetesen szükség van az egyensúlyi értékekre, amelyek

$$\bar{z}_1 = \frac{(m_1 + m_2)g}{D_1} + l_1 \quad \bar{z}_2 = \left( \frac{m_2}{D_2} + \frac{m_1 + m_2}{D_1} \right) g + l_1 + l_2.)$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1\dot{z}_1'^2 + m_2\dot{z}_2'^2 - (D_1 + D_2)z_1'^2 - D_2z_2'^2 + 2D_2z_1'z_2').$$

Végezzük el a

$$z_1' = \frac{1}{\sqrt{m_1}} q_1 \quad z_2' = \frac{1}{\sqrt{m_2}} q_1$$

transzformációt, amely után a Lagrange-függvény a standard (84) alakú lesz, amelyben

$$\omega_1^2 = \frac{D_1 + D_2}{m_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{D_2}{m_2}, \quad \eta = -\frac{D_2}{\sqrt{m_1 m_2}}.$$

A feladat további diszkussziója az általános képletek alapján történik.♣

68.Feladat: Vizsgáljuk az

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + 2\lambda\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2 - \omega_1^2 q_1^2 - \omega_2^2 q_2^2 - 2\eta q_1 q_2) \quad (|\lambda| < 1) \quad (95)$$

Lagrange-függvény által leírt csatolt oszcillátorok normálrezgéseit.

Megoldás:

$$\left. \begin{aligned} (\omega_1^2 - \Omega^2)A + (\eta - \lambda\Omega^2)B &= 0 \\ (\eta - \lambda\Omega^2)A + (\omega_2^2 - \Omega^2)B &= 0. \end{aligned} \right\}$$

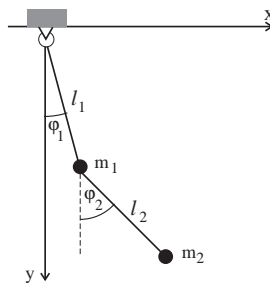
$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2(1-\lambda^2)} \left\{ \omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\eta\lambda \pm \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 4[\eta^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\eta\lambda + \lambda^2\omega_1^2\omega_2^2]} \right\}$$

$$B_1 = \frac{\eta + \lambda\Omega_1^2}{\Omega_1^2 - \omega_2^2} A_1 \equiv k_1 A_1 \quad B_2 = \frac{\eta + \lambda\Omega_2^2}{\Omega_2^2 - \omega_2^2} A_1 \equiv k_2 A_2.$$

A (90) most is igaz. Ha  $\eta = 0$  és  $\omega_1 = \omega_2$ , akkor (92)  $\eta \rightarrow -\lambda$  csere után érvényes.♣

69.Feladat: Határozzuk meg a kettős síkinga normálfrekvenciáit.

Megoldás:



$$L = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_1 g y_1 + m_2 g y_2$$

$$\begin{aligned}x_1 &= l_1 \sin \varphi_1 & y_1 &= l_1 \cos \varphi_1 \\x_2 &= l_2 \sin \varphi_2 + l_1 \sin \varphi_1 & y_2 &= l_2 \cos \varphi_2 + l_1 \cos \varphi_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{(m_1 + m_2)}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \\ &+ (m_1 + m_2) g l_1 \cos \varphi_1 + m_2 g l_2 \cos \varphi_2.\end{aligned}$$

A  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$  stabil egyensúlyi helyzet, ezért kis rezgés közelítésben

$$\mathcal{L} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cdot \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g l_1 \varphi_1^2 - \frac{1}{2} m_2 g l_2 \varphi_2^2.$$

Legyen

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{(m_1 + m_2) l_1^2}} q_1 \quad \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{m_2 l_2^2}} q_2.$$

Az új változóknak  $\mathcal{L}$  az előző feladatban felírt standard alakú lesz a következő paraméterekkel:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 &= \frac{g}{l_1} & \omega_2^2 &= \frac{g}{l_2} & \lambda &= \sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}} < 1 & \eta &= 0. \\ \Omega_{1,2}^2 &= \frac{g(m_1 + m_2)}{2m_1 l_1 l_2} \left[ l_1 + l_2 \pm \sqrt{(l_1 - l_2)^2 + 4 \frac{m_2}{m_1 + m_2} l_1 l_2} \right] \clubsuit\end{aligned}$$

\*

Áttérünk a mozgás leírására gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben.

## 1.24. A relativitás elve

Vizsgáljunk egy dinamikai rendszert, amely kizárólag belső erők hatása alatt mozog (zárt rendszer). Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a rendszer tömegpontokból áll.

Egy  $\mathcal{K}$  inerciarendszerben a rendszert leíró egyenletek a következők:

$$m_\alpha \ddot{x}_{\alpha i} = F_{\alpha i}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n) \quad (\alpha = 1 \dots n, \quad i = 1, 2, 3). \quad (96)$$

Egy másik  $\mathcal{K}'$  inerciarendszerben a mozgást ugyancsak a Newton-egyenletek írják le, amelyek most

$$m_\alpha \ddot{x}'_{\alpha i} = F'_{\alpha i}(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_n) \quad (\alpha = 1 \dots n, \quad i = 1, 2, 3). \quad (97)$$

alakúak (a komponensek természetesen  $\mathcal{K}'$ -höz képest értendők).

Szigorúan véve az inerciarendszereknek az 1.3 fejezet 1.pontjában adott definíciója megengedné, hogy (96)-ban és (97)-ben az erő megfelelő komponensei az argumentumok különböző függvényei legyenek — ezt az elméleti lehetőséget jelzi a (97)-ben a vessző az  $F$ -n. Ha  $F'$  és  $F$  valóban különböző függvények lennének,  $\mathcal{K}$  és  $\mathcal{K}'$  nem lenne egyenértékű annak ellenére, hogy mindkettőben Newton-egyenlet írja le a mozgást. A  $\mathcal{K}$  és a  $\mathcal{K}'$  különbözősége abban mutatkozna meg, hogy bizonyos *dinamikai* jelenségek másképp történének az egyikben, mint a másikban (noha egy *magárahagyott* test gyorsulása mind  $\mathcal{K}$ -ban, mind  $\mathcal{K}'$ -ben zérus volna).

Ezt a lehetőséget zárja ki a *Galilei-féle relativitási elv*, amely kimondja, hogy *az inerciarendszerek minden dinamikai jelenség szempontjából ekvivalensek*, azaz (96) és (97) jobboldalán ugyanaz az erő áll. Az elv tartalmának mindmáig legérzékletesebb leírását Galilei-Salviati adta meg a Párbeszédék második napján:

...Zárkózzál be egy barátod társaságában egy nagy hajó fedélzete alatt egy meglehetősen nagy terembe. Vigyél oda szúnyogokat, lepkéket és egyéb röpködő állatokat, gondoskodjál egy apró halakkal teli vizesedényről is, azonkívül akassz fel egy kis vödört, melyből a víz egy alája helyezett szűknyakú edénybe csöpög. Most figyelj meg gondosan, hogy a repülő állatok milyen sebességgel röpködnek a szobában minden irányba, míg a hajó áll. Meglátod azt is, hogy a halak egyformán úszkálnak minden irányban, a lehulló vízcseppek mind a vödör alatt álló edénybe esnek. Ha társad felé hajítasz egy tárgyat, mind az egyik, mind a másik irányba egyforma erővel kell hajítanod, feltéve, hogy azonos távolságról van szó. Ha, mint mondani szokás, páros lábbal ugrasz, minden irányba ugyanolyan messzire jutsz. Jól vigyázz, hogy mindezt gondosan megfigyeld, nehogy bármi kétely támadhasson abban, hogy az álló hajón mindez így történik. Most mozogjon a hajó tetszés szerinti sebességgel: azt fogod tapasztalni — ha a mozgás egyenletes és nem ide-oda ingadozó —, hogy az említett jelenségekben semmiféle változás nem következik be. Azoknak egyikéből sem tudsz arra következtetni, hogy mozog-e a hajó, vagy sem. Ha ugrasz, ugyanakkora távolságra fogsz jutni, mint az előbb, és bármily gyorsan mozog a hajó, nem tudsz nagyobb ugrani hátrafelé, mint előre: pedig az alattad levő hajópadló az alatt az idő alatt, míg a levegőben vagy, ugrásoddal ellenkező irányban elmozdul előre. Ha társad felé egy tárgyat hajítasz, nem kell nagyobb erővel hajítanod, ha barátod a hajó elején tartózkodik, mint akkor, amikor hátul van. A cseppek éppúgy bele fognak hullani az alsó edénybe, mint előbb, egyetlenegy sem fog az edény mögé esni, pedig az, míg a csepp a levegőben van, több hüvelyknyi utat tesz meg. A halaknak sem kell az edényben nagyobb erőt kifejteni, hogy az edény elejére úszhassanak, és ugyanolyan könnyedséggel fognak a táplálék után menni, ha az edény bármely részén van is. Végül a szúnyogok és a lepkék is különbség nélkül fognak bármely irányba repkedni. Sohasem fog előfordulni, hogy a hátsó falhoz nyomódnak, mintegy elfáradva a gyorsan



haladó hajó követésétől, pedig míg a levegőben tartózkodnak, el vannak választva tőle. Ha egy szem tömjént elégetünk, egy kevés füst képződik, mely felszáll a magasba és kis felhő gyanánt lebeg ott, és nem mozdul el sem az egyik, sem a másik irányba. A jelenségek ez egyformaságának az az oka, hogy a hajó mozgásában minden rajta levő tárgy résztvesz, beleértve a levegőt is. Azért is mondtam, hogy a fedélzet alatt kell elhelyezkednetek, mert fent, a szabad levegőn, mely nem kíséri a hajó mozgását, az említett jelenségektől többé-kevésbé észrevehető eltéréseket tapasztalhatnátok. Így például a füst éppúgy elmaradna, mint a levegő. A szúnyogok és a lepkék sem tudnák követni a hajót a levegő ellenállása miatt...

M. Zemplén Jolán fordítása

A relativitási elv kiterjesztése az elektrodinamikára a speciális relativitáselméletben történt meg és Einstein nevéhez fűződik. A fény terjedési törvényei látszólag kitüntetnek *egy* az inerciarendszerek közül: azt, amelyben a fény minden irányban azonos sebességgel terjed. Valójában a fény *minden* inerciarendszerben rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, és ez a tény a térről és az időről alkotott hagyományos elképzeléseink jelentős módosítását követelte meg. A relativitáselmélettel az elektrodinamika kapcsán foglalkozunk majd.

## 1.25. A gyorsuló koordinátarendszer

Gyorsuló koordinátarendszeren az olyan koord. rendszert értjük, amely egy gyorsuló mozgást végző merev testhez van rögzítve. Az egyszerűség kedvéért Descartes-rendszert használunk és a koord. rendszert  $O'X'Y'Z'$ -vel, vagy röviden  $\mathcal{K}'$ -vel jelöljük.

A  $\mathcal{K}'$  mellett szükség lesz egy inerciarendszerre is, amelyet  $OXYZ$ -vel, ill.  $\mathcal{K}$ -vel jelölünk és nyugvónak tekintjük.

Az  $O$  kezdőpontú ( $O$ -hoz viszonyított) vektorokat nagybetűvel, az  $O'$  kezdőpontúakat ( $O'$ -höz viszonyítottakat) kisbetűvel jelöljük. Egy adott (tömeg)pont  $O$ -hoz és  $O'$ -höz viszonyított helyzetvektorát *ugyanazzal* a nagy-, ill. kisbetűvel jelöljük, és ezt a szabályt fenntartjuk a vektorok időderiváltjainak a jelölésénél is. Ha pl. egy adott tömegpont helyzetvektora  $O$ -hoz képest  $\vec{R}$ , akkor  $O'$ -höz viszonyított helyzetvektora  $\vec{r}$ . Az  $O'$  helyzetvektora  $O$ -hoz képest  $\vec{R}_{O'}$ , az  $O$  helyzetvektora  $O'$ -höz képest  $\vec{r}_O$ . Nyilván  $\vec{R}_{O'} = -\vec{r}_O$ , és  $\vec{R} = \vec{R}_{O'} + \vec{r}$ ,  $\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{R}$ .

A sebességeknél további megkülönböztetés szükséges, ugyanis minden helyzetvektorhoz két különböző sebességvektor tartozik: a  $\mathcal{K}$ -hoz és a  $\mathcal{K}'$ -höz viszonyított sebesség, és ezeket világosan meg kell különböztetnünk egymástól. Ezt azzal érjük el, hogy a  $\mathcal{K}'$ -höz viszonyított sebességeknél a sebességet jelölő betűt (nem a komponens jelét!) vesszővel látjuk el.

A tömegpontnak, amelyről az előbb szó volt, két helyzetvektorát vezetjük be ( $\vec{r}$ -t és  $\vec{R}$ -t), de mindkét helyzetvektorhoz két-két sebesség tartozik:  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  és  $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$  a  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyított,  $\vec{v}' = \dot{\vec{r}'}$  és  $\vec{V}' = \dot{\vec{R}'}$  a  $\mathcal{K}'$ -höz viszonyított sebességek. Pl. a  $\vec{v}$

definíciója az, hogy a  $\mathcal{K}$ -ban a komponensei  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ -al egyenlők, a  $\vec{v}'$ -é pedig az, hogy a komponensei  $\mathcal{K}'$ -ben  $(\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$ -vel egyenlők. A két vektor csak akkor ugyanaz, ha  $\mathcal{K}'$  nyugszik  $\mathcal{K}$ -ban, egyébként különböznek egymástól: Lehetséges pl., hogy  $\vec{v}' = 0$ , de  $\vec{v} \neq 0$ <sup>17</sup>.

Fontos világosan megérteni, hogy ezt a megkülönböztetést csak *sebesség-jellegű* mennyiségek esetében kell megtennünk, helyzetvektoroknál nem. Az  $(x, y, z)$  és az  $(x', y', z')$  komponensek pl. *ugyanannak* az  $\vec{r}$  helyzetvektornak a vetületei a  $\mathcal{K}$ , ill. a  $\mathcal{K}'$  tengelyeire, ezért félrevezető volna  $\vec{r}$  mellett még  $\vec{r}'$ -t is bevezetni; az  $\vec{r}' = \vec{v}$  és az  $\vec{r}' = \vec{v}'$  azonban két különböző vektor.

A  $\mathcal{K}'$  mozgása a  $\mathcal{K}$  inerciarendszerhez képest háromféle lehet: tiszta transláció, tiszta forgás, vagy a kettő kombinációja.

1) Tiszta translációnál  $\mathcal{K}'$  tengelyeinek az *orientációja* időben állandó, a  $O'$  origó pedig tetszőleges mozgást végez. Ezt a mozgást tehát az  $\vec{R}_{O'}(t)$  vagy az  $\vec{r}_O(t)$  vektorral jellemezhetjük.

2) Tiszta forgásnál  $\mathcal{K}'$  origója a  $\mathcal{K}$ -ban nyugszik ( $\vec{R}_{O'}$   $\mathcal{K}$ -hoz viszonyított komponensei konstansok), a  $\mathcal{K}'$  tengelyeinek az orientációja pedig tetszőleges módon változik. Ezt a mozgást az  $\vec{\omega}(t)$  szögsebesség-vektorral jellemezhetjük: az  $\vec{\omega}$  — definíció szerint — a  $\mathcal{K}'$  szögsebessége  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyítva. Minden olyan vektor, amely  $\mathcal{K}'$ -höz képest nyugszik,  $dt$  idő alatt  $d\varphi = \omega(t) \cdot dt$  szöggel fordul el az  $O'$ -n áthaladó  $\vec{\omega}(t)$  irányú tengely körül úgy, hogy  $\vec{\omega}$ -val szembenézve az elfordulás az óramutató járásával ellentétes irányú (jobbcsavar).

Megjegyezzük, hogy az általános esetben mind a forgás sebessége, mind pedig a forgástengely iránya időben változik. Abban a speciális esetben, amikor a forgási sebesség és a tengely helyzete állandó ( $\vec{\omega} = konstans$ ), a forgást *egyenletesnek* nevezük. Természetesen az egyenletesen forgó  $\mathcal{K}'$  is gyorsuló koordinátarendszer.

Legyen  $\vec{w}$  egy  $O'$  kezdőpontú  $\mathcal{K}'$ -ben nyugvó vektor ( $\vec{w}' = 0$ , ami — mint tudjuk, — azt jelenti, hogy a  $(w_{x'}, w_{y'}, w_{z'})$  komponensek konstansok), amely a  $\mathcal{K}'$ -vel együtt az előbb leírt módon forog: a végpontja  $dt$  idő alatt az  $\vec{\omega}$ -ra és  $\vec{w}$ -re merőlegesen elmozdul a megfelelő irányban és az elmozdulás nagysága  $w_\rho \cdot d\varphi$ -vel egyenlő, ahol  $w_\rho$  a  $\vec{w}$  vetülete az  $\vec{\omega}$ -ra merőleges síkra. Pontosan ezekkel a tulajdonságokkal rendelkezik az  $(\vec{\omega} \times \vec{w})dt$  vektor: egyrészt  $(\vec{\omega} \times \vec{w}) \perp \vec{\omega}$ ,  $\vec{w}$ , másrészt  $|(\vec{\omega} \times \vec{w})dt| = \omega dt \cdot w \sin \theta = w_\rho d\varphi$ , ahol  $\theta$  az  $\vec{\omega}$  és a  $\vec{w}$  által bezárt szög, végül pedig az elmozdulás korrekt irányítottságát a vektorszorzat megfelelő definíciója (ld. a 6. oldalt) biztosítja. Ez a képlet a  $\mathcal{K}'$ -ben nyugvó tetszőleges kezdőpontú (speciálisan az  $O$  kezdőpontú) vektorokra is érvényes, hiszen ezek  $O'$ -höz viszonyított  $\mathcal{K}'$ -ben nyugvó vektorok lineárkombinációi.

<sup>17</sup>Mindegyik sebesség egy-egy vektor, ezért komponenseiket a vektorok transzformációs szabályai alapján bármely koordinátarendszerben kiszámíthatjuk. A "vesszőtlen" sebességeket  $\mathcal{K}$ -ban, a "vesszősöket"  $\mathcal{K}'$ -ben *definiáljuk* — ez két *különböző* vektor —, de miután definiáltuk őket, a komponenseiket kiszámíthatjuk bármely koordinátarendszerben (a "vesszősöket" pl.  $\mathcal{K}$ -ban). A "vesszős" és a "vesszőtlen" sebességek kapcsolatát (98) adja meg.

A  $\vec{w}$   $\mathcal{K}$ -beli *változási sebességét* úgy kapjuk, hogy az inf. megváltozást  $dt$ -vel osztjuk. Ezért  $\vec{\omega}$  *szögsebességénél minden  $\mathcal{K}'$ -höz rögzített  $\vec{w}$  vektor  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyított forgási sebessége  $(\vec{\omega} \times \vec{w})$ -vel egyenlő.*

Ha  $\vec{w}$  nincs  $\mathcal{K}'$ -ben rögzítve, akkor  $\mathcal{K}$ -beli komponensei két okból változnak: (1) a  $\mathcal{K}'$ -beli komponensek változása és (2)  $\mathcal{K}'$  forgása következtében. A kis változások additivitása alapján a két változás *sebessége* összeadódik:

$$\dot{\vec{w}} = \dot{\vec{w}}' + (\vec{\omega} \times \vec{w}). \quad (98)$$

Erre a képletre lesz szükségünk a következőkben.

**3)** Az általános mozgásnál mind  $\vec{r}_O(t)$ , mint  $\vec{\omega}(t)$  különbözik zérustól, és tetszőleges módon függ az időtől. A (98) ebben az esetben is érvényes.

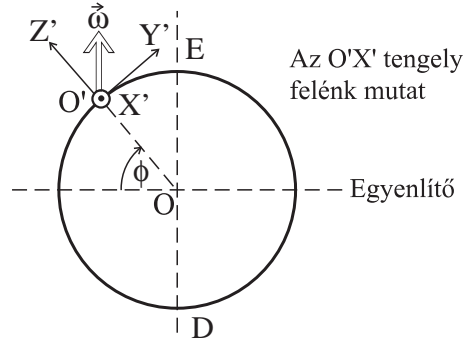
70.Feladat: Mozogjon a  $\mathcal{K}'$  origója a  $\mathcal{K}$ -rendszer  $XY$  síkjában az  $O$  körüli  $\rho$  sugarú körön egyenletes sebességgel. A periódusidő legyen  $T$ . Az  $O'Z'$  tengely legyen állandóan párhuzamos  $OZ$ -vel, és a  $\mathcal{K}$  origója legyen állandóan a negatív  $O'X'$  tengelyen. Határozzuk meg  $\vec{R}_O$  és  $\vec{\omega}$   $\mathcal{K}$ -beli, valamint  $\vec{r}_O$  és  $\vec{\omega}$   $\mathcal{K}'$ -beli komponenseit.

Megoldás:

$$\begin{aligned} (R_{O'x}, R_{O'y}, R_{O'z}) &= \left( \rho \cos \frac{2\pi}{T}, \rho \sin \frac{2\pi}{T}, 0 \right) \\ (\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}) &= \left( 0, 0, \frac{2\pi}{T} \right) \\ (r_{Ox'}, r_{Oy'}, r_{Oz'}) &= (-\rho, 0, 0) \\ (\omega_x, \omega_y, \omega_z) &= \left( 0, 0, \frac{2\pi}{T} \right). \end{aligned}$$

Megjegyzés: Az ember hajlamos arra, hogy a  $\mathcal{K}'$ -beli szögsebességet nullának tekintse. Ennek valószínűleg az az oka, hogy a szögsebesség  $\mathcal{K}'$ -beli komponensein — helytelenül — a  $\mathcal{K}'$ -höz viszonyított szögsebesség komponenseit értjük, amelyek valóban nullák, hiszen a  $\mathcal{K}'$ -t hordozó test a  $\mathcal{K}'$ -ben tényleg nem forog. Azonban az  $\vec{\omega}$  *mindig* a  $\mathcal{K}'$ -nek a  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyított szögsebességét jelenti, és a feladat szerint *ennek* a szögsebességnek a komponenseit kell kifejeznünk  $\mathcal{K}$ -ban és  $\mathcal{K}'$ -ben. ♣

71.Feladat: Tekintsünk el a Föld keringésétől és tegyük fel, hogy középpontja a  $\mathcal{K}$  origójában nyugszik. A  $\mathcal{K}'$  a felszínhez rögzített rendszer, origója a  $\phi$  szélességi kör egy pontja. Az  $O'Z'$  a földfelszínre merőleges,  $O'X'$  pedig keleti irányba mutat. Határozzuk meg  $\vec{r}_O$  és  $\vec{\omega}$   $\mathcal{K}'$ -beli komponenseit.



Megoldás:

$$\begin{aligned} (r_{Ox'}, r_{Oy'}, r_{Oz'}) &= (0, 0, -\rho) \\ (\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}) &= \left( 0, \frac{2\pi}{T} \cos \phi, \frac{2\pi}{T} \sin \phi \right). \end{aligned}$$

Megjegyzés: Ez a  $\mathcal{K}'$  az a természetes vonatkoztatási rendszer, amelyet a föld felszínén lefolyó jelenségek tárgyalásánál használunk olyankor, amikor figyelembe kell venni a föld tengely körüli forgását (ld. a 72.feladatot).♣

### 1.26. A mozgásegyenlet gyorsuló koordinátarendszerben (tisztá transláció)

Tisztá translációnál  $\vec{\omega} = 0$ ,  $\mathcal{K}'$  tengelyeinek az orientációja állandó, és tekinthetjük őket a  $\mathcal{K}$  megfelelő tengelyeivel párhuzamosaknak. Ekkor nincs szükség a vesszős és a vesszőtlen komponensek és sebességek megkülönböztetésére, és ez a körülmény egyszerűvé teszi a Newton-egyenletek átírását  $\mathcal{K}'$ -re.

Tekintsünk egyetlen tömegpontot, amely az  $\vec{F}$  külső erő hatása alatt mozog. A Newton-egyenletek csak  $\mathcal{K}$ -ban érvényesek és csak az  $O$ -hoz viszonyított ("nagybetűs") helyzetvektorra írhatók fel:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{X} &= F_x \\ m\ddot{Y} &= F_y \\ m\ddot{Z} &= F_z \end{aligned} \right\} \longleftrightarrow m\ddot{\vec{R}} = \vec{F} \quad (99)$$

(az  $\vec{R}$  vektor  $(R_x, R_y, R_z)$  komponenseire a természetesebb  $(X, Y, Z)$  jelölést használtuk).

A  $\mathcal{K}'$ -ben érvényes mozgásegyenleteket innen úgy kapjuk meg, hogy az

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_O$$

összefüggés segítségével (99)-ben a nagybetűs koordinátákat kisbetűsökön keresztül fejezzük ki:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + F_x^*(t) \\ m\ddot{y} &= F_y + F_y^*(t) \\ m\ddot{z} &= F_z + F_z^*(t) \end{aligned} \right\} \longleftrightarrow m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}^*(t), \quad (100)$$

ahol  $\vec{F}$  az  $\vec{r}$ -n keresztül kifejezett külső erő,  $(x, y, z)$  az  $\vec{r}$  komponensei, és

$$\vec{F}^* = (m\ddot{x}_O, m\ddot{y}_O, m\ddot{z}_O) \equiv (ma_{Ox}, ma_{Oy}, ma_{Oz}).$$

A (100) a  $\mathcal{K}'$ -ben érvényes mozgásegyenlet. Az egyenletet úgy rendeztük, hogy hasonló legyen az inerciarendszerben érvényes egyenlethez annyiban, hogy a baloldalon csak a gyorsulással arányos tag szerepel. A jobboldalon ekkor megjelenik az  $\vec{F}^*$  *inerciaerő* (vagy *tehetetlenségi erő*), amely a koordinátaerőhöz hasonlóan arányos annak a testnek a tömegével, amelyre hat (ui. a (99) baloldalából származik). Az inerciaerő is fiktív erő, mivel az erőnek az 1.3 fejezet 3) pontjában felsorolt tulajdonságai közül az A) és a D) nem érvényes rá.

A (100) szerint tiszta translációnál a  $\mathcal{K}'$ -ben ható inerciaerő arányos az inerciarendszerek (origójának) gyorsulásával a  $\mathcal{K}'$ -höz képest. Ez nyilván a korrekt inerciaerő, hiszen a tehetetlenség törvénye alapján pontosan ekkora gyorsulással mozog  $\mathcal{K}'$ -ben egy szabad ( $\vec{F} = 0$ ) tömegpont.

\*

Megjegyzés: Ennél a pontnál némi bepillantást adhatunk Einstein gravitáció elméletébe, amely szerint:

(a) Az inerciarendszer fogalmába térbeli kiterjedését is bele kell érteni: csak *lokális* inerciarendszerek léteznek. Egy kisméretű — elvben infinitezimálisan kicsi, praktikusan azonban makroszkópikus méretű — laboratóriumban az inerciaerő lehet nulla (lokális inerciarendszer), egy *tetszőlegesen* nagyméretű laboratórium minden pontjában azonban nem.

(b) A gravitációs erő azonos az inerciaerővel, és csak azért hittük sokáig valódi erőnek, mert a vonatkoztatási rendszerek közül nem jól választottuk ki az inerciarendszereket. Ha pl. a (nyugvónak feltételezett) Föld felszínéhez rögzített rendszert inerciarendszernek gondoljuk, akkor a  $g$  nehézségi gyorsulást valódi erő hatásának kell tulajdonítanunk. De ha a *szabadon eső* laboratóriumokat ("Einstein-lift") tekintjük lokális inerciarendszereknek, amelyeknek  $O$  origója  $g$  gyorsulással esik lefele ( $\vec{a}_O = (0, 0, -g)$ ), akkor a földfelszínhez rögzített rendszerek a gyorsulók, ugyanis

az inerciarendszerekhez képest  $g$  gyorsulással mozognak felfelé. Ebben a felfogásban a tárgyak nem azért zuhannak, mert a Föld valódi gravitációs erővel vonzza őket, hanem az  $\vec{F}^* = m\vec{a}_O$  fiktív tehetetlenségi erő következtében, és ezért a gyorsulást és a  $g$ -t szorzó tömeg szükségképpen ugyanaz (ld. az 1.4 fejezetet).

(c) A gravitációelmélet feladata az, hogy feltérképezze, hogyan mozoghatnak a nagy tömegek közelében a lokális inerciarendszerek.

A részletesen kidolgozott elméletből kiderül, hogy következményei igen nagy pontossággal megegyeznek a newtoni gravitáció-elmélet következtetéseivel (ha ez utóbbiban a súlyos tömeget azonosnak vesszük a tehetetlen tömeggel), ezért nem veszítette el a klasszikus gravitáció-elmélet a jelentőségét az általános relativitás-elmélet megjelenésével. A két elmélet közötti kis eltérések — mint a hiány a Merkúr perihélium-vándorlásában (ld. az 1.20 fejezetet), — pontos mérésekkel igazolhatók.

### 1.27. A mozgásegyenlet gyorsuló koordinátarendszerben (tisztá forgás)

Ebben az esetben a vesszős és a vesszőtlen komponensek különböznek egymástól, és ez némileg bonyolultabbá teszi a (99) egyenletek átírását. A görbevonaltú koord. rendszerre történő áttéréshez hasonlóan a Lagrange-módszer ezt a feladatot is jelentősen egyszerűsíti.

A (100) a tisztá forgást végző  $\mathcal{K}'$ -ben is érvényes, csak bonyolultabb lesz az inerciaerő képlete. Mivel az inerciaerő kifejezését akkor is megkapjuk, ha a külső erőt nullának vesszük, ezért induljunk ki egy szabad tömegpont  $\mathcal{K}$ -ban érvényes Lagrange-függvényéből, amely

$$L = \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) = \frac{m}{2}\vec{V}^2.$$

A feladat az, hogy ezt a Lagrange-függvényt kisbetűs mennyiségek vesszős komponensein keresztül fejezzük ki.

A vesszős sebességekre történő átírás (98) alapján történik, ha ez utóbbiban  $\vec{w}$ -n  $\vec{R}$ -t, és — ennek megfelelően —  $\vec{w}'$ -n  $\vec{V}'$ -t értjük:

$$L = \frac{m}{2} \left[ \vec{V}' + (\vec{\omega} \times \vec{R}) \right]^2.$$

Mivel bármely  $\vec{a}$  vektorra igaz, hogy  $\vec{a}^2$  hosszénegyzetét akár  $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ , akár  $a_x'^2 + a_y'^2 + a_z'^2$  alakban felírhatjuk, ezért az  $L$ -ben szereplő négyzet kifejtésénél használhatjuk a vesszős komponenseket.

A kisbetűs mennyiségekre az áttérés az

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_O \quad \vec{V}' = \vec{v}' - \vec{v}'_O$$

képletek segítségével történik:

$$L = \frac{m}{2} \left[ \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}) - \vec{v}'_O - (\vec{\omega} \times \vec{r}_O) \right]^2. \quad (101)$$

Tiszta forgásnál azonban  $O$  és  $O'$  egybeejthető ( $\vec{r}_O = \vec{v}'_O = 0$ ), ezért

$$L = \frac{m}{2} \left[ \vec{v}' + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \right]^2.$$

Az egyszerűség kedvéért korlátozódjunk egyenletes forgásra ( $\vec{\omega} = \text{konstans}$ ), és válasszuk az  $O'Z'$  tengelyt  $\vec{\omega}$ -val párhuzamosnak:

$$\vec{\omega} = (\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}) = (0, 0, \omega).$$

Az  $\vec{r}$  vektor  $\mathcal{K}'$ -beli komponenseit — szokásos módon —  $(x', y', z')$ -vel jelölhetjük. Így

$$(\vec{\omega} \times \vec{r})_{x'} = -\omega y', \quad (\vec{\omega} \times \vec{r})_{y'} = +\omega x', \quad (\vec{\omega} \times \vec{r})_{z'} = 0,$$

és

$$L = \frac{m}{2} \left( \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2 \right) + m\omega(-y'\dot{x}' + x'\dot{y}') + \frac{1}{2}m\omega^2(x'^2 + y'^2).$$

Az ebből kapható Lagrange-egyenletek újra (100) alakúak ( $\vec{F} = 0$ -val), és bennük

$$\vec{F}^* = \vec{F}_c^* + \vec{F}_{cf}^*,$$

ahol

$$\vec{F}_c^* = (2m\omega\dot{y}', -2m\omega\dot{x}', 0) \quad (102)$$

a Coriolis-erő,

$$\vec{F}_{cf}^* = (m\omega^2 x', m\omega^2 y', 0) \quad (103)$$

pedig a centrifugális erő.

### 1.28. A mozgásegyenlet gyorsuló koordinátarendszerben (általános eset)

Ha (101)-ben tetszőleges időfüggésű  $\vec{r}_O$ -t és  $\vec{\omega}$ -t engedünk meg és így származtatjuk le a Lagrange-egyenleteket, akkor az inerciaerő általános kifejezését kapjuk:

$$\begin{aligned} \vec{F}^* = m\vec{a}'_O & - 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}') - m\left(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\right) - m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + \\ & + 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}'_O) + m\left(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_O)\right) + m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_O). \end{aligned} \quad (104)$$

A Coriolis- és a centrifugális erő két-két tag összege:

$$\vec{F}_c^* = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}') + 2m(\vec{\omega} \times \vec{v}'_O) \quad (105)$$

$$\vec{F}_{cf}^* = -m\left(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')\right) + m\left(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'_O)\right), \quad (106)$$

amelyben

$$\vec{v}' = (\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}')$$

a tömegpont sebessége,

$$\vec{v}'_O = (\dot{x}'_O, \dot{y}'_O, \dot{z}'_O) \quad \vec{a}'_O = (\ddot{x}'_O, \ddot{y}'_O, \ddot{z}'_O)$$

pedig az  $O$ -pont sebessége és gyorsulása  $\mathcal{K}'$ -ben.

Vegyük észre, hogy (104)-ben nincs utalás a  $\mathcal{K}$  tengelyeire. Szükség van egy olyan  $O$  referencia-pont mozgásának az ismeretére ( $\vec{r}'_O(t)$ -re), amely valamelyik inerciarendszer origója, valamint az  $\vec{\omega}(t)$  szögsebesség-vektorra. Ezek a (104) segítségével a  $\mathcal{K}'$ -ben nyugvó laboratóriumban *belül* végzett mérések segítségével meghatározhatók anélkül, hogy szükség volna a laboratóriumból "kitekintve" valamilyen tehetetlenségi mozgást végző test megfigyelésére. Ha az emberiség a földfelszín alatt élne és sohasem látná az égboltot, akkor is rájöhetne, hogy lakóhelye keringő és forgó mozgást végez az inerciarendszerekhez képest.

Ha (104)-ben  $\vec{r}'_O$ -t  $(\vec{r}'_O + \vec{b})$ -vel helyettesítjük, amelyben  $\vec{b}$  eleget tesz az

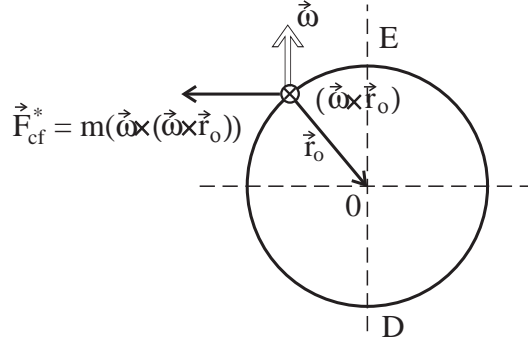
$$m\ddot{\vec{b}}' + 2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{b}}') + m\left(\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{b})\right) + m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{b}) = 0$$

egyenletnek, akkor ezzel  $\vec{F}^*$ -t nem változtatjuk meg. Egy ilyen  $(\vec{r}'_O + \vec{b})$  vektor ugyanis *egy másik inerciarendszer origója*. Az  $\vec{r}'_O$  vektor tehát többféleképpen választható, szemben  $\vec{\omega}$ -val, amely egyértelmű: a  $\mathcal{K}'$  szögsebessége valamennyi inercia-rendszerhez képest egyforma.

**72.Feladat:** Analizáljuk a centrifugális és a Coriolis-erő hatását a földfelszín közelében mozgó testekre (a Föld keringésétől tekintsünk el, és használjuk a 71.feladat  $\mathcal{K}'$ -jét).

**Megoldás:** A centrifugális erő nem függ a tömegpont sebességétől, és a földfelszín közelében, ahol  $r \ll r_O$ , (106) második tagjával egyenlő, amely szerint a forgástengelyre merőlegesen kifelé mutat:





A Coriolis-erő a (105) első tagja, a 71.feladat  $\mathcal{K}'$ -jében ui.  $\vec{v}'_0 = 0$ . Az erő iránya a test mozgásirányától függ: amikor a test távolodik a forgástengelytől, az erő nyugat felé, közeledésnél pedig kelet felé mutat. Egy magas toronyból függőlegesen leejtett test a talapzat *előtt* (attól keleti irányban) ér földet. A  $\mathcal{K}$  inerciarendszer szempontjából ezt úgy interpretáljuk, hogy a torony tetején a kerületi sebesség nagyobb, mint a talapzatnál, és a tehetetlenség törvénye alapján az elejtett test a sebességnek ezt a komponensét megtartja (a gravitációs erő iránya erre merőleges). A Földhöz rögzített koordinátarendszerből nézve a test mozgása azért nem pontosan függőleges, mert keleti irányba mutató Coriolis-erő hat rá.

Amikor a test a  $\phi = \textit{konstans}$  szélességi körön mozog az  $O'$  forgásával megegyező irányban, a Coriolis-erő a forgástengelyre merőlegesen kifelé mutat. Ez az erőhatás a centrifugális erő növekedéseként is felfogható (a test szögsebessége  $\omega$ -nál nagyobb). Ellenkező irányú mozgásnál az erő a forgástengely felé mutat.♣

73.Feladat: Milyen szögsebességgel forog a Foucault-inga lengési síkja a  $\phi$  földrajzi szélességen?

Megoldás: A sarkokon ( $\phi = \pm 90^\circ$ ) a lengési sík nyugat felé forog a Föld  $\omega = 2\pi/\text{nap}$  szögsebességével<sup>18</sup>. A Földdel együtt forgó  $\mathcal{K}'$ -ben a lengési sík elfordulása a Coriolis-erő hatása, de az állócsillagokhoz rögzített  $\mathcal{K}$  inerciarendszerből nézve annak következménye, hogy a lengési sík állandó helyzetű.

Legyen most az inga valamilyen tetszőlegesen választott  $\phi$  szélességen. Az inga felfüggesztési pontján áthaladó lokális merőlegesnek (az inga tengelyének) az irányát jelöljük  $\vec{n}$ -el. A lengési sík körül a tengely körül forog, ezért a Föld  $\vec{\omega}$  szögsebességének az az  $\vec{\omega}_{\parallel}$  komponense okozza, amely  $\vec{n}$ -el párhuzamos. Nyilván

$$\vec{\omega}_{\parallel} = \omega \sin |\phi| \cdot \vec{n}.$$

Ezzel a szögsebességgel forog a lengési sík a  $\phi$  szélességen. Az  $\vec{\omega}$  másik,  $\vec{n}$ -re merőleges  $\vec{\omega}_{\perp}$  komponense magát az  $\vec{n}$  irányt fordítja el, de ez a mozgás a lengési sík Földhöz viszonyított helyzetében nem okoz változást.

<sup>18</sup>A Föld keringésétől eltekintünk.

A fenti gondolatmenet talán szemléletesebbé válik, ha a Földhöz rögzített  $\mathcal{K}'$  szempontjából adjuk elő. Ebben a rendszerben az égbolt  $-\vec{\omega} = \text{konstans}$  szögsebességgel forog. A forgás a Sarkcsillag körül történik, de felbonthatjuk két olyan forgás összegére, amelyik közül az egyiknek az  $\vec{n}$  lokális merőleges irány a tengelye. Ennek a komponensnek a szögsebessége  $-\vec{\omega}_{\parallel}$ . A  $\mathcal{K}'$ -höz viszonyítva ezzel a szögsebességgel forognak a csillagok  $\vec{n}$  (a zenit) körül, és az inga lengési síkja együtt forog velük, hiszen megtartja helyzetét hozzájuk képest.

A szögsebesség másik,  $-\vec{\omega}_{\perp}$  komponense azonban a csillagos eget úgy forgatja, hogy az égboltnak folyamatosan más és más pontja kerül a zenitbe. Az inga ebben a mozgásban természetesen nem vehet részt, hiszen a tengelye, amely a zenit felé mutat, rögzítve van a Földhöz. Az égbolt forgásának a két komponense tehát különböző hatással van az ingára, és erre vezethető vissza az a meglepő tény, hogy ( $\phi = 0, \pm 90^\circ$  kivételével) a lengési sík 24 óra eltelte után nem ugyanazt a helyzetet foglalja el a csillagokhoz képest ( $\omega_{\parallel} < \omega$ ), mint 24 órával korábban.

Az inga mozgása a Föld forgása következtében azonban elég bonyolult, és emiatt a fenti egyszerű gondolatmenetet esetleg nem érezzük elég meggyőzőnek. Célszerű ezért a feladatot az inga mozgásegyenlete alapján is megoldani.

Válasszuk  $\mathcal{K}'$ -t a 71.feladat szerint és legyen az inga felfüggesztési pontja az  $O'Z'$  tengelyen a kötélnél hossz magasságában. Kis amplitúdójú lengésekre korlátozódva feltehetjük, hogy az ingán lógó tömeg az  $O'X'Y'$  síkban az origó közvetlen közelében mozog. Az inga lengési frekvenciája legyen  $\omega_0$ , a Föld forgási periódusa  $T = 1$  nap, és nyilván  $\omega_0 \gg \frac{2\pi}{T} \equiv \omega$ .

A mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}' &= -m\omega_0^2 x' + F_{x'}^* \\ m\ddot{y}' &= -m\omega_0^2 y' + F_{y'}^*. \end{aligned}$$

A jobboldalon nem szükséges figyelembe venni a centrifugális erő járulékát, mert az csak az inga nyugalmi helyzetét módosítja: nyugalmi állapotban a kötél nem pontosan párhuzamos az  $O'Z'$  tengellyel, hanem a negatív  $Y'$  tengely egy  $O'$ -höz közeli pontjára mutat. A lengési sík elfordulását a Coriolis-erő okozza, amelyet (102)-ből vehetünk. A  $v'_{z'} = 0$  figyelembevételével

$$\begin{aligned} m\ddot{x}' &= -m\omega_0^2 x' + 2m\omega \sin \varphi \cdot \dot{y}' \\ m\ddot{y}' &= -m\omega_0^2 y' - 2m\omega \sin \varphi \cdot \dot{x}'. \end{aligned}$$

Vezessük be a  $z = x' + iy'$  komplex kitérést, amelynek a keresett függvények a valós és a képzetes részei. Ha a második egyenletet  $i$ -vel megszorozzuk és a két egyenletet összeadjuk, akkor az

$$m\ddot{z} = -m\omega_0^2 \dot{z} - 2im\omega \sin \varphi \cdot \dot{z}$$

egyenletre jutunk, amely a  $w = \omega \sin \varphi$  jelölés bevezetése után a

$$\ddot{z} + 2iw\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

konstans együtthatójú homogén közönséges diff. egyenletre vezet. Ennek partikuláris megoldásait  $z = e^{ist}$  alakban kell keresni, amelyben  $s$  az

$$s^2 + 2ws - \omega_0^2 = 0$$

algebrai egyenletet két  $s_{\pm}$  megoldása:

$$s_{\pm} = -w \pm \sqrt{w^2 + \omega_0^2}.$$

Mivel  $\omega_0 \gg \omega \geq w$ , a  $w$ -ben lineáris pontossággal

$$s_{\pm} = -w \pm \omega_0.$$

A két partikuláris megoldás tehát  $z_{\pm} = e^{is_{\pm}t}$ . Ezeknek a komplex partikuláris megoldásoknak az

$$\begin{aligned} x'_+ &= \cos s_+ t = \cos(\omega_0 - w)t & y'_+ &= \sin s_+ t = \sin(\omega_0 - w)t \\ x'_- &= \cos s_- t = \cos(\omega_0 + w)t & y'_- &= \sin s_- t = -\sin(\omega_0 + w)t \end{aligned}$$

valós partikuláris megoldások felelnek meg, amelyek egységnyi sugarú körmozgásokat írnak le az  $O'X'Y'$  síkban: a + indexű megoldás  $(\omega_0 - w)$  körfrekvenciával pozitív irányban, a - indexű megoldás  $(\omega_0 + w)$  körfrekvenciával negatív irányban forog.

Mivel  $w \ll \omega_0$ , induljunk ki a  $w = 0$  határesetből (nyugvó Föld) és tegyük fel, hogy az inga ekkor az  $X'$  tengely mentén leng. Ezt a megoldást úgy nyerjük, hogy a két partikuláris megoldást ugyanazzal az  $A/2$ -vel szorozva összeadjuk:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{A}{2}(x'_+ + x'_-) = A \cos \omega_0 t \\ y' &= \frac{A}{2}(y'_+ + y'_-) = 0. \end{aligned}$$

Ha figyelembe vesszük, hogy  $w \neq 0$ , erre a megoldástípusra az

$$\begin{aligned} x' &= \frac{A}{2}[\cos(\omega_0 - w)t + \cos(\omega_0 + w)t] = A \cos wt \cdot \cos \omega_0 t \\ y' &= \frac{A}{2}[\sin(\omega_0 - w)t - \sin(\omega_0 + w)t] = -A \sin wt \cdot \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

képleteket kapjuk. Ez egy olyan  $\omega_0$  körfrekvenciájú lengés, amelynek síkja  $\alpha = -wt$  szöveget zár be az  $O'X'$  tengellyel: az inga síkja tehát  $|w| = \omega|\sin \phi|$  körfrekvenciával forog az  $O'Z'$  körül, ahogy állítottuk.♣

Hangsúlyozzuk, hogy az inerciaerő kifejezésében  $\vec{\omega}$  nem a tömegpont, hanem a koordinátarendszer szögsebessége és ezért inerciarendszerben nem lép fel se centrifugális erő, se Coriolis-erő (egyáltalán semmiféle inerciaerő). Ennek ellenére a centrifugális

erő kifejezést szokás akkor is használni, amikor a mozgást inerciarendszerben tárgyaljuk, és ezt mi is megtettük (ld. az 1.8, 1.19 fejezetet és az 56.feladatot). A következő feladat mutatja, miért jogos ez a beszédmód.

74.Feladat:  $m$ -tömegű tömegpontot centrális erő vonz a  $\mathcal{K}$  inerciarendszer origójához, amelynek hatása alatt mozog az  $OXY$  síkban. Az origóban állva úgy forgunk az  $OZ$  tengely körül, hogy a tömegpontot állandóan magunk előtt látjuk  $\rho$  távolságban, amely függ  $t$ -től. Írjuk fel a  $\rho$ -ra vonatkozó mozgásegyenletet.

Megoldás: A megfigyelő, aki a tömegpontot állandóan maga előtt látja, a  $\mathcal{K}'$ -ben nyugszik. Az  $O'$  essen egybe  $O$ -val, az  $O'Z'$  pedig az  $OZ$ -vel, és a pozitív  $O'X'$  tengely mutasson állandóan a tömegpont felé. Akkor a  $\mathcal{K}'$  rendszer

$$\vec{\omega} = (\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}) = (0, 0, \dot{\varphi})$$

szögsebességgel forog az  $O'Z'$  körül, ahol  $\varphi$  a tömegpont azimuttszöge  $\mathcal{K}$ -ban. A tömegpont koordinátája  $\mathcal{K}'$ -ben

$$\vec{r} = (x', y', z') = (\rho, 0, 0),$$

ahonnan

$$\vec{v}' = (\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}') = (\dot{\rho}, 0, 0)$$

$$\vec{a}' = (\ddot{x}', \ddot{y}', \ddot{z}') = (\ddot{\rho}, 0, 0).$$

A (105), (106) alapján ekkor

$$\vec{F}_c^* = (0, -2m\dot{\varphi}\dot{\rho}, 0), \quad \vec{F}_{cf}^* = (m\rho\dot{\varphi}^2, 0, 0).$$

Mivel azonban  $\dot{\vec{\omega}} \neq 0$ , (104) negyedik tagját is figyelembe kell venni:

$$-m(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) = (0, -m\rho\ddot{\varphi}, 0).$$

Természetesen a komponensek az erők képleteiben is  $\mathcal{K}'$ -re vonatkoznak.

Az  $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}^*$  mozgásegyenlet  $x'$ ,  $y'$  komponensei

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\rho} &= F_\rho + m\rho\dot{\varphi}^2 \\ 0 &= -2m\dot{\varphi}\dot{\rho} - m\rho\ddot{\varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

míg a  $z'$  komponens  $0 = 0$ -t ad. Ezek az egyenletek *azonosak az inerciarendszerben polárkoordinátákban kapható egyenletekkel* (ld. az 1.8 fejezetet, amelynek képleteiben centrális erőnél  $F_\varphi = 0$ ). Ez az egybeesés feljogosít arra, hogy a radiális egyenlet  $m\rho\dot{\varphi}^2$  tagját centrifugális erőnek nevezzük, tekintet nélkül az egyenlet levezetési módjára.♣

## 1.29. Relatív és abszolút mozgás

A Galilei-féle relativitási elv szerint *a testek pillanatnyi sebessége relatív*: izolált test szemlélése (kísérleti megfigyelése) alapján nem lehet megállapítani, hogy a test sebessége éppen mekkora. Ha a természet kitüntetne egy meghatározott vonatkoztatási rendszert ("abszolút vonatkoztatási rendszer") a számtalan közül, akkor célszerű és természetes volna sebességen az abszolút vonatkoztatási rendszerhez képesti sebességet érteni ("abszolút sebesség"). Ezt a sebességet egy adott testre adott pillanatban minden megfigyelő ugyanannak találná, hiszen — mivel a természeti törvények *kitüntetnék* ezt a vonatkoztatási rendszert, — kísérleti úton bárki meg tudná állapítani a saját sebességét hozzá képest.

A valóságban végtelen sok olyan vonatkoztatási rendszer van — az inerciarendszerek —, amelyek minden fizikai jelenség szempontjából egyenértékűek, és ezek különféle konstans sebességgel mozognak egymáshoz képest. Semmilyen természeti törvény felhasználásával sem lehet megmondani, melyikhez *kell* viszonyítani a vizsgált test sebességét. *Emberi törvények* alapján persze megmondhatnánk, és kötelezhetnénk mindenkit arra, hogy pl. kizárólag a Naphoz rögzített rendszerhez *szabad* vonatkoztatnia minden sebességet. De ez nagyon megtévesztő volna, mert háttérben maradna az a *természeti törvény*, hogy — ha engednék, — nyugodtan *lehetne* más vonatkoztatási rendszert választani.

Ha ugyanezt a meggondolást a gyorsulásra alkalmazzuk, akkor azt találjuk, hogy *a testek pillanatnyi gyorsulása abszolút*: az izolált test szemlélése alapján meg lehet állapítani, hogy a test gyorsulása mekkora anélkül, hogy ki kellene választanunk egy bizonyosat az inerciarendszerek közül. Az inerciarendszerek ugyanis nem gyorsulásban, hanem csupán állandó sebességben különböznek egymástól és ezért a testek gyorsulása mindegyikre nézve ugyanaz.

A gyorsulás csak akkor lenne relatív, ha az általános, egymáshoz képest gyorsuló mozgást végző vonatkoztatási rendszerek is egyenértékűek lennének minden fizikai jelenség szempontjából. De ilyen egyenértékűség már a mechanikai jelenségek körén belül sem áll fenn. A gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben inerciaerők működnek, amelyek inerciarendszerekben nem lépnek fel. Az inerciaerők hatása alapján képesek vagyunk megállapítani, hogy vonatkoztatási rendszerünk gyorsul, sőt, kísérletileg meg is tudjuk határozni a gyorsulását. Galilei hajóján minden jelenség határozottan másképpen játszódna le a felgyorsulás és a fékeződés szakaszaiban, mint amikor a hajó egyenletesen halad. Foucault az ingakísérletével éppen azt bizonyította be, hogy a Föld és az égbolt egymáshoz viszonyított forgása valójában egyáltalán nem relatív, hanem határozottan a Föld az, amely 24 óra alatt megfordul a saját tengelye körül. A Föld szögsebessége — és a szögsebesség általában, — *abszolút értelemben* annyi amennyi (az egységrendszer megválasztása után), mert minden inerciarendszerben pontosan ugyanannyi.

Ez a tény Newton számára tökéletesen világos volt. A Principiában ezt olvassuk:

Az abszolút és a relatív mozgás hatásában rejlő különbség abban az

erőben jelentkeznek, amellyel a test eltávolodni igyekszik a forgástengelytől. Relatív körmozgás esetében ilyen erő nincsen, de valódi és abszolút körmozgásnál ez az erő a mozgásmennyiséggel arányosan, nagyobb vagy kisebb. Erősítsünk egy edényt hosszú zsinag végére, és csavarjuk körbe a zsinaget, míg egészen merev nem lesz. Ezután töltsük meg az edényt vízzel és hozzuk mindkettőt nyugalomba. Ha most hirtelen valamilyen erő ellenkező irányú forgásba hozza a zsinaget, akkor az visszacsavarodik, és hosszú ideig az edény is követi ezt a mozgást. A víz felszíne eleinte vízszintes marad, akárcsak az edény mozgása előtt. Később azonban az edény lassanként erőt fejt ki a vízre, és a vizet arra kényszeríti, hogy forgásba jöjjön. A víz fokozatosan távolodik el a forgás középpontjától, és felmászik az edény falára, végül is a felszíne homorú alakot vesz fel. (Ezt a kísérletet magam is elvégeztem.) Amint a forgás gyorsul, a víz mind magasabbra emelkedik. A víz forgásának periódusa megegyezik az edény forgásának periódusával, és így a víz, az edényhez képest, relatív nyugalomba kerül. A víznek a felemelkedése azt mutatja, hogy a víz igyekszik eltávolodni a forgástengelytől. Éppen ennek a törekvésnek segítségével ismerhető fel és mérhető meg a víz valódi és abszolút körmozgása, amely különbözik a víz relatív mozgásától. Amidőn az edényben levő víz relatív mozgása a legerőteljesebb, ez a mozgás nem okoz semmiféle eltávolodást a tengelytől; a víz nem igyekezett elérni az edény peremét, nem mászott fel az edény falára, hanem a felülete vízszintes maradt, és a víz valódi körmozgása még nem kezdődött meg. Amint azonban csökkenni kezdett a víz relatív mozgása, az edény falára való felmászása azt a törekvést árulja el, hogy igyekszik a forgástengelytől eltávolodni. Ez azt jelenti, hogy a víz valódi körmozgása állandóan erősödik, míg végül eléri legnagyobb értékét, amikor is a víz, az edényhez képest, relatív nyugalomba kerül. Ez a törekvés független a víznek a környező testekhez viszonyított elmozdulásától. Ezért a valódi körmozgást nem magyarázhatjuk ilyenféle elmozdulások segítségével. Valamely forgásban levő test valódi körmozgása egyedül egy sajátos és megfelelő törekvésnek a hatására jön létre. A környező testekkel való változatos összefüggések következtében azonban a relatív mozgások száma meghatározhatatlan.

Heinrich László fordítása

A szögsebesség (általában a gyorsulás) abszolút jellegéből arra lehet következtetni, hogy egy test forgómozgása abban a hipotetikus esetben is megállapítható volna, ha a Világegyetemben más testek egyáltalán nem is léteznének. A Föld szögsebesség vektora tisztán földi kísérletben — pl Foucault-ingával — pontosan megállapítható. Jelenlegi fizikai tudásunk alapján semmi sem szól az ellen, hogy ugyanennek kelletne történnie, ha az égitestek másképpen helyezkednének el a Világegyetemben, ha kevesebben lennének, vagy — határesetben —, ha a Földön kívül nem is léteznének más égitestek.

Az absztrakciónak ezen a szélső pontján azonban tiltakozni kezd a geometrián nevelődött szemlélet. G.Berkeley ír filozófus, Newton fiatalabb kortársa például így vélekedik:

...egy test valódi helyét nem szabad úgy definiálnunk, mint az abszolút térnek azt a részét, amelyet elfoglal; sem pedig a test igazi vagy abszolút mozgását úgy, mint valódi vagy abszolút helyének megváltozását. Ugyanis minden hely és minden mozgás egyaránt viszonylagos. Még nyilvánvalóbb lesz ez, ha leszögezzük, hogy semmiféle mozgás nem fogható fel valamilyen determináció vagy irány nélkül, ez pedig csak úgy fogható fel, ha a mozgó testen kívül felfogjuk ugyanakkor saját testünknek vagy más testnek a létezését is. Mert a *felfelé, lefelé, balra és jobbra*, valamint az összes helyek és irányok valamilyen viszonyon alapulnak, és szükségképpen feltételeznek egy olyan testet, amely különbözik a mozgó testtől. Így, ha feltételezzük, hogy az összes testek megsemmisültek, és például csak egyetlen gömb létezik magában, akkor ennek semmiféle mozgását nem lehetne felfogni; szükségképpen lennie kell tehát egy másik testnek, amelynek helyzete által a mozgás meghatározható. E nézet igazsága tüstént a legnyilvánvalóbbá válik, mihelyt következetesen végrehajtjuk az összes testek feltételezett megsemmisítését, beleértve saját testünkét és a többiekét is, kivéve a magányos gömböt.

Fehér Márta fordítása

150 évvel később E.Mach osztrák fizikus és filozófus azonban rámutatott arra, hogy az abszolút gyorsulás és a belőle származó paradoxonok elkerülése csak egy új, a newtonitól különböző mechanika alapján lehetséges:

Természetesen gondolhatjuk azt, hogy a Föld forog a tengelye körül, de azt is, hogy a Föld nyugszik, és az állócsillagok keringenek körülötte. Geometriailag ez a két eset tökéletesen ugyanazt jelenti — a Föld és az állócsillagok viszonylagos forgását egymáshoz képest. De ha azt mondjuk, hogy a Föld nyugszik és az állócsillagok forognak körülötte, akkor miből ered a Föld lapultsága, a Foucault-kísérlet és még sok más jelenség, ha a tehetetlenség szokásos törvényéből indulunk ki? Ezt a nehézséget két úton lehet elkerülni. Vagy abszolútnak kell tekintenünk minden mozgást, vagy nem jól értjük a tehetetlenség törvényét. Nekem jobban tetszik ez a második változat. A tehetetlenség törvényének olyan formáját kell megtalálnunk, amely mind az első, mind a második nézőpontból ugyanarra a következtetésre vezet. Ehhez azonban figyelembe kell venni a Világegyetemben mindenütt létező tömegeket.

Azt a hipotézist, amely szerint a testek tehetetlensége *itt* valamilyen módon összefügg a Világegyetemben fellelhető tömegekkel és emiatt a gyorsulás is relatív, *Mach-elvnek* nevezzük. Egy olyan mechanika szerint, amely összhangban van a Mach-elvvel,

a Földhöz rögzített és az állócsillagokhoz rögzített koordinátarendszer tökéletesen egyenértékű volna: mindkettőben ugyanaz a mozgásegyenlet volna érvényes, mert nem különböztetnék meg inerciaerők az egyiket a másiktól. Az állócsillagokhoz képest nyugvó rendszerben végzett számítás szerint a Föld azért lenne belapult, mert forog és darabjainak centripetális gyorsulása a belapultság következtében fellépő rugalmas centripetális erővel kapcsolatos (arányos vele). A Földhöz rögzített rendszerben sem lenne szükség inerciaerőre a belapultság magyarázatához, mert azt az állócsillagok forgásából származó valódi erő okozná. Ha egy ilyen elméletben megpróbálnánk azt a (hipotetikus) esetet tárgyalni, hogy a Földön kívül nem létezik semmiféle más objektum, vagy azt kellene találnunk, hogy ez a feltevés ellentmondásokra vezet az elméleten belül és ezért elvileg nem realizálható, vagy pedig azt, hogy az egymáshoz képest forgó rendszerekben nyugvó Föld egyikben sem belapult és a Foucault-inga síkja sem forogna egyikben sem. Ennek az elméletnek a fényében a dinamikai jelenségek megengednék, hogy az anyagi testek valóságos forgását éppúgy relatívnak tekintsük, mint a geometria anyagtalán objektumainak képzeletbeli forgását.

Ma nem létezik olyan érvényes fizikai elmélet, amely maradéktalanul eleget tenne a Mach-elvnek. Einstein általános relativitás-elmélete a newtoni mechanikát egészen új megvilágításba helyezte, de a Mach-elvnek csak bizonyos elemeit foglalja magába: forgó  $m$  tömegű gömbhéj középpontjában elhelyezett Foucault-ingára *hat* Coriolis-erő, de a magányosan forgó Földön végzett Foucault-kísérlet az általános relativitás-elmélet szerint is pozitív eredményt adna.

\*

A következő néhány fejezetben a Hamilton-mechanika (kanonikus elmélet) alapjait ismertetjük. Vázzuk az adiabatikus invariánsok általános elméletét, amely a kvantumelmélet tárgyalásának fontos kiindulópontja.

### 1.30. A konfigurációs tér és a fázistér

Egy  $n$  szabadsági fokú rendszer trajektóriáját (1.1 fejezet) a

$$q_i = f_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

függvényekkel adjuk meg. A  $q_i$ -k összeségét *konfigurációnak* nevezzük: egy rendszer konfigurációját akkor ismerjük egy adott pillanatban, ha ismerjük az összes koordináta értékét. Ha elképzelünk egy  $n$ -dimenziós teret és benne egy  $n$ -dimenziós Descartes-rendszert, amelynek az egyes tengelyein a  $q_1, q_2, \dots, q_n$  koordinátákat mérjük fel, akkor a rendszer minden konfigurációjának megfeleltethetünk egy pontot ebben a térben: azt, amelynek a koordinátái az adott konfigurációhoz tartozó  $q_i$ -k. Ezt a teret *konfigurációs térnek* nevezzük.

Ahogy az idő telik, a rendszer konfigurációja folyamatosan változik, a konfigurációnak megfelelő pont egy görbét ír le a konfigurációs térben. Ezt a görbét neveztük az 1.1 fejezetben pályának. Legyen  $t$  és  $t + \Delta t$  között a  $q_i$  megváltozása  $\Delta q_i$ -vel



egyenlő: a  $\Delta q_i$ -k annak a vektornak a komponensei, amely a pálya  $t$ -hez tartozó pontjából a  $t + \Delta t$ -hez tartozó pontjába mutat. Természetesen ugyanilyen irányú a  $\frac{\Delta q_i}{\Delta t}$  komponensű vektor is. Amikor  $\Delta t \rightarrow 0$ , ez a vektor a  $t$ -beli érintő irányához tart, a komponensek pedig a  $\dot{q}_i$  sebességekhez: ez a "konfiguráció mozgási sebessége" a pályán.

A konfigurációs tér minden pontján az adott rendszer végtelen sok lehetséges pályája halad keresztül. A mozgásegyenletek ui. időben másodrendű diff. egyenletek, amelyeknek a megoldását csak a  $q_i$ -k és a  $\dot{q}_i$  egyidejű megadása rögzíti.

Vegyük fel most gondolatban egy  $2n$  dimenziós teret és benne egy  $2n$ -dimenziós Descartes-rendszert, amelynek a tengelyeire a  $q_i$ -ket és a hozzájuk tartozó (általánosított)  $p_i$  impulzusokat mérjük fel. Ezt a teret *fázistérnek* vagy *állapottérnek* nevezzük, a  $q_i$ -k és a  $p_i$ -k összességét pedig *állapotnak*: a rendszer állapotát akkor ismerjük, ha ismerjük az összes koordináta és impulzus értékét. A rendszer adott állapotának a fázistérben azt a pontot feleltethetjük meg, amelynek koordinátái az adott állapothoz tartozó  $q_i$ -k és  $p_i$ -k.

Egy  $n$  szabadsági fokú rendszer *fázisrajektóriáját* a

$$\left. \begin{array}{l} q_i = f_i(t) \\ p_i = g_i(t) \end{array} \right\} i = 1, 2, \dots, n$$

függvényekkel adjuk meg. Ahogy az idő telik, a rendszer állapota folyamatosan változik, az állapotoknak megfelelő fázispont pedig egy görbét ír le a fázistérben, amelyet *fázispályának* nevezünk (gyakran azonban ezt is fázisrajektóriának mondják). A  $\dot{q}_i(t)$ ,  $\dot{p}_i(t)$  komponensekkel rendelkező vektor — a fázispont sebessége — a  $t$  paraméterű pontban érinti a fázispályát.

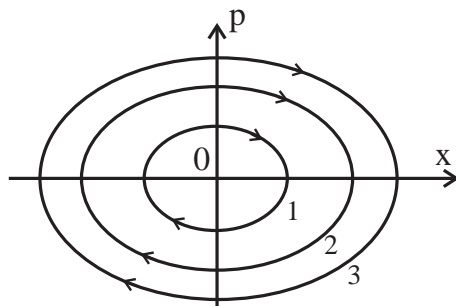
A fázistér minden pontján *egyetlen* fázispálya halad keresztül. Ennek az az oka, hogy a fázispont megadásával a mozgásegyenletek megoldásához szükséges *összes* kezdeti feltételt rögzítjük, ugyanis az impulzusok és a sebességek kölcsönösen meghatározzák egymást. Ennek következtében a lehetséges mozgások áttekintése a fázistérben könnyebb, mint a konfigurációs térben, annak ellenére, hogy ez utóbbi kétszer kisebb dimenziójú.

75. Feladat: Ábrázoljuk a súrlódásmentes lineáris harmonikus oszcillátor szabad mozgásának a fázispályáit.

Megoldás: A szabad mozgás Lagrange-függvénye  $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$ , ahonnan  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$ . A lehetséges fázisrajektóriák egyenlete

$$\begin{array}{l} x = A \cdot \cos(\omega t + \alpha) \\ p = -m\omega A \cdot \sin(\omega t + \alpha). \end{array}$$

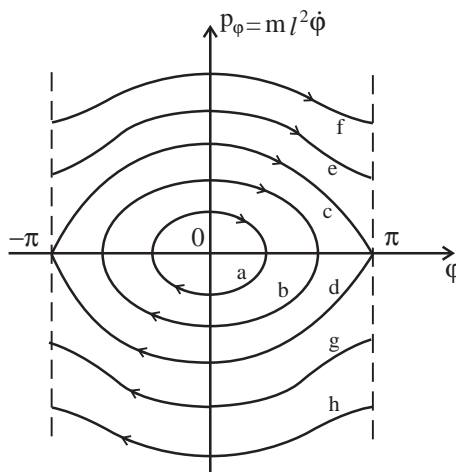
Az  $x, p$  fázissíkban ( $n = 1$ -nél a fázistér egy fázissíkra redukálódik) ez egy ellipszis paraméteres egyenlete: az  $x$ -irányú féltengely hossza  $A$ , a  $p$ -irányúé  $m\omega A$ :



A fázispályákon a nyíl irányát az határozza meg, hogy  $p > 0$ -nál  $x$  nő,  $p < 0$ -nál csökken. Az 1, 2, 3 pályák  $E_1 < E_2 < E_3$  energiájú rezgéseket ábrázolnak. A nyugalmi helyzetnek az  $O$  origó felel meg. ♣

76.Feladat: Ábrázoljuk a síkinga fázispályáit.

Megoldás: A síkinga mozgásait az 61.feladatban diszkutáltuk, amelynek alapján felrajzolhatók a tipikus fázispályák:



A  $\varphi, p_\varphi$  fázissík a  $\varphi$  irány mentén a  $-\pi < \varphi \leq \pi$  "csíkra" korlátozódik — a  $\varphi$  és a  $\varphi + 2n\pi$  ( $n$  tetszőleges egész) ugyanis azonos konfigurációt ír le. A  $(-\pi, p_\varphi)$  és a  $(+\pi, p_\varphi)$  koordinátájú pontok tehát minden  $p_\varphi$ -nél *azonosnak* tekintendők, és ezért az *összes* fázispálya — az  $e, f, h, g$ -t is beleértve — *zárt* görbe. Pontosabb — és szemléletesebb — ebben az esetben fázissík helyett fázishengerrel dolgozunk, amit úgy kapunk, hogy a  $-\pi < \varphi < \pi$  csíkot kivágjuk, majd a  $\varphi = -\pi$  és a  $\varphi = +\pi$  egyenesek mentén összeragasztjuk.

Az  $a$  és  $b$  korlátos mozgások fázispályái. Határesetként ide tartozik az  $O$  origó, amikor az inga az alsó egyensúlyi helyzetben nyugszik. Az  $e$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $h$  pályák végtelen mozgást írnak le (de zárt görbék): az inga teljes forgásokat végez pozitív ( $e$ ,  $f$  pálya), ill. negatív ( $g$ ,  $h$  pálya) irányban. A  $c$  és  $d$  pályából összetett görbe a *szeparatrix*, mert ez választja szét a korlátos és a végtelen mozgások tartományát. A szeparatrix bármely pontjából indulva a rendszer *végtelen hosszú ideig* (a 61.feladatban ekkor  $\Phi = \pi$  és  $T = \infty$ ) közeledik a felső (instabil) egyensúlyi helyzethez, amely a fázissík  $\varphi = \pi$ ,  $p_\varphi = 0$  pontja. Ez a pont maga egy külön pálya, amelyen a rendszer — elvben — végtelen hosszú ideig megmaradhat. ♣

77.Feladat: Ábrázoljuk a bolygómozgás fázispályáit.

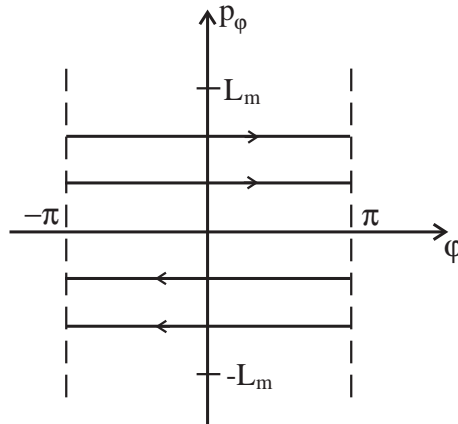
Megoldás: A fázistér dimenziója  $2n = 4$ , ezért a fázispályáknak csak a  $\varphi$ ,  $p_\varphi$  és az  $r$ ,  $p_r$  fázissíkokra vetett *vetületeit* tudjuk lerajzolni. A Kepler-problémában

$$L_{rel} = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\gamma m_1 m_2}{r},$$

ahonnan

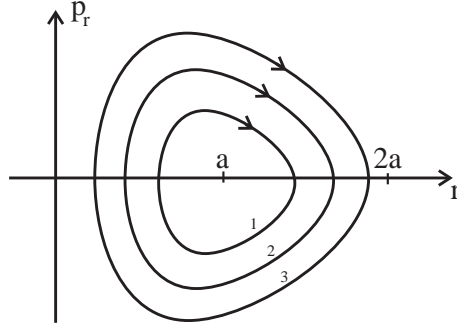
$$p_r = \mu\dot{r} \quad p_\varphi \equiv L_z = \mu r^2 \dot{\varphi}.$$

Rögzítsük az  $E$ -t egy negatív értéknél. Az 54.feladat kapcsán tisztáztuk, hogy ekkor  $p_\varphi$  a  $(-L_m, +L_m)$  intervallumban változhat, ahol  $L_m^2 = \frac{\mu(\gamma m_1 m_2)^2}{2|E|}$ . Mivel  $\varphi$  ciklikus változó,  $p_\varphi$  mozgásállandó, ezért a  $\varphi$ ,  $p_\varphi$



fázissíkban a fázispályák vetületei a  $p_\varphi = konst$  zárt egyenesek a  $-\pi < \varphi \leq \pi$  tartományban.

Az  $r$ ,  $p_r$  síkon a vetületek zárt görbék, amelyek az  $r_{min}$ ,  $r_{max}$  fordulópontokban metszik az  $r$ -tengelyt:



Az 54.feladatban láttuk, hogy rögzített  $E < 0$ -nál a nagytengely hossza adott, ezért az  $r_{min} + r_{max} = 2a$  összeg mindegyik pályára azonos. Az 1, 2, 3 pályákon  $|p_{\varphi 1}| > |p_{\varphi 2}| > |p_{\varphi 3}|$ . Az  $r = a$ ,  $p_r = 0$  pont a körpályának felel meg, amelyen  $|p_{\varphi}| = L_m$ . A pálya egyenlete a 1.19.fejezet  $\frac{dr}{d\varphi}$  képlete alapján

$$p_r = \mu \dot{r} = \pm \frac{\mu^2 r^2}{p_{\varphi}} \sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E + \frac{\gamma m_1 m_2}{r} \right) - \frac{p_{\varphi}^2}{\mu^2 r^2}} \cdot \dot{\varphi} = \pm \sqrt{2\mu \left( E + \frac{\gamma m_1 m_2}{r} \right) - \frac{p_{\varphi}^2}{r^2}},$$

amely a Kepler-probléma képleteinek a segítségével a

$$p_r = \pm \sqrt{\mu \gamma m_1 m_2} \sqrt{\frac{2a-r}{ra} - \frac{p}{r^2}} \quad (0 \leq p \leq a)$$

alakban is írható ( $p$  a fokális paraméter).♣

### 1.31. A kanonikus- vagy Hamilton-egyenletek

A címbeli egyenletek a fázistérben felírt mozgásegyenletek. Mikor mondhatjuk azt, hogy ismerjük egy rendszer mozgástörvényét a fázistérben? Nyilván akkor, ha meg tudjuk mondani, hol lesz a fázispont a  $t+dt$  pillanatban, ha  $t$ -ben a fázistér  $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n \equiv q, p$  koordinátájú pontjában tartózkodott. Ez azért lehetséges, mert a *fázispályát* már egyetlen pontja meghatározza (adott dinamikai rendszerre).

A fáziskoordináták megváltozása  $dt$  idő alatt legyen  $dq_1, \dots, dq_n, dp_1, \dots, dp_n \equiv dq, dp$ . Ezek arányosak  $dt$ -vel:

$$\left. \begin{aligned} dq_i &= A_i(q, p) \cdot dt \\ dp_i &= B_i(q, p) \cdot dt \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n).$$

Az  $A_i$ ,  $B_i$  koefficiensek azért függenek a  $q, p$  koordinátáktól, mert a  $dt$  idő alatti elmozdulás nagysága és iránya a fázistér különböző pontjaiból természetesen más és más.

A rendszer dinamikáját akkor ismerjük a fázistérben ha ismerjük az  $n$  drb  $A_i(q, p)$  és az  $n$  drb  $B_i(q, p)$  függvényt, mert ekkor fel tudjuk írni a

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= A_i(q, p) \\ \dot{p}_i &= B_i(q, p) \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n). \quad (108)$$

*mozgásegyenleteket.* Ezeket megoldani annyit jelent, mint megtalálni az időnek azt a  $2n$  drb

$$\left. \begin{aligned} q_i &= f_i(t; C_1, \dots, C_{2n}) \\ p_i &= g_i(t; C_1, \dots, C_{2n}) \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

függvényét, amelyek  $2n$  önkényesen választható  $C_i$  konstansot tartalmaznak és olyanok, hogy ha (108)-ba visszahelyettesítjük őket, azonosságokat kapunk.

Amikor a rendszer dinamikája jellemezhető Lagrange-függvénnyel, az  $A_i$ ,  $B_i$  koeficiens-függvények is leszámaztathatók egyetlen függvényből, a  $H(q, p)$  *Hamilton-függvényből*, amely az energiának — a sebességek helyett — az *impulzusokon* keresztül kifejezett alakja. Ekkor  $A_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ ,  $B_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$  és így a (108) egyenletek a

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, n). \quad (110)$$

alakot öltik. Ezek a *kanonikus-* vagy *Hamilton-egyenletek.* A  $q, p$  változópárt — a  $q, \dot{q}$ -val szemben — *kanonikus változóknak* nevezzük.

A (110) bizonyításához induljunk ki az energia (43) alakjából és  $E$  helyett használjuk a  $H$  jelölést, számítva arra, hogy az energiát a kanonikus változókon keresztül kell majd kifejezni. Eszerint

$$H = \sum_{i=0}^n \dot{q}_i p_i - L, \quad (111)$$

ahol

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (112)$$

Adjunk most a  $q_i$ -khez és a  $p_i$ -khez *tetszőleges*  $\Delta q_i$ ,  $\Delta p_i$  növekményt. Ezzel a  $\dot{q}_i$ -k is meghatározott növekményt kapnak, amelyet (112)-ből határozhatnánk meg (de a konkrét alakra nem lesz szükség). Mindezek következtében természetesen  $H$  is

megváltozik:

$$\begin{aligned}\Delta H &= \sum_{i=0}^n \left\{ \Delta \dot{q}_i \cdot p_i + \dot{q}_i \cdot \Delta p_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \Delta q_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \Delta \dot{q}_i \right\} = \\ &= \sum_{i=0}^n \left\{ -\frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \Delta q_i + \dot{q}_i \cdot \Delta p_i + \left( p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \Delta \dot{q}_i \right\}.\end{aligned}$$

Az utolsó tag (112) következtében zérus. Ha az eredeti  $q_i$ -k kielégítik a Lagrange-egyenleteket, akkor az első tag koefficiensében

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i,$$

és ezért

$$\Delta H = \sum_{i=0}^n (-\dot{p}_i \cdot \Delta q_i + \dot{q}_i \cdot \Delta p_i). \quad (113)$$

Másrészt  $H(q, p)$ -nek — mint minden  $q, p$  függvénynek — a parciális deriváltjait a

$$\Delta H = \sum_{i=0}^n \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \Delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \Delta p_i \right) \quad (114)$$

összefüggés definiálja önkényes  $\Delta q_i$ ,  $\Delta p_i$ -vel. A (113) és a (114) jobboldalán a növekmények koefficiensének meg kell egyezniök egymással és a (110) kanonikus egyenletek éppen ezt az egyenlőséget fejezik ki. A (113) levezetésénél kihasználtuk, hogy a  $q_i$ -k kielégítik a Lagrange-egyenleteket, ezért a kanonikus egyenleteket is csak a rendszer valóságos mozgásait leíró trajektóriák elégítik ki.

78.Feladat: Adjuk meg egy szabad tömegpont Hamilton-függvényét és írjuk fel a kanonikus egyenleteket.

Megoldás:  $E = \frac{m}{2}\dot{x}^2$ -ben a sebességet az  $\dot{x} = \frac{p}{m}$  segítségével impulzusra cserélve kapjuk a  $H = \frac{p^2}{2m}$  Hamilton-függvényt, amelyből származtathatók az

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= 0\end{aligned}$$

kanonikus egyenletek.♣

79.Feladat: Ugyanez a lineáris oszcillátorra.

Megoldás:

$$E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}Dx^2, \quad \dot{x} = \frac{p}{m}, \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}Dx^2,$$

és a kanonikus egyenletek:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -Dx. \clubsuit\end{aligned}$$

80.Feladat: Ugyanez két tömegpont relatív mozgására centrális erőnél.

Megoldás:

$$E = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) + U(r)$$

$$\dot{r} = \frac{p_r}{\mu} \quad \dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{\mu r^2} \quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{\mu r^2 \sin^2 \vartheta}.$$

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\vartheta^2}{2\mu r^2} + \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2 \sin^2 \vartheta} + U(r).$$

A Hamilton-on-egyenletek:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{p_r}{\mu} \\ \dot{p}_r &= \frac{p_\vartheta^2}{\mu r^3} + \frac{p_\varphi^2}{\mu r^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{dU}{dr} \\ \dot{\vartheta} &= \frac{p_\vartheta}{\mu r^2} \\ \dot{p}_\vartheta &= \frac{p_\varphi^2}{\mu r^2} \cdot \frac{\text{ctg} \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \\ \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{\mu r^2 \sin^2 \vartheta} \\ \dot{p}_\varphi &= 0. \clubsuit\end{aligned}$$

Amikor  $L$  helyett  $H$ -val dolgozunk, az energia időderiváltjának (44) képlete a

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{115}$$

alakot ölti.

Igazolás:

$$dH = \sum_{i=0}^n \left[ \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \right].$$

A kanonikus egyenletek szerint azonban megvalósuló mozgásnál

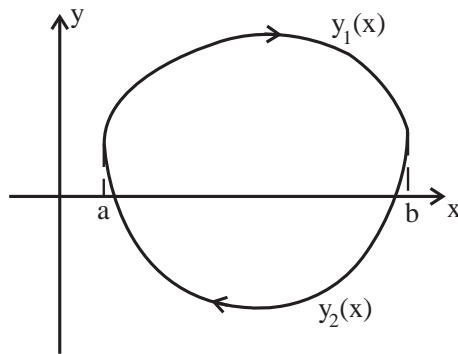
$$dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \quad dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dt,$$

ezért a [ ] első két tagja kiejti egymást és  $H = E$  következtében valóban (115)-re jutunk.

### 1.32. Az adiabatikus invariánsok elmélete

Vizsgáljunk egy rendszert, amely periódikus mozgást végez  $T$  periódusidővel. A mozgás fázispályája zárt görbe, amelyen a fázispont  $T$  idő alatt fut végig. A pálya vetülete az egyes  $q_j p_j$  fázissíkokra ugyancsak zárt görbe. Az állítás az, hogy *mindegyik fázissíkon a fázispálya vetülete által határolt terület — amelyet  $2\pi I_j$ -vel jelölünk — adiabatikus invariáns.* (A  $2\pi$  leválasztása a kvantummechanikai alkalmazás szempontjából kényelmes.)

Mint jól ismert, az  $y = y(x)$  görbe és az  $x$ -tengely közötti terület az  $a \leq x \leq b$  szakaszon az  $\int_a^b y(x) dx$  integrállal egyenlő. Egy *zárt* görbe megadásához legalább két függvény szükséges, legyenek ezek  $y_1(x)$  és  $y_2(x)$ . Az  $x = a$  baloldali fordulópontban és az  $x = b$  jobboldaliban a két függvény egyenlő egymással. A zárt görbén legyen adva a pozitív irány, és a két függvény indexelését válasszuk úgy, hogy a baloldali fordulópontból pozitív irányban elindulva először az  $y_1$  ágon kelljen haladni.



A zárt görbe által határolt terület az

$$\oint y dx \equiv \int_a^b y_1(x) dx - \int_a^b y_2(x) dx$$

képlettel számítható ki — ez a formula a kontúrintegrál *definíciójának* tekintendő. A képlet akkor adja a területet pozitív előjellel, amikor a görbén a pozitív haladási irány az óramutató járásával egyező értelmű (a görbe által határolt terület jobbkéz felé esik). Az  $\oint y dx$  jelölés értelmezése hasonló módon adható meg abban az esetben is, amikor a zárt görbe leírásához kettőnél több függvény szükséges.

Ennek a jelölésnek a felhasználásával az  $I_j$  adiabatikus invariáns formális definíciója a következő:

$$I_j = \frac{1}{2\pi} \oint p_j dq_j. \quad (116)$$



Amikor a fázispályák a szó megszokott értelmében zárt görbék, ez a képlet természetesen a görbék által határolt területet adja meg pozitív előjellel: a példák mutatják, hogy a fázispályák irányítottsága az óramutató járásával megegyező értelmű. A  $\varphi$  koordinátához tartozó fázispályák azonban — mint láttuk — nem mind ilyenek: gyakran csak akkor válnak zárttá, ha a fázissíkot hengerré hajtjuk össze. Ebben az esetben nem nyilvánvaló, mit kell egy fázispálya által határolt területnek tekinteni. Ilyen esetekben a (116) képletet fogadjuk el az  $I_j$  definíciójának.

Vegyük pl. a centrális erőterben mozgó tömegpontnál az  $I_\varphi$  invariánst (77.feladat), és írjuk fel  $I_\varphi$ -t a (116) alapján:

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\varphi d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} p_\varphi d\varphi.$$

A fázisgörbe egyenlete azonban a tárgyalt 77.feladatban  $p_\varphi = konstans$ , ezért  $p_\varphi$  kiemelhető az integráljel alól:  $I_\varphi = p_\varphi$ . Mivel  $p_\varphi$  lehet negatív is, az  $I_\varphi$  is lehet negatív. Az  $I_r$  ezzel szemben mindig pozitív, mert fázisgörbéi a szó megszokott értelmében zártak.

Az  $I_q$ -k adiabatikus invarianciájának bizonyítása előtt nézzünk két példát.

A harmonikus oszcillátor fázispályái — mint a 75.feladatban láttuk — ellipszisek, területüket könnyen kiszámíthatjuk, és azt találjuk, hogy  $2\pi E/\omega$ -val egyenlő. Ez az eredmény mutatja, hogy az  $E/\omega$  hányados adiabatikus invariáns, amint azt a 32.feladatban már bebizonyítottuk.

81.Feladat: Igazoljuk a fenti állítást.

Igazolás:

$$\text{terület} = \pi \cdot x_{max} \cdot p_{max} = \pi \cdot A \cdot m\omega A$$

De  $A^2 = 2E/D = 2E/m\omega^2$ , ezért

$$\text{terület} = \pi m\omega \cdot \frac{2E}{m\omega^2} = 2\pi \frac{E}{\omega} \clubsuit$$

A számítás egyszerűsége ellenére érdemes ugyanezt a feladatot egy másik módszerrel is megoldani, amely a viriáltételen alapul (60.feladat).

$$\begin{aligned} E &= (\text{virial tétel}) = 2\bar{K} = 2 \cdot \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{m}{2} v^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} p \cdot v dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} p \cdot \frac{dx}{dt} dt = \frac{1}{T} \oint p dx = \frac{2\pi}{T} I = \omega I. \end{aligned} \tag{117}$$

Újra azt kaptuk, hogy  $E/\omega$  adiabatikus invariáns, hiszen  $I$ -vel egyenlő.

Próbáljuk ki ugyanezt a gondolatmenetet a bolygómozgásnál is. Engedjük meg, hogy a pálya síkja általános helyzetű legyen, zárjon be — mondjuk —  $\Theta$  szöget az  $xy$  síkkal. A  $\vartheta$  ekkor a  $(\Theta, \pi - \Theta)$  intervallumban fog változni.

Zárt pályánál  $E < 0$ , és

$$\begin{aligned} E &= (\text{virial tétel}) = -\bar{K} = -\frac{1}{T} \int_t^{t+T} K dt = \\ &= -\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left( \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\vartheta}^2 + \frac{m}{2} r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2 \right). \end{aligned}$$

Határozzuk meg az impulzusokat a kinetikus energia polárkoordinátákban érvényes alakjából, és az első két integrált alakítsuk át a következő módon:

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \frac{m}{2} \dot{r}^2 &= \frac{1}{2} \int_t^{t+T} p_r \dot{r} dt = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} p_r \frac{dr}{dt} dt = \frac{1}{2} \oint p_r dr = \pi I_r \\ \int_t^{t+T} \frac{m}{2} r^2 \dot{\vartheta}^2 &= \frac{1}{2} \int_t^{t+T} p_\vartheta \dot{\vartheta} dt = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} p_\vartheta \frac{d\vartheta}{dt} dt = \frac{1}{2} \oint p_\vartheta d\vartheta = \pi I_\vartheta. \end{aligned}$$

A harmadik integrálnál azonban jobban oda kell figyelni az előjelre. Az  $I_\varphi$  ugyanis — mint tudjuk — lehet negatív is, és ezért  $\pi I_\varphi$  bizonyosan nem lehet egyenlő a kinetikus energia harmadik tagjával, amely mindig pozitív. Külön kell tárgyalni azt az esetet, amikor  $\dot{\varphi}$  pozitív, ill. negatív.

Ha  $\dot{\varphi} > 0$ , akkor  $t$  növekedtével  $\varphi$  is növekszik a  $-\pi$  értéktől  $+\pi$  felé, ezért

$$\int_t^{t+T} \frac{m}{2} r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} p_\varphi \dot{\varphi} dt = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} p_\varphi \frac{d\varphi}{dt} dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} p_\varphi d\varphi = \pi I_\varphi.$$

Mivel a baloldal pozitív, ezért  $I_\varphi > 0$ .

Ha  $\dot{\varphi} < 0$ , akkor  $t$  növekedtével  $\varphi$  csökken a  $\pi$  értéktől  $-\pi$  felé, ezért

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \frac{m}{2} r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2 &= \frac{1}{2} \int_t^{t+T} p_\varphi \dot{\varphi} dt = \frac{1}{2} \int_t^{t+T} p_\varphi \frac{d\varphi}{dt} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi}^{-\pi} p_\varphi d\varphi = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} p_\varphi d\varphi = -\pi I_\varphi. \end{aligned}$$

Mivel a baloldal pozitív, ezért  $I_\varphi < 0$ .

Ezek az előjelviszonyok mutatják, hogy amikor  $\dot{\varphi}$  előjelét nem specializáljuk, az  $I_\varphi$ -t abszolút érték jelek közé kell tenni:

$$\int_t^{t+T} \frac{m}{2} r^2 \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2 = \pi |I_\varphi|.$$

Mindezt figyelembe véve azt találjuk, hogy

$$E = -\frac{1}{T} \int_t^{t+T} K dt = -\frac{\pi}{T} (I_r + I_\vartheta + |I_\varphi|). \quad (118)$$

Alakítsuk át  $T$ -t is a Kepler-problémánál tárgyalt (56), (57), (58) képletek segítségével:

$$T = \frac{2\pi m_2 ab}{|L_z|} = \frac{2\pi m_2}{|L_z|} \cdot \frac{\gamma m_1 m_2}{2|E|} \cdot \frac{|L_z|}{\sqrt{2m_2|E|}}.$$

Ha ezt a formulát (118)-ba beírjuk, és figyelembe vesszük, hogy korlátos mozgásnál  $E < 0$ , rövid átalakítás után a fontos

$$E = -\frac{\gamma^2 m_1^2 m_2^3}{2(I_r + I_\vartheta + |I_\varphi|)^2} \quad (119)$$

képletre jutunk, amelyben  $m_1$  a centrális égitest,  $m_2$  pedig a bolygó tömege.

A (119) speciális esetként tartalmazza az 55.feladat eredményét: amikor a centrális égitest  $m_1$  tömege adiabatikusan változik (közben  $\gamma$  és  $m_2$  konstans), az  $E/m_1^2$  arány adiabatikus invariáns. Amikor azonban  $m_2$  változik lassan, és  $m_1$  konstans, az  $E/m_2^3$  arány az, ami invariáns. Amikor a paraméterek egyidejűleg változnak, az  $E/\gamma^2 m_1^2 m_2^3$  tört az, ami változatlan marad, mivel egyedül az  $I_r$ ,  $I_\vartheta$ ,  $I_\varphi$  adiabatikus invariánsok függvénye.

Látni fogjuk, hogy a (119) képletnek fontos szerepe van a hidrogénatom kvantumelméletében.

\*

A (116) adiabatikus invarianciájának a bizonyítását az  $n = 1$  esetben mutatjuk be, amikor

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq.$$

Ez a képlet természetesen feltételezi, hogy a  $p$  egy  $p(q)$  függvénnyel egyenlő, amely zárt görbe a  $q, p$  fázissíkon — minden példában ez volt a helyzet. Ez akkor teljesül, ha a feladat integrálható (1.17 fejezet B) típus). Ha pl. az energia mozgásállandó, akkor a  $p(q)$  függvényt úgy kapjuk, hogy a  $H(q, p) = E = konst$  egyenletet megoldjuk  $p$ -re és így a  $p$  a  $q$ -n kívül  $E$ -től is fog függeni. Ha  $H$ -ban külön feltüntetjük azt a paramétert — jelöljük  $\Lambda$ -val —, amely majd adiabatikusan változni fog, akkor  $p$ -t a  $H(q, p; \Lambda) = E$  megoldásából kapjuk, és ezért  $q$ ,  $E$  mellett  $\Lambda$ -t is tartalmazni fogja:

$$p = p(q; E; \Lambda).$$

Az  $I$  ennek a függvénynek  $q$  szerinti integrálja, ezért az  $E$  és a  $\Lambda$  függvénye.

Mielőtt a bizonyításhoz hozzáfognánk megjegyezzük, hogy ha  $E$ -t  $E + \Delta E$ -re,  $\Lambda$ -t  $\Lambda + \Delta\Lambda$ -ra változtatjuk, akkor a  $p$  függvényalakja  $p(q; E; \Lambda)$ -ról  $p(q; E; \Lambda) + \Delta p(q; E; \Lambda)$ -ra változik. A  $\Delta p$  függvényt természetesen a  $H(q, p + \Delta p; \Lambda + \Delta\Lambda) = E + \Delta E$  egyenletből kapjuk. Kis változásoknál ez az egyenlet ilyen:

$$H(q, p; \Lambda) + \frac{\partial H(q, p; \Lambda)}{\partial p} \Delta p + \frac{\partial H(q, p; \Lambda)}{\partial \Lambda} \Delta \Lambda = E + \Delta E.$$

Ebben a képletben  $p$ -n természetesen a  $p(q; E; \Lambda)$  függvényt,  $\Delta p$ -n a keresett  $\Delta p(q; E; \Lambda)$  függvényt kell érteni. Ezért  $H(q, p; \Lambda) = E$  és

$$\Delta p = \frac{\Delta E - \frac{\partial H}{\partial \Lambda} \Delta \Lambda}{\frac{\partial H}{\partial p}}. \quad (120)$$

Erre a képletre lesz szükség a bizonyításnál.

Emlékezzünk vissza, hogy az adiabatikus invarianciával kapcsolatos 32., 50. és 55.feladat megoldásának kiindulópontja az  $E$ -nak a  $\Lambda$ -n keresztüli kifejezése volt. A (115) szerint ez a kapcsolat így írható:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \Lambda} \dot{\Lambda},$$

ugyanis  $H$  csak a  $\Lambda$  paraméteren keresztül függ az időtől.

A  $\frac{\partial H}{\partial \Lambda}$  tényező egy perióduson belül gyorsan változik (a benne lévő  $q, p$  periódikus változása miatt), de periódusról periódusra a változása lassú. Célszerű ezért az energia egy teljes periódusra eső változásával foglalkoznunk. Ezt a változást, amely — mint mondtuk — lassú,  $\Delta E$ -vel jelöljük:

$$\Delta E \equiv E(t+T) - E(t) = \int_t^{t+T} \frac{dH}{dt} dt = \int_t^{t+T} \frac{\partial H}{\partial \Lambda} \dot{\Lambda} dt.$$

Most használjuk ki, hogy  $\Lambda$  adiabatikusan változik és a  $T$  periódus alatt a változási sebessége állandónak tekinthető:

$$\Delta E = \dot{\Lambda} \int_t^{t+T} \frac{\partial H}{\partial \Lambda} dt = \frac{\Delta \Lambda}{T} \int_t^{t+T} \frac{\partial H}{\partial \Lambda} dt.$$

A jobboldalon  $\Delta \Lambda$  a  $\Lambda$  megváltozása  $T$  idő alatt. A  $t$ -integrálban természetesen  $\Lambda$  a  $t$  pillanatban felvett konstans  $\Lambda(t)$  értéket jelenti az egész a  $(t, t+T)$  intervallumban.

Írjuk az utolsó egyenletet

$$\int_t^{t+T} \left[ \Delta E - \frac{\partial H}{\partial \Lambda} \Delta \Lambda \right] dt = 0$$

alakban, és a

$$dt = \frac{dq}{\dot{q}} = \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}}$$

egyenlőség alapján (a második lépésben a Hamilton-egyenletet használtuk) a  $t$ -integrálást helyettesítsük  $q$ -integrálással:

$$\oint \frac{\Delta E - \frac{\partial H}{\partial \Lambda} \Delta \Lambda}{\frac{\partial H}{\partial p}} dq = 0.$$

A (120) szerint ez az egyenlőség a

$$\oint \Delta p \cdot dq = 0 \quad (121)$$

alakban is írható, amelyben

$$\Delta p \equiv \Delta p(q; E; \Lambda) = p(q; E + \Delta E; \Lambda + \Delta \Lambda) - p(q; E; \Lambda).$$

Ezt a különbséget (121)-be írva a

$$\oint p(q; E + \Delta E; \Lambda + \Delta \Lambda) dq = \oint p(q; E; \Lambda) dq$$

egyenlőségre jutunk, ami — az alábbi megjegyzés figyelembevételével — mutatja, hogy  $I$  tényleg adiabatikus invariáns:

$$I(E + \Delta E, \Lambda + \Delta \Lambda) = I(E, \Lambda).$$

A képlet jelentése szavakban: Ha a rendszer  $\Lambda$  paraméterét lassan változtatjuk, akkor a mozgás energiája szintén lassan változik úgy, hogy az  $I(E, \Lambda)$  kombináció állandó maradjon.

Megjegyzés: Amikor  $\Lambda$  és  $E$  megváltozik, általában megváltozik a  $q$ -integrálás tartománya is<sup>19</sup>, mert megváltozik a fordulópontok koordinátája:  $q_{min} \rightarrow q_{min} + \Delta q_{min}$ ,  $q_{max} \rightarrow q_{max} + \Delta q_{max}$ . A  $\Delta q_{min}$  és a  $\Delta q_{max}$  a  $p(q + \Delta q; E + \Delta E; \Lambda + \Delta \Lambda) = 0$  egyenlet két gyöke. Ennek következtében az  $I$  megváltozása a kontúrintegrálás definíciójának a figyelembevételével

$$\begin{aligned} \Delta I &= \frac{1}{2\pi} \Delta \int_{q_{min}}^{q_{max}} p_1 dq - \frac{1}{2\pi} \Delta \int_{q_{min}}^{q_{max}} p_2 dq = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{q_{min} + \Delta q_{min}}^{q_{max} + \Delta q_{max}} p_1(q; E + \Delta E; \Lambda + \Delta \Lambda) dq - \int_{q_{min}}^{q_{max}} p_1(q; E; \Lambda) dq \right] - \\ &- \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{q_{min} + \Delta q_{min}}^{q_{max} + \Delta q_{max}} p_2(q; E + \Delta E; \Lambda + \Delta \Lambda) dq - \int_{q_{min}}^{q_{max}} p_2(q; E; \Lambda) dq \right], \end{aligned}$$

ahol  $p_1$  és  $p_2$  a zárt  $p$ -pálya két ága.

A  $\Delta$ -megváltozásokban lineáris pontossággal

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \Delta \int_{q_{min}}^{q_{max}} p_1 dq &= \frac{1}{2\pi} \int_{q_{min}}^{q_{max}} \Delta p \cdot dq + \frac{1}{2\pi} [p_1(q_{max}; E; \Lambda) \cdot \Delta q_{max} \\ &- p_1(q_{min}; E; \Lambda) \cdot \Delta q_{min}], \end{aligned}$$

<sup>19</sup>Kivétel a  $q = \varphi$  eset, mivel a  $\varphi$ -integrálás mindig a  $(-\pi, +\pi)$  intervallumra terjed ki.

és hasonló képlet érvényes  $p_2$  integráljának a megváltozására. Mivel azonban a fordulópontokban mind  $p_1$ , mind  $p_2$  zérus, a  $[ , ]$ -k mindkét tagja eltűnik, és így

$$\Delta I = \frac{1}{2\pi} \int_{q_{min}}^{q_{max}} \Delta p_1 \cdot dq - \frac{1}{2\pi} \int_{q_{min}}^{q_{max}} \Delta p_2 \cdot dq = \oint \Delta p \cdot dq \stackrel{(121)}{=} 0.$$

\*

Áttérünk a merev testek mozgására. Minden szilárd test deformálható valamilyen mértékben, de a deformáció gyakran annyira jelentéktelen, hogy a test merevnek tekinthető, azaz bármely két pontja közötti távolság állandó.

### 1.33. A merev test helye és orientációja

Az 1.25 fejezetben bevezetett jelölésrendszert alkalmazzuk. A merev test *helyzetét* a test önkényesen választott  $O'$  pontjának koordinátái (az  $\vec{R}_{O'}$  komponensei) adják meg. Az *orientációt* az  $O'X'Y'Z'$  orientációjával adjuk meg az inerciarendszerben nyugvó  $OXYZ$ -hez képest.

Helyezzük át gondolatban az  $O'X'Y'Z'$  rendszert önmagával párhuzamosan úgy, hogy  $O'$  essen egybe  $O$ -val.

Az  $\vec{OZ}'$  azimutuszögét jelöljük  $\varphi$ -vel, polárszögét  $\vartheta$ -val. A két szöggel megadjuk az  $\vec{OZ}'$  tengely irányát és az  $OX'Y'$  koordinátasík helyzetét. Az  $OXY$  és az  $OX'Y'$  koordinátasíkok metszésvonalát *csomóvonalnak* nevezzük. A csomóvonal irányába mutató egységvektort  $\vec{ON}$ -el jelöljük.

A csomóvonalat  $\psi$  szögű pozitív irányú elforgatással vihetjük át az  $\vec{OY}'$  tengelybe. Ha  $\vec{OZ}'$ -vel szembe nézünk, a pozitív irányú elforgatás az óramutató járásával ellentétes.

A három  $\varphi$ ,  $\vartheta$ ,  $\psi$  szög — amelyeket *Euler-szögeknek* nevezünk — egyértelműen meghatározza a  $\mathcal{K}'$  orientációját  $\mathcal{K}$ -hoz képest<sup>20</sup>.

Az Euler-szögek egyenértékű definíciója a következő: Induljunk ki abból, hogy  $\mathcal{K}'$  fedi  $\mathcal{K}$ -t. Végezzük el a  $\mathcal{K}'$  rendszer alábbi három pozitív irányú forgatását:

- 1)  $\varphi$  szögű forgatás a közös  $\vec{OZ} = \vec{OZ}'$  körül ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ );
- 2)  $\vartheta$  szögű forgatás az  $\vec{OY}'$  új helyzete körül ( $0 \leq \vartheta \leq \pi$ );
- 3)  $\psi$  szögű forgatás az  $\vec{OZ}'$  új helyzete körül ( $0 \leq \psi < 2\pi$ ).

Az Euler-szögek a  $\mathcal{K}'$  végső helyzetét jellemzik.

A merev testnek tehát hat szabadsági foka van: az  $\vec{R}_{O'}$  három komponense és a három Euler-szög.

82.Feladat: Határozzuk meg az  $\vec{OZ}'$  és az  $\vec{ON}$  egységvektorok vetületeit a  $\mathcal{K}$  tengelyeire.

<sup>20</sup>Az Euler-szögek gyakori alternatív jelölése  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Megoldás:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OZ'} &= (OZ'_x, OZ'_y, OZ'_z) = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \\ \overrightarrow{ON} &= (ON_x, ON_y, ON_z) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0). \clubsuit\end{aligned}$$

83.Feladat: Határozzuk meg az  $\overrightarrow{OZ}$  és az  $\overrightarrow{ON}$  egységvektorok vetületeit a  $\mathcal{K}'$  tengelyeire.

Megoldás: Az  $\overrightarrow{OZ}$  vetülete az  $OX'Y'$  síkra  $\sin \vartheta$  hosszúságú, és merőleges a csomóvonalra. Ezért

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OZ} &= (OZ_{x'}, OZ_{y'}, OZ_{z'}) = (-\sin \vartheta \cos \psi, \sin \vartheta \sin \psi, \cos \vartheta) \\ \overrightarrow{ON} &= (ON_{x'}, ON_{y'}, ON_{z'}) = (\sin \psi, \cos \psi, 0). \clubsuit\end{aligned}$$

### 1.34. Forgás

A forgás az orientáció folyamatos változása. Ha  $O'$  nyugszik  $\mathcal{K}$ -ban, *tiszta forgásról* beszélünk. Ebben a fejezetben csak a tiszta forgással foglalkozunk.

*Infinitezimális forgáson* a  $(t, t + dt)$  időintervallumban bekövetkező orientáció-változást értjük. Ez mindig valamilyen  $\vec{v}$  egységvektor irányú tengely körüli  $d\alpha$  szögű elfordulás. Az általános esetben a  $\vec{v}$  iránya időben változik:  $\vec{v} = \vec{v}(t)$ . A  $\vec{v}(t)$  irányú egyenest *pillanatnyi forgástengelynek* nevezzük. A pillanatnyi forgástengely tartalmazza  $O'$ -t, és a test azon pontjain halad keresztül, amelyek az adott pillanatban nyugalomban vannak. Az  $\vec{\omega} = \omega \vec{v}$  (pillanatnyi) *szögsebesség* nagysága  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ .

Legyen  $P$  a test rögzített pontja, amelynek  $O'$ -höz viszonyított helyzetvektora  $\vec{r}$ ,  $\mathcal{K}'$ -beli koordinátái pedig  $(x', y', z') = konst.$  A  $P$  együtt forog a testtel, ezért (98) szerint  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyított sebessége

$$\vec{v} = (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (122)$$

84.Feladat: Mutassuk meg, hogy egy  $\vec{\omega}_1$  és egy  $\vec{\omega}_2$  szögsebességű forgás eredője az  $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$  szögsebességű forgás.

Igazolás: A

$$\vec{v}_1 = (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}) \quad \vec{v}_2 = (\vec{\omega}_2 \times \vec{r})$$

sebességgel történő mozgások eredő sebessége

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}) + (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}) = ((\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}). \clubsuit$$

A fejezet további részében  $O \equiv O'$ .

85.Feladat: Tegyük fel, hogy a test úgy forog, hogy csak az egyik Euler-szög változik. Határozzuk meg a szögsebesség-vektort.

Megoldás: .

Ha csak  $\varphi$  változik, akkor

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \cdot \vec{OZ}$$

$$\begin{aligned} (\omega_x, \omega_y, \omega_z) &= (0, 0, \dot{\varphi}) \\ (\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}) &= (-\dot{\varphi} \cdot \sin \vartheta \cos \psi, \dot{\varphi} \cdot \sin \vartheta \sin \psi, \dot{\varphi} \cdot \cos \vartheta) \end{aligned}$$

Ha csak  $\vartheta$  változik, akkor

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta} \cdot \vec{ON}$$

$$\begin{aligned} (\omega_x, \omega_y, \omega_z) &= (-\dot{\vartheta} \cdot \sin \varphi, \dot{\vartheta} \cdot \cos \varphi, 0) \\ (\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}) &= (\dot{\vartheta} \cdot \sin \psi, \dot{\vartheta} \cdot \cos \psi, 0) \end{aligned}$$

Ha csak  $\psi$  változik, akkor

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \cdot \vec{OZ'}$$

$$\begin{aligned} (\omega_x, \omega_y, \omega_z) &= (\dot{\psi} \cdot \sin \vartheta \cos \varphi, \dot{\psi} \cdot \sin \vartheta \sin \varphi, \dot{\psi} \cdot \cos \vartheta) \\ (\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'}) &= (0, 0, \dot{\psi}). \end{aligned}$$

A komponensek felírásánál felhasználtuk a 82. és a 83. feladat eredményét.♣

86.Feladat: Határozzuk meg a szögsebesség vektort az általános esetben.

Megoldás: Ha a test mindhárom forgásban részt vesz, akkor a 84.feladat alapján

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= -\dot{\vartheta} \cdot \sin \varphi + \dot{\psi} \cdot \sin \vartheta \cos \varphi \\ \omega_y &= \dot{\vartheta} \cdot \cos \varphi + \dot{\psi} \cdot \sin \vartheta \sin \varphi \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cdot \cos \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x'} &= -\dot{\varphi} \cdot \sin \vartheta \cos \psi + \dot{\vartheta} \cdot \sin \psi \\ \omega_{y'} &= \dot{\varphi} \cdot \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cdot \cos \psi \\ \omega_{z'} &= \dot{\varphi} \cdot \cos \vartheta + \dot{\psi}. \clubsuit \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

### 1.35. A merev test általános mozgása

Amikor  $O'$   $\mathcal{K}$ -hoz képest mozog, akkor (122)-t ki kell egészíteni az  $O'$   $\mathcal{K}$ -hoz viszonyított sebességével:

$$\vec{V} = \vec{V}_{O'} + \vec{v} = \vec{V}_{O'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad (125)$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}} \quad \vec{V}_{O'} = \dot{\vec{R}}_{O'}.$$

Ez az egyenlet  $\mathcal{K}$ -ban érvényes, és a test egy rögzített  $P$  pontjának sebességét adja meg. Emlékeztetünk rá, hogy  $\vec{r} = \vec{O'P}$ ,  $\vec{R} = \vec{OP}$  és  $\vec{R}_{O'} = \vec{OO'}$ .

A (125) tartalmának vizsgálatához képzeljük vizuálisan magunk elé a test mozgását, és a mozgás alapján próbáljuk meghatározni a képletben szereplő  $\vec{V}_{O'}$ -t és  $\vec{\omega}$ -t. Világos, hogy a test mozgása önmagában nem határozza meg egyértelműen  $\vec{V}_{O'}$ -t, mert



függ attól, hogy a test melyik pontját választjuk  $O'$ -nek. Az  $\vec{\omega}$  ezzel szemben közvetlenül a mozgás szemlélése alapján, az  $O'$  kijelölése nélkül is meghatározható, ugyanis a test *bármely* két pontját összekötő vektor ugyanazzal az  $\vec{\omega}$  szögsebességgel forog.

Ez az állítás bizonyítás nélkül is hihető, de (125) alapján be is láthatjuk. Írjuk fel (125)-t a test két tetszőlegesen választott  $P_1, P_2$  pontjára:

$$\begin{aligned}\vec{V}_1 &= \vec{V}_{O'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}_1) & \vec{V}_2 &= \vec{V}_{O'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}_2) \\ \vec{r}_1 &= \overrightarrow{O'P_1} & \vec{r}_2 &= \overrightarrow{O'P_2},\end{aligned}$$

és képezzük a két egyenlet különbségét:

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = (\vec{\omega} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)).$$

Legyen  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ . Akkor  $\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \dot{\vec{R}}_1 - \dot{\vec{R}}_2 = \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{r}}$ . Ilyen jelölés mellett képletünk azonos (122)-vel, amely valóban  $\vec{\omega}$  szögsebességű tiszta forgást ír le.

Konklúzió: A  $\vec{V}_{O'}$  függ attól, hol vesszük fel a testben az  $O'$  pontot, a  $\vec{\omega}$  azonban független  $O'$  választásától.

A tiszta forgással ellentétben a merev test általános mozgásához nem mindig rendelhető pillanatnyi forgástengely.

87.Feladat: Mutassuk meg, hogy pillanatnyi forgástengely csak akkor van, ha  $\vec{V}_{O'} \perp \vec{\omega}$ .

Igazolás: Tegyük fel, hogy van pillanatnyi forgástengely. Legyen  $P$  az egyik pontja. Mivel — definíció szerint — a pillanatnyi forgástengely pontjai az adott pillanatban nyugalomban vannak, ezért  $\vec{V}_{O'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 0$  ( $\vec{r} \equiv \overrightarrow{O'P}$ ). Az egyenletből következik, hogy az  $(\vec{\omega} \cdot \vec{V}_{O'})$  skalárszorzat zérus, tehát a két vektor valóban ortogonális egymásra. ♣

Ha van pillanatnyi forgástengely, a test minden pontja rá merőlegesen mozog. Ezért ha ismerjük a pillanatnyi forgástengely helyzetét és egy  $P$  pont  $V$  sebességét, akkor a szögsebesség  $V/l$ -el egyenlő, ahol  $l$  a  $P$  távolsága a pillanatnyi forgástengelytől.

Ha a mozgó test egy adott pillanatban egy egyenes mentén érintkezik egy nyugvó felülettel, akkor az érintkezési egyenes — mivel nyugalomban van — pillanatnyi forgástengely.

88.Feladat: Igazoljuk ez utóbbi állítást a vízszintes felületen  $\omega = konstans$  szögsebességgel gördülő  $R$ -sugarú henger példáján.

Igazolás: Legyen  $P$  a henger egy kerületi pontja. A  $P$  trajektóriája a következő:

$$X = R \cdot (\omega t - \sin \omega t) \quad Y = R \cdot (1 - \cos \omega t).$$

A  $P$  pályája ciklois. A  $P$  sebessége:

$$V_x = \frac{dX}{dt} = R\omega \cdot (1 - \cos \omega t) \quad V_y = \frac{dY}{dt} = R\omega \cdot \sin \omega t. \quad (126)$$

A  $t = \frac{2\pi}{\omega}n$  ( $n$  egész) pillanatokban  $Y = 0$  és a sebesség is zérus. Ezekben a pillanatokban a  $P$ -n áthaladó alkotó érintkezik a vízszintes síkkal és pillanatnyi forgástengely.

Az alkotók egymás után töltik be a pillanatnyi forgástengely funkcióját. Az alkotókkal párhuzamos belső egyenesek sebessége sohasem zérus, ezért ezek sohasem forgástengelyek.♣

89.Feladat: Vezessük le (126)-t (125)-ből.

Megoldás: A henger az  $x$ -tengelyen gördül pozitív irányban. Ekkor

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, 0, -\omega) = \textit{konstans}.$$

$$\vec{V}_{O'} = (V_{O'x}, V_{O'y}, V_{O'z}) = (R\omega, 0, 0).$$

Az  $\vec{r} = \overrightarrow{O'P}$  vektor  $\mathcal{K}'$ -beli koordinátái  $(x', y', z') = (0, -R, 0)$ ,  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyított koordinátái pedig  $(x, y, z) = (-R \sin \omega t, -R \cos \omega t, 0)$ . Eszerint

$$\begin{aligned} V_x &= V_{O'x} + (\vec{\omega} \times \vec{r})_x = V_{O'x} + \omega_y z - \omega_z y = R\omega \cdot (1 - \cos \omega t) \\ V_y &= V_{O'y} + (\vec{\omega} \times \vec{r})_y = V_{O'y} + \omega_z x - \omega_x z = R\omega \cdot \sin \omega t. \clubsuit \end{aligned}$$

90.Feladat:  $R$  sugarú golyó gördül vízszintes talajon. A középpont sebessége az adott pillanatban legyen  $\vec{V}$ , a függőleges tengely körüli forgás szögsebessége  $\omega_z$ . Határozzuk meg a pillanatnyi forgástengely helyzetét.

Megoldás: A golyó és a talaj  $O$  érintkezési pontja nyugalomban van, ezért van pillanatnyi forgástengely és áthalad  $O$ -n. Az iránya — mint tudjuk — merőleges  $\vec{V}$ -re, és a szögsebesség vízszintes síkra vetett vetülete  $V/R$ -el egyenlő. A nyugvó  $\mathcal{K}$  rendszer  $Z$ -tengelyét irányítsuk a talajra merőlegesen,  $X$ -tengelyét pedig  $\vec{V}$ -vel párhuzamosan. Akkor

$$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, V/R, \omega_z). \clubsuit$$

### 1.36. A merev test mozgásegyenletei

Képzeljük úgy, hogy a merev test  $N$  darab molekulából álló merev rács. Az  $\alpha$ -ik molekula helyzetvektora a térben rögzített  $OXYZ$  rendszerben legyen  $\vec{R}_\alpha$ , tömege pedig  $m_\alpha$ . Akkor a test mozgását meghatározó Newton-egyenletek rendszere a következő:

$$m_\alpha \ddot{\vec{R}}_\alpha = \vec{F}_\alpha + \vec{F}_\alpha^\# \quad (\alpha = 1 \cdots N). \quad (127)$$

Itt  $\vec{F}_\alpha$  az  $\alpha$ -k molekulára ható külső erő,  $\vec{F}_\alpha^\#$  pedig az a *belső erő*, amivel a test többi molekulája hat az  $\alpha$ -dikra, azaz

$$\vec{F}_\alpha^\# = \sum_{\beta=1}^N \vec{F}_{\beta \rightarrow \alpha}^\#, \quad (128)$$

ahol  $\vec{F}_{\beta \rightarrow \alpha}^{\#}$  a  $\beta$ -k molekula által az  $\alpha$ -dikra gyakorolt erő ( $\vec{F}_{\alpha \rightarrow \alpha}^{\#} = 0$ ). A belső erőket a  $\#$  jellel különböztettük meg a külsőktől, vagyis úgy jelöltük őket, mint korábban a kényszererőket. Ezek az erők ugyanis kényszererőként foghatók fel, hiszen nem erőtvénnyel adjuk meg őket, hanem kényszerfeltételekkel, amelyek azt fejezik ki, hogy a molekulák távolsága legyen rögzített (ld. az 1.21 fejezet c.pontját). Mint azt a kényszermozgások tárgyalásánál tapasztalhattuk, a mozgásegyenletek megfogalmazhatók olyan formában, hogy csak a szabadsági fokok számának megfelelő mennyiségű *független* koordinátát tartalmazzák ismeretlen függvényként (ezek az  $\mathcal{L}$ -ből származtatható Lagrange-egyenletek). A merev test esetében ez hat független egyenletet jelent az  $O'$  pont koordinátáira és a három Euler-szögre. Az alábbiakban ezeket az egyenleteket származtatjuk, de nem az 1.21 fejezetben megismert módszerrel, hanem az impulzus és az impulzusmomentum megmaradási törvényéből kiindulva<sup>21</sup>.

Ismeretes, hogy bármely *izolált* rendszer  $\vec{P}$  impulzusa és  $\vec{J}$  impulzusmomentuma időben állandó:

$$\dot{\vec{P}} = 0, \quad \dot{\vec{J}} = 0. \quad (129)$$

Ezért akármilyenek is a belső erők, ha nem hat külső erő, (129) teljesül a merev testre, és ez éppen hat egyenlet.

Ha  $\vec{F}_{\alpha} \neq 0$ , akkor (129) jobboldalán a nulla helyén valamilyen  $\vec{F}_{\alpha}$ -tól függő kifejezések állnak. Jelöljük ezeket  $\vec{F}$ -el és  $\vec{K}$ -val:

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}, \quad \dot{\vec{J}} = \vec{K}. \quad (130)$$

Az  $\vec{F}$ -t *teljes erőnek*, a  $\vec{K}$ -t *forogatónyomatéknak* nevezzük. Meghatározásukhoz egyrészt fel kell használnunk a Newton-egyenletet, másrészt ki kell használnunk a belső erőknek azt a tulajdonságát, hogy nem változtatják meg a teljes impulzust és impulzusmomentumot:

$$\dot{\vec{P}} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \dot{\vec{R}}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \ddot{\vec{R}}_{\alpha} \stackrel{127}{=} \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}. \quad (131)$$

Az utolsó lépésben a belső erők összegét elhagytuk. Ez az összeg bizonyosan zérus, ellenkező esetben a belső erők járulékot adnának a teljes impulzus megváltozásához. A (131)-t (130)-al összevetve látjuk, hogy a teljes erő a test részeire ható külső erők vektoriális összege:

$$\vec{F} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha}. \quad (132)$$

Hasonló módon vezethető le a forogatónyomaték képlete:

<sup>21</sup>A test mozgása során a testben változó feszültségek ébrednek attól függően, hogy mekkora kényszererők szükségesek ahhoz, hogy a test geometriai szerkezete változatlan maradjon. A továbbiakban azonban ezekkel a belső feszültségekkel nem foglalkozunk.

$$\dot{\vec{J}} = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^N (\vec{R}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{R}}_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^N (\dot{\vec{R}}_\alpha \times m_\alpha \dot{\vec{R}}_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^N (\vec{R}_\alpha \times m_\alpha \ddot{\vec{R}}_\alpha).$$

Az első összeg zérus, a másodikban használjuk megint (127)-t, de hagyjuk el belőle a belső erőket:

$$\dot{\vec{J}} = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{R}_\alpha \times \vec{F}_\alpha).$$

Ezt a képletet (130)-al összevetve látjuk, hogy a teljes forgatónyomaték a test részeire ható forgatónyomatékok vektoriális összege:

$$\vec{K} = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{R}_\alpha \times \vec{F}_\alpha). \quad (133)$$

A  $\vec{P}$ , a  $\vec{J}$ , az  $\vec{F}$  és a  $\vec{K}$  általában függ a test mind a hat általános koordinátájától (ezek — mint tudjuk, — az  $O'$  pont koordinátái és az Euler-szögek). A merev test mozgásegyenleteit úgy kapjuk, hogy (130) mindegyik egyenletét ezeken az általános koordinátákon keresztül fejezzük ki (ld. a 37. és a 41.fejezetet). Ezekben a változókból (130) időben másodrendű közönséges differenciálegyenlet rendszerré válik.

### 1.37. A tömegközéppont

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogyan lehet a (130) első egyenletét kifejezni a merev test hat általános koordinátáján keresztül. Ezt könnyíti meg a tömegközéppont fogalma, amely a pontrendszereknél is hasznosnak bizonyult.

A tömegközéppontot  $C$ -vel jelöljük, és helyvektorának, sebességének megkülönböztetésére a  $c$  indexet használjuk:

$$\vec{R}_c = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{R}_\alpha; \quad \vec{V}_c = \dot{\vec{R}}_c \quad (134)$$

a tömegközéppont  $O$ -hoz viszonyított helyzetvektora és sebessége. Ezért

$$\vec{P} = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{V}_\alpha = \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{R}_\alpha = M \frac{d\vec{R}_c}{dt} = M\vec{V}_c,$$

ahol  $M = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha$  a test tömege.

Fejezzük ki az impulzust az  $O'$  pont sebességén keresztül is. A (125) alapján

$$\vec{V}_c = \vec{V}_{O'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}_c), \quad (135)$$

ahol  $\vec{r}_c = \vec{R}_c - \vec{R}_{O'}$  a tömegközéppont  $O'$ -re vonatkoztatott helyzetvektora. Ennek alapján

$$\vec{P} = M.(\vec{V}_{O'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}_c)).$$

Ezt a képletet többnyire két speciális esetben használjuk:

1) A test a térben rögzített  $O'$  centrum körül forog:

$$\vec{P} = M.(\vec{\omega} \times \vec{r}_c) \quad (\vec{V}_{O'} = 0).$$

2) Az  $O'$  pont egybeesik a tömegközépponttal:

$$\vec{P} = M\vec{V}_{O'} \quad (O' = C).$$

Ez a képlet mutatja, hogy az *impulzus* felírásánál a merev test helyettesíthető egy  $M$  tömegű tömegponttal, amely a tömegközéppont helyén mozog. *A testre ható erő kiszámításánál azonban ez a helyettesítés általában nem megengedett*, mivel az  $\vec{F}$  erő függhet a test orientációjától — az Euler-szögektől — is, nemcsak az  $O'$  pillanatnyi helyzetétől (ld. a következő feladatot). Fontos kivétel az

$$\vec{F}_\alpha = -m_\alpha \cdot g \cdot \vec{n}$$

homogén gravitációs mező ( $\vec{n}$  a földfelszínre merőleges vektor), amelynél

$$\vec{F} = -g \left( \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \right) \cdot \vec{n} = -gM \cdot \vec{n}$$

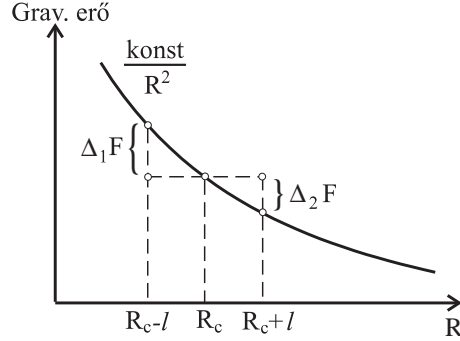
nem függ sem a helyzettől, sem az orientációtól.

91.Feladat: Szivaralakú homogén  $M$ -tömegű test kering a Nap körül úgy, hogy tömegközéppontja  $R$  sugarú kört ír le. Hogyan függ a rá ható erő az orientációjától?

Megoldás: Legyen  $O$  a Nap középpontja  $O'$  a tárgy középpontja ( $\vec{OO'} = \vec{R}_c$ ),  $2l$  pedig a tárgy hossza. Feltesszük, hogy  $2l \ll R_c$ , ezért ha a szimmetriatengely merőleges  $\vec{R}_c$ -re, akkor igen nagy pontossággal a tárgy minden részecskéjére ugyanaz az

$$F_\perp = \frac{\gamma m_\alpha M_\odot}{R_c^2}$$

vonzóerő hat ( $M_\odot$  a Nap tömege,  $\gamma$  a gravitációs állandó). Ha a test tengelye  $\vec{R}_c$ -vel párhuzamos, akkor a Naphoz közelebbi végén nagyobb gravitációs erő hat, mint a Naptól távoli végén. Mivel az erő fordítva arányos a távolság négyzetével, megnövekedése (a tömegközépponthoz képest) a Naphoz közeli végpontban ( $\Delta_1 F$ ) nagyobb, mint a csökkenése az ellenkező végpontban ( $\Delta_2 F$ ). Ezért ebben a helyzetben a vonzóerő egy  $F_\perp$ -nél nagyobb  $F_\parallel$  lesz. ♣



### 1.38. Az $O'$ -re vonatkoztatott impulzusmomentum és forgatónyomaték

Az  $O$ -ra vonatkoztatott  $\vec{J}$  mellett gyakran van szükség az  $O'$ -re vonatkoztatott

$$\vec{j} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}(\vec{r}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}(\vec{r}_{\alpha} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})) \quad (136)$$

impulzusmomentumra is. A  $\vec{j}$ -re vonatkozó  $\mathcal{K}$ -beli mozgásegyenletet így kaphatjuk meg:

$$\dot{\vec{j}} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha}(\vec{r}_{\alpha} \times \dot{\vec{v}}_{\alpha}),$$

mert  $(\dot{\vec{r}}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha}) = (\vec{v}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha}) = 0$ . Továbbá

$$m_{\alpha}\dot{\vec{v}}_{\alpha} = m_{\alpha}\dot{\vec{V}}_{\alpha} - m_{\alpha}\dot{\vec{V}}_{O'} = \vec{F}_{\alpha} - m_{\alpha}\dot{\vec{V}}_{O'},$$

tehát

$$\dot{\vec{j}} = \vec{k} - M.(\vec{r}_c \times \dot{\vec{V}}_{O'}), \quad (137)$$

ahol

$$\vec{k} = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha})$$

az  $O'$ -re vonatkoztatott forgatónyomaték.

A (137) egyenlet érvényes az általános esetben. A jobboldal második tagja azonban gyakran zérus:

$$\dot{\vec{j}} = \vec{k} \quad (O' = C, \text{ és/vagy } \vec{V}_{O'} = \text{konstans, és/vagy } \vec{r}_c \parallel \dot{\vec{V}}_{O'}).$$

Megjegyzés: A (137) levezetésénél ugyan abból indultunk ki, hogy  $O'$  a testhez rögzített  $\mathcal{K}'$  origója, valójában a levezetésnél ezt nem használtuk ki. A (137) akkor is igaz, ha  $O'$  *tetszőlegesen* mozgó pont a térben.

A  $\vec{J}$  és a  $\vec{j}$  kapcsolata:  $\vec{R}_\alpha = \vec{R}_{O'} + \vec{r}_\alpha$  következtében

$$\vec{J} = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{R}_\alpha \times m_\alpha \vec{V}_\alpha) = (\vec{R}_{O'} \times \vec{P}) + \sum_{\alpha=1}^N (\vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{V}_\alpha).$$

Elvégezzük a  $\vec{V}_\alpha = \vec{V}_{O'} + (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)$  helyettesítést:

$$\vec{J} = \vec{j} + (\vec{R}_{O'} \times \vec{P}) + (\vec{r}_c \times M\vec{V}_{O'}). \quad (138)$$

$O' = C$  választásnál a jobboldal utolsó tagja zérus, a második tag pedig egy olyan tömegpont impulzusmomentuma, amely a test impulzusával a tömegközéppont helyén mozog. Ezt *pályamomentumnak* nevezik, és általában  $\vec{L}$ -el jelölik. A  $\vec{j}$  a "belső" impulzusmomentum (más néven *spin*), amelyet — különösen az atomfizikában —  $\vec{S}$ -el szokás jelölni. Az új jelölések felhasználásával

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (O' = C).$$

A  $\vec{K}$  és a  $\vec{k}$  kapcsolata:

$$\vec{K} = \vec{k} + (\vec{R}_{O'} \times \vec{F}). \quad (139)$$

Látjuk, hogy ha  $\vec{F} = 0$ , a forgatónyomaték független az  $O'$  pont választásától. Ez akkor is igaz, mikor  $O'$  nyugszik  $\mathcal{K}$ -ban (vagyis az  $O$  egyszerű áthelyezésekor).

Tiszta forgásnál  $O' = O$  a természetes választás. Ebben az esetben  $\vec{J} = \vec{j}$ ,  $\vec{K} = \vec{k}$ , és általában a "nagybetűs" mennyiségek megegyeznek a megfelelő "kisbetűsökkel".

### 1.39. A tehetetlenségi nyomaték

Alakítsuk át (136)-t az

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

vektoralgebrai azonosság felhasználásával<sup>22</sup>:

$$\vec{j} = \sum m(r^2 \vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}).$$

Ezt az összeget átírhatjuk a

<sup>22</sup>A továbbiakban minden olyan összegzés, amelyen nem tüntetjük fel az összegzési indexet, a merev testet alkotó részecskékre terjed ki.

$$j_i = \sum_j I_{ij} \omega_j \quad (\text{az } i, j \text{ koordinátaindex}) \quad (140)$$

alakba<sup>23</sup>, amelyben

$$I_{ij} = \sum m(r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \quad (r^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad (141)$$

a *tehetetlenségi tenzor* komponensei ( $\delta_{ij}$  a *Kronecker-szimbólum*, amely  $i = j$ -nél 1-el, egyébként 0-val egyenlő). Részletesen kiírva:

$$I_{ij} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2 + z^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(x^2 + z^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

Ezek a komponensek a  $\mathcal{K}$ -ban érvényesek. A  $\mathcal{K}'$ -beli komponenseket úgy kapjuk, hogy a molekulák  $(x, y, z)$  koordinátáit  $(x', y', z')$ -vel helyettesítjük, és az  $I$  indexeit is vesszőzzük.

Az  $I_{ij}$  és az  $I_{i'j'}$  között lényeges különbség, hogy az  $I_{ij}$  komponensek általában időben változók, az  $I_{i'j'}$ -k azonban a testre jellemző konstansok a testhez rögzített  $\mathcal{K}'$  adott választása mellett. Ezért az utóbbi komponensek sokkal fontosabbak, és a továbbiakban csak velük foglalkozunk.

Az  $I_{x'x'}$ ,  $I_{y'y'}$ ,  $I_{z'z'}$  diagonális elemeket az  $X'$ , az  $Y'$  és a  $Z'$  tengelyekhez viszonyított tehetetlenségi nyomatékoknak nevezzük. A nem diagonális elemek az un. deviációs nyomatékok.

Ahhoz, hogy a tehetetlenségi tenzor *egyedül a testre* jellemző komponensekkel rendelkezzen, egyértelműen rögzíteni kell  $O'$  helyzetét és  $\mathcal{K}'$  tengelyeinek irányát. Jelöljük  $I^c$ -vel azt a tehetetlenségi tenzort, amelyet akkor kapunk, ha

- 1)  $O'$ -t a  $C$  tömegközéppontba helyezzük, és
- 2) az un. *főtengelyeket* választjuk  $\mathcal{K}'$  koordináta-tengelyeinek.

Általános matematikai tétel, hogy a koordinátatengelyek alkalmas orientációjával minden szimmetrikus tenzor (mátrix) diagonális alakra hozható, amelyben a mátrix nemdiagonális elemei (a tehetetlenségi tenzornál deviációs nyomatékok) mind nullák. Ezeket a tengelyirányokat nevezik *főtengelyeknek*, az általuk meghatározott  $\mathcal{K}'$ -t *főtehetetlenségi rendszernek*, a tehetetlenségi tenzor három fennmaradó (diagonális) elemét pedig az  $X'$ , az  $Y'$  és a  $Z'$  tengelyhez viszonyított *főtehetetlenségi nyomatéknak*. A főtehetetlenségi nyomatékok standard jelölése a következő:

$$I_{x'x'}^c \equiv \mathbf{A} \quad I_{y'y'}^c \equiv \mathbf{B} \quad I_{z'z'}^c \equiv \mathbf{C}.$$

A főtehetetlenségi rendszerben  $\vec{j}$  komponensei (140) szerint a következők:

<sup>23</sup>A koordinátaindexet egyaránt tekinthetjük 1, 2, 3-nak vagy  $x, y, z$ -nek. Mindig azt választjuk, amelyik az adott helyen szemléletesebb.



$$j_{x'} = \mathbf{A}\omega_{x'} \quad j_{y'} = \mathbf{B}\omega_{y'} \quad j_{z'} = \mathbf{C}\omega_{z'}. \quad (142)$$

Az  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  relatív nagysága szerint a testek a következő módon osztályozhatók:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A} \neq \mathbf{B} \neq \mathbf{C} & \text{aszimmetrikus pörgettyű} \\ \mathbf{A} = \mathbf{B} \neq \mathbf{C} & \text{szimmetrikus pörgettyű} \\ \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C} & \text{gömbi pörgettyű.} \end{array}$$

A főtengelyek testhez viszonyított helyzete csak aszimmetrikus pörgettyűnél egyértelmű.

A szimmetrikus pörgettyű főtengelytelenségi rendszerét az  $\vec{CZ}'$  körül tetszőleges szöggel el lehet forgatni, a gömbi pörgettyűnél pedig *minden*  $C$  középpontú rögzített rendszer főtengelytelenségi rendszer.

A főtengelyek megtalálását megkönnyítik a test szimmetriái. A tömegközéppont helyzete és a főtengelyek iránya ugyanis tükrözi a test szimmetriáit.

Ha pl. a testnek van szimmetriásíkja, akkor a tömegközéppont és két főtengely ebben a síkban fekszik, a harmadik pedig merőleges rá.

Ha a test tengelyszimmetrikus, akkor a tömegközéppont a szimmetriatengelyen fekszik, az egyik főtengely egybeesik a szimmetriatengellyel, a másik kettő pedig merőleges rá (és egymásra).

A főtengelytelenségi nyomatékok nagyságára vonatkozó ökölszabály: minél jobban "simul" a test valamelyik főtengelyhez, annál kisebb a megfelelő főtengelytelenségi nyomaték.

92.Feladat: Mutassuk meg, hogy a szabályos háromszög alapú homogén hasáb szimmetrikus pörgettyű.

Igazolás: Direkt számítással igazolható, hogy a  $C$ -n átmenő és a hasáb tengelyére merőleges *bármely* tengelyhez viszonyítva ugyanazt a tehetetlenségi nyomatékot kapjuk. Ez abból következik, hogy ha a hasábot  $\vec{CZ}'$  szimmetriatengelye körül  $120^\circ$ -al elforgatjuk, az eredeti helyzetet kapjuk vissza. Ezért ha  $\vec{CX}'$  és  $\vec{CY}'$  főtengely, akkor a  $120^\circ$ -al és a  $240^\circ$ -al elforgatott  $\vec{CX}'$  és  $\vec{CY}'$  is főtengely. A  $\mathcal{K}'$  tengelyirányai szerint nem egyértelműek, ezért a test nem lehet aszimmetrikus pörgettyű, és (legalább) két főtengelytelenségi nyomatéka egyenlő ( $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ). Ha véletlenül a  $\vec{CZ}'$ -höz tartozó  $\mathbf{C}$  főtengelytelenségi nyomaték is egyenlő  $\mathbf{A}$ -val, akkor a hasáb gömbi pörgettyű. ♣

A példa mutatja, hogy a "gömbi pörgettyű" elnevezés elég félrevezető, mert a homogén testek közül korántsem csak a gömb tartozik ebbe a kategóriába.

93.Feladat: Számítsuk ki az egy egyenesen fekvő tömegpontok (*rotátor*) főtengelytelenségi nyomatékait.

Megoldás: Legyen a tömegpontokat tartalmazó egyenes a  $Z'$  tengely. Akkor  $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \sum m z^2$ ,  $\mathbf{C} = 0$ . ♣

94.Feladat: Igazoljuk, hogy két főtengelytelenségi nyomaték összege nem lehet kisebb a harmadiknál.

Igazolás:

$$I_{x'x'} + I_{y'y'} = \sum m(x'^2 + y'^2 + 2z'^2) \geq \sum m(x'^2 + y'^2) = I_{z'z'}. \clubsuit$$

95.Feladat: Jelöljük  $\bar{I}_{i'j'}$ -vel a tehetetlenségi tenzor komponenseit abban a  $\bar{\mathcal{K}}'$ -ben, amelynek origója a test tetszőleges  $O'$  pontja, a tengelyei pedig párhuzamosak a ( $C$  origójú) főtehetetlenségi rendszer tengelyeivel. Mutassuk meg, hogy

$$\bar{I}_{i'j'} = I_{i'j'}^c + M(a^2\delta_{i'j'} - a_{i'}a_{j'}), \quad (143)$$

ahol  $\vec{a} \equiv \overrightarrow{CO'}$  (Steiner tétele).

Igazolás: A (141) szerint

$$\bar{I}_{i'j'} = \sum m(\bar{r}^2\delta_{i'j'} - \bar{x}_{i'}\bar{x}_{j'}),$$

amelyben

$$x_{i'} = \bar{x}_{i'} + a_{i'}.$$

Ha ezt behelyettesítjük, az  $\vec{a}$  komponenseiben lineáris tagok mind arányosak  $\sum mx_{i'}$ -vel, ezért nullák. A fennmaradó tagok (143)-t adják.  $\clubsuit$

96.Feladat: Számítsuk ki az alábbi homogén testek főtehetetlenségi nyomatékait:

- $l$  hosszúságú vékony rúd.
- $R$  sugarú gömb.
- $R$  sugarú,  $h$  magasságú körhenger.
- $a, b, c$  élhosszúságú téglatest.
- $h$  magasságú körkúp. Az alaplap sugara  $R$ .
- $a, b, c$  főtengelekkel rendelkező ellipszoid.

Megoldás:

a)  $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{1}{12}Ml^2$ ,  $\mathbf{C} = 0$ .

b)  $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C} = \frac{2}{5}MR^2$ .

c)  $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{M}{4}\left(R^2 + \frac{1}{3}h^2\right)$ ,  $\mathbf{C} = \frac{1}{2}MR^2$ .

d)  $\mathbf{A} = \frac{M}{12}(b^2 + c^2)$      $\mathbf{B} = \frac{M}{12}(c^2 + a^2)$      $\mathbf{C} = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$ .

e)  $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{3}{20}M\left(R^2 + \frac{h^2}{4}\right)$ ,  $\mathbf{C} = \frac{3}{10}mR^2$ .

f)  $\mathbf{A} = \frac{M}{5}(b^2 + c^2)$      $\mathbf{B} = \frac{M}{5}(a^2 + c^2)$      $\mathbf{C} = \frac{M}{5}(a^2 + b^2)$      $\clubsuit$

### 1.40. A merev test mozgási energiája

A merev test mozgási energiáját  $T$ -vel fogjuk jelölni.  $T$  a testet alkotó részecskék mozgási energiáinak összege:

$$\begin{aligned} T &= \sum \frac{m}{2} V^2 = \sum \frac{m}{2} [\vec{V}_{O'} + (\vec{\omega} \times \vec{r})]^2 = \\ &= \frac{1}{2} V_{O'}^2 \sum m + \frac{1}{2} \sum m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 + \vec{V}_{O'} \cdot (\vec{\omega} \times \sum m \vec{r}) = \\ &= \frac{1}{2} M V_{O'}^2 + \frac{1}{2} \sum m (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 + M \vec{V}_{O'} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_c). \end{aligned}$$

A 2.tag átalakításához használjuk az

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

vektoralgebrai azonosságot:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 &= \frac{1}{2} \sum m [\omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i'j'} \left[ \sum m (r^2 \delta_{i'j'} - x_{i'} x_{j'}) \right] \omega_{i'} \omega_{j'} \stackrel{(141)}{=} \frac{1}{2} \sum_{i'j'} I_{i'j'} \omega_{i'} \omega_{j'}. \end{aligned}$$

(Az  $i'$ ,  $j'$  szerinti összegzés a  $\mathcal{K}'$ -beli három komponensre terjed ki. Az az összegzés, amelyiken nem tüntettünk fel összegzési indexet, az  $N$  darab részecskére történik.)

Végeredményben:

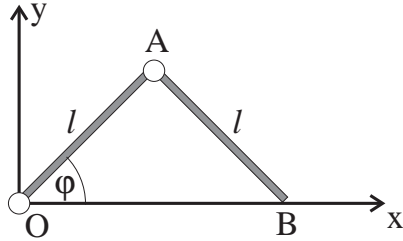
$$T = \frac{1}{2} M V_{O'}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i'j'} I_{i'j'} \omega_{i'} \omega_{j'} + M \vec{V}_{O'} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_c) \quad (144)$$

Helyezzük  $O'$ -t a tömegközéppontba. Akkor  $\vec{r}_c = 0$ , és a kinetikus energia a translációs mozgás és a forgás mozgási energiáinak összege:

$$T = T_t + T_f = \frac{1}{2} M V_{O'}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i'j'} I_{i'j'} \omega_{i'} \omega_{j'}. \quad (145)$$

Ha  $\mathcal{K}'$  főtehetetlenségi rendszer, akkor

$$T_f = \frac{1}{2} (\mathbf{A} \omega_{x'}^2 + \mathbf{B} \omega_{y'}^2 + \mathbf{C} \omega_{z'}^2). \quad (146)$$



97.Feladat: Számítsuk ki az ábrán látható rendszer mozgási energiáját.  $OA$  és  $AB$  két vékony homogén  $l$  hosszúságú  $M$  tömegű rúd, amelyek  $A$ -ban csuklósan vannak összekötve egymással. Az  $OA$  az  $O$  körül a rajz síkjában forog, a  $B$  pont az  $Ox$  tengelyen csúszik.

Megoldás:

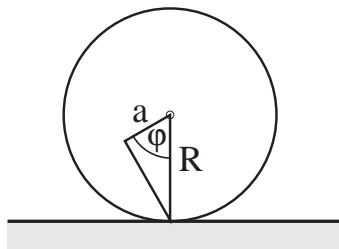
$$T_{OA} = \frac{Ml^2}{8}\dot{\varphi}^2 + \frac{I}{2}\dot{\varphi}^2$$

$$T_{AB} = \frac{Ml^2}{8}(1 + 8 \sin^2 \varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2},$$

ahol  $I = \frac{1}{12}Ml^2$ . Végeredményben

$$T = T_{OA} + T_{AB} = \frac{Ml^2}{3}(1 + 3 \sin^2 \varphi)\dot{\varphi}^2. \clubsuit$$

98.Feladat: Egy  $R$  sugarú henger tömegeloszlása olyan, hogy az egyik főtehetetlenségi tengely a henger geometriai tengelyével párhuzamosan helyezkedik el attól  $a$  távolságban. Ehhez a főtengelyhez  $I$  tehetetlenségi nyomaték tartozik. Írjuk fel a gördülő henger mozgási energiáját.



Megoldás: A  $\varphi$  szöveget vezessük be az ábra szerint. A  $\mathcal{K}'$  origóját helyezzük  $C$ -be. Ekkor  $T_f = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$ .

A  $C$  sebességének kiszámítása érdekében vegyük észre, hogy a pillanatnyi forgástengely a henger talajjal érintkezű alkotója. A test ekörül forog ugyancsak  $\dot{\varphi}$  szögsebességgel (a szögsebesség minden párhuzamos tengely körül ugyanakkora). Ezért

$$V_{O'} \equiv V_c = \dot{\varphi}\sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi},$$

$$T_t = \frac{M}{2}(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Természetesen  $T = T_f + T_t$ . ♣

Energiatétel: Legyen  $O' = C$ , és  $\mathcal{K}'$  főtehetetlenségi rendszer.

$$\dot{T} = M(\vec{V}_c \cdot \dot{\vec{V}}_c) + (\mathbf{A}\omega_{x'}\dot{\omega}_{x'} + \mathbf{B}\omega_{y'}\dot{\omega}_{y'} + \mathbf{C}\omega_{z'}\dot{\omega}_{z'}).$$

Mindkét tagot átalakítjuk:

$$M(\vec{V}_c \cdot \dot{\vec{V}}_c) = (\vec{V}_c \cdot \dot{\vec{P}}) = (\vec{V}_c \cdot \vec{F}),$$

$$\mathbf{A}\omega_{x'}\dot{\omega}_{x'} + \mathbf{B}\omega_{y'}\dot{\omega}_{y'} + \mathbf{C}\omega_{z'}\dot{\omega}_{z'} = (\vec{\omega} \cdot \dot{\vec{j}}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{k}).$$

$$\dot{T} = (\vec{V}_c \cdot \vec{F}) + (\vec{\omega} \cdot \vec{k}),$$

azaz a kinetikus energia változása sebessége a külső erő és a forgatónyomaték által betáplált teljesítménnyel egyenlő.

### 1.41. Az Euler-egyenlet

Foglalkozunk a (130) második egyenletének részletesebb felírásával. Legyen  $O' = C$ . Az  $O'$ -höz viszonyított mennyiségekre vonatkozóan ez az egyenlet  $\mathcal{K}$ -ban  $\dot{\vec{j}} = \vec{k}$  alakú (38.fejezet). Írjuk át a  $\mathcal{K}'$  főtehetetlenségi rendszerben érvényes formába. Ennek érdekében alkalmazzuk (98)-t  $\vec{j}$ -re:

$$\dot{\vec{j}} = \dot{\vec{j}} + (\vec{\omega} \times \vec{j}),$$

amelynek alapján

$$\dot{\vec{j}} + (\vec{\omega} \times \vec{j}) = \vec{k}. \quad (147)$$

Emlékeztetünk rá, hogy  $\dot{\vec{j}}$  az impulzusmomentum,  $\dot{\vec{\omega}}$  pedig a szögsebesség változása sebessége a testhez rögzített  $\mathcal{K}'$  rendszerhez képest. Az alábbiakban azonban

az  $\dot{\omega}'_i$  helyett a következetlenebb, de célszerűbb  $\dot{\omega}'_i$  jelölést fogjuk használni: gyakorlatilag u.i. nem fenyeget az a veszély, hogy ez utóbbin a  $\vec{\omega}$ -nak (az  $\vec{\omega}$   $\mathcal{K}$ -beli változási sebességének) vesszős komponenseit értsük. A (142) alapján ezért

$$\frac{dj'_{x'}}{dt} = \mathbf{A}\dot{\omega}'_{x'} \quad \frac{dj'_{y'}}{dt} = \mathbf{B}\dot{\omega}'_{y'} \quad \frac{dj'_{z'}}{dt} = \mathbf{C}\dot{\omega}'_{z'},$$

továbbá

$$\begin{aligned} (\vec{\omega} \times \vec{j})_{x'} &= (\mathbf{C} - \mathbf{B})\omega'_{y'}\omega'_{z'} \\ (\vec{\omega} \times \vec{j})_{y'} &= (\mathbf{A} - \mathbf{C})\omega'_{z'}\omega'_{x'} \\ (\vec{\omega} \times \vec{j})_{z'} &= (\mathbf{B} - \mathbf{A})\omega'_{x'}\omega'_{y'}. \end{aligned}$$

A (147) vesszős komponensei tehát a következők:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\dot{\omega}'_{x'} + (\mathbf{C} - \mathbf{B})\omega'_{y'}\omega'_{z'} &= k_{x'} \\ \mathbf{B}\dot{\omega}'_{y'} + (\mathbf{A} - \mathbf{C})\omega'_{z'}\omega'_{x'} &= k_{y'} \\ \mathbf{C}\dot{\omega}'_{z'} + (\mathbf{B} - \mathbf{A})\omega'_{x'}\omega'_{y'} &= k_{z'}. \end{aligned} \tag{148}$$

Ezek az  $\omega'_i$ -re vonatkozó összefüggések az *Euler-egyenletek*. Ha az egyenletek segítségével a térben rögzített  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyítva akarjuk vizsgálni a mozgást, akkor (124) segítségével az Euler-szögekre vonatkozó, időben másodrendű differenciálegyenletekké alakíthatjuk át őket. Néha azonban kifejezetten előnyös, ha a főtételenségi rendszerben érvényes mozgásegyenlettel dolgozhatunk. Ez az eset pl. akkor, amikor a Föld forgását "földi nézőpontból" akarjuk megérteni (ld. a 43.fejezetet).

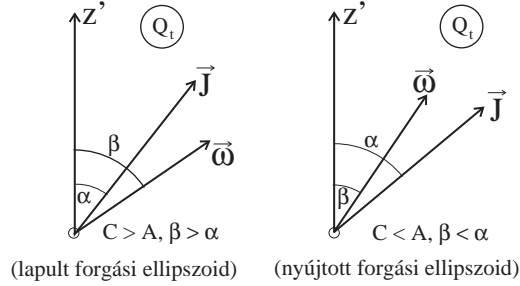
#### 1.42. A szimmetrikus pörgettyű reguláris precessiója

A szimmetrikus pörgettyű tiszta forgásánál ( $O = O' = C$ ) a szimmetriatengely (a  $\mathcal{K}'$   $Z'$ -tengelye), az  $\vec{\omega}$  (pillanatnyi) szögsebesség vektor, valamint a  $\vec{J} \equiv \vec{j}$  impulzusmomentum-vektor minden pillanatban egy síkban fekszik. Ez a

$$\frac{J_{x'}}{J_{y'}} = \frac{\mathbf{A}\omega'_{x'}}{\mathbf{B}\omega'_{y'}} = \frac{\mathbf{A}\omega'_{x'}}{\mathbf{A}\omega'_{y'}} = \frac{\omega'_{x'}}{\omega'_{y'}}$$

egyenletből következik, amely mutatja, hogy  $\vec{\omega}$ -nak és  $\vec{J}$ -nek az  $OX'Y'$  síkra vetett vetülete ugyanarra az egyenesre esik.

*Szabad* forgásnál ( $\vec{K} \equiv \vec{k} = 0$ ) a három vektor által bezárt szög időben állandó (a vektorok relatív helyzete rögzített), noha a közös sík, amelyben fekszenek, változtatja a helyzetét.



Jelöljük a  $t$  pillanatbeli közös síkot  $Q_t$ -vel, a szimmetriatengelynek az impulzusmomentummal és a szögsebességgel bezárt szögét pedig  $\alpha$ -val és  $\beta$ -val (ld. az ábrát). E két vektor szimmetriatengelyre merőleges irányú (az  $OX'Y'$  síkba eső) komponensét  $\vec{J}_\perp$ -el és  $\vec{\omega}_\perp$ -el jelöljük. Nyilván

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{J_\perp}{J_{z'}} = \frac{\mathbf{A}\omega_\perp}{\mathbf{C}\omega_{z'}} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\omega_\perp}{\omega_{z'}}, \quad (149)$$

ahonnan

$$\frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{\mathbf{C} - \mathbf{A}}{\mathbf{C}}. \quad (150)$$

Az  $\alpha$  és a  $\beta$  állandóságának a bizonyításához először azt látjuk be, hogy  $J_{z'}$  mozgásállandó.

$$\frac{dJ_{z'}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{J} \cdot \vec{OZ}') = \left( \frac{d\vec{J}}{dt} \cdot \vec{OZ}' \right) + \left( \vec{J} \cdot \frac{d\vec{OZ}'}{dt} \right).$$

A jobboldal második tagja mindig zérus, mert  $\vec{OZ}'$  a testhez rögzített vektor, ezért

$$\frac{d\vec{OZ}'}{dt} = (\vec{\omega} \times \vec{OZ}') \perp \vec{OZ}', \vec{\omega}. \quad (151)$$

De e két utóbbi vektor ugyanabban a  $Q_t$  síkban fekszik, mint  $\vec{J}$ , ennek következtében  $\vec{OZ}'$  időderiváltja  $\vec{J}$ -re is merőleges.

A jobboldal első tagja pedig azért zérus, mert szabad forgásnál  $\vec{J}$  mozgásállandó, és zérus az időderiváltja. Ezzel igazoltuk, hogy  $J_{z'}$  valóban mozgásállandó. (A  $J_{z'} = \mathbf{C}\omega_{z'}$  egyenlet következtében ebből — mellékesen — az is következik, hogy  $\omega_{z'}$  is mozgásállandó.)

De ha  $J$  is,  $J_{z'}$  is mozgásállandó, akkor a  $J_{z'} = J \cos \alpha$  egyenlet következtében  $\alpha$ -nak is, és (150) következtében  $\beta$ -nek is mozgásállandónak kell lennie, ahogy állítottuk.

A szimmetrikus pörgettyű szabad forgásánál tehát az  $\vec{\omega}$  egy  $\beta$  nyílásszögű, a  $\vec{J}$  pedig egy  $\alpha$  nyílásszögű kúpon mozog a szimmetriatengely körül. A két vektor mozgása szinkronban van egymással, mert minden pillanatban ugyanabban a  $Q_t$  síkban fekszenek. Most már csak a kúpon történő mozgás jellegét kell tisztázni. Ezt az Euler-egyenletek alapján könnyű megtenni.

A szimmetrikus pörgettyű szabad mozgására vonatkozó Euler-egyenletek a következők:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_{x'} + \left[ \frac{\mathbf{C} - \mathbf{A}}{\mathbf{A}} \omega_{z'} \right] \omega_{y'} &= 0 \\ \dot{\omega}_{y'} - \left[ \frac{\mathbf{C} - \mathbf{A}}{\mathbf{A}} \omega_{z'} \right] \omega_{x'} &= 0 \\ \dot{\omega}_{z'} &= 0.\end{aligned}\tag{152}$$

A harmadik egyenletből újra láthatjuk, hogy  $\omega_{z'}$  mozgásállandó. Ennek következtében az első két egyenlet olyan *lineáris* differenciálegyenletté válik, amelyet könnyű megoldani. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a megoldás a következő:

$$\omega_{x'}(t) = \omega_{\perp} \cdot \cos \omega_E t \quad \omega_{y'}(t) = \omega_{\perp} \cdot \sin \omega_E t,$$

ahol  $\omega_{\perp}$  az  $\vec{\omega}$  vetülete a szimmetriasíkra, és

$$\omega_E = \frac{\mathbf{C} - \mathbf{A}}{\mathbf{A}} \omega_{z'}\tag{153}$$

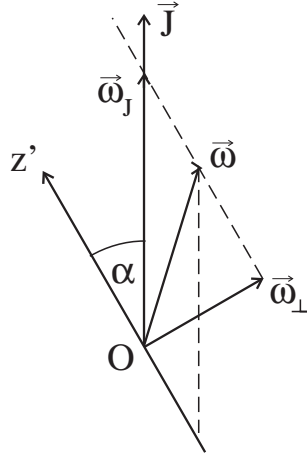
az *Euler-(kör)frekvencia*. A megoldás azt fejezi ki, hogy az  $\vec{\omega}$  vektor  $\omega_E$  szögsebességgel *egyenletesen precesszál a szimmetriatengely körül*. Ennek alapján a szimmetrikus pörgettyű szabad mozgását *reguláris precesszió*nak nevezzük.

Amikor a mozgást a testhez viszonyítva vizsgáljuk, a szimmetriatengely helyzetét tekintjük állandónak. Ebből a nézőpontból a reguláris precesszió nagyon egyszerű mozgás: a (képzelt) szögsebességvektor és impulzusmomentum vektor  $T_E = 2\pi/\omega_E$  idő alatt egyenletes sebességgel megkerüli a szimmetriatengelyt, amelyet a test alakja és összetétele objektíven rögzít. Ez az irány — a szögsebesség és az impulzusmomentum irányával ellentétben — "bele van égetve" a testbe.

A térben nyugvó  $\mathcal{K}$  szempontjából a  $\vec{J}$  impulzusmomentum vektor az, amelynek az iránya változatlan. Körülötte, mint tengely körül, forog a  $Q_t$  sík, benne a szögsebesség és a szimmetriatengely irányával.

Milyen körfrekvenciával történik ez a forgás?





Bontsuk fel  $\vec{\omega}$ -t egy  $\vec{J}$  irányú és egy  $\vec{OZ}'$  irányú összetevőre (ld. az ábrát). A  $\vec{J}$  irányú összetevőt jelöljük  $\vec{\omega}_J$ -vel. A (151) mutatja, hogy az  $\vec{OZ}'$  irányú összetevő nem szól bele a szimmetriatengely mozgásába:

$$\frac{d\vec{OZ}'}{dt} = (\vec{\omega}_J \times \vec{OZ}').$$

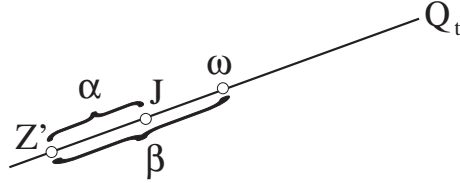
Ebből az egyenletből következik, hogy a szimmetriatengely — és vele  $\vec{\omega}$  és a  $Q_t$  sík —  $\omega_J \equiv |\vec{\omega}_J|$  szögsebességgel precesszál a térben rögzített  $\vec{J}$  körül.

Ezt a szögsebességet a következő módon számíthatjuk ki. Az  $\vec{\omega}_J$  és az  $\vec{\omega}$  vektorok végpontját összekötő egyenes párhuzamos a szimmetriatengellyel. Ennek következtében  $\omega_J \cdot \sin \alpha = \omega_\perp$ . Másrészt azonban  $\sin \alpha = J_\perp / J = \mathbf{A} \omega_\perp / J$ , és ha ezt az előző egyenletbe behelyettesítjük, az

$$\omega_J = \frac{J}{\mathbf{A}}$$

képletre jutunk. Ezzel a körfrekvenciával precesszál a szimmetriatengely a nyugvó  $\vec{J}$  irány körül.

De ne felejtjük el, hogy  $\vec{J}$  nincs rögzítve a testhez! Miközben a szimmetriatengely  $\omega_J$  szögsebességgel precesszál körülötte, a  $\vec{J}$  testhez viszonyított helyzete  $\omega_E$  szögsebességgel precesszál a testhez stabilan rögzített szimmetriatengely körül.



Ez a mozgás elég bonyolult, ezért egy másik módon is megfogalmazzuk. Vegyük körül gondolatban a reguláris precessziót végző testet  $O$  középpontú gömbbel, amelyet a  $Q_t$  sík egy főkörben metsz (a rajzon a metszéstvonalat egyenessel ábrázoljuk). Az  $\overline{OZ'}$ , a  $\vec{J}$  és az  $\vec{\omega}$  dőféspontjait  $Z'$ -vel,  $J$ -vel és  $\omega$ -val jelöljük (a dőféspontok relatív helyzete belapult forgási ellipszoidra vonatkozik). A dőféspontok távolsága a vektorok közötti szöggel arányos, ezt is feltüntettük az ábrán.

Az ábra a  $t$ -pillanatbeli helyzetet rögzíti. Mi történik a  $(t, t + dt)$  intervallumban? Az  $\vec{\omega}$  a pillanatnyi forgástengely iránya, ekörül forog el a test  $\omega \cdot dt$  szöggel. Mivel a három dőféspont közül csak  $Z'$  van rögzítve a testhez, csak ez a pont mozdul el. Ennek következtében a  $t + dt$  pillanatban a három dőféspont nem lesz egy egyenesen (egy síkban), tehát "korrekcióra" van szükség. A test elfordulása már megtörtént, a  $\vec{J}$  térbeli helyzete állandó, ezért a három vektor csak akkor lesz a  $t + dt$  pillanatban is egy egyenesen, ha  $\vec{\omega}$  elmozdul úgy, hogy rákerüljön a  $Z'$  és a  $J$  által kijelölt egyenesre.

A pillanatnyi forgástengely pontjai nyugalomban vannak, ezért az  $\vec{\omega}$  körüli infinitezimális elfordulás nem változtatja meg az  $\vec{\omega}$  testhez viszonyított helyzetét. Ezt a helyzetet csak a második, korrekciós elmozdulás változtatja meg. De világos, hogy minél közelebb van a  $J$  pont az  $\omega$ -hoz (minél kisebb az  $\alpha$  és a  $\beta$  közötti különbség), annál kisebb korrekcióra van szükség, vagyis a szögsebesség vektor annál lassabban precesszál a testhez rögzített rendszerben a szimmetriatengely körül. Mint a (153) és a (150) összevetése mutatja, ez a kvalitatív magyarázata annak, hogy az Euler-frekvencia arányos  $(\mathbf{C} - \mathbf{A})$ -val. Az ábráról még az is leolvasható, hogy  $dt$  idő alatt a szimmetriatengely nagyobb szöget fordul el  $\vec{J}$  körül, mint  $\vec{\omega}$  körül.

99.Feladat: Mutassuk meg, hogy belapult forgási ellipszoidra ez az állítás igaz.

Igazolás: Azt kell látni, hogy  $\alpha < \beta$  esetén  $\omega_J > \omega$ . Az  $\omega^2 = \omega_{\perp}^2 + \omega^2 \cos^2 \beta$  összefüggésből  $\omega = \omega_{\perp} / \sin \beta$ . De  $\omega_{\perp} = \omega_J \cdot \sin \alpha$ , ezért  $\omega = \omega_J \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} < \omega_J$  valóban. ♣

### 1.43. A földgolyó reguláris precessziója

Tekintsünk el a Föld keringésétől, valamint a Nap és a Hold által a Földre gyakorolt forgatónyomatéktól, amely a Föld belapultságának következménye. Ez a forgatónyomaték okozza a földtengely un. *luniszoláris precesszióját* az Ekliptikára állított merőleges irány körül, amelynek periódusideje 25800 év. Amikor azonban ennél sokkal rövidebb időtartamokat vizsgálunk, a forgatónyomaték hatása nem vehető észre, és

feltehetjük, hogy a Föld reguláris precessziót végez  $O$  középpontja körül.

A Föld lapult szimmetrikus pörgettyűnek tekinthető ( $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ), amelyre

$$\frac{\mathbf{C} - \mathbf{A}}{\mathbf{C}} \approx +\frac{1}{300}.$$

Ennek a konstansnak az értéke a luniszoláris precesszió elmélete alapján a precesszió periódusidejéből számítható ki, ezért *precessziós konstansnak* nevezik. Mivel nagyon kis szám (a  $\mathbf{C}$  relatíve alig nagyobb, mint a másik két főtehetetlenségi nyomaték), a nevezőben  $\mathbf{C}$ -t helyettesíthetjük  $\mathbf{A}$ -val. Ezért a Föld Euler-frekvenciája (153) alapján  $\omega_E = \omega_{z'}/300$ -al egyenlő.

Milyen relatív helyzetet foglal el a szimmetriatengely, az impulzusmomentum és a szögsebesség vektor a Föld reguláris precessziójánál? "Nulladik" közelítésben azt kell mondanunk, hogy ez a három vektor egy egyenesen — a szimmetriatengelyen — fekszik. Amikor azt mondjuk, hogy "a Föld tengely körüli forgást végez", erre a közelítésre gondolunk.

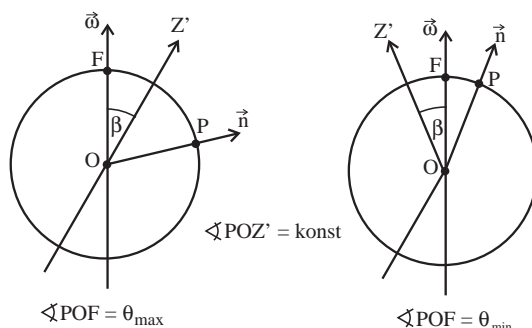
Valójában a vektorok közötti szög nem pontosan nulla, bár rendkívül kicsi. A szögsebesség vektor és a szimmetriatengely közötti  $\beta$  szög megmérését az Euler-precesszió teszi lehetővé: ennek a precesszióknak a következtében ugyanis a szögsebesség vektor  $2\beta$  nyílásszögű kúpot ír le a szimmetriatengely körül.

Mivel a három vektor által bezárt szögek nagyon kicsik, (150)-ben a tangensek magukkal a szögekkel helyettesíthetők. Ha még a precessziós konstans számértékét is behelyettesítjük, a  $\beta - \alpha \approx \beta/300$  közelítő egyenlőségre jutunk. Ezért a nulladiknál eggyel jobb első közelítésben azt mondhatjuk, hogy  $\vec{\omega}$  és  $\vec{J}$  iránya továbbra is közös, de ez a közös irány valamilyen  $\beta \ll 1$  szöget (radiánt) zár be a szimmetriatengellyel.

A  $\vec{J}$  és a  $\vec{\omega}$  közös dőféspontja az égen pontosan kijelölhető: ez az a pont, amely körül a csillagok napi körforgásukat végzik. A Föld szimmetriatengelye azonban  $2\beta$  nyílásszögű kúpon precesszál ekörül az irány körül. Mivel a szimmetriatengely mereven rögzítve van a Földhöz, ebben a precesszióban részt vesznek a földfelszínen elhelyezkedő objektumok, közöttük a geodéziai megfigyelő állomások is. Ezek közül néhány kijelölt laboratóriumban már száz év óta folyamatosan figyelik a lokális merőleges iránynak az égbolt forgási középpontjához viszonyított mozgását. Ha a Föld valóban az elméletnek megfelelő reguláris precessziót végez, akkor az  $\vec{n}$  lokális merőleges és az égbolt forgási középpontja felé mutató irány által bezárt  $\theta$  szögnek  $T_E = 2\pi/\omega_E$  Euler-periódussal kell ingadoznia egy maximális és egy minimális érték között (*szélességingadozás*), amelyek különbsége  $2\beta$  ( $\theta_{max} - \theta_{min} = 2\beta$ )<sup>24</sup> (ld. az ábrát).

---

<sup>24</sup>Vegyük észre, hogy  $\beta$  meghatározásához nincs szükség a szimmetriatengely irányának előzetes ismeretére a Földhöz képest.



A mérések szerint  $\beta \approx 0.2''$ . Ez a szög olyan kicsi, hogy a szimmetriatengely és a pillanatnyi forgástengely dőléspontjainak távolsága a Föld felszínén mindössze

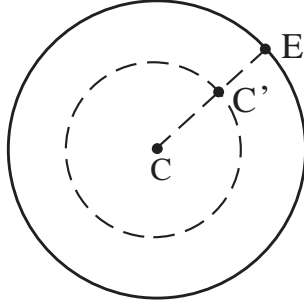
$$(\beta \text{ radián}) \cdot (\text{földsugár}) \approx \left(0.2 \times \frac{1}{60^2} \times \frac{2\pi}{360}\right) \cdot (6 \times 10^6) \approx 6 \text{ m!}$$

Ennek alapján  $\omega_{z'} = \omega \cos \beta$  praktikusán megegyezik  $\omega$ -val, és mindkettő  $2\pi/n_{\text{ap}}$ -al egyenlő. Az Euler-precesszió szögsebessége ennek 300-ad része, tehát az Euler-precesszió periódusa kb. 300 nap.

A mérési eredmények azonban két lényeges pontban ellentmondanak annak, hogy a Föld a szimmetrikus merev test szabad mozgására jellemző reguláris precessziót végez (és ez az ellentmondás az oka annak, hogy folyamatosan figyelik a szélességingadozást). Először is, a szélességingadozás periódusa a várt 300 nap helyett kb. 420 napnak adódott (*Chandler-periódus*), másodszer pedig kiderült, hogy  $\beta$  nagysága nem állandó.

Az első eltérést meg lehet magyarázni azzal, hogy a földkéreg deformálható, vagyis a Föld nem ideálisan merev test (ld. a feladatot). A Chandler-periódus és az Euler-periódus különbségéből következtetni lehet a földkéreg deformálhatóságára. A deformáció azonban mindig együtt jár energiadisszipációval, ezért a szélességingadozás amplitúdójának (a  $\beta$  szögnek) fokozatosan le kellene csengenie. A számítások alapján ennek a csillapodásnak az időállandója mindössze 25-40 év. Egy *átlagos*  $\beta$  szög fennmaradása csak azért lehetséges, mert valamilyen folyamat gondoskodik a disszipálódó energia pótlásáról. Az energiaforrás valószínűleg a napsugárzás, amely a reguláris széljárásokon keresztül gerjesztő forgatónyomatékokat gyakorol a földgolyóra.

100.Feladat: Adjunk kvalitatív magyarázatot arra, hogy a deformálhatóság növeli a szélességingadozás  $T_E$  periódusidejét.



Magyarázat: Az ábrán (a pólus irányából nézve)  $C$  a merevnek föltételezett Föld szimmetriatengelyének,  $E$  pedig az  $\omega$  pillanatnyi forgástengelynek a dőléspontja a Föld felszínén. A mérések szerint  $CE \approx 6 \text{ m}$ .

Miközben az  $E$  pont a  $C$  körül precesszálva halad a Földhöz képest, a centrifugális erő következtében az egyenlítői kidudorodás igazodik hozzá úgy, hogy közelebb kerüljön a pillanatnyi forgástengelyre merőleges síkhoz. A deformáció következtében a tényleges szimmetriatengely már nem  $\vec{OC}$ , hanem  $\vec{OC}'$ , amely követi a pillanatnyi forgástengelyt. Józan feltevésnek látszik, hogy kismértékben deformálódó testeknél az  $\vec{OC}'$  "pillanatnyi szimmetriatengely" veszi át a merev test rögzített szimmetriatengelyének funkcióját. Ebben az esetben  $\vec{\omega}$  (az  $E$  pont) nem az  $\vec{OC}$ , hanem a pillanatnyi  $\vec{OC}'$  körül fog Euler-precessziót végezni, amelynek körfrekvenciája — a  $\beta$  szög kicsisége miatt — praktikusán változatlan marad (a  $\angle COE$  és a  $\angle C'OE$  koszinusza egyaránt 1-el egyenlő). Az  $\vec{OC}'$  körüli változatlan szögsebességű precesszióhoz azonban az  $E$  pont  $\frac{C'E}{CE} \equiv \gamma$ -szor kisebb lineáris sebessége tartozik. Ezzel a csökkentett lineáris sebességgel az  $E$  pontnak ugyanazt a kb. 6 m sugarú kört kell megtennie, mivel  $C'$  követi  $E$ -t a  $CC'$  sugarú körön. Ílymódon a deformáció a (153) alapján számítható körfrekvencia  $\gamma$ -szoros csökkenésére és periódusidő  $1/\gamma$ -szoros megnövekedésére vezet. ♣