

A forgó mágnes

Hraskó Péter*

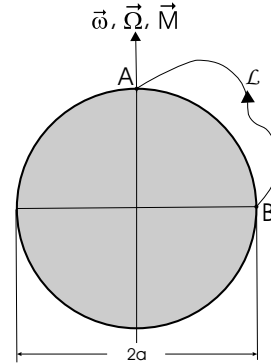
A világdinamó

Régen, még középiskolás koromban olvastam egy ifjúsági regényt, amelynek *A világdinamó* volt a címe. A történetre már egyáltalán nem emlékszem, de a lényege az volt, hogy egy megszállott feltaláló kalandos körülmények között masszív elektromos vezetékot fektetett le a Föld egyik délköre mentén. Azt gondolta ugyanis, hogy a Föld forgása következtében a vezető mozog a Föld mágneses terében, mozgási indukció révén elektromotoros erő indukálódik benne, és ez az egyszerű, de monumentális eszköz — a világdinamó — folyamatosan hatalmas mennyiségű olcsó villamos energiával képes ellátni az emberiséget.

Ha jól emlékszem, már a könyv olvasása közben felmerült bennem a kétely, hogy mindez nagyon szép, de mi van akkor, ha a Föld mágneses tere együtt forog a Földdel? Ebben az esetben a vezető *nyugodna* a mágneses mezőben és nem jönne létre benne elektromotoros erő. De ugyanakkor zavart, hogy magát ezt a kérdést sem éreztem világosnak. Egyáltalán nem nyilvánvaló ugyanis, mit jelent az, hogy "a mágneses mező forog a szimmetriatengelye körül". Ha az erővonalak reálisan léteznének és mindegyiket külön-külön időben figyelemmel tudnánk kísérni, akkor értelmes volna a kérdés és lehetne rá válaszolni. Az erővonalak azonban csak matematikai-geometriai segédeszközök és nagyon is elképzelhető, hogy a szimmetriatengelye körül egyenletesen forgó mágnes mágneses tere pontosan ugyanolyan, mintha a mágnes nem forogna.

Az alábbiakban egy homogén mágnesezettségű, állandó Ω szögsebességgel forgó a -sugarú gömbmágnest fogunk vizsgálni, amelynek \vec{M} mágneses dipólussűrűsége és forgástengelye párhuzamos egymással (z-irányúak). A világdinamó elképzelésben szereplő vezetőt az "északi pólust" és az "egyenlítő" egy pontját összekötő merev \mathcal{L} vezető reprezentálja, amely az Ω -tól eltérő, de vele párhuzamos ω -val is foroghat és még síkgörbének sem kell lennie. (A világdinamóban természetesen $\omega = \Omega$ és \mathcal{L} a Föld felszínén húzódik, de érdemes az általánosabb esettel foglalkozni.) Az

\mathcal{L} az A ($\vartheta = 0^\circ$) és a B ($\vartheta = 90^\circ$) végpontokban csúszó érintkezőkkel elektromos kontaktusban van a gömbmágnessel azért, hogy \mathcal{L} a mágnesen keresztül záródó áramkör eleme lehessen.



Itt most csak a világdinamó-elképzelés kiindulópontjával szolgáló alapjelenséget vizsgáljuk. Az Olvasóra bízunk: ítélje meg, működne-e a világdinamó, ha megépítenék.

Az elektromosan vezető forgó mágnes

Tekintsünk el egyenlőre az \mathcal{L} vezetőről és vizsgáljuk a "csupas" homogén mágnesezettségű gömbmágnest, amelynek konduktivitása legyen $\gamma > 0$. Nyugvó vezetőben γ a \vec{J} áramsűrűség és az \vec{E} elektromos mező kapcsolatát határozza meg a $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ Ohm-törvényen keresztül. Mozgó vezetőnél az \vec{E} -hez még hozzá kell adni a mozgás által indukált $(\vec{V} \times \vec{B})$ elektromotoros erőt is, amelyről az előző pontban már volt szó. Az Ohm-törvény ebben az általánosabb esetben a következő:

$$\vec{J} = \gamma[\vec{E} + (\vec{V} \times \vec{B})]. \quad (1)$$

Amikor a koordináta-rendszerünk origóját a gömb középpontjában vesszük fel, a mágnes azon elemének a sebessége, amely az \vec{r} pontban van

$$\vec{V} = (\Omega \times \vec{r}) \quad (2)$$

-el egyenlő. Ebből a képletből látható, hogy nem a gömbhöz rögzített forgó rendszerben dolgozunk, hanem abban az *inerciarendszerben*, amelyben a gömb

*peter@hrasko.com

középpontja nyugszik. Soha egy pillanatra sem fogunk áttérni a forgó rendszerre.

Stacionér rezsimben, amikor a mágnes már hosszú ideje konstans szögsebességgel forog, a tranziens áramok (ha voltak) lecsengtek, energiájuk a

$$J^2/\gamma = \mathbf{J} \cdot [\mathbf{E} + (\mathbf{V} \times \mathbf{B})]$$

képletnek megfelelően hővé alakult vagy elektromágneses hullámként kisugárzódott, ezért az áramsűrűség ugyanúgy nulla, mint a nyugvó fémgömbben. Az elektromos mező azonban nem tűnik el: $\gamma \neq 0$ miatt $\mathbf{J} = 0$ mellett (1) következtében

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (r < a). \quad (3)$$

Ezt az elektromos mezőt meghatározott ρ térfogati és σ felületi töltéssűrűség hozza létre. A térfogati töltéssűrűséget a $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ Maxwell-egyenlet, valamint (3) következtében

$$\rho = -\epsilon_0 \text{div}(\mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

függvény írja le.

A magnetosztatikából ismeretes, hogy az egyenletesen mágnesezett gömbön belül az indukció

$$\mathbf{B} = \frac{2}{3}\mu_0 \mathbf{M} \quad (r < a), \quad (4)$$

ezért

$$(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \frac{2}{3}\mu_0(\mathbf{V} \times \mathbf{M}),$$

és (2) alapján

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} \times \mathbf{M}) &= ((\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{M}) = \\ &= (\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Omega})\mathbf{r} - (\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\Omega}. \end{aligned} \quad (5)$$

Vegyük most figyelembe, hogy \mathbf{M} és $\boldsymbol{\Omega}$ párhuzamos konstans vektorok és a divergencia Descartes-koordinátákban felírt képlete szerint $\text{div } \mathbf{r} = 3$, valamint

$$\text{div}((\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\Omega}) = M\Omega.$$

Mindezek alapján

$$\text{div}(\mathbf{V} \times \mathbf{M}) = 2M\Omega \quad (6)$$

és

$$\rho = -\frac{4}{3}\epsilon_0\mu_0 M\Omega. \quad (7)$$

A (4) segítségével könnyen igazolható, hogy a (3) elektromos mező eleget tesz az állandó mágneses mezőnél érvényes $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ Maxwell-egyenletnek is.

A felületi töltéssűrűséget az elektrosztatikából ismert gondolatmenet alapján írhatjuk fel. Eszerint

$$\sigma = \epsilon_0(E_r^+ - E_r^-), \quad (r = a) \quad (8)$$

ahol E_r^+ és E_r^- az elektromos mező radiális (a gömbfelületre merőleges) komponense a felület külső (+) és belső (-) oldalán.

Az E_r^- -t az eddigi képletek alapján könnyű kiszámítani. A (3) szerint

$$E_r = -(\mathbf{V} \times \mathbf{B})_r = -V_\vartheta B_\varphi + V_\varphi B_\vartheta. \quad (9)$$

A \mathbf{B} -nek azonban csak z -komponense van, amelyből

$$B_\varphi = 0 \quad \text{és} \quad B_\vartheta = -\frac{2}{3}\mu_0 M \sin \vartheta \quad (10)$$

(térbeli polárkoordinátákban a φ komponens a "szélességi köröket", a ϑ komponens pedig a "dél-köröket" érinti és a "déli pólus" felé mutat).

A \mathbf{V} -nek ugyanebben a koordinátarendszerben csak φ -komponense van, amely $\Omega r \sin \vartheta$ -val egyenlő, ezért a felületen (9) szerint

$$E_r^- = -\frac{2}{3}a\mu_0 M\Omega \sin^2 \vartheta \quad (r = a). \quad (11)$$

Az E_r^+ meghatározásához a Φ elektrosztatikus potenciált kell ismerni a gömbön kívül, amelyből az elektromos mező az

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi \quad (12)$$

képlettel számítható ki. A gömbön kívül a töltéssűrűség zérus, ezért Φ a homogén

$$\nabla^2\Phi = 0 \quad (r > a) \quad (13)$$

Laplace-egyenletnek tesz eleget. Ha az egyenlet megoldását ismerjük, akkor E_r^+ -t az

$$E_r^+ = -\left. \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (14)$$

képlettel lehet kiszámítani.

Az 1.függelékben megmutatjuk, hogy

$$\Phi = -\frac{1}{9}a^5\mu_0M\Omega \cdot \frac{1}{r^3}(3\cos^2\vartheta - 1) \quad (r \geq a), \quad (15)$$

ahonnan

$$E_r^+ = -\frac{1}{3}a\mu_0M\Omega(3\cos^2\vartheta - 1). \quad (16)$$

A felületi töltéssűrűség tehát a következő:

$$\sigma = \frac{1}{3}a\epsilon_0\mu_0M\Omega(1 + \cos^2\vartheta). \quad (17)$$

Nem nehéz belátni, hogy a teljes felületi töltés pontosan kompenzálja a teljes térfogati töltést.

A térfogati és a felületi töltések a mágnessel együtt forognak és áramsűrűséget hoznak létre. A térfogati töltés esetében például ez az áramsűrűség

$$\Delta\mathbf{J} = \rho\mathbf{V} = -\frac{4}{3}\epsilon_0\mu_0M\Omega\mathbf{V}. \quad (18)$$

Ez a $\Delta\mathbf{J}$ nem jelenik meg az (1) Ohm-törvény baloldalán, mert nem elektromos mező, hanem a forgás hozza létre. A $\text{rot}\Delta\mathbf{B} = \mu_0\Delta\mathbf{J}$ Maxwell-egyenleten keresztül azonban létrehoz valamekkora $\Delta\mathbf{B}$ mezőt, amelyet figyelembe kell venni (1) jobboldalán úgy, hogy \mathbf{B} -hez hozzáadjuk. Ez a korrekció természetesen (3) jobboldalán is megjelenik, de — mint mindjárt látni fogjuk, — elhanyagolhatóan kis járulékot ad \mathbf{E} -hez.

A $\Delta\mathbf{B}$ becslésénél abból indulhatunk ki, hogy a $\text{rot}\Delta\mathbf{B} = \mu_0\Delta\mathbf{J}$ egyenlet szerint a fizikai és a geometriai dimenziók figyelembevételével $|\Delta\mathbf{B}| \sim a\mu_0|\Delta\mathbf{J}|$ (a \sim jel "nagyságrendileg egyenlőt" jelent), ezért a korrekció relatív nagyságrendje (18) és (4) figyelembevételével a következő:

$$\left|\frac{\Delta\mathbf{B}}{\mathbf{B}}\right| \sim a\mu_0\frac{\epsilon_0\mu_0M\Omega V}{\mu_0M} = \frac{a\Omega V}{c^2} \sim \frac{V^2}{c^2}.$$

Ez a korrekció valóban rendkívül kicsi, akár laboratóriumban forgó mágnesről, akár égitestről legyen szó, ezért a továbbiakban sehohsem vesszük figyelembe. Ugyanezen okból hagyjuk figyelmen kívül

azokat az $(1 - V^2/c^2)^{1/2}$ faktorokat is, amelyek a relativitáselmélet szerint a képleteink bizonyos tagjaiban megjelenének.

A mágneshez rögzített kontúr

Vegyük most figyelembe az \mathcal{L} vezetőt is és tegyük fel, hogy rögzítve van a mágneshez ($\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}$). Ha a kontúr nem forogna, a benne létrejövő elektromotoros erőt az

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

képlettel kellene kiszámítani. Mozgó kontúr esetében azonban figyelembe kell venni a mozgás által mágneseesen indukált elektromotoros erőt is:

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{L}} [\mathbf{E} + (\mathbf{V} \times \mathbf{B})] \cdot d\mathbf{l}. \quad (19)$$

Az integrál kiszámításánál a kontúrt a koordináta-rendszerünkben nyugvónak kell tekinteni, mert a mozgás hatását a második tag már tartalmazza.¹

A (19) képlet az \mathcal{E} elektromotoros erőt két tag, az $\mathcal{E}_e = \int_{\mathcal{L}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ elektromos és az $\mathcal{E}_m = \int_{\mathcal{L}} (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$ mágneses (vagy mozgási) komponens összegeként állítja elő.

Az elektromos komponens eredete a forgó mágnes elektromos polarizációja, ezért ez az elektromotoros erő potenciálkülönbségként is kifejezhető:

$$\mathcal{E}_e = \Phi_B - \Phi_A, \quad (20)$$

és nyilván nem függ a kontúr alakjától (fix végpontok mellett).

A kontúrfüggetlenség azonban az \mathcal{E}_m -re is érvényes, mert bármilyen zárt kontúrra

$$\oint (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (21)$$

A Stokes-tétel alapján ugyanis

$$\oint (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Sigma} \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma,$$

¹Ez a számítási mód akkor jogos, ha a kontúr elmozdulása elhanyagolható, mialatt a fény (az elektromágneses gerjesztés) keresztülhalad a rendszeren. A fizikai feladatok, amelyeket szem előtt tartunk, nem igényelnek ennél nagyobb pontosságot.

ahol Σ a kontúr által kifeszített felület, \mathbf{n} pedig Σ normálvektora. A 2.függelékben megmutatjuk, hogy egész térben (a mágnesen kívül is!)

$$\text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (22)$$

ezért (21) valóban igaz és \mathcal{E}_m független az \mathcal{L} konkrét alakjától.

Mivel ugyanez érvényes \mathcal{E}_e -re is, az \mathcal{E} elektromotoros erő kiszámításánál a kontúrt tetszésünk szerint választhatjuk meg. Válasszuk úgy, hogy teljes egészében a mágnesen belül haladjon. A (3) következtében egy ilyen kontúron (19) integrandusa végig zérus, ezért minden olyan lineáris vezetőben, amely a mágnessel együtt forog és végpontjai a mágnes felületén vannak, az \mathcal{E} elektromotoros erő nullával egyenlő.

Az unipoláris indukció

Amikor az \mathcal{L} vezető forog a mágneshez képest ($\omega \neq \Omega$), a benne létrejövő elektromotoros erő ugyanúgy két részből áll, mint az együttmozgó vezető esetében. Az \mathcal{E}_e elektromos összetevőt a mágnesben indukálódott töltések okozzák, ezért (20) ebben az esetben is érvényes. A Φ_A és a Φ_B (15)-ből számítható ki. Az A -ban $\vartheta = 0^\circ$, a B -ben $\vartheta = 90^\circ$ és mindkét esetben $r = a$, ezért

$$\mathcal{E}_e = \Phi_B - \Phi_A = \frac{1}{3}a^2\mu_0 M\Omega. \quad (23)$$

Az előző pontban láttuk, hogy együttforgáskor $\mathcal{E}_m = -\mathcal{E}_e$. Ez az elektromotoros erő a kontúr pontjainak a sebességétől függ a választott inerciarendszerben és együttforgás esetén Ω -val arányos. Nyilvánvaló, hogy amikor a kontúr függetlenül forog, \mathcal{E}_m -t úgy kapjuk meg, hogy (23) negatívjában Ω -t ω -ra cseréljük fel:

$$\mathcal{E}_m = -\frac{1}{3}a^2\mu_0 M\omega. \quad (24)$$

A kontúrban létrejövő elektromotoros erő tehát a következő:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{3}a^2\mu_0 M(\Omega - \omega). \quad (25)$$

A csúszó kontaktusok révén \mathcal{L} záródik az elektromosan vezető mágnesen keresztül, ezért a kontúrban létre fog jönni valamilyen áram.

A szimmetriatengelye körül forgó mágnes a *nyugvó* ($\omega = 0$) kontúrban is létrehoz elektromotoros erőt és áramot. Ennek a jelenségnek, amely különösen paradoxális, mert nem magyarázható sem az indukció törvényével (hiszen a mágneses mező időben állandó), sem mozgási indukcióként (hiszen a vezető nyugszik), külön nevet adtak. Ez az *unipoláris indukció*, amely teljes egészében a mágnes elektromos polarizációjából származó \mathcal{E}_e -nek köszönheti a létét, és a nagyságát gömbmágnes esetében a (23) képlet határozza meg.

A (25) szerint a vezetőben létrejövő elektromotoros erő nagysága a vezető és a mágnes *relatív* forgásától függ. Ez azért nagyon meglepő, mert a mechanikában a forgás abszolút: egy forgó deformálható gömb forgási ellipszoiddá válik és ez a deformáció az abszolút forgás jele, mert a gömbbel együtt forgó rendszerben is észlelhető.

Az elektrodinamikában sincs másképp. A forgó mágnes elektromos polarizáltsága éppúgy objektív jelenség (abszolút), mint a forgó gömb deformációja és egyértelműen bizonyítja, hogy nem a kontúr forog, hanem a mágnes. Érdekes, hogy *speciálisan a kontúrban keletkező elektromotoros erő szempontjából* csak a relatív forgás számít. De ez is csak akkor van így, amikor a mágnes vezeti az elektromosságot. Szigetelő anyagból készült mágnesre (25) nem érvényes, ekkor \mathcal{E} már nemcsak az Ω és az ω különbségétől függ. A következő pontban ezt a kérdést vizsgáljuk.

A forgó szigetelő mágnes

Tegyük fel, hogy gömbmágnesünk nem vezeti az elektromosságot ($\gamma = 0$), de elektromosan polarizálható ($\epsilon \geq \epsilon_0$). Stacionér rezsimben ekkor sem folynak áramok benne, ezért (1) baloldala most is nulla, de $\gamma = 0$ következtében ebből most nem következik a (3) összefüggés.

Az (1) jobboldalán a γ -t szorzó $\mathbf{E} + (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ kifejezés most nem áramot, hanem elektromos polarizációt hoz létre a

$$\mathbf{P} = \chi\epsilon_0 [\mathbf{E} + (\mathbf{V} \times \mathbf{B})] = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)} \quad (26)$$

képlet alapján (χ az elektromos szuszceptibilitás), amelyben $\mathbf{P}^{(1)} = \chi\epsilon_0 \mathbf{E}$ a sztatikusan, $\mathbf{P}^{(2)} =$

$\chi\epsilon_0(\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ pedig a mágnesesen indukált dielektromos polarizáció.

Ez azonban még nem a teljes elektromos polarizáció, mert figyelembe kell venni, hogy a körpályán mozgó elemi mágneses dipólusok a mozgásuk következtében elektromos dipólusnyomatéokra tesznek szert, és ezért létrejön egy harmadik,

$$\mathbf{P}^{(3)} = \epsilon_0\mu_0(\mathbf{V} \times \mathbf{M}) \quad (27)$$

polarizációs járuléka is.

Az elemi mágneses dipólusok azért tesznek szert erre az elektromos dipólusnyomatéokra, hogy az elemi $d\mathcal{E}$ elektromotoros erő, amely egy (inerciarendszerben nyugvó) $d\mathbf{l}$ vezetődarabban egy hozzá képest egyenesletes egyenesvonalú mozgást végző \mathbf{m} mágneses dipólus hatására létrejön, csak a relatív sebességtől függjön: abban az esetben is legyen ugyanakkora, amikor a dipólus nyugszik és a vezetődarab mozog ugyanazzal a sebességgel ellentétes irányban.

Amikor a vezetődarab mozog, $d\mathcal{E} = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$. Amikor nyugszik ilyen járuléka nem lép fel, de a vezetődarab helyén a távolodó (vagy közeledő) dipólus időben változó mágneses tere elektromos mezőt hoz létre, amelyhez $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ elektromotoros erő tartozik. A számítás azonban azt mutatja, hogy $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq d\mathcal{E}$. Egyenlőséget csak akkor kapunk, ha figyelembe vesszük, hogy a $-\mathbf{v}$ sebességgel mozgó mágneses dipólusnak $\epsilon_0\mu_0((-\mathbf{v}) \times \mathbf{m})$ elektromos dipólusnyomatéka van, amelynek a dipólustere szintén járulékot ad az elektromotoros erőhöz.

Mindhárom polarizáció a

$$\rho_i = -\operatorname{div} \mathbf{P}^{(i)} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (28)$$

képletnek megfelelő töltéssűrűséget hoz létre. A képlet ebben a formájában csak a térfogati töltéssűrűségekre érvényes, de a Gauss-tétel segítségével lezármasztatható belőle a felületi töltéssűrűségekre vonatkozó

$$\sigma_i = P_r^{(i)} \quad (r = a, \quad i = 1, 2, 3) \quad (29)$$

összefüggés: A felületi töltéssűrűség a polarizációs vektor normál komponensével egyenlő a felület belső oldalán.

Az első Maxwell-egyenlet szerint

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3.$$

Célszerű bevezetni a

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}^{(1)}$$

eltolási vektort, amellyel ez az egyenlet

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_2 + \rho_3 \quad (30)$$

alakra hozható. Ezzel a problémát standard elektrosztatikai feladattá alakítottuk: Egy ϵ dielektromos állandójú homogén gömbre $(\rho_2 + \rho_3)$ térfogati és $(\sigma_2 + \sigma_3)$ felületi töltéssűrűséget viszünk rá. Meghatározandó a gömb elektrosztatikus potenciálja.

A $\chi\epsilon_0 = (\epsilon - \epsilon_0)$ valamint (4) következtében

$$\mathbf{P}^{(2)} + \mathbf{P}^{(3)} = \frac{1}{3}(2\epsilon + \epsilon_0)(\mathbf{V} \times \mu_0 \mathbf{M}),$$

a (6) felhasználásával pedig

$$\begin{aligned} \rho_2 + \rho_3 &= -\operatorname{div}(\mathbf{P}^{(2)} + \mathbf{P}^{(3)}) = \\ &= -\frac{2}{3}(2\epsilon + \epsilon_0)\mu_0 M \Omega. \end{aligned} \quad (31)$$

Ez kerül (30) jobboldalára. A felületi töltéssűrűségekre hasonló módon a

$$\sigma_2 + \sigma_3 = P_r^{(2)} + P_r^{(3)} = \frac{1}{3}(2\epsilon + \epsilon_0)(\mathbf{V} \times \mu_0 \mathbf{M})_r$$

képletet kapjuk. Az (5), valamint $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{M}) = rM \cos \vartheta$ és $\Omega_r = \Omega \cos \vartheta$ következtében fly módon

$$\sigma_2 + \sigma_3 = \frac{1}{3}(2\epsilon + \epsilon_0)a\mu_0 M \Omega \sin^2 \vartheta. \quad (32)$$

Az elektrosztatikában szokásos eljárást követve \mathbf{D} -t $\epsilon \mathbf{E}$ formában írjuk fel és az $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$ összefüggéssel áttérünk a potenciálra, amelyre (30)-ból a

$$\Delta \Phi = \begin{cases} -\frac{1}{\epsilon}(\rho_2 + \rho_3) & (r < a) \\ 0 & (r > a) \end{cases} \quad (33)$$

egyenletet kapjuk.

A felületi töltéssűrűség hatását a

$$D_r^+ - D_r^- = \sigma_2 + \sigma_3$$

határfeltétellel kell figyelembe venni (\mathbf{D}^+ és \mathbf{D}^- az eltolási vektor a felület külső és belső oldalán). A potenciálon keresztül kifejezve ez az egyenlet

$$-\epsilon_0 \frac{\partial \Phi_+}{\partial r} + \epsilon \frac{\partial \Phi_-}{\partial r} = \sigma_2 + \sigma_3. \quad (r = a) \quad (34)$$

(Φ_+ és Φ_- a potenciál a gömbön kívül és belül).

A (33) egyenlet megoldását a 3.függelékben vizsgáljuk. Azt találjuk, hogy

$$\Phi = -\frac{2\epsilon + \epsilon_0}{9(2\epsilon + 3\epsilon_0)} \mu_0 M \Omega (3 \cos^2 \vartheta - 1) \times \begin{cases} r^2 & (r < a) \\ \frac{a^5}{r^3} & (r > a), \end{cases} \quad (35)$$

ezért az \mathcal{E} elektromotoros erő dielektromos polarizációból származó járuléka

$$\mathcal{E}_e = \Phi_B - \Phi_A = \frac{2\epsilon + \epsilon_0}{3(2\epsilon + 3\epsilon_0)} a^2 \mu_0 M \Omega. \quad (36)$$

A mozgásból származó járuléka most is (24), így a teljes elektromotoros erő a következő:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{3} a^2 \mu_0 M \left(\frac{2\epsilon + \epsilon_0}{2\epsilon + 3\epsilon_0} \Omega - \omega \right). \quad (37)$$

Ez az elektromotoros erő már nemcsak a kontúr és a mágnes relatív forgásától függ. Stacionér áramot természetesen nem hoz létre, mert a mágnes, amelyen keresztül \mathcal{L} záródhatna, szigetelő. Az A és a (gömbön csúszó) B pont közötti feszültséget azonban meg lehet mérni.

A (37)-ből $\epsilon \rightarrow \infty$ -nél visszakapjuk a fémgömbben érvényes (25) képletet annak következtében, hogy a fémek végtelenül könnyen polarizálhatók. Ha a (37) levezetése során végig figyelemmel kísérjük a $\mathbf{P}^{(3)}$ polarizációból származó járulékot, a (36) számlálóját $[2(\epsilon - \epsilon_0) + 3\epsilon_0]$ alakban kapjuk meg, amelyben a $3\epsilon_0$ származik $\mathbf{P}^{(3)}$ -ből. Mivel ez a tag nem arányos ϵ -nal, az $\epsilon \rightarrow \infty$ limeszből kiesik.

Azt jelenti ez, hogy az elektromosan vezető forgó mágnesben az elemi mágneses dipólusok nem tesznek szert elektromos dipólusnyomatékra? Egyáltalán nem. A (3) mutatja, hogy elektromosan vezető

mágnesben a forgás közvetlenül az elektromos mezőt határozza meg, és nincs szükség rá, hogy ebben a mezőben szétválasszuk a vezetési elektronok és a mozgás által indukált elektromos dipólusok járulékat. A szabad töltések még akkor is kialakítanak a (3) által megkövetelt elektromos mezőt, ha a mozgás történetesen nem hozna létre elektromos dipólusokat. Szigetelőben azonban a polarizációs vektorok azok, amelyeket a forgás közvetlenül meghatároz, ezért ebben az esetben minden lehetséges polarizációs járulékot explicite figyelembe kell venni.

Az elektromotoros erő akkor sem nulla, amikor a mágnes nem vezeti az áramot ($\gamma = 0$) és nem is polarizálható ($\epsilon = \epsilon_0$). A (37) szerint ekkor ugyanis

$$\mathcal{E} = \frac{1}{3} A^2 \mu_0 M \left(\frac{3}{5} \Omega - \omega \right).$$

Ez az \mathcal{E} teljes egészében annak az elektromos dipólusnyomatéknak a következménye, amelyre a mágneses dipólusok a mozgásuk következtében tesznek szert.

A kipányvázott űrszonda (tethered satellite)

Az 1996 február 23-án felbocsátott *Columbia* űrkomppal magával vitt egy 1,6 méter átmérőjű űrszondát, amelyet a *NASA* és az *ISA* (Italian Space Agency) fejlesztett ki. Amikor az űrkomppal stabil pályán, kb. 90 km magasan keringett, egy csörlő segítségével a legénység elkezdte a szondát lassan eltávolítani az űrkomptól a Földdel ellentétes irányba. A szondát az űrkomppal kábel kötötte össze, amellyel "ki volt pányvázva" az űrkompphoz. A kábel az űrkomppal és a szondával együtt a Föld mágneses terében keringett és ennek következtében valamekkora \mathcal{E}_m mozgási indukált elektromotoros erő keletkezett benne. A kísérlet célja az volt, hogy mérjék meg azt az áramot, amit ez az elektromotoros erő hoz létre, mert egyrészt ezzel a módszerrel elektromos energiát lehetne termelni az űrállomások ellátására, másrészt fontos adatokat lehet nyerni az ionoszféráról. Ahhoz ugyanis, hogy a kábelben létrejövő elektromotoros erő állandóan áramot termeljen, zárt áramkört kell létrehozni és ez a lezárás az ionoszférán keresztül történt. A szondán elhelyezett elektroncsapda be tudta fogni az ionosz-

féra kószáló elektronjait, az űrkompon pedig egy elektromotoros ki tudott juttatni az űrbe elektronokat.

Az elektromotoros erő nyilván annál nagyobb, minél hosszabb a kábel. A 1996-s kísérletben — amely egyébként már a második próbálkozás volt, — 21 kilométerre tervezték kiengedni a szondát, de 19,7 kilométernél a kábel elszakadt és a szonda odaveszett. A kísérlet mégsem volt eredménytelen, mert a szakadás előtt a kábelben 3500 volt feszültség és 0,5 amper áram jött létre.

A Föld a saját mágneses terében forog, ezért eddigi megfontolásaink alapján feltételezhető, hogy a forgás következtében elektrosztatikus potenciálja is van, amely az \mathcal{E}_m mellett még valamekkora \mathcal{E}_e elektromotoros erőt is létrehoz a kábelben. A nagyságrendi becslés érdekében tegyük fel, hogy a Föld magja homogén permanens mágnes, amely vezeti az elektromosságot és a tengelye egybeesik a forgástengellyel, a köpeny és a légkör pedig elektromosan nem polarizálható. Egyik feltevés sem igaz, de kiindulópontnak talán megfelel. Röviden szólva az elektromotoros erő könnyű kiszámíthatósága érdekében a Földet a magjával azonos sugarú csupasz gömbmágnessel helyettesítjük.

Az egyszerűség kedvéért azt is feltesszük, hogy az űrkompon a tartozékaival az Egyenlítő síkjában (xy sík) kering r sugarú körön, a kábel egy Δl hosszúságú sugárirányú vezetődarab, amelyen a pozitív irány r növekedési irányába mutat. Ekkor

$$\Delta \mathcal{E}_m = (\mathbf{v} \times \mathbf{B})_r \Delta l.$$

A \mathbf{v} a kábel keringési sebessége az állócsillagokhoz rögzített inerciarendszerben és a nagysága ωr -el egyenlő. A \mathbf{B} -nek csak $+z$ irányú komponense van, amely gömbmágnes esetében

$$\frac{1}{3} \mu_0 M \left(\frac{a_c}{r} \right)^3$$

nagyságú, ahol a_c a mag sugara. Így

$$\Delta \mathcal{E}_m = + \frac{1}{3} \mu_0 M \omega \frac{a_c^3}{r^2} \Delta l.$$

Mivel $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ az r növekedési irányába mutat, ez az elektromotoros erő pozitív irányú és a kábelben

a szondától az űrkompon felé irányuló elektronáramot hoz létre. Másrészt

$$\Delta \mathcal{E}_e = E_r \Delta l = - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Delta l,$$

amelyet a $\vartheta = 90^\circ$ síkban kell kiszámítani. A (15) szerint

$$\Delta \mathcal{E}_e = \frac{1}{3} \mu_0 M \Omega \frac{a_c^5}{r^4} \Delta l.$$

Ez a $\Delta \mathcal{E}_e$ körülbelül két nagyságrenddel kisebb, mint $\Delta \mathcal{E}_m$, mert

$$\left| \frac{\Delta \mathcal{E}_e}{\Delta \mathcal{E}_m} \right| = \left(\frac{a_c}{r} \right)^2 \frac{\Omega}{\omega}$$

és $a_c/r \approx 1/2$, $\Omega/\omega \approx 1/20$. Már ez sem elhanyagolhatóan kis járulék, de ha a keringés az egyenlítő-sík helyett (az állócsillagokhoz rögzített) *délkör* mentén történik, akkor $\Delta \mathcal{E}_m = 0$ (mert $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ merőleges a radiális irányra) és *csak* $\Delta \mathcal{E}_e$ ad járulékot a kábelben létrejövő elektromotoros erőhöz.

Az ionoszféra azonban, amely — mint láttuk — nélkülözhetetlen az elektromotoros erő észleléséhez, teljesen leárnyékolhatja a Föld forgási polarizációjából származó elektrosztatikus potenciálját. A Föld réteges szerkezetét figyelembe lehetne venni pontosabban is, de valószínű, hogy az ionoszféra hatása az, ami a leglényegesebb. Mindenesetre érdekes lenne összehasonlítani különböző hajlásszögű pályákon az elektromotoros erő nagyságát és időbeli változásait, mert ebből esetleg következtetni lehetne a Föld elektromos polarizáltságára.

1. Függelék

A (13) egyenletnek az $a > r$ külső tartományban keressük az olyan megoldását, amely töltetlen gömböt ír le (a potenciál $1/r$ -nél gyorsabban tart zérushoz) és a gömbfelületen az elektromos mező tangenciális komponense megegyezik a (3) belső tér tangenciális komponensével. Mivel bizonyosan van felületi töltéssűrűség, amely a térfogati töltést kompenzálja, ezért \mathbf{E} normál komponensének $r = a$ -nál nem lesz folytonos.

A feladat tengelyszimmetriája miatt az E_φ tangenciális komponens zérus, csak az

$$E_\vartheta = - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \Big|_a$$

különbözik zérustól, amely (3) szerint a következő:

$$E_{\vartheta} = -(\mathbf{V} \times \mathbf{B})_{\vartheta} = -V_{\varphi} B_r + V_r B_{\varphi}.$$

A második tag mindkét tényezője zérus, az első tagban pedig

$$V_{\varphi} = \Omega r \sin \vartheta, \quad B_r = \frac{2}{3} \mu_0 M \cos \vartheta,$$

ezért

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \Big|_a = \frac{2}{3} \mu_0 M \Omega a \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (38)$$

A (13)-nak az a tengelyszimmetrikus megoldása, amely ennek a feltételnek eleget tesz és a végtelenben zérushoz tart a következő:

$$\Phi(r, \vartheta) = \frac{A}{r^3} P_2(\cos \vartheta) = \frac{A}{2r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \quad (r > a). \quad (39)$$

A $P_2(\cos \vartheta)$ a 2-ik Legendre-polinom, a A pedig egy konstans, amelyre (38)-ból a

$$A = -\frac{2}{9} a^5 \mu_0 M \Omega$$

kifejezést találjuk. Ezt (39)-be írva kapjuk a (15) megoldást.

2.Függelék

A vektorszorzat rotációjára vonatkozó összefüggés alapján

$$\text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{V} \text{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{V}.$$

A harmadik tag $\text{div} \mathbf{B} = 0$, a negyedik $\text{div} \mathbf{V} = 0$ miatt zérus, ezért Descartes koordinátákban, ahol $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, a $\text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ j -ik komponense a következő:

$$\text{rot}_j(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = B_i \partial_i V_j - V_i \partial_i B_j. \quad (40)$$

Itt és az alább következő képletekben egy szorzatban kétszer előforduló azonos indexre összegzés értendő (pl. $B_i \partial_i = B_x \partial_x + B_y \partial_y + B_z \partial_z$).

Vegyük most figyelembe (2)-t. A vektorszorzat komponenseire használjuk a Descartes-koordinátákban érvényes $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})_i = \epsilon_{ijk} \Omega_j x_k$

képletet, amelyben $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$, ϵ_{ijk} pedig a teljesen antiszimmetrikus tenzor (ϵ -szimbólum)². Ezt (40)-ben kihasználva a

$$\text{rot}_j(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \epsilon_{jkl} B_i \partial_i (\Omega_k x_l) - \epsilon_{ikl} \Omega_k x_l \partial_i B_j$$

egyenlőségre jutunk. Mivel az áramsűrűség mindenütt zérus, a \mathbf{B} rotációmentes, azaz $\partial_i B_j = \partial_j B_i$, ezért

$$\text{rot}_j(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \epsilon_{jkl} B_i \partial_i (\Omega_k x_l) - \epsilon_{ikl} \Omega_k x_l \partial_j B_i.$$

Az első tagban

$$\partial_i (\Omega_k x_l) = \Omega_k \frac{\partial x_l}{\partial x_i},$$

ami $i = l$ -nél Ω_k -val, $i \neq l$ -nél pedig nullával egyenlő ($\partial_i x_l = \delta_{il}$ Kronecker-szimbólummal egyenlő). Ennek következtében

$$\text{rot}_j(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \epsilon_{jki} B_i \Omega_k - \epsilon_{ikl} \Omega_k x_l \partial_j B_i.$$

A második tagban ellentétes irányú átalakítást végzünk: $x_l \partial_j B_i = \partial_j (x_l B_i) - \delta_{lj} B_i$. Ha ezt az előző képletbe behelyettesítjük, és figyelembe vesszük, hogy Ω_k valamint az ϵ -szimbólum konstans, a

$$\text{rot}_j(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = -\partial_j (\epsilon_{ikl} B_i \Omega_k x_l) + (\epsilon_{jki} + \epsilon_{ikj}) B_i \Omega_k$$

képletre jutunk. A jobboldalon az ϵ -szimbólumok összege zérus, az első tagban pedig a parciális deriválás jele alatt a \mathbf{B} , $\boldsymbol{\Omega}$ és az \mathbf{r} vegyes szorzata áll:

$$\text{rot}_j(\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = -\partial_j [\mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})].$$

A vegyes szorzat a vektorok Descartes-komponenseiből képzett determinánssal egyenlő. A mágnes tengelyszimmetriája miatt azonban az \mathbf{r} -beli \mathbf{B} benne fekszik az $\boldsymbol{\Omega}$ (a z -tengely) és az \mathbf{r} által meghatározott síkban, ezért a determináns zérus. Ezzel beláttuk, hogy a $(\mathbf{V} \times \mathbf{B})$ vektormező rotációmentes.

Ez a következtetés nemcsak gömbre érvényes, hanem minden olyan tengelyszimmetrikus mágnesre, amely a szimmetriatengelye körül forog. A forgó

² $\epsilon_{ijk} = +1$ vagy -1 attól függően, hogy ijk az 123 páros vagy páratlan permutációja. Ha az ijk indexek között van egyforma, a szimbólum értéke zérus.

Faraday-korongban például akkor is létrejön áram, ha nincs külső mágneses tér, viszont a korong maga a forgástengellyel párhuzamosan mágnesezve van. Amikor azonban a tengelyszimmetria sérül, lesznek olyan adott \mathbf{r} helyzetvektorú pontok, amelyek váltakozva kerülnek a mágnesen kívülre és belülré. A tárgyalásunk az ilyen esetekre nem vonatkozik.

3.Függelék

A (33) olyan megoldását keressük, amely mindenütt véges, $r = a$ -ban folytonos és eleget tesz (34)-nek. A (32) ϑ függése sugallja, hogy a megoldást

$$\Phi_- = Ar^2 P_2(\cos \vartheta) + f(r) = \frac{A}{2} r^2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) + f(r)$$

$$\Phi_+ = \frac{B}{r^3} P_2(\cos \vartheta) = \frac{B}{2r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$$

alakban keressük, ahol A és B konstansok, $f(r)$ pedig a

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df}{dr} \right) = -\frac{1}{\epsilon} (\rho_2 + \rho_3) \quad (41)$$

egyenlet partikuláris megoldása, amelyet Φ folytonossága miatt úgy kell megválasztani, hogy $f(a)$ legyen nulla:

$$f(r) = \frac{\rho_2 + \rho_3}{6\epsilon} (a^2 - r^2).$$

A folytonosság miatt $B = Aa^5$, tehát

$$\Phi_- = \frac{A}{2} r^2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \frac{\rho_2 + \rho_3}{6\epsilon} (a^2 - r^2)$$

$$\Phi_+ = \frac{a^5 A}{2r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1).$$

A (34) jobboldalát (32) figyelembe vételével célszerű

$$\sigma_2 + \sigma_3 = \frac{1}{9} (2\epsilon + \epsilon_0) a \mu_0 M \Omega [2 - (3 \cos^2 \vartheta - 1)]$$

alakban felírni. Ekkor (34) a következő:

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \cdot \frac{3}{2} a A (3 \cos^2 \vartheta - 1) + \epsilon a A (3 \cos^2 \vartheta - 1) - \frac{1}{3} (\rho_2 + \rho_3) a &= \\ = \frac{1}{9} (2\epsilon + \epsilon_0) a \mu_0 M \Omega [2 - (3 \cos^2 \vartheta - 1)] & \end{aligned} \quad (42)$$

A $(3 \cos^2 \vartheta - 1)$ -t nem tartalmazó tagok (31) figyelembe vételével kiejtik egymást, a maradék egyenletből pedig A -ra az

$$A = -\frac{2}{9} \cdot \frac{2\epsilon + \epsilon_0}{2\epsilon + 3\epsilon_0} \mu_0 M \Omega$$

kifejezést kapjuk, amelyből következik (35).

Megjegyezzük, hogy (42)-ből azért estek ki a $P_2(\cos \vartheta)$ -t nem tartalmazó tagok, mert a gömb töltetlen: Az (28) és a (29) következtében mindhárom típusú térfogati és felületi töltés külön-külön kompenzálódik. Ha nem lenne ilyen kompenzáció, akkor Φ_+ -hoz hozzá kellene még adni egy C/r járulékot is, amelyben C arányos a gömb Q töltésével: $C = Q/4\pi\epsilon_0$.