Hamilton-dinamika

Az ELTÉn az 1988-89 tanévben tartott speci jegyzete

Hraskó Péter

Processed with the *Overleaf* online Latex facility
TORNÓC KIADÓ
2020

Tartalomjegyzék

1. Bevezető megjegyzések 2

2. A hatáselv (Hamilton-elv) 3

3. Koordináta-transzformációk 6

4. A Lorentz-erő a hatáselvben 10

5. A hatásfüggvény 13

6. Szimmetriák és megmaradási tételek 20

7. Szimmetriák és megmaradási tételek elektromágneses mezőben 22

8. A Hamilton-féle kanonikus egyenletek 32

9. A Hamilton-Jacobi egyenlet 35

10. Mozgás elektromágneses mezőben (Hamilton-forma) 42

11. A Poisson-zárójel 44

12. Hamilton-mechanika kényszerekkel 51

13. A kanonikus transzformációk 57

14. Infinitezimális kanonikus transzformációk. 67

15. Vektormezők. 70

16. Lie-csoportok. 79

17. A fontosabb dinamikai Lie-csoportok. 94

18. Lie-csoportok kanonikus realizációja. 102

19. Az $SO_\tau(3)$ kanonikus realizációi. 105

20. A Galilei-csoport kanonikus realizálása. 113

21. A Poincaré-csoport kanonikus realizálása. 118

Függelék 127

1. Bevezető megjegyzések

Cél: A klasszikus mechanika elveinek áttekintése a Heisenberg-Dirac (vagy más néven kanonikus) kvantálási eljárás nézőpontjából. A mechanika elvein a kanonikus (≡Hamilton) elméletet értjük, szembeállítva a newtoni mechanikával.

Az n tömegpontra vonatkozó Newton-egyenletek megadása n vektorfüggvényt (erőt) igényel:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}^{(i)} = \mathbf{F}_i\big(\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}, \dots \mathbf{r}^{(n)}\big) \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Problémák: Elvi problémát jelent a *távolhatás*. *„Newton felfogása a vonzásról (és vele együtt az erőről) csaknem asztrológiai természetű elképzelés volt, amelyet a legtöbb felvilágosult gondolkodó... okkultnak tekintett, de okkultnak tekintette maga Newton is." (K. Popper, Objective Knowledge, p. 174)*

Gyakorlati problémák: (1) A koordinátarendszerek közötti átmenet nehézkes, és (2) a jobboldalon az erők között fel kell tüntetni a kényszererőket is (amelyeket általában nem ismerünk).

A *hatáselvek* csak egyetlen függvény (az L Lagrange-függvény vagy a H Hamilton-függvény) megadását igénylik, amely az erőknél sokkal egyszerűbben, skalárként transzformálódik, és nem igényli a kényszererők ismeretét. A mozgásegyenleteket az L-t vagy a H-t tartalmazó *variációs elvből* származtatjuk: Az összes lehetséges mozgás közül az valósul meg, amelyre a *hatásnak* szélső értéke (minimuma) van.

A technikai előny nyilvánvaló, de az elv azt sugallja, hogy a mozgás *teleológikus* (azt a *célt* követi, hogy minimálissá tegyen egy hosszú időre kiterjedő integrált), nem pedig *kauzális* (amikor a mozgást a kezdeti feltételek határozzák meg).

A variációs-elvek őstípusa a *Fermat-elv*. Fermat a fénytörés törvényeit 1662-ben a

$$\delta \int_A^B \frac{dl}{v} = \delta \int_A^B dt = 0$$

variációs elv alapján értelmezte, amelyben v a fény terjedési sebessége. Szavakban: Az A és a B pont között a fény azt az utat „választja" , amelyen a lehető leghamarabb jut el A-ból B-be. Fermat eredeti megfogalmazásában „a természet a legkönnyebb és legkényelmesebb módon jár el" .

A mechanikában eleinte nem volt világos, *minek* a minimumát kell keresni. *Maupertuis* 1774-ben a $\delta \int_A^B mv\, ds = 0$ variációs elvből indult ki, de ma már ezt speciális esetnek tekintjük. Az elv végleges formáját *Hamilton* találta meg 1834-ben.

A klasszikus mechanikában a hatás — segédfogalom. A hatáselv (minimumelv) alkalmazása nem jelenti azt, hogy szükségképpen teleológikus álláspontot foglalunk el. Csupán azt a matematikai lehetőséget használjuk ki, hogy a Newton-egyenletek időben másodrendű differenciálegyenletek, amelyek megoldását nem csak a kezdeti feltételeket kifejező konstansok megválasztásával lehet rögzíteni.

A kanonikus kvantálásban a hatás szerepe felértékelődik: Csak a hatáselv formájában megfogalmazott klasszikus feladat kvantálható (általában nem egyértelműen). A jelen kurzus témája azonban a klasszikus mechanika, ezért nem foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy ez a felértékelődés szükségképpen elvezet-e az oksági elv feladásához.

2. A hatáselv (Hamilton-elv)

A) Az L Lagrange-függvény.

Diszkrét szabadsági fokú rendszerek általános koordinátáit a leggyakrabban q_r-vel jelöljük ($r = 1, 2, \dots$). Egyetlen szabadsági foknál az indexet természetesen elhagyjuk, de az index nélküli q gyakran a koordináták összeségét fogja jelenteni.

A rendszert egyetlen L függvénnyel jellemezzük, és posztulálunk egy szabályt a mozgásegyenletek leszármaztatására. Diszkrét szabadsági fokú rendszerekre L a q_r, $\dot{q}_r$ általános koordináták és sebességek, valamint az idő függvénye: $L = L(q, \dot{q}, t)$. Pontrendszereknél az index utalhat a tömegpontra is, pl. (x_r, y_r, z_r) vagy $(r_s, \vartheta_s, \varphi_s)$. Egyetlen tömegpont esetében az indexet természetesen elhagyjuk.

A mezők (folytonos szabadsági fokú rendszerek) jelölése $\varphi_r(x, t)$, vagy röviden φ_r. Az index elhagyása többnyire a különböző mezők összeségére utal. A φ', φ'' vagy $\partial\varphi$ a térbeli parciális deriváltak összefoglaló jele. A pontot általában a teljes időbeli deriválás jelölésére használjuk, de mezők esetében $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ időbeli parciális deriválást jelent. Mezőkre $L = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, \dot{\varphi})$, ahol $\mathcal{L}$ a Lagrange-*sűrűség*.

A q-kat és a φ-ket *Lagrange-koordinátáknak* is hívjuk.

A (holonóm) kényszereket már a Lagrange-függvényben kihasználhatjuk. Egyetlen tömegpont esetében például $L = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$. Amikor a pontot a $z = 0$ síkba kényszerítjük, akkor az új Lagrange-függvény $L' = L'(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = L(x, y, 0, \dot{x}, \dot{y}, 0, t)$. A kényszerek kihasználása után egyezik meg a Lagrange-koordináták száma a rendszer szabadsági fokainak számával.

Dinamikailag független alrendszerekből álló rendszer Lagrange-függvénye az alrendszerek Lagrange-függvényeinek összegével egyenlő.

A Lagrange-függvény megválasztásában a döntő szempont az, hogy a korrekt mozgásegyenletekre vezessen. A leggyakrabban L a T kinetikus energia és az U potenciális energia különbsége ($L = T - U$), de vannak fontos kivételek (mozgás mágneses térben vagy forgó koordinátarendszerben).

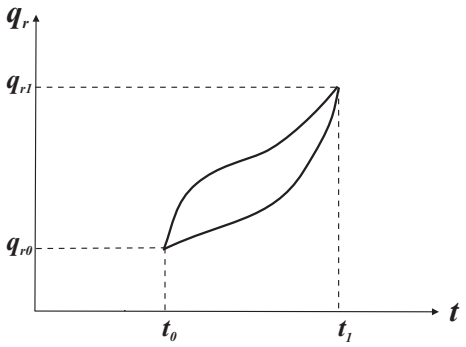
Emlékeztető példák egyetlen tömegpontra:

- Szabad részecskére $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$.
- Harmonikus oszcillátorra $L = \frac{1}{2}m(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$.

B) A hatásfunkcionál.

Egyelőre diszkrét szabadsági fokú rendszerekre korlátozódunk. A *konfigurációs teret* a q_i koordináta-tengelyek feszítik ki, de szükség esetén kiegészítjük az időtengellyel.

Legyen a vizsgált rendszer konfigurációja a t_0 pillanatban $q_r(t_0) \equiv q_0$, a t_1 pillanatban pedig $q_r(t_1) \equiv q_1$ $(t_0 < t_1)$. E két rögzített konfigurációt összekötő időben előre haladó elképzelhető mozgások a *virtuális (lehetséges) pályákon* történnek (2.1 ábra).



2.1 ábra

Az

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\, L(q, \dot{q}, t)$$

hatásfunkcionál minden virtuális pályához egy számot rendel (a *hatást*).

A virtuális pályák közül az a pálya valósul meg, amelyre a hatásfunkcionálnak szélső értéke van (*Hamilton-elv)*:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt\, L(q, \dot{q}, t) = 0, \qquad \text{ha} \quad \delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0.$$

C) Az Euler-Lagrange egyenlet.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt\, L = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt\, \left[\frac{\partial L}{\partial q_r} \delta q_r(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r(t) \right],$$

amelyben

$$\delta q_r(t) = q_r'(t) - q_r(t).$$

Itt és a továbbiakban általában a kétszer előforduló indexekre összegzés értendő.

A $\delta \dot{q}_r$-ben a variálás és az időderiválás felcserélhető:

$$\delta \dot{q}_r(t) = \dot{q}_r'(t) - \dot{q}_r(t) = \frac{d}{dt}\big(q'(t) - q(t)\big) = \frac{d}{dt}\delta q(t).$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt\, L = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt\, \left[\frac{\partial L}{\partial q_r} \delta q_r(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{d}{dt} \delta q_r(t) \right] = \\ = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt\, \left[\frac{\partial L}{\partial q_r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right] \delta q_r(t). \tag{2.1}$$

Mivel $\delta q_r(t_1) = \delta q_r(t_0) = 0$, a $\delta q_r(t)$ pedig tetszőleges, ezért $\delta \int_{t_0}^{t_1} dt\, L$ eltűnésének feltétele az hogy teljesüljenek a

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots) \tag{2.2}$$

Euler-Lagrange egyenletek.

Példa: A harmonikus oszcillátorra $L = \frac{1}{2} m(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$,

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -m\omega^2 q, \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}, \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q}$$

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0.$$

D) Ekvivalens Lagrange-függvények.

Az $L' = L + \Delta L$ ekvivalens L-lel, ha ΔL teljes időderivált:

$$\Delta L = \frac{df(q,t)}{dt} = \dot{q}_r \frac{\partial f}{\partial q_r} + \frac{\partial f}{\partial t},$$

mert ΔL nem ad járulékot a hatásintegrál variációjához. Valóban,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt\, \Delta L(q, \dot{q}, t) = \delta f(q, t_0) - \delta f(q, t_1) = 0,$$

mert $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$ következtében $f(q, t_0)$ és $f_(q, t_1)$ variációja nulla.

Formálisan: A ΔL nem ad járulékot az Euler-Lagrange egyenlethez, mert a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Delta L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \Delta L}{\partial q_r}$$

kifejezés az idő szerinti és a koordináták szerinti deriválás felcserélhetősége miatt azonosan nulla. A mozgásegyenletek elsődlegessége miatt az ekvivalens Lagrange-függvények megkülönböztethetetlenek egymástól (egyenértékűek).

E) Az Euler-Lagrange egyenlet mezőkre (folytonos szabadsági fokú rendszerekre).

Mezőkre, mint már mondottuk

$$L = \int d^3x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, \dot{\varphi}),$$

ahol $\mathcal{L}$ a Lagrange-sűrűség.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt\, L = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^3x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, \dot{\varphi}) = \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r(\mathbf{x},t)} \delta\varphi_r(\mathbf{x},t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \varphi_r(\mathbf{x},t)} \delta\partial_i\varphi_r(\mathbf{x},t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \varphi_r(\mathbf{x},t)} \delta\partial_t\varphi_r(\mathbf{x},t) \right] =$$

$$= \int d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \varphi_r(\mathbf{x},t)} \delta\varphi_r(\mathbf{x},t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^3x\, \partial_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \varphi_r(\mathbf{x},t)} \delta\varphi_r(\mathbf{x},t) \right] +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} dt \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r(\mathbf{x},t)} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \varphi_r(\mathbf{x},t)} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \varphi_r(\mathbf{x},t)} \right) \delta\varphi_r(\mathbf{x},t)$$

Az utolsó képlet első tagja nulla, mert az időbeli határokon a dinamikai változók variációját már a diszkrét esetben is nullának választottuk:

$$\delta\varphi_r(\mathbf{x},t_0) = \delta\varphi_r(\mathbf{x},t_1) = 0, \qquad \forall \mathbf{x}.$$

Mezőknél még a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \varphi_r(\mathbf{x},t)} \delta\varphi_r(\mathbf{x},t) = 0, \qquad \mathbf{x} \in \text{határ}, \qquad t_0 \le t \le r_1$$

peremfeltételeket is ki kell róni. Ekkor a térbeli integrálások elvégzése (a Gauss-tétel alkalmazása) után az utolsó képlet második tagja is eltűnik.

A $\varphi_r(\mathbf{x},t)$ variációja egyébként önkényes, ezért a harmadik tagból leolvashatjuk az Euler-Lagrange egyenlet mezőkre érvényes alakját:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i \varphi_r} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_t \varphi_r} = 0.$$

Példa: A húr kis rezgései. A $\varphi(x,t)$ ekkor a (longitudinális vagy tranzverzális) kitérés a húr x pontjában. Ha $\mu(x)$ a húr tömegsűrűsége, akkor a mozgási energia sűrűsége nyilván $\frac{1}{2}\mu(\partial_t\varphi)^2$. Az $(x, x+dx)$ szakasz rugalmas energiája a $\varphi(x)$ és a $\varphi(x+dx)$ *különbségével* kapcsolatos, ezért a potenciális energia sűrűsége $\frac{1}{2}\gamma(x)(\partial_x\varphi)^2$. Ennek megfelelően a Lagrange-sűrűség

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\mu(\partial_t\varphi)^2 - \gamma(\partial_x\varphi)^2\right],$$

a mozgásegyenlet pedig

$$\mu\partial_t^2\varphi - \partial_x(\gamma\partial_x\varphi) = 0.$$

3. Koordináta-transzformációk

Koordináta-transzformáción a

$$q'_r = F_r(q_1, \dots q_n, t) \equiv F_r(q,t)$$

$$q_r = f_r(q'_1, \dots q'_n, t) \equiv f_r(q',t)$$

invertálható transzformációt értjük (az F transzformáció Jacobi-determinánsa különbözik nullától). Ezzel a transzformációval vezetünk be új koordinátarendszert a konfigurációs térben (vagy térünk vissza a régire).

Képzeljük el az n darab mozgásegyenletet a régi (vesszőtlen) koordinátákban. *Ezekben* áttérni az új (vesszős) koordinátákra rendkívül bonyolult művelet. A hatáselv sokkal egyszerűbb eljárást tesz lehetővé.

Állítás: Ha L'-t az

$$L'(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t)\big|_{q=f(q',t)} \tag{3.1}$$

skaláris transzformációs törvénnyel *definiáljuk*, akkor az L'-ből származtatott Euler-Lagrange egyenlet ugyanaz, mint amit a régi változókban felírt Euler-Lagrange egyenletből változóhelyettesítéssel kapunk:

$$\begin{array}{ccc} L(q,t) & \xrightarrow{\text{könnyű}} & L'(q',t) \\ {\scriptstyle\text{könnyű}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\text{könnyű}} \\ \text{mozgás-egyenlet } q\text{-ban} & \xrightarrow[\text{nehéz}]{} & \text{mozgás-egyenlet } q'\text{-ben} \end{array}$$

A Lagrange-egyenletek tehát *kovariánsak*[1] *az általános koordináta transzformációkkal szemben.*

Az állításunkra két bizonyítást adunk: egy formálisat és egy lényegit.

A formális bizonyítás:

$$\dot{q}'_r \equiv \frac{dF_r}{dt} = \sum_m \frac{\partial F_r}{\partial q_m}\dot{q}_m + \frac{\partial F_r}{\partial t},$$

tehát

$$\frac{\partial \dot{q}'_r}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial F_r}{\partial q_s},$$

míg

$$\frac{\partial \dot{q}'_r}{\partial q_s} = \frac{d}{dt}\frac{\partial F_r}{\partial q_s}.$$

Ennek és a Lagrange-függvény skaláris jellege következtében

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \sum_r \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_r}\frac{\partial \dot{q}'_r}{\partial \dot{q}_s} = \sum_r \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_r}\frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}_s}. \tag{3.2}$$

[1] A két koordinátarendszerben a mozgásegyenletek alakja általában nagyon különböző, mert L és L' a saját változóik különböző függvényei. Ezért használjuk a „kovariáns” elnevezést az „invariáns” helyett.

Másrészt

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} = \sum_r \frac{\partial L'}{\partial q'_r}\frac{\partial q'_r}{\partial q_s} + \sum_r \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_r}\frac{\partial \dot{q}'_r}{\partial q_s} =$$

$$= \sum_r \frac{\partial L'}{\partial q'_r}\frac{\partial F_r}{\partial q_s} + \sum_r \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_r}\frac{d}{dt}\frac{\partial F_r}{\partial q_s} =$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_r \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_r}\frac{\partial F_r}{\partial q_s} + \sum_r \left(\frac{\partial L'}{\partial q'_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_r}\right)\frac{\partial F_r}{\partial q_s} =$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \sum_r \left(\frac{\partial L'}{\partial q'_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_r}\right)\frac{\partial F_r}{\partial q_s}.$$

Az utolsó lépésben (3.2)-et használtuk.

A kapott egyenlet átírható

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial F_r}{\partial q_s}\sum_r \left(\frac{\partial L'}{\partial q'_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_r}\right)$$

alakba. Az (2.2) alapján ebből az egyenletből következik, hogy ha az Euler-Lagrange egyenletek a vesszős változókban teljesülnek, akkor teljesülnek a vesszőtlen változókban is. Mivel feltevés szerint a $\det \dfrac{\partial F_r}{\partial \dot{q}_s} \neq 0$, ezért a fordított állítás is igaz.

A lényegi bizonyítás: A (3.1) skaláris transzformációs törvény azt fejezi ki, hogy L értéke a konfigurációs tér adott pontjában független attól, hogy milyen koordinátákat veszünk fel ebben a térben. A konfigurációs térben a pályák szintén a koordinátarendszertől független geometriai objektumok. Ennek következtében bármely adott L-re és adott pályára számított vonalintegrál értéke is a koordináták megválasztásától független szám. De akkor ugyanaz a pálya teszi stacionérré a Lagrange-függvény két adott pont (és időpont) közötti vonalintegrálját akár a vesszőtlen, akár a vesszős koordinátákon keresztül fejezzük is azt ki. A stacionér pályák ennek következtében kielégítik az Euler-Lagrange egyenleteket a q_r változókban L-lel, a q'_r változókban pedig L'-vel. Ezt kellett igazolnunk.

Ha vannak kényszerek, amelyek a koordináták és az idő között kirótt egyenletekkel fejezhetők ki, akkor a konfigurációs tér n dimenziósról f dimenziósra csökken ($n-f$ kényszerfeltétel esetében). A kényszerekkel összeférő megvalósuló pálya az lesz, amelyiknél a hatásnak *az f dimenziós térre korlátozott pályákra nézve* lesz szélső értéke. Elég nyilvánvaló, hogy ez a pálya is kielégíti az eredeti L-hez tartozó az Euler-Lagrange egyenletet, hacsak az n változós L-t a kényszerfeltételek segítségével f független új koordinátán keresztül fejezzük ki:

$$q_r = f_r(q'_1, \ldots q'_f, t). \qquad r = 1, 2, \ldots n \qquad r < n,$$

és a Lagrange-függvényt (3.1) segítségével írjuk át a kényszerekkel összeférő változókra. Ez a megfontolás igazolja azt a korábbi állításunkat, hogy „a lényszerek a Lagrange-függvényben kihasználhatók” (1/A szakasz).

Példa a koordináta-transzformációra: Áttérés forgó koordinátarendszerre.

Egyetlen tömegpontot vizsgálunk, amelynek Descartes-koordinátái x, y és z. A vesszős Descartes-rendszer forogjon $\mathbf{\Omega}(t)$ szögsebességgel a közös origó körül. Az $\mathbf{\Omega}(t)$ nagysága a pillanatnyi szögsebességgel, iránya pedig a pillanatnyi forgástengellyel egyezik meg. Ha speciálisan $\mathbf{\Omega}(t) = (0,\, 0,\, \Omega(t))$, akkor az $f_r(x', y', z', t)$ $(r = x, y, z)$ transzformációs függvények a következők:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\phi(t) - y'\sin\phi(t) \\ y &= x'\sin\phi(t) + y'\cos\phi(t) \\ z &= z', \end{aligned}\right\} \quad \text{azaz} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi(t) & -\sin\phi(t) & 0 \\ \sin\phi(t) & \cos\phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

ahol $\phi(t) = \phi_0 + \int_0^t dt'\,\Omega(t')$. A második képletet írhatjuk $\mathbf{r} = \hat{R}_t\mathbf{r}'$ alakban is, amely az általános esetre is érvényes.

A sebesség transzformációja: Speciálisan az x-komponensre $\dot{\phi} = \Omega$ figyelembe vételével

$$\dot{x} = \dot{x}'\cos\Omega t - \dot{y}'\sin\Omega t - \Omega(x'\sin\phi(t) + y'\cos\phi(t)) =$$

$$= (\hat{R}_t\dot{\mathbf{r}}')_x - \Omega(\hat{R}_t\mathbf{r}')_y = \left(\hat{R}_t\dot{\mathbf{r}}' + [\mathbf{\Omega}\times\hat{R}_t\mathbf{r}']\right)_x.$$

Általában:

$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}} = \hat{R}_t\dot{\mathbf{r}}' + \dot{\hat{R}}_t\mathbf{r}' = \hat{R}_t\mathbf{v}' + [\mathbf{\Omega}(t)\times\hat{R}_t\mathbf{r}'].$$

Mivel a t pillanatban a forgás az $\mathbf{\Omega}(t)$ iránya körül történik, ezért $\hat{R}_t\mathbf{\Omega}(t) = \mathbf{\Omega}(t)$. Ennek következtében $[\mathbf{\Omega}\times\hat{R}_t\mathbf{r}'] = [\hat{R}_t\mathbf{\Omega}\times\hat{R}_t\mathbf{r}'] = \hat{R}_t[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}']$ és

$$\mathbf{v} = \hat{R}_t\left(\mathbf{v}' + [\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}']\right).$$

A forgó rendszerben érvényes $L'(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t)$ Lagrange-függvényt úgy kapjuk, hogy a nyugvó rendszerben érvényes $L = \frac{1}{2}mv^2 - U(r)$ Lagrange-függvényt a vesszős változókon keresztül fejezzük ki. Mivel forgatásnál a vektorok hossza nem változik, ezért

$$\left.\begin{aligned} L' = \frac{m}{2}\left(\mathbf{v}' + [\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}']\right)^2 &= \frac{m}{2}v'^2 + m\mathbf{v}'\cdot[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}'] + \frac{m}{2}[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}']^2 - U(r') = \\ &= \frac{m}{2}v'^2 + m\mathbf{v}'\cdot[\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}'] + \frac{m}{2}\Omega^2 r'^2 - \frac{m}{2}(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{r}')^2 - U(r') \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Ez az L', mint látjuk, nem $T - U$ alakú.

Az Euler-Lagrange egyenlet következő:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} - \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'} = 0,$$

amelyben

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} = m\frac{d}{dt}\left(\mathbf{v}' + [\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}']\right) = m\mathbf{a}' - m[\mathbf{v}'\times\mathbf{\Omega}] - m[\mathbf{r}'\times\dot{\mathbf{\Omega}}],$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \mathbf{r}'} = m[\mathbf{v}'\times\mathbf{\Omega}] + m\omega^2\mathbf{r}' - m(\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{\Omega} - \frac{\partial U'}{\partial \mathbf{r}'} = m[\mathbf{v}'\times\mathbf{\Omega}] + m\big[\mathbf{\Omega}\times[\mathbf{r}'\times\mathbf{\Omega}]\big] - \frac{\partial U'}{\partial \mathbf{r}'}.$$

Az Euler-Lagrange egyenletbe behelyettesítve kapjuk a tömegpont mozgásegyenletét a forgó koordinátarendszerben:

$$m\mathbf{a}' = 2m[\mathbf{v}' \times \boldsymbol{\Omega}] + m[\mathbf{r}' \times \dot{\boldsymbol{\Omega}}] + m\big[\boldsymbol{\Omega} \times [\mathbf{r}' \times \boldsymbol{\Omega}]\big] - \frac{\partial U'}{\partial \mathbf{r}'}. \tag{3.4}$$

A jobboldal első tagja a Coriolis-erő, a harmadik pedig a centrifugális erő.

4. A Lorentz-erő a hatáselvben

Mindenekelőtt egy szükséges feltételt vezetünk le arra, hogy a Newton-egyenletet Euler-Lagrange egyenletként lehessen felírni.

Vezessük be az (2.2) baloldalán álló kifejezés jelölésére az L_r szimbólumot:

$$L_r = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r}.$$

Innen

$$\frac{\partial L_r}{\partial q_s} = \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial q_s \partial \dot{q}_r} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_s \partial q_r}.$$

Ha ezt antiszimmetrizáljuk, a

$$\frac{\partial L_r}{\partial q_s} - \frac{\partial L_s}{\partial q_r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_s \partial \dot{q}_r} - \frac{\partial^2 L}{\partial q_r \partial \dot{q}_s}\right)$$

képletet kapjuk. Másrészt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_r} + \frac{\partial^2 L}{\partial q_s \partial \dot{q}_r}\dot{q}_r + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_r}\ddot{q}_r,$$

ezért

$$\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s} = \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_r} + \frac{\partial^2 L}{\partial q_s \partial \dot{q}_r} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial q_r}.$$

Ezt is antiszimmetrizáljuk:

$$\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L_s}{\partial \dot{q}_r} = 2\left(\frac{\partial^2 L}{\partial q_s \partial \dot{q}_r} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial q_r}\right).$$

A két antiszimmetrizált kifejezés összehasonlításából:

$$\left(\frac{\partial L_r}{\partial q_s} - \frac{\partial L_s}{\partial q_r}\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L_s}{\partial \dot{q}_r}\right) = 0.$$

Tegyük fel, hogy az $L_r = 0$ Euler-Lagrange egyenletNewton-egyenlet alakú:

$$L_r = m_r\ddot{q}_r - F_r(q, \dot{q}, t).$$

Ha L_r-nek ezt a kifejezését behelyettesítjük az előző képletbe, megkapjuk annak szükséges feltételét, hogy az

$$m_r\ddot{q}_r = F_r(q, \dot{q}, t)$$

Newton-egyenlet legyen Euler-Lagrange egyenlet típusú:

$$\left(\frac{\partial F_r}{\partial q_s} - \frac{\partial F_s}{\partial q_r}\right) - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial F_s}{\partial \dot{q}_r}\right) = 0. \tag{4.1}$$

Egyetlen tömegpontra Descartes-koordinátákban ezt az egyenletet a

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\operatorname{rot}'\mathbf{F} = 0 \tag{4.2}$$

alakban írhatjuk, ahol a vessző arra utal, hogy a rotációban a parciális differenciálások nem az $\mathbf{r}$ koordináta, hanem a $\mathbf{v}$ sebesség komponensei szerint értendők.

Ez a szükséges feltétel nem túl erős. Amikor az erő nem függ a sebességtől azt követeli meg, hogy legyen potenciálos. Ha a tömegpont U potenciálban mozog és $-\alpha\mathbf{v} = -\frac{1}{2}\alpha\operatorname{grad}' v^2$ súrlódási erő hat rá, akkor nyilván teljesül. A súrlódásos feladatok mégsem írhatók le Euler-Lagrange egyenlettel, mert (4.1) szükséges, de nem elégséges feltétel.

A (4.1)-nek talán az egyetlen érdekes alkalmazása az, amikor ponttöltés mozog tetszőlegesen megadott elektromos és mágneses térben:

$$m\mathbf{a} = e\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + e[\mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)]. \tag{4.3}$$

A jobboldalon

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + e[\mathbf{v}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)]$$

a Lorentz-erő. A vektorszorzat rotációjára vonatkozó képlet alapján[2]

$$\operatorname{rot}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] = -(\mathbf{v}\operatorname{grad})\mathbf{B} + \mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{B},$$

$$\operatorname{rot}'[\mathbf{v}\times\mathbf{B}] = (\mathbf{B}\operatorname{grad}')\mathbf{v} - \mathbf{B}\operatorname{div}'\mathbf{v} = -2\mathbf{B}.$$

A (4.2) tehát ekkor a következő:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} - (\mathbf{v}\operatorname{grad})\mathbf{B} + \mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{B} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} = 0.$$

Mivel azonban

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = (\mathbf{v}\operatorname{grad})\mathbf{B} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

ezért a (4.2) feltétel Lorentz-erőre vonatkozó végső alakja a következő:

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) + (\operatorname{div}\mathbf{B})\mathbf{v} = 0. \tag{4.4}$$

Tetszőlegesen választott $\mathbf{E}$-re és $\mathbf{B}$-re ez a feltétel nem teljesül, ezért nem létezik olyan $L(\mathbf{r},\mathbf{v},\mathbf{E},\mathbf{B})$ Lagrange-függvény, amelyből a Lorentz-erőt tartalmazó

[2] A $\times$ a vektorszorzás jele. Az $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{b}$ vektor skalárszorzatát $\mathbf{ab}$-vel, $(\mathbf{ab})$-vel, vagy $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$-vel jelöljük. Speciálisan $\mathbf{a}grad \equiv \mathbf{a}\cdot\nabla$.

Newton-egyenlet leszármaztatható volna. De ha az $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ térmennyiségek helyett az

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \Phi, \qquad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{4.5}$$

képletek segítségével új dinamikai változókként bevezetjük a $\Phi(\mathbf{r}, t)$ skalár- és az $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ vektorpotenciált, akkor a

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \qquad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{4.6}$$

egyenletek azonosan teljesülnek, és azonosan teljesül (4.4) is. Ezért *létezhet* olyan $L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \Phi, \mathbf{A})$ Lagrange-függvény, amely egy ponttöltés mozgását írja le a Lorentz-erő hatása alatt, *hacsak* a mezők eleget tesznek a (4.6) téregyenleteknek.

Ilyen Lagrange-függvény valóban létezik is és nagyon egyszerű:

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \Phi, \mathbf{A}) = \frac{mv^2}{2} + e\mathbf{A}\mathbf{v} - e\Phi. \tag{4.7}$$

Az Euler-Lagrange egyenlet származtatása:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{a} + e\frac{d\mathbf{A}}{dt} = m\mathbf{a} + e(\mathbf{v} \operatorname{grad})\mathbf{A} + e\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = -e \operatorname{grad} \Phi + e \operatorname{grad}(\mathbf{A}\mathbf{v}) = -e \operatorname{grad} \Phi + e(\mathbf{v} \operatorname{grad})\mathbf{A} + e[\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{A}].$$

Az utolsó lépésben a skalárszorzat gradiensének a képletét használtuk. A két egyenlet különbségét nullával egyenlítve (4.5) kihasználásával valóban megkapjuk a ponttöltés (4.3) newtoni mozgásegyenletét.

Legyen $\chi(\mathbf{r}, t)$ tetszőleges skalárfüggvény és

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \operatorname{grad} \chi \tag{4.8}$$

$$\Phi = \Phi' - \frac{\partial \chi}{\partial t}. \tag{4.9}$$

A potenciáloknak ezt a transzformációját (elektrodinamikai) *mértéktranszformációnak* hívjuk. A (4.5) segítségével könnyű meggyőződni róla, hogy a mértéktranszformációban különböző (vesszős és vesszőtlen) potenciálokhoz ugyanaz az elektromos és mágneses mező tartozik:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \Phi = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \operatorname{grad} \Phi'$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}'$$

Az ekvivalens potenciálokhoz ekvivalens Lagrange-függvény tartozik:

$$\frac{mv^2}{2} - e\Phi + e\mathbf{A}\mathbf{v} = \frac{mv^2}{2} - e\Phi' + e\mathbf{A}'\mathbf{v} + e\frac{\partial \chi}{\partial t} + e(\mathbf{v} \operatorname{grad})\chi =$$

$$= \frac{mv^2}{2} - e\Phi' + e\mathbf{A}'\mathbf{v} + \frac{d(e\chi)}{dt}.$$

Az 2. fejezet D. pontjából következik, hogy a baloldali (vesszőtlen) és a jobboldali (vesszős) Lagrange-függvény valóban ekvivalens egymással.

At Olvasó nyilván észrevette, hogy (4.6) nem más, mint a négy Maxwell-egyenlet közül kettő (az u.n. első pár). A Maxwell-egyenletek azonban az elektromágneses mező mozgásegyenletei, ebben a fejezetben pedig nem erről, hanem a tömegpont mozgásegyenletéről volt szó *megadott* elektromágneses térben. A (4.6) egyenleteket csak azért kaptuk meg, mert a Lorentz-erő hatása alatt történő mozgás Newton-egyenletét mindenképpen a hatáselv következményeként, Euler-Lagrange egyenlet formájában kívántuk leszármaztatni. A klasszikus fizikában ez egyáltalán nem kötelező, de ha a ponttöltés (pl. az elektron) mozgását kvantummechanikával akarjuk tárgyalni, akkor a megfelelő klasszikus feladatot előzetesen a Hamilton-elv segítségével kell megfogalmazni. A kvantummechanika nézőpontjából tehát már az u.n. „külső tér probléma" tárgyalhatósága is megköveteli ez első Maxwell-egyenlet pár teljesülését.

5. A hatásfüggvény

A) A hatásfüggvény fogalma.

A hatás*funkcionál* minden lehetséges pályához egy számot rendel, így a megvalósuló pályához — az *extremálishoz* — is. Ezt a számértéket eddig nem használtuk fel.

Belátható, hogy elég kis $(t-t_0)$-nál adott $q_0 \equiv \{q_{0i}\}$ valamilyen környezetében (az u.n. *centrális extremális mezőben*) minden q, t-hez egyetlen extremális tartozik, amelyet $\mathcal{E}(q,q_0,t,t_0)$-lal fogunk jelölni. Ezért ebben a tartományban minden q, t-hez rendelhetünk egy számot — az $S(q,q_0,t,t_0)$ hatás*függvényt* — a következő előírással:

$$S(q,q_0,t,t_0) : (q,t)\big|_{q_0,t_0\text{fix}} \longrightarrow \mathcal{E} \text{ extremális} \longrightarrow \int_{(\mathcal{E})} L\,dt$$

(a q és a q_0 természetesen a koordináták összeségét szimbolizálja).

A t_0-ban adott q_0-akból kiinduló extremálisok $\dot{q}_0$ értékében különböznek egymástól. A különböző $\dot{q}_0$ sebességgel elindított rendszerek minden $t > t_0$-ban valamilyen q konfigurációval rendelkeznek. A q pont akkor tartozik a centrális extremális mezőhöz, ha *egyértelműen* megmondható, milyen $\dot{q}_0$-lal kell indítani a rendszert ahhoz, hogy t-ben a q legyen a konfigurációja. Vagyis a $(\dot{q}_0,t_0) \longrightarrow (q,t)$ leképezésnek kölcsönösen egyértelműnek kell lennie. A centrális extremális mezőben

$$S(q,q_0,t,t_0) = \int_{t_0}^{t} L\,dt\Big|_{\mathcal{E}}$$

a q,t meghatározott függvénye.

Az S függvény parciális deriváltjai az impulzuskomponensek és az energia t-ben a (q,q_0,t,t_0) változókon keresztül kifejezve:

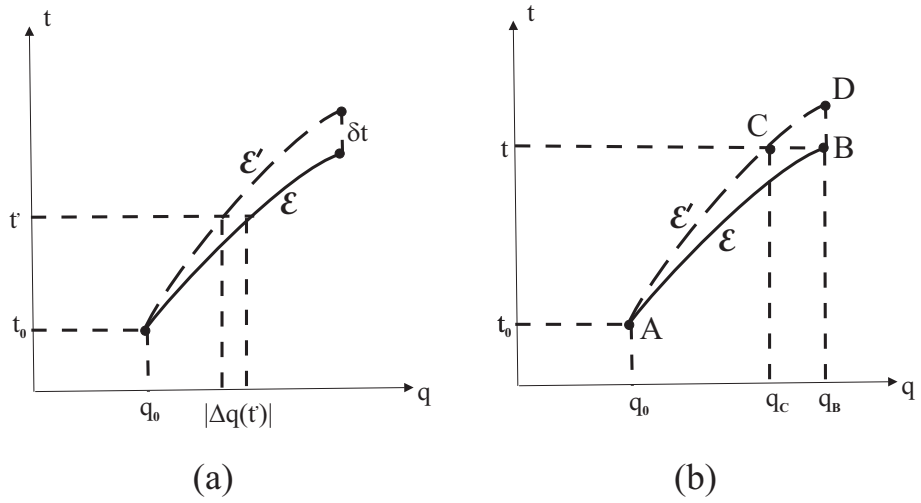
$$E = -\frac{\partial S}{\partial t}, \qquad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \tag{5.1}$$

Ez a definíció így értendő: Ha t_0-ban a konfiguráció q_0 volt és a (t_0, t) időintervallumban a rendszer a saját törvényei szerint változva t-ben a q konfigurációt vette fel, akkor a t-beli energiája és impulzuskomponensei $-\dfrac{\partial S}{\partial t}$-vel, illetve $\dfrac{\partial S}{\partial q_i}$-vel egyenlők. Fontos, hogy a (5.1) formulák ezeken a változókon keresztül adják meg az energiát és az impulzust.

Ezekből a képletekből kiindulva a t-beli energiát és impulzust a következő gondolatmenet alapján fejezhetjük ki az ugyancsak t-beli q-n, $\dot{q}$-n és általában t-n keresztül . A (5.1) következtében

$$\begin{aligned} \delta S(q, q_0, t, t_0) &= S(q + \delta q, q_0, t + \delta t, t_0) - S(q, q_0, t, t_0) \\ &= \frac{\partial S}{\partial t}\delta t + \frac{\partial S}{\partial q_i}\delta q_i = -E\delta t + p_i \delta q_i. \end{aligned} \tag{5.2}$$

A kétszer előforduló indexekre — mint általában — most is összegzés értendő, de a bizonyítást egyetlen változó esetére mutatjuk be.



5.1 ábra

Az infinitezimális változások additivitása miatt a bizonyítást két lépésre bonthatjuk: Az elsőben csak a t, a másodikban csak a q változik.

Legyen tehát $\delta t \neq 0$, $\delta q = 0$. Ekkor

$$S(q, q_0, t + \delta t, t_0) = \int_{t_0}^{t+\delta t} [L + \Delta L]\, dt'.$$

A végső időpont megváltozása miatt az eredeti $\mathcal{E}$ extremális $\mathcal{E}'$-re változott (4.1a ábra). A megváltozott extremális mentén a Lagrange-függvény értéke az eredeti extremálison számított L-től a

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial q(t')}\Delta q(t') + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t')}\Delta \dot{q}(t')$$

kifejezésben különbözik.

A kis változások additivitását újra kihasználva

$$
\begin{aligned}
S(q,q_0,t+\delta t,t_0) &= \int_{t_0}^{t+\delta t} L\,dt' + \int_{t_0}^{t} \Delta L\,dt' = \\
&= \int_{t_0}^{t} L\,dt' + L(q,\dot q,t)\delta t + \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial L}{\partial q(t')}\Delta q(t') + \frac{\partial L}{\partial \dot q(t')}\Delta \dot q(t')\right)dt' = \\
&= S(q,q_0,t,t_0) + L(q,\dot q,t)\delta t + \\
&+ \frac{\partial L}{\partial \dot q(t)}\Delta q(t')\Big|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial L}{\partial q(t')} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q(t')}\right)\Delta q(t')dt'.
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

Az utolsó tag integrandusa nulla, mert $\mathcal{E}$ extremális és ezért kielégíti az Euler-Lagrange egyenletet. A 4.1b ábra alapján látható, hogy $\Delta q(t_0) = 0$, és mivel Δq negatív, ezért

$$
\begin{aligned}
|CB| &= q_B - q_C = -\Delta q(t) \\
|BD| &= t_D - t_B = \delta t
\end{aligned}
$$

következtében

$$
\dot q = \frac{|CB|}{|BD|} = -\frac{\Delta q(t)}{\delta t} \Longrightarrow \Delta q(t) = -\dot q \delta t.
$$

Így végül

$$
\delta S = -\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q - L\right)\delta t,
$$

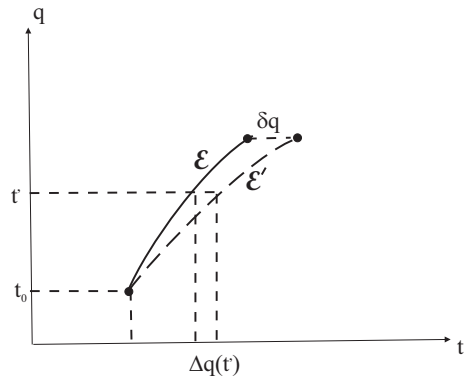
és a (5.2)-vel való összevetésből

$$
E = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q - L.
$$

Több szabadsági fok esetén ugyanilyen gondolatmenet az

$$
E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i - L \tag{5.4}
$$

képletre vezet, amely a t-beli energiát a $q(t), \dot q(t), t$ változókon keresztül fejezi ki.



5.2 ábra

Legyen most $\delta t = 0$, $\delta q \neq 0$. A tárgyalás az előzővel analóg, azzal a különbséggel, hogy a felső határ szerint nincs variáció, és $\Delta q(t) = +\delta q$. A megfelelően módosított (5.3) alapján

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Longrightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}},$$

és általában

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{5.5}$$

Az energia (5.4) képletét tehát az

$$E = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \tag{5.6}$$

alakban is írhatjuk.

Legyen $L = T - U$, amelyben T a sebességek homogén másodrendű függvénye, U pedig nem függ tőlük. Euler tétele[3] alapján ekkor

$$\sum_i \dot{q}_i p_i = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T,$$

ezért $E = T + U$.

A fentiekhez hasonlóan látható be, hogy (5.1) mellett érvényesek az

$$E_0 = \frac{\partial S}{\partial t_0}, \qquad p_{0i} = -\frac{\partial S}{\partial q_{0i}} \tag{5.7}$$

képletek is, amelyek a t_0-beli energiát és impulzusokat adják meg a hatásfüggvény argumentumainak a függvényében.

[3]Ha $f(ax_1, ax_2, \dots) = a^\lambda f(x_1, x_2, \dots)$, akkor $\sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda f$.

B) Az energiamegmaradás.

Ha a rendszer időben változatlan körülmények között mozog, akkor a Lagrange-függvény nem tartalmazza explicite a t változót, hanem csak a koordinátákon keresztül függ az időtől, a $q(t)$-k pedig valójában csak a $t-t_0$ függvényei. Ennek következtében $\dfrac{\partial S}{\partial t} = -\dfrac{\partial S}{\partial t_0}$, vagyis $E = E_0$: Időben változatlan körülmények között az energia a mozgás során megmarad.

A $L \longrightarrow L' = L + \dfrac{df(q,t)}{dt}$ ekvivalens Lagrange-függvényre történő áttérésnél

$$S(q, q_0, t, t_0) \longrightarrow S'(q, q_0, t, t_0) = S(q, q_0, t, t_0) + f(q,t) - f(q_0, t_0),$$

$$p_i \longrightarrow p_i' = p_i + \frac{\partial f}{\partial q_i}, \tag{5.8}$$

$$E \longrightarrow E' = E - \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{5.9}$$

Ez a két képlet természetesen (5.4)-ből és (5.5)-ből is megkapható. Az impulzusnak a (5.8) típusú átértelmezését *dinamikai mértéktranszformációnak* fogjuk hívni. Az elnevezés az elektrodinamikai potenciálokkal való összefüggésre utal. A 3. fejezetben láttuk, hogy a potenciálok (elektrodinamikai) mértéktranszformációjánál a Lagrange-függvényhez a $\dfrac{d(e\chi)}{dt}$ teljes derivált adódik hozzá, ami az impulzus $\mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{p} + \boldsymbol{\nabla}(e\chi)$ dinamikai mértéktranszformációját vonja maga után.

C A Lagrange-probléma.

Lagrange-problémának a mozgásegyenlet olyan megoldásának a megkeresését nevezzük, amely $2f$ tetszőlegesen választható konstansot tartalmaz (f szabadsági foknál). Ez egyike a matematika legnehezebb feladatainak, amelynek nem létezik általános megoldási algoritmusa.

A hatásfüggvény ismerete egyenértékű a Lagrange-probléma megoldásával. Ha u.i. az $S(q, q_0, t, t_0)$ függvényt ismerjük, akkor előírhatjuk a

$$\frac{\partial S}{\partial q_{i0}} = -p_{i0} = \text{tetszőleges konstansok} \qquad i = 1, 2, \ldots f \tag{5.10}$$

feltételeket, amely egy f-ismeretlenű *algebrai* (nem differenciál) egyenlet rendszer. A q_i-re megoldva kapjuk a dinamikai probléma $2f$ tetszőlegesen választható konstansot tartalmazó

$$q_i = F_i(t; q_{10} \ldots q_{f0}, p_{10} \ldots p_{f0}, t_0) \tag{5.11}$$

megoldást.

Az F_i-k látszólag — a t_0 miatt — $2f+1$ önkényes állandót tartalmaznak. Valójában azonban ezek a konstansok csak $2f$ független kombinációban fordulnak elő. Ezt így lehet belátni:

A Lagrange-problémának a hatásfüggvénytől független egyik megoldása legyen

$$q_i = Q_i(t; A_1, \dots A_f, B_1, \dots B_f). \tag{5.12}$$

A jobboldalon álló $2f + 1$ változós függvényeket a Lagrange-egyenletek nem határozzák meg egyértelműen, mert ha a $2n$ A és B helyett kölcsönösen egyértelmű módon új A', B' kombinációikat vezetjük be, a jobboldali függvény alakja megváltozik. Ezt a lehetőséget felhasználva a (5.11) megoldást (5.12)-ból úgy állíthatjuk elő, hogy az A-kat és a B-ket a $2f$ darab

$$q_{i0} = Q_i(t_0; A_1, \dots A_f, B_1, \dots B_f)$$

és az impulzus definíciójának felhasználásával ebből kapható

$$p_{i0} = P_i(t_0; A_1, \dots A_f, B_1, \dots B_f)$$

megoldásának választjuk:

$$A_i = a_i(q_0, p_0, t_0), \qquad B_i = b_i(q_0, p_0, t_0).$$

Ezeket (5.12)-ba írva kapjuk (5.11)-et. Mint látjuk, a $2f + 1$ q_{i0}, p_{i0}, t_0 valóban csak $2f$ kombinációban fordul elő. Ezért ha a (5.11) általános megoldást konkrét kezdőfeltételekre kívánjuk specializálni, csak $2f$ kezdőfeltételt adhatunk meg, amelyek közül az egyik lehet t_0.

A továbbiakban két egyszerű példával illusztráljuk a mondottakat.

D) A ferde hajítás.

A páya síkja legyen az x, y sík, az y tengely legyen merőleges a földfelszínre. A Newton-egyenletek:

$$m\ddot{x} = 0, \qquad m\ddot{y} = -mg.$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - mgy.$$

A mozgésegyenletek megoldása:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + u_0(t - t_0) \\ y &= y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2. \end{aligned} \tag{5.13}$$

A hatásfüggvény

$$S = m\int_{t_0}^{t} \left[\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - gy\right]\Bigg|_{\mathcal{E}} =$$

$$= m\int_{t_0}^{t} \left[\frac{1}{2}u_0^2 + \frac{1}{2}\Big(v_0 - g(t' - t_0)\Big)^2 - g\left(y_0 + v_0(t' - t_0) - \frac{1}{2}g(t' - t_0)^2\right)\right] dt'.$$

Az integrálás elvégzése után u_0-t és a v_0-t még ki kell fejezni (5.13)-ből az S természetes változóin keresztül:

$$u_0 = \frac{x - x_0}{t - t_0}, \qquad v_0 = \frac{y - y_0}{t - t_0} + \frac{1}{2}g(t - t_0).$$

A hatásfüggvény tehát

$$S = \left\{ \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(t - t_0)} - \frac{1}{2}g(t - t_0)(y + y_0) - \frac{1}{24}g^2(t - t_0)^3 \right\}.$$

A Lagrange-probléma megoldása:

$$\frac{\partial S}{\partial x_0} = -p_{x0}, \qquad \frac{\partial S}{\partial y_0} = -p_{y0}$$

$$m\frac{x - x_0}{t - t_0} = p_{x0}, \qquad m\frac{y - y_0}{t - t_0} + \frac{1}{2}g(t - t_0) = p_{y0}.$$

Ezeket x, y-ra megoldva

$$x = x_0 + \frac{p_{x0}}{m}(t - t_0), \qquad y = y_0 + \frac{p_{y0}}{m}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2.$$

Látszólag öt önkényes konstansunk van, de a független konstansok számát az határozza meg, hogy hány (kezdő)feltételt tudunk kielégíteni. A megoldást átrendezhetjük az

$$x = \left(x_0 - \frac{p_{x0}}{m}t_0\right) + \frac{p_{x0}}{m}t$$

$$y = \left(y_0 - \frac{p_{y0}}{m}t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2\right) + \left(\frac{p_{y0}}{m} + gt_0\right)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

azaz

$$x = A + Bt, \qquad y = C + Dt - \frac{1}{2}gt^2$$

alakba, ahonnan látjuk, hogy csak négy megválasztható konstansunk van.

E) A lineáris harmonikus oszcillátor.

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right).$$

A mozgásegyenlet $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Legyen $t_0 = 0$. Ekkor

$$x = A\sin(\omega t + \alpha), \qquad \dot{x} = \omega A(\cos(\omega t + \alpha).$$

$$S = \frac{m}{2}\int_0^t \left(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right) dt' = \frac{mA^2\omega^2}{2}\int_0^t \left[\cos^2(\omega t' + \alpha) - \sin^2(\omega t' + \alpha)\right] dt' =$$

$$= \frac{mA^2\omega^2}{2}\int_0^t \cos(2\omega t' + 2\alpha) dt' = \frac{mA^2\omega}{4}\left[\sin(2\omega t + 2\alpha) - \sin 2\alpha\right] =$$

$$= \frac{mA^2\omega}{2}\cos(\omega t + 2\alpha)\sin\omega t.$$

Az A, α-t x, x_0-lal kell helyettesíteni az

$$x = A\sin(\omega t + \alpha) \qquad x_0 = \sin\alpha$$

relációk felhasználásával, amelyekből

$$A\sin\alpha = x_0, \qquad A\cos\alpha = \frac{x - x_0\cos\omega t}{\sin\omega t}. \tag{5.14}$$

Átalakítjuk a hatásfüggvény A, α-t tartalmazó részét:

$$A^2\cos(\omega t + 2\alpha) = A^2\left[\cos\omega t\cos 2\alpha - \sin\omega t\sin 2\alpha\right] =$$

$$= \cos\omega t\left[(A\cos\alpha)^2 - (A\sin\alpha)^2\right] - 2\sin\omega t\cdot(A\sin\alpha)\cdot(A\cos\alpha).$$

A jobboldalon kihasználva (5.14)-et felírhatjuk a hatásfüggvényt általános t_0-lal:

$$S = m\omega\frac{\left(x^2 + x_0^2\right)\cos\omega(t - t_0) - 2xx_0}{2\sin\omega(t - t_0)}.$$

Ha $x_0 = t_0 = 0$, akkor $S = \frac{m\omega}{2}x^2\operatorname{ctg}\omega t$. Amikor x zérustól különböző konstans, akkor S a t a $0, T/2$ intervallumban monoton csökken plusz végtelentől minusz végtelenig. Az $x = 0$-hoz tartozó centrális extremális mező a $(0 < t < T/2)$ intervallumban van értelmezve, ahol egész x-tengellyel azonos. A $t = T/2$ pillanatban x nem adható meg önkényesen, mert minden kezdősebességnél nullával egyenlő.

6. Szimmetriák és megmaradási tételek

Ha a külső körülmények, amelyekben a rendszer mozog, valamilyen folytonos szimmetriát mutatnak és a mozgás tárgyalható a hatáselv alapján, akkor levezethető egy, a szimmetriára jellemző megmaradási tétel (*Emmy Noether* 1918).

Példa: Szimmetria **n**-irányú eltolással szemben.

Célszerű Descartes-koordinátákat választani:

$$x_i,\ y_i,\ z_i; \qquad i = 1, 2, \ldots f.$$

Az x-tengelyt válasszuk $\mathbf{n}$ irányúnak. A körülmények szimmetriája abban jut kifejezésre, hogy az L Lagrange-függvény nem változik, amikor az összes x_i-t (x_i+a)-val helyettesítjük (az L az x_i-x_j különbségek függvénye, vagy egyetlen szabadsági foknál nem függ x-től).

A hatásfüggvényben a szimmetria abban jelentkezik, hogy S nem változik, ha az összes x_i-t *és* x_{0i}-t (x_i+a)-val és $(x_{0i}+a)$-val helyettesítjük:

$$S(x+a,y,z,t,x_0+a,y_0,z_0,t_0)=S(x,y,z,t,x_0,y_0,z_0,t_0),$$

ahol $x\equiv(x_1,x_2,\dots x_f)$ stb. Az a-t választhatjuk infinitezimálisan kicsinek: $a\longrightarrow\delta a$ (ezt jelenti a szimmetria folytonossága). Ekkor

$$\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_{0i}}\right)S=0,$$

és (5.1) alapján

$$\sum_{i=1}^{f}(p_{ix}-p_{0ix})=0,\longrightarrow P_x=P_{0x},$$

ahol $P_x=\sum_{i=1}^{f}p_{ix}$ a teljes impulzus x komponense. A $P_x=P_{0x}$ azt fejezi ki, hogy a teljes impulzus x-komponense *mozgásállandó.*

Ha az $\mathbf{n}$ irány tetszőleges, akkor

$$S(\mathbf{r}_1+\delta\mathbf{r}_1,\dots\mathbf{r}_f+\delta\mathbf{r}_f,t,\mathbf{r}_{01}+\delta\mathbf{r}_{01},\dots\mathbf{r}_{0f}+\delta\mathbf{r}_{0f},t_0)=S(\mathbf{r}_1,\dots\mathbf{r}_f,t,\mathbf{r}_{01},\dots\mathbf{r}_{0f},t_0),$$

ahol $\delta\mathbf{r}_i=\mathbf{n}\delta a$. Ebből

$$\delta a\mathbf{n}\cdot\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_i}+\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_{0i}}\right)S=0$$

(a baloldalon skalárszorzás áll). Ezt a képletet (5.1) segítségével megint átírhatjuk $\mathbf{nP}=\mathbf{nP}_0$ alakba ami azt fejezi ki, hogy a teljes impulzus $\mathbf{n}$ irányú komponense mozgásállandó.

Ha ez a kritérium három független $\mathbf{n}$ irányra teljesül, akkor a $\mathbf{P}=\sum_1^f\mathbf{p}_i$ teljes impulzus megmaradó mennyiség.

Az eljárás általánosítása: Tegyük fel, hogy a hatás invariáns a koordináta vektorok

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_i&\longrightarrow\mathbf{r}_i+\delta\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_i+\mathbf{v}_i(\mathbf{r}_1,\dots\mathbf{r}_f)\delta a\\ \mathbf{r}_{0i}&\longrightarrow\mathbf{r}_{0i}+\delta\mathbf{r}_{0i}=\mathbf{r}_{0i}+\mathbf{v}_{0i}(\mathbf{r}_{01},\dots\mathbf{r}_{0f})\delta a\end{aligned}$$

transzformációjával szemben (az eltolásnál a $\mathbf{v}_i$-k mind ugyanazzal az $\mathbf{n}$ vektorral voltak egyenlők). Ekkor

$$\sum_{i=1}^{f}\left(\delta\mathbf{r}_i\frac{\partial S}{\partial\mathbf{r}_i}+\delta\mathbf{r}_{0i}\frac{\partial S}{\partial\mathbf{r}_{0i}}\right)=0,$$

tehát

$$\sum_{i=1}^{f} \left(\mathbf{v}_i(\mathbf{r}_1, \dots \mathbf{r}_f)\mathbf{p}_i - \mathbf{v}_{0i}(\mathbf{r}_{01}, \dots \mathbf{r}_{0f})\mathbf{p}_{0i} \right) = 0.$$

Következésképpen

$$G \equiv \sum_{i=1}^{f} \mathbf{v}_i(\mathbf{r}_1, \dots \mathbf{r}_f)\mathbf{p}_i = \text{mozgásállandó}.$$

A G függvényt később tisztázandó okokból a transzformáció *generátorának* is hívják.

Példa: A körülmények legyenek invariánsak az $\mathbf{n}$ irány körüli elforgatásokkal szemben. Megint Descartes-koordinátákat választva

$$\delta\mathbf{r}_i = [\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i]\delta\varphi, \qquad \delta\mathbf{r}_{0i} = [\mathbf{n} \times \mathbf{r}_{0i}]\delta\varphi, \Longrightarrow \mathbf{v}_i = [\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i].$$

Ekkor

$$G = \sum_{i}^{f} [\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i]\mathbf{p}_i = \mathbf{n} \sum_{i}^{f} [\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i] = \mathbf{n}\mathbf{J},$$

tehát az $\mathbf{J} = \sum_i^f [\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i]$ pálya impulzusmomentum $\mathbf{n}$ irányú vetülete mozgásállandó. Ha ez három lineárisan független vetületre teljesül, akkor a pályamomentum vektor maga megmarad.

Az előző fejezetben már láttuk, hogy az energiamegmaradás is szimmetriával kapcsolatos: Az *időbeli eltolással* szembeni függetlenséggel.

Pontosítás: Ekvivalens Lagrange-függvényre történő áttérés tetszőleges $f(q,t)$ függvénnyel elvégezhető és általában elrontja a Lagrange-függvény és a hatás szimmetriáját. Mivel azonban a mozgásegyenletet változatlanul hagyja, ezért egy adott szimmetriával kapcsolatos megmaradási tétel teljesüléséhez elegendő, ha az ekvivalens Lagrange-függvények közül legalább egy rendelkezik ezzel a szimmetriával: Ezt kell használni a megmaradó mennyiség megkeresésére. A következő fejezetben ennek a lehetőségnek fontos szerepe lesz.

7. Szimmetriák és megmaradási tételek elektromágneses mezőben

Probléma: A (4.7)-ben felírt

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \Phi, \mathbf{A}) = \frac{mv^2}{2} + e\mathbf{A}\mathbf{v} - e\Phi$$

Lagrange-függvényben a potenciálok szerepelnek, amelyek általában nem tükrözik a mezők szimmetriáit.

Ponttöltésnél ilyen probléma nincs, mert az

$$\mathbf{E} = \frac{e}{\mathbf{r}^3}\mathbf{r} \qquad \text{és} \qquad \Phi = \frac{e}{r}$$

szimmetriái ugyanazok: $R_{\mathbf{n}}$ (forgásszimmetria tetszőleges $\mathbf{n}$ irány körül) és $\mathcal{T}$ (időeltolási szimmetria). Homogén mezők és a mágneses monópolus esetében azonban érdekesebb a helyzet.

A) A homogén mágneses mező.

Homogén z irányú B nagyságú mágneses mezőnél az alábbi táblázatban három különböző vektorpotenciált adtunk meg, amelyek egyike se tükrözi a mező összes elemi szimmetriáját, amelyek $T_{\mathbf{n}}$, R_z és $\mathcal{T}$ ($T_{\mathbf{n}}$ az $\mathbf{n}$-irányú eltolási szimmetria).

i	$A_x^{(i)}$	$A_y^{(i)}$	$A_z^{(i)}$	$L^i = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + e\mathbf{A}^{(i)}\dot{\mathbf{r}}$	$L^{(i)}$ szimmetriái
1	$-By$	0	0	$\frac{m}{2}\dot{r}^2 - eBy\dot{x}$	$T_x, T_z, \mathcal{T}$
2	0	$+Bx$	0	$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + eBx\dot{y}$	$T_y, T_z, \mathcal{T}$
3	$-\frac{1}{2}By$	$+\frac{1}{2}Bx$	0	$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{e}{2}B(x\dot{y} - y\dot{x})$	$T_z, R_z, \mathcal{T}$

A három vektorpotenciál a (4.9) mértéktranszformációban különbözik egymástól:

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{A}^{(1)} + B\,\boldsymbol{\nabla}(xy), \qquad \mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{A}^{(1)} + \frac{1}{2}B\,\boldsymbol{\nabla}(xy).$$

A 3. fejezetből tudjuk, hogy ennek következtében mindhárom $L^{(i)}$ Lagrange-függvény ekvivalens egymással. Az előző fejezet alapján pedig a megmaradási tételek generálásához az ekvivalens Lagrange-függvények közül azt kell felhasználni, amely rendelkezik az adott megmaradó mennyiséghez kapcsolódó szimmetriával.

A $\mathcal{T}$ időeltolási szimmetria bármelyik vektorpotenciálra teljesül. A hozzá tartozó megmaradási tétel az energia:

$$E = \mathbf{p}^{(i)}\dot{\mathbf{r}} - L^{(i)} = \frac{\partial L^{(i)}}{\partial \mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} - L^{(i)}.$$

Ebből a kifejezésből az $L^{(i)}$ sebességben lineáris tagjai kiesnek, ezért mindhárom változat az

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 = \text{konstans} \tag{7.1}$$

megmaradási tételre vezet: Homogén mágneses térben mozgó test energiája a mozgási energiájával egyenlő, ezért a sebesség abszolút értéke megmaradó mennyiség.

A T_x szimmetria $L^{(1)}$-re teljesül, a hozzá tartozó megmaradó mennyiség

$$p_x^{(1)} = \frac{\partial L^{(1)}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - eBy \equiv -eBR_y,$$

ahol

$$R_y = y - \frac{m}{eB}\dot{x}. \tag{7.2}$$

A T_y az $L^{(2)}$-re teljesül:

$$p_y^{(2)} = \frac{\partial L^{(2)}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + eBx \equiv -eBR_x,$$

$$R_x = x + \frac{m}{eB}\dot{y}. \tag{7.3}$$

A T_z szimmetria bármely $L^{(i)}$-re teljesül:

$$p_z^{(i)} = m\dot{z} = \text{konstans}. \tag{7.4}$$

A (7.1) következtében ezért a sebesség (x, y) síkra vetett v komponense is mozgásállandó.

A (7.2)-ből és a (7.3)-ból

$$\dot{x} = \frac{eB}{m}(y - R_y), \qquad \dot{y} = \frac{eB}{m}(x - R_x).$$

Helyettesítsük ezeket az energia (7.1) képletébe:

$$\frac{e^2B^2}{2m}\left[(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2\right] + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = E = \text{konstans}. \tag{7.5}$$

A (7.4) következtében ezért

$$r^2 \equiv (x - R_x)^2 + (y - R_y)^2 = \frac{2m}{e^2B^2}\left(E - \frac{1}{2}m\dot{z}^2\right) \text{konstans}.$$

A pálya (x, y) síkra vetett vetülete tehát egy r sugarú kör, amelynek középpontja az (R_x, R_y) pont: *Ez* határozza meg a p_x, p_y *impulzus-komponensek* fizikai (vagy inkább geometriai) jelentését.

Az utolsó egyenlet alapján

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \frac{e^2B^2}{m^2}\left[(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2\right] = \left(\frac{EB}{m}r\right)^2,$$

tehát

$$v = \omega r, \qquad \text{ahol} \qquad \omega = \frac{eB}{m}.$$

Az (7.2) és a (7.3) szerint $e > 0$-nál a keringés iránya a mezővel szembe nézve megegyezik az óramutató járásával. Mint látjuk, a mozgásintegrálok (megmaradó mennyiségek) egyértelműen meghatározzák a mozgást.

Az R_z szimmetriához végül a

$$J_z^{(3)} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}^{(3)}]_z = xp_y^{(3)} - yp_x^{(3)},$$

megmaradó mennyiség tartozik, amelyben

$$p_x^{(3)} = \frac{\partial L^{(3)}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{eB}{2}y = m\left(\dot{x} - \frac{1}{2}\omega y\right),$$

$$p_y^{(3)} = \frac{\partial L^{(3)}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{eB}{2}x = m\left(\dot{y} + \frac{1}{2}\omega x\right).$$

Ez azonban nem új megmaradó mennyiség, mert a

$$J_z^{(3)} = \frac{m\omega}{2}\left(R_x^2 + R_y^2 - r^2\right)$$

alakra hozható.

Megjegyzés az impulzusokról: A Lorentz-erő ismeretében a töltött részecske mozgását mágneses mezőben tárgyalhatnánk az $m\dot{\mathbf{p}} = e[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ newtoni mozgásegyenlet alapján is, amelyben $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ a *kinetikus* impulzus. Mint a példa mutatja, ez a mennyiség általában nem azonos a hatáselvben fellépő *kanonikus* impulzussal, amelynek komponensei a $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ parciális deriváltak.

A kanonikus impulzus a (5.8) dinamikai mértéktranszformáció következtében maga se egyértelmű. A sebesség és az impulzus kapcsolatának ez a többértelműsége azért nem jelent problémát, mert a két mennyiség közül csak a sebesség az, ami mérhető, ezért a közöttük lévő kapcsolat nem vethető alá kísérleti ellenőrzésnek (az impulzus *segédmennyiség*).

B) A homogén elektromos mező.

A homogén $\mathcal{E}$ elektromos mező szimmetriái ugyanazok, mint mint a homogén mágneses mezőé, de két különböző ekvivalens potenciál elegendő az összes szimmetria figyelembe vételéhez. A továbbiakban feltesszük, hogy $\mathcal{E}$ $-z$ irányba mutat.

i	$\Phi^{(i)}$	$A_x^{(i)}$	$A_y^{(i)}$	$A_z^{(i)}$	$L^i = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - e\Phi^{(i)} + e\mathbf{A}^{(i)}\dot{\mathbf{r}}$	$L^{(i)}$ szimmetriái
1	$\mathcal{E}z$	0	0	0	$\frac{m}{2}\dot{r}^2 - e\mathcal{E}z$	$T_x, T_y, R_z, \mathcal{T}$
2	0	0	0	$\mathcal{E}t$	$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + e\mathcal{E}t\dot{z}$	T_x, T_y, T_z, R_z

$$\Phi^{(2)} = \Phi^{(1)} - \frac{\partial(\mathcal{E}zt)}{\partial t},$$

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{A}^{(1)} + \boldsymbol{\nabla}(\mathcal{E}zt)$$

A T_x, T_y, R_z-hez tartozó megmaradó mennyiségek $m\dot{x}$, $m\dot{y}$,$(x\dot{y} - y\dot{x})$. A $\mathcal{T}$-hez tartozó megmaradó mennyiség az

$$E = \dot{\mathbf{r}}\frac{\partial L^{(1)}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} - L^{(1)} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e\mathcal{E}z$$

energia.

A T_z-hez a

$$p_z^{(2)} = \frac{\partial L^{(2)}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + e\mathcal{E}t$$

megmaradó mennyiség tartozik.

Ez a mennyiség a mozgás során tényleg állandó, mert — mint könnyen igazolható, — $m\dot{z}(0)$-lal egyenlő. Azonban mégsem mozgásállandó, mert explicite függ az időtől, és definíció szerint mozgásállandónak (mozgásintegrálnak) a koordináták és a sebességek olyan függvényét nevezzük, amelynek az értéke a mozgás során állandó marad. Explicit időfüggés tehát nincs megengedve.

Az előző fejezet végén megállapítottuk, hogy egy adott szimmetriával kapcsolatos megmaradási tétel teljesüléséhez elegendő, ha az ekvivalens Lagrange-függvények közül legalább egy rendelkezik ezzel a szimmetriával. Most látjuk, hogy ezt a konklúziónkat korlátoznunk kell az olyan $L \longrightarrow L' = L + \dfrac{df}{dt} = L + \dfrac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i$ ekvivalenciákra, amelyekben f csak a koordinátáktól függ, az időtől eplicite nem.

Megjegyezzük, hogy időben változatlan körülmények között mozgó f szabadsági fokú rendszer $2f-1$ mozgásállandóval rendelkezik. Ezt így lehet belátni: A mozgásegyenletek általános megoldása $2f$ önkényesen választható C_i konstansot tartalmaz:

$$q_i(t) = F_i(t, C_1, \dots C_{2f}) \qquad (i = 1, \dots f).$$

Ezeket az idő szerint deriválva további f egyenletre jutunk:

$$\dot{q}_i(t) = G_i(t, C_1, \dots C_{2f}) \qquad (i = 1, \dots f).$$

Ha ezt a $2f$ egyenletet a C_i konstansokra megoldjuk, akkor $2f$ darab

$$C_i = H_i(q_1, \dots q_f, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_f, t)$$

függvényt kapunk, amelyek a mozgás során nem változnak, az explicit időfüggés miatt azonban nem mozgásállandók.

Ha az F és a G függvények egyikét megoldjuk t-re és a t-nek ezt a kifejezését behelyettesítjük a többibe, akkor a $2f$ konstansra csak $2f-1$ egyenletünk lesz, amelyekből ezek a konstansok nem fejezhetők ki egyedül a koordinátákon és a sebességeken keresztül.

A megoldás az, hogy a C_i-k egyikét kezdő időpontnak választjuk, vagyis a

$$q_i(t) = F_i(t - t_0, C_1, \dots C_{2f-1}), \qquad \dot{q}_i(t) = G_i(t - t_0, C_1, \dots C_{2f-1})$$

általános megoldásból indulunk ki. A körülmények állandósága miatt a t_0 valóban önkényesen választható konstans. Ha most ezekből az egyenletekből a $(t - t_0)$ különbséget kizárjuk, a t-vel együtt egy konstanstól is megszabadulunk, és a fennmaradó egyenletekből kifejezhetjük a $2f-1$ darab $C_1, \dots C_{2f-1}$ konstansot a koordinátákon és a sebességeken keresztül.

Példaként tekinsük újra a homogén elektromos térben mozgó töltést, azonban az egyszerűség kedvéért az x és az y változóktól tekintsünk el[4]. Ekkor a feladat 1 szabadsági fokúra redukálódik és csak 1 mozgásintegrálja lehet.

A két t_0, v_0 önkényes állandót tartalmazó általános megoldás[5]

$$z = v_0(t - t_0) - \frac{a}{2}(t - t_0)^2, \qquad a = \frac{e\mathcal{E}}{m}.$$

Ezt deriváljuk az idő szerint:

$$\dot{z} = v_0 - a(t - t_0).$$

A két egyenletből a $(t - t_0)$ különbséget kizárva az

$$\frac{m}{2}\dot{z}^2 + e\mathcal{E}z = \frac{m}{2}v_0^2 = \text{konstans}$$

mozgásállandóra jutunk, amely az energia — ahogy várható is.

Megjegyzés: *H. Poincaré* a 19. század utolsó évtizedében megjelent *Új módszerek az égi mechanikában* című monográfiája 1. kötetében az V. fejezet címe a következő: *Az egyértelmű mozgásintegrálok hiányáról.* Ez a fejezet ugyanis a következő tétel bizonyítását tartalmazza:

> Az égi mechanika kanonikus egyenletei az energia integrálon kívül nem engednek meg semmilyen más analitikus mozgásállandót (néhány speciális eset kivételével, amelyek külön tárgyalást igényelnek).

A speciális esetek a teljes impulzus és impulzusnyomaték komponensei, amelyekről az 5. fejezetben láttuk, hogy a transzlációs és a rotációs szimmetria következtében maradnak meg. Az energiával együtt ezt a hét mozgásintegrált nevezi Poincaré analitikusnak, szemben az összes többivel, amelyek — ritka kivételektől eltekintve — az argumentumaik olyan rendkívüli mértékben irreguláris függvényei, hogy tulajdonképpen nem is tekinthetők függvényeknek. Gyakorlati jelentősége csak a hét reguláris mozgásintegrálnak van, amelyek egyébként az additivitásukkal is kitűnnek: Egy független részekből álló rendszerben az értékük az egyes részrendszerekben felvett értékeik összegével egyenlő.

C) A mágneses ponttöltés (monopólus).

Ha mágneses töltések is léteznének, a Maxwell-egyenletek szimmetrikusab-

[4]Homogén mágneses térben egy ilyen korlátozásnak nem lenne értelme.

[5]Ha engedünk a kísértésnek, és a megoldást a $z = z_0 + v_0(t - t_0) - \frac{a}{2}(t - t_0)^2$ általánosabb alakban írjuk fel, akkor is csak két függetlenül választható konstansunk lenne, mert $z = \left(z_0 - v_0 t_0 - \frac{a}{2}t_0^2\right) + (v_0 + at_0)\,t - \frac{a}{2}t^2$.

bak lennének:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{J}^*$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \rho^*$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}.$$

ρ^* és $\mathbf{J}^*$ a mágneses töltés- és áramsűrűség. A második egyenlet jobboldalán az előjelet a mágneses töltés megmaradásának a követelménye diktálja.

Az e elektromos és a g mágneses ponttöltés nemrelativisztikus mozgásegyenletei elektromos és mágneses mezőben a következők:

$$m\mathbf{a} = e\big(\mathbf{E} + [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]\big)$$

$$m^*\mathbf{a}^* = g\big(\mathbf{H} - [\mathbf{v}^* \times \mathbf{D}]\big).$$

Ezek az egyenletek azért nemrelativisztikusak, mert a baloldalon nem a relativisztikus impulzus időderiváltja áll.

Amikor egy elektromos és egy mágneses ponttöltés egymás hatása alatt mozog, az első egyenlet jobboldalán a mágneses töltés által létrehozott mezők, a második egyenlet jobboldalán az elektromos töltéshez tartozó mezők állnak. Ha ezek nemrelativisztikus alakjait behelyettesítjük, rövid átalakítás után az $\ddot{\mathbf{R}} = 0$, valamint a

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = \frac{eg}{4\pi r^3}[\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}] \tag{7.6}$$

mozgásegyenletekre jutunk, amelyben $\mathbf{R}$ a tömegközéppont koordinátája, $\mathbf{r}$ az elektromos töltés relatív helyzetvektora a mágneses töltéshez képest, és μ a redukált tömeg.

A mágneses töltések hiányát a természetben valószínűleg joggal tekintjük olyan problémának, amely magyarázatot igényel. A kvantumelmélet automatikusan kínál egy magyarázatot. Az elektromos és mágneses töltésből álló kéttestprobléma kvantumelméletét ugyanis nem alapozhatjuk közvetlenül a (7.6) egyenletre, hanem csak arra a Lagrange-függvényre, amely erre a mozgásegyenletre vezet. A (4.7) Lagrange-függvényről van szó, amelyben most a $\mathbf{A}$-t úgy kellene megválasztani, hogy a $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ szerint egy origóban nyugvó g mágneses ponttöltés terének feleljen meg. Ez azonban lehetetlennek tűnik, hiszen egy ilyen térre $\operatorname{div}\mathbf{B} = g\delta(\mathbf{r}) \neq 0$, míg $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$. Megjegyezzük még, hogy a (4.7) jobboldalán álló erőre a (4.2) egyenlet teljesül, ezért ez a szükséges feltétel nem támaszt akadályt egy megfelelő Lagrange-függvény létezésével szemben.

P. A. M. Dirac 1931-ben talált is egy olyan Lagrange-függvényt, amely a (4.2) mozgásegyenletre vezet és a $\mathbf{B}$ tér divergencia-mentességével is összhangban van. Ha Dirac megoldását elfogadjuk, akkor a kvantumos tárgyalás szükségessége nem ad magyarázatot a mágneses töltések hiányára, tehát ez a probléma továbbra is megoldatlan marad.

Dirac elmélete azon alapul, hogy egy az origóban végződő nagyon (végtelenül) vékony végtelen hosszú ideális szolenoid végpontjából kiáramló mágneses mező magának a szolenoidnak a helyétől eltekintve gömbszimmetrikus és itt egy olyan g mágneses pólus terének felel meg, amelynek a fluxusa a végtelenül vékony szolenoidon kívül fekvő tartományban a szolenoidban lévő véges fluxussal egyenlő (az idealizált szolenoidban magában a mágneses mező ekkor természetesen végtelen nagy). A kialakult terminológiában ezt a hipotetikus szolenoidot *szálnak* nevezik.

Tegyük fel, hogy a szál az $\mathbf{n}$ egységvektor irányába eső végtelen félegyenes, és — mint mondottuk, — az origóban végződik. Ehhez a szálhoz a

$$\mathbf{A}^{(\mathbf{n})} = \frac{g}{4\pi r} \cdot \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{n}]}{r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}. \tag{7.7}$$

vektorpotenciál tartozik, amely a szálon szinguláris. A mágneses töltés kvantumelméletében ennek a szingularitásnak a kezelése jelent problémát, amely azonban megoldhatónak bizonyult.

A (7.7) vektorpotenciál a következő figyelemre méltó tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $\mathbf{A}^{(\mathbf{n})}$ rotációja a szálon kívül egy g mágneses ponttöltés mágneses terével egyenlő:
$$\operatorname{rot} \mathbf{A}^{(\mathbf{n})} = \frac{g}{4\pi r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{7.8}$$

2. Az $\mathbf{A}^{(\mathbf{n})}$ vektormező divergenciamentes:
$$\operatorname{div} \mathbf{A}^{(\mathbf{n})} = 0. \tag{7.9}$$

3. $\mathbf{A}^{(\mathbf{n})}$-nek a szált körülvevő infinitezimális kis kontúron vett körintegrálja a Stokes-tétel következtében $-g$-vel egyenlő, ami a szálban lévő fluxussal egyezik meg. A mágneses tér ugyanis a szálnak nevezett idealizált szolenoidban az origó felé mutat, és az origóban kiáramolva belőle gömbszimmetrikusan terül szét a térben.

4. Az (7.6) mozgásegyenlet az
$$L^{(\mathbf{n})} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 + e\mathbf{A}^{(\mathbf{n})}\dot{\mathbf{r}} \tag{7.10}$$
Lagrange-függvényből származtatható Lagrange-egyenlet *bármilyen irányú* $\mathbf{n}$ választása mellett.

5. Ennek az az oka, hogy *a szál irányának megváltoztatása mértéktranszformációval ekvivalens*
$$\mathbf{A}^{(\mathbf{n})} - \mathbf{A}^{(\mathbf{n}')} = \boldsymbol{\nabla}\chi, \tag{7.11}$$
ezért $L^{(\mathbf{n})}$ és $L^{(\mathbf{n}')}$ ekvivalens Lagrange-függvények.

Az első négy tulajdonság a grad, div, rot műveletek szisztematikus alkalmazásával egyszerűen verifikálható, ezért csak a (7.11) igazolásával foglalkozunk. Ennek a fejezetnek a fő témája ugyanis annak a problémának a vizsgálata, hogy a potenciálok gyakran nem tükrözik a hozzájuk tartozó elektromágneses mező szimmetriáit. Az $\mathbf{A}^{(\mathbf{n})}$ ezt példázza, mert csak az $\mathbf{n}$ irány körüli elforgatásokra nézve invariáns, míg az 1. pont alapján a belőle számítható mágneses mező gömbszimmetrikus. Ezt a gömbszimmetriát az $\mathbf{A}^{(\mathbf{n})}$-ek összesége reprezentálja.

A 3. pont alapján az $\mathbf{A}^{(\mathbf{n})} - \mathbf{A}^{(\mathbf{n}')}$ különbség egy olyan V-alakú végtelen hosszú vonalszerű szolenoid vektorpotenciálja, amely $\mathbf{n}$ irányból érkezik az origóba és $\mathbf{n}'$ irányban folytatódik és ilyen irányú g fluxust tartalmaz. Egy végtelenből végtelenbe tartó ideális szolenoid körül azonban nincs mágneses mező, ezért egyenlő a vektorpotenciálja egy függvény gradiensével, amelynek a rotációja nulla. A 3. pont alapján a (7.11) képlet körintegrálja egy olyan zárt kontúr mentén, amely az egyesített szálat körülveszi és az orientációja a szál irányához képest pozitív, g-vel egyenlő, ezért minden ilyen kontúrra

$$\oint d\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\nabla}\chi = g. \tag{7.12}$$

Ez az integrál a χ függvény $\Delta\chi$ megváltozásával egyenlő az egyesített szálat körülvevő zárt kontúr mentén. Mint látjuk[6], $\Delta\chi = g$.

Térjünk rá végre a megmaradó mennyiségek tárgyalására. Az (7.10) Lagrange-függvény nem függ explicite az időtől, ezért az energia megmaradó mennyiség. A sebességben lineáris második tag azonban nem ad járulékot az energia (5.4) kifejezéséhez, ezért az energia a mozgási energiával egyenlő.

Helyettesítsük most be a vektorpotenciál (7.7) kifejezését (7.10)-be. A vegyes szorzat tényezőinek permutálása után ezt a kifejezést kapjuk:

$$L^{(\mathbf{n})} = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{eg}{4\pi}\frac{\mathbf{n}\cdot[\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{r}]}{r(r-\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})}. \tag{7.13}$$

Ez a Lagrange-függvény csak az $\mathbf{n}$ irány körüli $R_{\mathbf{n}}$ elforgatásokra nézve invariáns, ezért csak az impulzusmomentum $\mathbf{n}$ irányú komponensének a megmaradását

[6]Ennek a ténynek a kvantummechanika miatt van jelentősége. Az 5. fejezet B. pontja alapján az $\mathbf{n} \longrightarrow \mathbf{n}'$ mértéktranszformációnál az impulzus is transzformálódik: $\mathbf{p} \longrightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{p} + e\boldsymbol{\nabla}\chi$. A kvantumelméletben impulzuson a $\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i}\boldsymbol{\nabla}$ operátort értjük. Egy ilyen transzformációnál az impulzus operátor sajátfüggvényei az $e^{ie\chi/\hbar}$ fázisfaktorral szorzódnak meg.

A Schrödinger-egyenlet megoldásával szemben alapvető követelmény az egyértékűség. Ha azonban egy olyan zárt kontúr mentén vizsgáljuk ennek a fázisfaktornak a megváltozását, amely metszi a Σ síkot, akkor az eddig mondottak alapján a zárt kontúron történő egyszeri végighaladás hatására a hullámfüggvény megszorzódik az $e^{-ieg/\hbar}$ tényezővel és ennek következtében csak akkor nyeri vissza eredeti értékét, ha a dimenziótlan $eg/\hbar$ tört a 2π egész számú többszörösével egyenlő. Ez a követelmény a mágneses töltés lehetséges értékeit a h/e elemi töltés egész számú többszörösére korlátozza.

Megjegyezzük, hogy a Schrödinger-egyenletnek akkor is van egyértékű megoldása, ha ez a feltétel nem teljesül. De ilyenkor $|\psi^{(\mathbf{n})}|^2 \neq |\psi^{(\mathbf{n}')}|^2$ és a megoldás az elektromos ponttöltésnek nem egy matematikai segédeszközként funkcionáló, hanem egy valódi vékony szolenoid körüli állapotát írja le.

garantálja. A komponens kiszámítását egyszerűsítendő mutasson $\mathbf{n}$ a z-tengely irányába. Ekkor

$$L^{(z)} = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{eg}{4\pi}\frac{1}{r(r-z)}(\dot{x}y - \dot{y}x).$$

A megmaradó impulzuskomponens

$$\begin{aligned} J_z = [\mathbf{r}\times\mathbf{p}]_z &= x\frac{\partial L^{(z)}}{\partial \dot{y}} - y\frac{\partial L^{(z)}}{\partial \dot{x}} = \\ &= x\left(m\dot{y} - \frac{eg}{4\pi}\frac{x}{r(r-z)}\right) - x\left(m\dot{x} - \frac{eg}{4\pi}\frac{y}{r(r-z)}\right) = \\ &= m(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{eg}{4\pi}\cdot\frac{z}{r} - \frac{eg}{4\pi}. \end{aligned}$$

A lényegtelen konstans elhagyása után a tetszőleges irányra általánosított eredmény a következő mozgásállandóra vezet:

$$\mathbf{J} = [\mathbf{r}\times\mu\dot{\mathbf{r}}] - \frac{eg}{4\pi}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r} \equiv \mathbf{J} + \mathbf{S}. \tag{7.14}$$

A jobboldal első tagja a relatív pályamomentum, a rá merőleges második tag pedig a két ponttöltés elektromágneses terében felhalmozott

$$\mathbf{S} = \int d^3x\big[\mathbf{r}\times[\mathbf{D}\times\mathbf{B}]\big]$$

térimpulzus, amely az elektromos töltéstől a mágneses töltés felé mutat és a nagysága független a két ponttöltés távolságától[7]. Ha $\mathbf{S}\neq 0$, akkor ez dimenzióokokból nem is lehet másképp, ugyanis az eg szorzat fizikai dimenziója már kiadja az impulzusnyomaték dimenzióját. A $\mathbf{J}$-t a rendszer *teljes impulzusmomentumának* nevezzük. A $\mathbf{J}$ megmaradása természetesen a (7.6) mozgásegyenlet alapján ellenőrizhető.

A relatív mozgást a megmaradási tételek teljesen meghatározzák, de csak két speciális esetre korlátozódunk. Az egyik az, hogy minden $\mathbf{r}$-nél megoldás az $\mathbf{r}=$ konstans nyugalmi állapot. A másik az a sugarú gömbre korlátozott mozgás. Válasszuk a z-tengelyt $\mathbf{J}$ irányúnak. Az $\mathbf{S}$ az $\mathbf{r}$ irányába mutat, tehát ϑ szöget zár be a z-tengellyel. Mivel $|S| = eg/4\pi$ független r-től, ezért a mozgás a ϑ nyilásszögű kúp mentén történik, és a sebességét az $L = \mu a v = \sqrt{J^2 - S^2} = J\sin\vartheta$ reláció rögzíti.

[7] Az integrálásnál az

$$\int_0^\infty \frac{r\,dr}{(r^2 - 2r\cos\vartheta + 1)^{3/2}} = \frac{1}{1-\cos\vartheta}$$

képletet kell felhasználni. Megjegyezzük még, hogy a (7.10) Lagrange-függvény azért nem tartalmaz potenciális energia tagot, mert a térimpulzussal ellentétben a térenergia a két töltés térenergiájának az egyszerű összege.

8. A Hamilton-féle kanonikus egyenletek

A) A kanonikus- vagy Hamilton-egyenletek.

A Lagrange-egyenletek az időben másodrendű differenciálegyenletek, azonban a függő változók (és az egyenletek) számának a megduplázásával átírhatók elsőrendű alakba. Az átírás nem egyértelmű, mert függ az új változók megválasztásától. A legegyszerűbb lehetőség az lenne, ha a $\dot{q}_i \equiv v_i$ sebességek lennének az új változók, de a legcélszerűbb választásnak nem a sebességek, hanem a p_i impulzusok bizonyultak.

Amikor ugyanis a rendszer dinamikája jellemezhető Lagrange-függvénnyel, akkor a keresett elsőrendű mozgásegyenletek leszármaztathatók egyetlen függvényből, a $H(q,p,t)$ *Hamilton-függvényből*[8]:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{8.1}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{8.2}$$

Ezek a *kanonikus-* vagy *Hamilton-egyenletek*. A q,p változópárt — a $q,\dot{q}$-tal szemben — *kanonikus változóknak* nevezzük. A $H(q,p)$ az $L(q,\dot{q})$ *Legendre-transzformáltja*:

$$H = \sum_{i=0}^{n} \dot{q}_i p_i - L, \tag{8.3}$$

amelyben a sebességeket az impulzusok

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i = 1, 2, ..., n) \tag{4.5}$$

definíciós egyenleteit megoldva ki kell fejezni a kanonikus változókon keresztül:

$$\dot{q}_i = f(q,p). \tag{8.4}$$

A (8.1) és a (8.2) bizonyításához adjunk most a q_i-khez és a p_i-khez *tetszőleges* infinitezimális dq_i, dp_i növekményt. A (8.4) szerint ezzel a $\dot{q}_i$-k is meghatározott növekményt kapnak, de most célszerűbb a $d\dot{q}_i$-ket „egészben” tartani.

Mindezek következtében természetesen H is megváltozik:

$$dH = \sum_{i=0}^{n} \left\{ d\dot{q}_i \cdot p_i + \dot{q}_i \cdot dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot d\dot{q}_i \right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left\{ -\frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot dq_i + \dot{q}_i \cdot dp_i + \left(p_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot d\dot{q}_i \right\}.$$

[8] A most következő gondolatmenetben a $H(q,p,t)$ explicit időfüggésének nem lesz szerepe, ezért a t-t nem írjuk ki explicite.

Az utolsó tag (5.5) következtében zérus. Ha az eredeti q_i-k kielégítik a Lagrange-egyenleteket, akkor az első tag koefficiensében

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i,$$

és ezért

$$dH = \sum_{i=0}^{n} \left(-\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i\right). \tag{8.5}$$

Másrészt $H(q,p)$-nek — mint minden q,p függvénynek — a parciális deriváltjait a

$$dH = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i\right) \tag{8.6}$$

összefüggés definiálja önkényes dq_i, dp_i-vel. A (8.5) és a (8.6) jobboldalán a növekmények koefficienseinek meg kell egyezniök egymással és a (8.1), (8.2) kanonikus egyenletek éppen ezt az egyenlőséget fejezik ki. A (8.5) levezetésénél kihasználtuk, hogy a q_i-k kielégítik a Lagrange-egyenleteket, ezért a kanonikus egyenleteket is csak a rendszer valóságos mozgásait leíró trajektóriák elégítik ki.

A (5.4) képlettel történő összevetés mutatja, hogy a Hamilton-függvény nem más, mint az energia a p,q *kanonikus változókon* keresztül kifejezve.

Eszerint az energiának eddig háromféle kifejezési módjával találkoztunk:

$$E = \begin{cases} -\dfrac{\partial S}{\partial t} & (q, q_0, t, t_0\text{-on keresztül}) \\ \dot{q}_i \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L & (q, \dot{q}, t\text{-n keresztül}) \\ H & (p, q, t\text{-n keresztül}). \end{cases} \tag{8.7}$$

A $q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n$ *kanonikus koordináták* a *fázisteret* feszítik ki, amelyben a mozgás *fázistrajektóriák* mentén történik. A fázistrajektóriák a Hamilton-egyenletek megoldásai. A fázistér minden pontján csak egyetlen fázistrajektória halad át, mert a Hamilton-egyenletek minden pontban megadják a trajektória irányát. A fázistérnek ez előnyös tulajdonsága a konfigurációs térrel szemben.

Megjegyzés: A Hamilton-függvény Légendre-transzformációjával az eredeti Lagrange-függvényt kapjuk vissza (a Legendre-transzformáció *involutív* művelet). Valóban[9], jelöljük a H Légendre-transzformáltját $\overline{L}$-lel:

$$\overline{L} = \dot{q}p - H,$$

amelyben az impulzusokat a (8.1)

$$p = g(q, \dot{q}).$$

[9] Az egyszerűség és a jobb áttekinthetőség kedvéért a szabadsági fokokat jelző indexeket az alábbiakban nem írjuk ki explicite.

megoldása segítségével fejezzük ki a koordinátákon és a sebességeken keresztül:

$$\overline{L}(q,\dot{q}) = \left.(\dot{q}\cdot p - H(q,p))\right|_{p=g(q,\dot{q})}.$$

A jobboldalon

$$H(q,p)|_{p=g(q,\dot{q})} = \dot{q}\cdot g(q,\dot{q}) - \Big[L(q,\dot{q})|_{\dot{q}=f(q,p)}\Big]_{p=g(q,\dot{q})} = \dot{q}\cdot g(q,\dot{q}) - L(q,\dot{q}).$$

Ezt az előző egyenletbe írva kapjuk a bizonyítandó $\overline{L} = L$ képletet.

B) A kanonikus egyenletek származtatása hatáselvből.

Hogyan kell megválasztani a $\Lambda(q,\dot{q},p,\dot{p},t)$ függvényt ahhoz, hogy a kanonikus egyenletek a $\delta\int_{t_0}^{t_1} dt\Lambda = 0$ hatáselv következményei legyenek? A Λ argumentumában a változók n változó összeségét reprezentálják.

Az (2.1) mintájára $\delta\int_{t_0}^{t_1} dt\Lambda$-ra a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned}\delta\int_{t_0}^{t_1} dt\Lambda(q,\dot{q},p,\dot{p},t) = \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_r}\delta q_r(t)\Big|_{t_0}^{t_1} + \frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{p}_r}\delta p_r(t)\Big|_{t_0}^{t_1} + \\ + \int_{t_0}^{t_1} dt\,\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial q_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_r}\right]\delta q_r(t) + \int_{t_0}^{t_1} dt\,\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial p_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{p}_r}\right]\delta q_r(t).\end{aligned} \tag{8.8}$$

Ha előírhatnánk a $4n$ darab $q_r(t_0), q_r(t_1), p_r(t_0), p_r(t_1)$ értékét, akkor teljesülnének a

$$\delta q_r(t_0) = \delta q_r(t_1) = \delta p_r(t_0) = \delta p_r(t_1) = 0$$

határfeltételek, a felületi tagok eltűnnének, és mozgásegyenletként a

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial q_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}_r} = 0, \qquad \frac{\partial\Lambda}{\partial p_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{p}_r} = 0 \tag{8.9}$$

egyenleteket kapnánk. Ez egy $2n$ másodrendű differenciálegyenletből álló rendszer, amelynek az általános megoldása $4n$ önkényes konstansot tartalmaz.

Ez azonban túl sok, a valóban megadható konstansok számának kétszerese. Ez akkor csökkenne a szükséges $2n$-re, ha az impulzusokban *szabad variációt* alkalmazhatnánk (a $p_r(t_0)$-t és a $p_r(t_1)$-t nem kellene előírnunk), és ugyanakkor (8.9) második egyenlete nem tartalmazna $\ddot{p}_r$-t. *Mindkét* követelmény teljesül, ha Λ nem tartalmaz $\dot{p}$-t. A (8.8)-ból ekkor a második felületi tag hiányzik és (8.9) második egyenlete $\dfrac{\partial\Lambda}{\partial p_r} = 0$-ra redukálódik, amelynek a p-k és a $\dot{q}$-k közötti helyes összefüggést kell kifejeznie.

Ezt a kapcsolatot az $L \rightleftarrows H$ Legendre-transzformáció határozza meg, amely akkor veszi fel a kívánt $\dfrac{\partial\Lambda}{\partial p_r} = 0$ formát, ha $\Lambda = p_r\dot{q}_r - H(q,p,t)$. A (8.8)

alapján könnyen ellenőrizhető, hogy ezzel a Λ-val a $\delta \int_{t_0}^{t_1} dt\Lambda = 0$ hatáselv valóban a kanonikus egyenletekre vezet. Ez természetesen nem véletlen, hanem annak következménye, hogy a Lagrange-függvény és a Hamilton-függvény közötti Legendre-transzformációt éppen ennek a Λ-nak a *minimalizálásán* keresztül definiáltuk.

A Lagrange-egyenletek és a Hamilton-egyenletek variációs elvből történő származtatása között van tehát egy alapvető különbség. Az első esetben a variálandó $L(q, \dot{q}, t)$ a konfigurációs tér tetszőleges függvénye lehet, a második esetben azonban a variálandó függvényt a fázistéren $\Lambda(p, q, \dot{q}, t) = p_r\dot{q}_r - H(q, p, t)$ alakúnak kell választanunk. Ehhez legfeljebb a koordináták és az idő teljes időderiváltját adhatjuk hozzá, amely a variálásnál eltűnik és nem hoz be $\dot{p}$ függést.

9. A Hamilton-Jacobi egyenlet

Az (5.10) és az (5.11) egyenletek alapján megállapítottuk, hogy az $S(q, q_0, t, t_0)$ hatásfüggvény ismerete egyenértékű a Lagrange-probléma megoldásával. Érdemes ezért olyan differenciálegyenletet keresni, amelyet a hatásfüggvény kielégít.

A (8.7) első egyenlete szerint

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = E(q, q_0, t, t_0).$$

A lényeges észrevétel az, hogy a jobboldalon az energia az impulzust tartalmazó $H(q, p, t)$-vel egyenlő *feltéve*, hogy ez utóbbiban az impulzust (5.1) segítségével a hatás parciális deriváltjain keresztül fejezzük ki:

$$E(q, q_0, t, t_0) = H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right).$$

A két egyenlet összekapcsolásából kapjuk a *Hamilton-Jacobi egyenletet*:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0, \tag{9.1}$$

amely egy $(n + 1)$ változós elsőrendű parciális differenciálegyenlet S-re.

Az ilyen típusú egyenletek *teljes integráljának* az egyenlet olyan megoldásait nevezzük, amelyek $(n + 1)$ önkényesen megadható állandót tartalmaznak. A keresett $S(q, q_0, t, t_0)$ hatás teljes integrál, mert a $q_{10}, q_{20}, \ldots q_{n0}, t_0$ éppen $(n+1)$ darab önkényes konstans.

Legegyszerűbb példaként tekintsük a szabad mozgást egyetlen dimenzióban ($q \equiv x$). Ekkor

$$S(x, x_0, t, t_0) = \int_{t_0}^{t} dt' \cdot \frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{m}{2}\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}\right)^2 \int_{t_0}^{t} dt' = \frac{m}{2}\frac{(x - x_0)^2}{t - t_0}. \tag{9.2}$$

Ez a függvény valóban kielégíti a

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = 0 \tag{9.3}$$

Hamilton-Jacobi egyenletet.

Van azonban egy probléma: A Hamilton-Jacobi egyenletnek végtelen sok egymástól nagyon különböző teljes integrálja van, és az a teljes integrál, amelyet a változók szeparálásának módszerével kapunk[10], biztosan nem a hatásfüggvény.

A szabad mozgás előbbi, (9.3) Hamilton-Jacobi egyenletét például kielégíti a

$$\bar{S} = -\frac{\alpha_1^2}{2m}t + \alpha_1 x + \alpha_0 \tag{9.4}$$

függvény, amelyben α_0 és α_1 tetszőleges konstans. A (9.4) tehát a (9.3) Hamilton-Jacobi egyenlet teljes integrálja, amelynek láthatóan semmi köze a (9.2) hatásfüggvényhez. Az S helyett ezért szigorúan véve a (9.4) teljes integrált valamilyen másik betűvel kellene jelölni, de ezt — az általános gyakorlatot követve, — nem tesszük meg.

Nyilván felmerül a következő két kérdés:

- Felhasználható-e egy olyan teljes integrál a Lagrange-probléma megoldására, amely nem a hatásfüggvény?
- Ki lehet-e számítani egy ilyen teljes integrálból a hatásfüggvényt újabb differenciálegyenlet-megoldás nélkül?

A) Jacobi tétele.

Jacobi tétele: *bármelyik* teljes integrál alkalmas a Lagrange-probléma megoldására.

Az eljárást bizonyítás nélkül ismertetjük. Mivel a Hamilton-Jacobi egyenlet az S-nek csak a deriváltjait tartalmazza, ezért az egyik konstans mindig választható additívnak[11]. Ezt szokás α_0-lal jelölni, az eljárás j-ik lépésében megjelenő konstans pedig az α_j $(j = 1, 2, \ldots n)$.

Legyen tehát a teljes integrál

$$S_1(q_1, q_2, \ldots q_n, t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) + \alpha_0 \equiv S_1(q, t, \alpha) + \alpha_0. \tag{9.5}$$

A Lagrange-probléma megoldását ebből úgy kapjuk, hogy a

$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha_i} = -\beta_i = \text{önkényes konstansok} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

[10] A Hamilton-Jacobi egyenlet akkor a leghasznosabb, amikor alkalmas koordinátarendszerben a változók szeparálásával megoldható. Mivel ebben a kurzusban nem konkrét feladatok megoldásával, hanem a klasszikus mechanika általános struktúrájával foglalkozunk, ezt a fontos eljárást nem ismertetjük.

[11] A (9.2) és a (9.4) összevetése mutatja, hogy ez egyáltalán nem kötelező, a hatásfüggvény maga nem is ilyen struktúrájú.

egyenletrendszert a q_i-kre megoldjuk:

$$q_i = Q_i(t; \alpha_1, \dots \alpha_n, \beta_1, \dots \beta_n) \equiv Q_i(t, \alpha, \beta). \tag{9.6}$$

A Hamilton-Jacobi egyenlet szerkezete mutatja, hogy

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = -E(q, t, \alpha), \tag{9.7}$$

és — mivel a levezetésnél kihasználtuk, — továbbra is igaz, hogy

$$\frac{\partial S_1}{\partial q_i} = p_i(q, t, \alpha). \tag{9.8}$$

Ha a jobboldalon a q_i-k helyébe beírjuk (9.6)-t, a

$$p_i = P_i(t; \alpha_1, \dots \alpha_n, \beta_1, \dots \beta_n) \equiv P_i(t, \alpha, \beta). \tag{9.9}$$

képletet kapjuk. A (9.6) és a (9.9) együtt adja a *Hamilton-probléma* megoldását.

A szabad mozgásnál például (9.4) szerint

$$S_1 = -\frac{\alpha_1^2}{2m}t + \alpha_1 x$$
$$\frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} = -\frac{\alpha_1}{m}t + x = -\beta_1$$

tehát

$$x = \frac{\alpha_1}{m}t - \beta_1$$

a Lagrange-probléma megoldása. Ha ehhez hozzávesszük a

$$p = \frac{\partial S_1}{\partial x} = \alpha_1 = konstans$$

egyenletet is, a Hamilton-probléma megoldását kapjuk.

A Hamilton-Jacobi módszer olyan trajektóriákat szolgáltat, amelyek mentén a $2n$ *önkényesen megadott* α, β szám állandó. Ezért ha a tömegpont-rendszer a t pillanatban a q_i konfigurációt veszi fel, akkor a $\dot{q}_i$ sebességek ebben a pontban egyedül az α-k ismeretében kiszámítható úgy, hogy a

$$q_i = Q_i(t; \alpha, \beta), \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial Q_i(t; \alpha, \beta)}{\partial t}$$

első egyenletéből a β-kat a másodikba helyettesítjük:

$$\dot{q}_i = B_i(q, t, \alpha). \tag{9.10}$$

Ez az észrevétel magyarázza, hogy az energia és az impulzus (9.7), (9.8) képleteiben a β konstansok explicite nem jelennek meg: A $q_i = Q_i(t; \alpha, \beta)$-n keresztül a B_i függvény argumentumai meghatározzák őket.

B) A (9.5) teljes integrál és a hatásfüggvény kapcsolata.

Ha a rendszer konfigurációját t_0-ban a q_0-ak, t-ben a q-k összesége határozza meg, akkor az ehhez a pályaszakaszhoz tartozó hatást az

$$S(q, q_0, t, t_0) = \int_{t_0}^{t} dt' \cdot L(q, \dot{q}, t') \tag{9.11}$$

képlet határozza meg, amelyben az integrálás a kezdő- és a végpont közötti megvalósuló pályára történik (és a $\dot{q}$ természetesen t' szerinti deriválást jelöl). A Hamilton-Jacobi egyenletből a változók szeparálásával kapható megvalósuló pályákon azonban az α-k és a β-k állandók, és egyáltalán nem nyilvánvaló, hogyan kell ezeket megválasztani ahhoz, hogy a rendszer konfigurációja t_0-ban q_0, t-ben q legyen.

A β-kkal szerencsére nem kell törődnünk. A Lagrange-függvény és a Hamilton-függvény (8.3) kapcsolatát kihasználva ugyanis a (9.11)-t átalakíthatjuk így:

$$S(q, q_0, t, t_0) = \int_{t_0}^{t} dt' \left(p_i \dot{q}_i - H\right).$$

A jobboldalon még ki kell fejezni a p_i-ket és a Hamilton-függvényt a koordinátákon keresztül. Ehhez a (9.7) és a (9.8) képleteket használhatjuk fel:

$$S(q, q_0, t, t_0) = \int_{t_0}^{t} dt' \left(\frac{\partial S_1(q, t', \alpha)}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S_1(q, t', \alpha)}{\partial t'} \right).$$

Az integrandus az S_1 teljes idő szerinti deriváltja, ezért végül

$$S(q, q_0, t, t_0) = \int_{t_0}^{t} dt' \cdot \frac{dS_1(q, t', \alpha)}{dt'} = S_1(q, t, \alpha) - S_1(q_0, t_0, \alpha). \tag{9.12}$$

A jobboldalon még ki kell fejezni az α-kat az $S(q, q_0, t, t_0)$ argumentumain keresztül, vagyis meg kell keresnünk az

$$\alpha_i = A_i(q, q_0, t, t_0)$$

függvényeket. Ez így történik: A Jacobi-tétel szerint a megvalósuló trajektóriák mentén

$$\frac{\partial S_1(q, t, \alpha)}{\partial \alpha_i} = -\beta_i = const.$$

Mivel (q, t) és (q_0, t_0) ugyanazon a trajektórián fekszik, ugyanaz a β tartozik hozzájuk, ezért az előző egyenlet alapján

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[S_1(q, t, \alpha) - S_1(q_0, t_0, \alpha)\right] = 0.$$

Ennek az *algebrai* (nem differenciál) egyenletnek a megoldásával kaphatjuk meg az A_i függvényeket.

Összefoglalva: Az

$$S_1(q,t,\alpha)+\alpha_0$$

teljes integrálban α_0-t $-S_1(q_0,t_0,\alpha)$ val helyettesítjük, majd az

$$S=S_1(q,t,\alpha)-S_1(q_0,t_0,\alpha)$$

különbségből $\dfrac{\partial S}{\partial\alpha_i}=0$ segítségével kizárjuk az α_i-ket.

Szabad mozgás esetén például (9.4) szerint

$$S_1+\alpha_0=-\frac{\alpha_1^2}{2m}t+\alpha_1x+\alpha_0$$

$$S=-\frac{\alpha_1^2}{2m}(t-t_0)+\alpha_1(x-x_0)$$

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_1}=-\frac{\alpha_1}{m}(t-t_0)+(x-x_0)\quad\Longrightarrow\quad\alpha_1=m\frac{x-x_0}{t-t_0}$$

$$S=-\frac{1}{2m}\left[m\frac{x-x_0}{t-t_0}\right]^2(t-t_0)+m\frac{x-x_0}{t-t_0}(x-x_0)=\frac{m}{2}\frac{(x-x_0)^2}{t-t_0}$$

a (9.2)-vel összhangban.

C) A *teljes integrál⟶hatásfüggvény* áttérés geometriai tartalma: burkolókonstrukció.

Próbáljuk elképzelni *fix* $\alpha_0,\alpha_1,\dots\alpha_n$ *mellett* $S_1(q,t,\alpha)+\alpha_0$-t mint a

$$z=S_1(q,t,\alpha)+\alpha_0$$

felületet egy olyan koordinátarendszerben, amelynek első $n+1$ tengelyén $q_1,\dots q_nt$-t, az $n+2$-diken pedig z-t mérjük fel. Ha a z,q,t koordinátájú pont mellett a $z+\delta z,q+\delta q,t+\delta t$ pont is a felületen van, akkor nyilván

$$\delta z=\frac{\partial S_1}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial S_1}{\partial t}\delta t.$$

Ha formálisan bevezetjük az

$$\vec{A}=\left(\frac{\partial S_1}{\partial q_1},\dots\frac{\partial S_1}{\partial q_n},\frac{\partial S_1}{\partial t},-1\right),\qquad\vec{B}=(\delta q_1,\dots\delta q_n,\delta t,\delta z)$$

akkor az előző egyenlet azt fejezi ki, hogy a két vektor ortogonális egymásra:

$$\vec{A}\perp\vec{B},\qquad\qquad\vec{A}\cdot\vec{B}=0.$$

A Hamilton-Jacobi egyenletben szereplő parciális deriváltak tehát az integrálfelületek normálisainak a komponensei; ezek között teremt kapcsolatot az egyenlet.

Mármost ha az $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ szabadon választható paramétereket is figyelembe vesszük, akkor valójában integrálfelület *seregünk* van, és világos, hogy ezeknek bármely burkolója is kielégíti a Hamilton-Jacobi egyenletet, hiszen a burkolók normálvektorai minden pontban megegyeznek valamelyik integrálfelület normálvektorával. A hatásfüggvény nem más, mint ilyen burkolók újabb $n+1$ paraméteres családja.

Háromdimenziós térben például egy kétparaméteres felületsereg egyenlete legyen

$$f(\mathbf{r}; a_0, a_1) = 0. \tag{9.13}$$

A burkoló olyan felület, amelynek $\mathbf{r}$-beli pontja az a_0, a_1, $\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$-beli pontja pedig az $a_0 + \delta a_0, a_1 + \delta a_1$ paraméterű felületen van, tehát

$$f(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}; a_0 + \delta a_0, a_1 + \delta a_1) = 0.$$

A két egyenlet következik, hogy

$$\delta\mathbf{r} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial a_0}\delta a_0 + \frac{\partial f}{\partial a_1}\delta a_1 = 0.$$

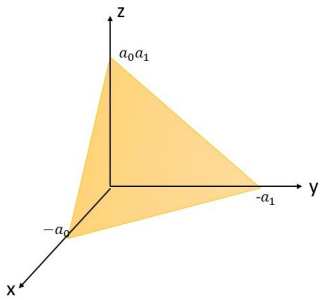
A $\delta\mathbf{r}$ azonban a burkoló, tehát egyben a (9.13) felület érintője, ezért $\delta\mathbf{r} \cdot \nabla f = 0$, és ezért

$$\frac{\partial f}{\partial a_0}\delta a_0 + \frac{\partial f}{\partial a_1}\delta a_1 = 0.$$

A $\delta\mathbf{r}$ iránya tetszőleges és a különböző irányokhoz általában más és más $\delta a_0, \delta a_1$ pár tartozik, ezért teljesülnie kell a

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = 0 \qquad \forall i$$

egyenletrendszernek. Az $f = 0$ egyenlet természetesen a burkolóra is igaz, ezért ha ezt az egyenletrendszert megoldjuk az a_i-kre és a megoldásokat (9.13)-ba helyettesítjük, burkolófelületet meghatározó egyenletet kapunk.



9.1 ábra

Egyszerű példaként tekintsük az

$$f = a_1 x + a_0 y + a_0 a_1 - z = 0$$

felületet (9.1 ábra).

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = y + a_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = -y$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = x + a_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_0 = -x.$$

Ezeket az a_i-ket az f függvénybe helyettesítve kapjuk a burkoló felületre a $z + xy = 0$ egyenletet.

De hogyan kaphatunk burkoló *sereget*? Legyen

$$a_0 = \Omega(a_1; b_0, b_0')$$

tetszőleges függvény. Ha ezt az $f = 0$ egyenletbe beírjuk és b_0, b_1-et rögzítettnek gondoljuk, akkor az

$$f = a_1 x + \Omega(a_1; b_0, b_0')y + a_1 \Omega(a_1; b_0, b_0') - z = 0 \tag{9.14}$$

egyparaméteres felületsereget kapjuk. A burkoló meghatározásához egyenlítsük ennek a_1-szerinti deriváltját nullával:

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = x + \frac{\partial \Omega}{\partial a_0} y + \frac{\partial}{\partial a_1}(A_1 \Omega) = 0.$$

Legyen mondjuk $\Omega = b_0 + a_1 b_0'$. Akkor

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = x + b_0' y + b_0 + 2 a_1 b_0' = 0$$

$$a_1 = -\frac{1}{2b_0'} \left(x + b_0' y + b_0 \right).$$

Ha ezt és $\Omega = b_0 + a_1 b_0'$-t (9.14)-ba írjuk, a burkolók

$$z = -\frac{1}{4b_0'} \left(x - b_0' y + b_0 \right)^2 - xy.$$

kétparaméteres családját kapjuk eredményül.

Ez a példa analóg a *teljes integrál⟶hatásfüggvény* átmenettel. Ott az Ω függvény szerepét, amellyel α_0-t helyettesítjük, az S_1 játssza, a z szerepét pedig az S hatás.

10. Mozgás elektromágneses mezőben (Hamilton-forma)

A (4.7)-ben láttuk, hogy az elektromágnes mezőben mozgó ponttöltés Lagrange-függvénye a következő:

$$L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + e\dot{\mathbf{r}}\mathbf{A} - e\Phi.$$

A megfelelő Hamilton-függvényt ebből így kapjuk:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})$$

$$H = \dot{\mathbf{r}}\mathbf{p} - L = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + e\Phi = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\Phi.$$

Hogyan érvényesül a Hamilton-formában a mértékinvariancia? A 7. fejezet B. pontjában láttuk, hogy a Hamilton-egyenleteket a

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \Lambda(q, \dot{q}, p, \dot{p}, t)$$

hatáselvből származtathatjuk, ezért a Λ és a

$$\Lambda' = \Lambda + \frac{df(q,p,t)}{dt}$$

$f(q,p,t)$ ekvivalens egymással. Azt is láttuk, hogy a Λ-nak $\Lambda = p_r\dot{q}_r - H(q,p,t)$ standard alakúnak kell lennie. Ha ezt is figyelembe vesszük, akkor

$$\Lambda' = p_r\dot{q}_r - H(q,p,t) + \frac{\partial f}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial f}{\partial p}\dot{p} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Az $f(q,p,t)$ függvény azonban nem lehet tetszőleges, mert a Λ'-nek is standard alakúnak kell lennie.Ez csak akkor teljesül, ha

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad \text{tehát} \quad f = f(q,t)$$

$$p \longrightarrow p' = p + \frac{\partial f}{\partial q}$$

$$H \longrightarrow H' = H - \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Ekkor ugyanis

$$\Lambda' = p'\dot{q} - H(p,q,t) + \frac{\partial f}{\partial t} = p'\dot{q} - H'\left(p' - \frac{\partial f}{\partial q}, q, t\right).$$

A gondolatmenetünk eredménye úgy is összefoglalható, hogy a különböző $f(q,t)$ függvényeket (az $f=0$-t is beleértve) tartalmazó

$$H'(q,p,t) \equiv H\left(p - \frac{\partial f}{\partial q}, q, t\right) - \frac{\partial f}{\partial t}$$

Hamilton-függvények mind ekvivalensek egymással.

Ekvivalens Lagrange-függvényre történő áttérésnél nem volt szükség a $q, \dot{q}, t$ változók átértelmezésére, hanem csak egy teljes időderiváltat kellett L-hez hozzáadni. A Hamilton-formában ehhez képest az a különbség, hogy az impulzust is transzformálni kell. Ez persze nem igazán meglepő, mert $L \longrightarrow L'$ átmenetnél is a $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$-ból $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \dfrac{\partial f}{\partial q}$ lesz, vagyis megváltozik a sebesség és az impulzus kapcsolata.

Következmény:

- L és L' azonos $q_0, \dot{q}_0$ mellett a mozgásprobléma azonos megoldását szolgáltatja.
- H és H' azonos q_0, p_0 kezdőfeltétel mellett *látszólag* a mozgásprobléma különböző megoldásához vezet.

Példaként tekintsük a harmonikus oszcillátort, és legyen a határozottság kedvéért $f = \dfrac{\alpha}{2} q^2$. Ekkor

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2\right)^2 \quad \text{és} \quad L' = \frac{m}{2}\left(\dot{q}^2 + \omega^2 q^2\right)^2 + \alpha q \dot{q}.$$

Annak ellenére, hogy $L \neq L'$, a Lagrange-egyenletek és megoldásaik ugyanazok:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \qquad q(t) = q_0 \cos \omega t + \frac{\dot{q}_0}{\omega} \sin \omega t.$$

A megfelelő Hamilton-függvények

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2 \quad \text{és} \quad H' = \frac{1}{2m}\left(p - \alpha q\right)^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2.$$

A H-hoz tartozó mozgásegyenletek és megoldásaik a következők:

$$\dot{q} = \frac{p}{m}, \qquad \dot{p} = -m\omega^2 q,$$

amelynek megoldása

$$\left.\begin{aligned} q(t) &= q_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t \\ p(t) &= p_o \cos \omega t - m\omega q_0 \sin \omega t. \end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

A $p = m\dot{q}$ egyenlőség következtében az L-hez és a H-hoz tartozó megoldás ugyanaz.

A H'-höz tartozó mozgásegyenletek és megoldásaik

$$\left.\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{m}((p-\alpha q), \qquad \dot{p} = -m\omega^2 q + \frac{\alpha}{m}(p-\alpha q), \\ q(t) &= q_0 \cos\omega t + \frac{1}{m\omega}(p_0 - \alpha q_0)\sin\omega t \\ p(t) &= p_o \cos\omega t - \frac{1}{\omega}\left[-m\omega^2 q_0 + \frac{\alpha}{m}(p_0 - \alpha q_0)\right]\sin\omega t. \end{aligned}\right\} \tag{10.2}$$

Adott q_0, p_0-nál (10.1) és (10.2) *nem* ugyanaz a fázistrajektória.

De ha (10.1)-ben a $p_0 = m\dot{q}_0$, a (10.2)-ben pedig a $p_0 = m\dot{q}_0 + \alpha q_0$ helyettesítéssel a kezdőimpulzusokról a kezdősebességekre térünk át, akkor a $q(t)$-re vonatkozó képletek a két esetben azonossá válnak. A $p(t)$-re vonatkozó képletek továbbra is különbözni fognak egymástól, de ez csupán az impulzus és a sebesség közötti kapcsolat különbözőségének a következménye. A 7. fejezet A) pontjának a végén pedig már utaltunk rá, hogy ez a kapcsolat kísérletileg nem ellenőrizhető, ezért nem kell ugyanannak lennie egy adott feladat különféle megfogalmazásaiban.

Most visszatérhetünk az elektromágneses kölcsönhatás

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\Phi$$

Hamilton-függvényéhez. Az (4.8),(4.9) (elektrodinamikai) mértéktranszformáció felhasználásával térjünk át új potenciálokra az

$$\mathbf{A} \Longrightarrow \mathbf{A} + \nabla\chi$$

$$\Phi \Longrightarrow \Phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$$

képletek segítségével, és az ezeket tartalmazó Hamilton-függvényt jelöljük H'-vel:

$$H' = \frac{1}{2m}\left[\mathbf{p} - e(\mathbf{A} + \nabla\chi)\right]^2 + e\left(\Phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}\right).$$

Ha ezt

$$H' = \frac{1}{2m}\left[(\mathbf{p} - \nabla(e\chi)) - e\mathbf{A}\right]^2 + e\Phi - \frac{\partial(e\chi)}{\partial t}$$

alakba írjuk, akkor látjuk, hogy $f = e\chi$ választás mellett H' ekvivalens H-val: *Mértéktranszformációban különböző elektromágneses potenciálok ekvivalens Hamilton-függvényekre vezetnek.*

11. A Poisson-zárójel

Dirac mutatott rá, hogy a kvantumelmélet Heisenberg által felfedezett formája mély szerkezeti rokonságban áll a klasszikus mechanika kanonikus (vagy hamiltoni) megfogalmazásával. A jelen kurzus fő célja az, hogy a klasszikus mechanika oldaláról előkészítse ennek a párhuzamosságnak a pontos megértését.

Ez az oka annak, hogy a továbbiakban elsősorban a kanonikus formalizmussal fogunk foglalkozni. Ebben a formalizmusban célszerű *dinamikai mennyiségen* kizárólag az $u(q,p,t)$ típusú függvényeket érteni, noha általános értelemben például a $\dot{q}$ sebesség is dinamikai természetű. Az olyan állandókat, mint pl. a tömeg, a frekvencia, az adott külső erőtér *paramétternek* fogjuk hívni.

A kanonikus formalizmusban az $u(p,q,t)$ dinamikai mennyiség változási sebességét a következő képlet fejezi ki:

$$\dot{u}(q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) + \frac{\partial u}{\partial t} = \tag{11.1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{11.2}$$

Az összeg, amely a jobboldalon fellép, az u és a H dinamikai mennyiségek *Poisson-zárójele*. A következőkben ennek a szerkezetnek alapvető szerepe lesz, ezért speciális jelölést vezetünk be rá: Az u és a v dinamikai mennyiségek Poisson-zárójelén az

$$\{u,v\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial v}{\partial q_i} \right) \tag{11.3}$$

kifejezést értjük.

A Poisson-zárójel segítségével (11.2) képlet ebben a tömör formában írható fel:

$$\dot{u} = \{u,H\} + \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{11.4}$$

Ha ezt az egyenletet $u = q_i$-re, majd $u = p_i$-re alkalmazzuk, a (8.1) és a (8.2) Hamilton-egyenleteket kapjuk meg:

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_i &= \{q_i,H\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= \{p_i,H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned}\right\} \tag{11.5}$$

A) A Poisson-zárójel mozgásegyenlettel összefüggő tulajdonságai.

A Poisson-zárójel fontos tulajdonságokkal rendelkező bináris művelet. A tulajdonságok első csoportja leolvasható abból a tényből, hogy (11.4) szerint a Poisson-zárójelnek összhangban kell lennie a *deriválás* alapvető szabályaival. Ezek a *deriválási tulajdonságok*, amelyek (11.3) segítségével könnyen igazolhatók, a következők:

(A1) Linearitás: Ha u, v, w dinamikai mennyiségek, c_1 és c_2 pedig számok, akkor

$$\{c_1u + c_2v, w\} = c_1\{u,w\} + c_2\{v,w\}.$$

(A2) Leibniz-szabály (deriválási szabály):

$$\{uv, w\} = u\{v, w\} + v\{u, w\}.$$

(A3) A közvetett deriválás szabálya:

$$\{F(u, v), w\} = \frac{\partial F}{\partial u}\{v, w\} + \frac{\partial F}{\partial v}\{u, w\}.$$

B) A Poisson-zárójel Lie-algebra tulajdonságai.

A tulajdonságok másik csoportja a *Lie-algebra tulajdonságok*. Az elnevezés magyarázatához mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a dinamikai mennyiségek *vektorteret* alkotnak, mert — mint az (A1)-ben már kihasználtuk, — ha u és v dinamikai mennyiség, akkor $c_1u + c_2v$ lineárkombinációjuk is az.

Egy vektorteret akkor nevezünk Lie-algebrának, ha definiálva van rajta egy antiszimmetrikus bilineáris szorzatművelet, amely kielégíti a Jacobi-identitást[12]. A (B1)-(B3) tulajdonságokból, valamint az (A1)-ből következik, hogy a dinamikai mennyiségek Lie-algebrát alkotnak a Poisson-zárójelre, mint szorzatműveletre nézve.

(B1) A Poisson-zárójel antiszimmetrikus:

$$\{u, v\} = -\{v, u\} \quad \Longrightarrow \quad \{u, u\} = 0.$$

(B2) Minden v dinamikai mennyiséghez rendelhető egy L_v differenciáloperátor a következő előírással:

$$L_v u = \{u, v\}.$$

Részletesebben kiírva

$$L_v u = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial v}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i} \right) u \equiv \sum_{s=1}^{2n} V_s \frac{\partial u}{\partial x_s},$$

ahol

$$x_1, \ldots x_{2n} = q_1, \ldots q_n, p_1, \ldots p_n$$

$$V_1, \ldots V_{2n} = \frac{\partial v}{\partial p_1}, \ldots \frac{\partial v}{\partial p_n}, -\frac{\partial v}{\partial q_1}, \cdots - \frac{\partial v}{\partial q_n}.$$

(B3) A Poisson-zárójel eleget tesz a Jacobi-identitásnak:

$$\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} = 0.$$

A Jacobi-identitás igazolásához abból a majdnem nyilvánvaló tényből kell kiindulnunk, hogy a baloldal minden tagja két első és egy második parciális

[12] A 3D vektortér például Lie-algebrát alkot a vektorszorzásra nézve.

derivált szorzata. Ha tehát belátjuk, hogy a baloldalon valójában *nincs* második deriváltat tartalmazó tag, ezzel igazoljuk a képlet helyességét.

Az u második deriváltjai a 2. és a 3. tagból származnak. Ennek a két tagnak az összege átalakítható a következő módon:

$$\{v,\{w,u\}\}+\{w,\{u,v\}\}=\{\{u,w\},v\}-\{\{u,v\},w\}=$$

$$=\left(L_vL_w-L_wL_v\right)u=\sum_{r,s}\left(V_r\frac{\partial}{\partial x_r}\left(W_s\frac{\partial}{\partial x_s}\right)-W_r\frac{\partial}{\partial x_r}\left(V_s\frac{\partial}{\partial x_s}\right)\right)u=$$

$$=\sum_{r,s}\left(V_r\frac{\partial W_s}{\partial x_r}-W_r\frac{\partial V_s}{\partial x_r}\right)\frac{\partial u}{\partial x_s}.$$

Ez a kifejezés nem tartalmazza u második deriváltját, ezért ilyen tag a Jacobi-identitás baloldalán sem fordul elő. A baloldal szimetriája miatt ugyanez igaz v-re és w-re. Ezt kellett igazolnunk.

C) A fundamentális zárójelek és a semleges elem.

A különféle dinamikai mennyiségek Poisson-zárójeleinek számításánál ritkán kell visszanyúlni a Poisson-zárójel (11.2) eredeti definíciójához. Ehelyett a Poisson-zárójel felsorolt tulajdonságainak a kihasználásával a kiszámítandó Poisson-zárójelet rendszerint vissza lehet vezetni a

$$\{q_i,p_j\}=\delta_{ij},\qquad \{q_i,q_j\}=\{p_i,p_j\}=0 \tag{11.6}$$

fundamentális zárójelekre. A számítások során megjelenhetnek úgynevezett *semleges elemek* is (mint pl. a δ_{ij} Kronecker-szimbólum), amelyeknek bármely dinamikai mennyiséggel képzett Poisson-zárójele nullával egyenlő.

D) Fontos példa: A $\mathbf{J}=\sum[\mathbf{r}_i\times\mathbf{p}_i]$ pályamomentumot tartalmazó Poisson-zárójelek (Descartes-koordináták).

(D1) A $\mathbf{J}$*-ben lineáris relációk*:

Egyetlen tömegpont esetén jelöljük a Descartes-koordinátákat x_1, x_2, $x_3\equiv x$, y, z-vel. Akkor

$$\{J_\alpha,x_\beta\}=\epsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\gamma\qquad\{J_\alpha,p_\beta\}=\epsilon_{\alpha\beta\gamma}p_\gamma. \tag{11.7}$$

A görög index az 1,2,3 értéket veszi fel, a kétszer előforduló indexre természetesen összegezni kell, az $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ a Levi-Civita szimbólum, amely az indexeiben antiszimmetrikus (ezért pl. $\epsilon_{112}=-\epsilon_{112}=0$), és $\epsilon_{123}=+1$.

A (11.7) igazolását a J_x és az y Poisson-zárójelének kiszámításán mutatjuk be:

$$\{J_x,y\}=\{(yp_z-zp_y),y\}=\{yp_z,y\}-\{zp_y,y\}=$$

$$=y\{p_z,y\}+p_z\{y,y\}-z\{p_y,y\}-p_y\{z,y\}=z.$$

Tömegpontokból álló rendszer tárgyalásánál figyelembe kell vennünk az egyes tömegpontokat jellemző $i, j, \ldots$ indexet is. Ekkor

$$\{J_{i\alpha}, x_{j\beta}\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_{j\gamma} \delta_{ij} \qquad \{J_{i\alpha}, p_{j\beta}\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_{j\gamma} \delta_{ij},$$

és ha

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{J}_i, \qquad J_\alpha = \sum_i J_{i\alpha},$$

akkor

$$\{J_\alpha, x_{j\beta}\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_{j\gamma} \qquad \{J_{i\alpha}, p_{j\beta}\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} p_{j\gamma}.$$

(D2) A $\mathbf{J}$*-ben kvadratikus relációk*:
Tetszőleges részecskeszámra igaz, hogy

$$\{J_\alpha, J_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma. \tag{11.8}$$

$$\left\{J_\alpha, \mathbf{J}^2\right\} = 0. \tag{11.9}$$

Egyetlen tömegpontra például

$$\{J_x, J_y\} = \{J_x, zp_x - xp_z\} = \{J_x, zp_x\} - \{J_x, xp_z\} =$$
$$= z\{J_x, p_x\} + p_x\{J_x, z\} - x\{J_x, p_z\} - p_z\{J_x, x\} =$$
$$p_x(-y) - x(-p_y) = xp_y - yp_x = J_z.$$

Hasonlóan

$$\left\{J_x, \mathbf{J}^2\right\} = \left\{J_x, J_x^2 + J_y^2 + J_z^2\right\} = \left\{J_x, J_x^2\right\} + \left\{J_x, J_y^2\right\} + \left\{J_x, J_z^2\right\} =$$
$$= 2J_x\{J_x, J_x\} + 2J_y\{J_y, J_x\} + 2J_z\{J_z, J_x\} = 2J_yJ_z + 2J_z(-J_y) = 0.$$

E) Az impulzusmomentum és az infinitezimális forgatások.

Infinitezimális transzformációnál Descartes-koordinátákban

$$\mathbf{r}_i \longrightarrow \mathbf{r'}_i = \mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r}_i, \qquad \mathbf{p}_i \longrightarrow \mathbf{p'}_i = \mathbf{p}_i + \delta\mathbf{p}_i. \tag{11.10}$$

Az $\mathbf{n}$ tengely ($|\mathbf{n}| = 1$) körüli $\delta\varphi$ szögű forgatásnál

$$\delta\mathbf{r}_i = [\mathbf{n} \times \mathbf{r}_i], \qquad \delta\mathbf{p}_i = [\mathbf{n} \times \mathbf{p}_i]. \tag{11.11}$$

Hogyan változnak meg az $u(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ dinamikai mennyiségek egy ilyen transzformációnál?

A változók transzformációjának hatását u-ra két különböző módon értelmezhetjük: Vagy a koordinátarendszer transzformációjaként (*passzív szemlélet*), vagy pedig a koordinátarendszerben elhelyezkedő objektumoknak az előzővel ellentétes irányú transzformációjaként (*aktív szemlélet*).

A passzív szemlélet akkor előnyös, amikor az u fizikai tulajdonság nem egyszerűen maguknak a koordinátáknak a számértéke, hanem valamiféle mező (vagy közeg) tulajdonsága a tér megadott koordinátájú pontjában adott időpontban (hőmérséklet, sűrűség, stb.). Az u ilyenkor tipikusan csak az x térkoordinátáktól függ (valamint az időtől, amit most az egyszerűség kedvéért figyelmen kívül hagyunk). Az ilyen természetű $u(x)$ függvények argumentumának $x \longrightarrow x' = f(x)$ transzformációját célszerű a koordinátarendszer transzformációjaként felfogni; magának az $u(x)$ függvénynek a transzformációját ekkor annak a ténynek az alapján lehet megtalálni, hogy az u fizikai tulajdonság egyáltalán nem változik meg attól, hogy az adott pont koordinátái (az x számok) az új koordinátarendszerben x'-re változnak meg:

$$u'(x') = u(x). \tag{11.12}$$

Az u' függvény természetesen különbözik u-tól: Ha $x = g(x')$ az $x' = f(x)$ inverze, akkor $u'(x') = u\big(g(x')\big) \neq u(x')$.

A passzív felfogásban a koordináták a tér általunk kiválasztott pontját jelölik ki egy olyan koordinátarendszerhez viszonyítva, amely a valóságban soha sincs ott, hanem csak elgondoljuk. A tömegpontok mechanikájában ezzel szemben a koordináták konkrét fizikai objektumokra vonatkoznak. A passzív felfogás ilyenkor vezethet ellentmondó következtetésekre.

Számítsuk ki passzív felfogásban az $u(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ függvény δu megváltozását a (11.10),(11.11) transzformációnál. A (11.10) szerint ekkor

$$u(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = u(\mathbf{r}' - \delta\mathbf{r}, \mathbf{p}' - \delta\mathbf{p}).$$

Ha ezt a képletet behelyettesítjük (11.12) jobboldalába és a vesszős változókat vesszőtlenre jelöljük át, akkor az $u \longrightarrow u'$ transzformációra az

$$u'(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = u(\mathbf{r} - \delta\mathbf{r}, \mathbf{p} - \delta\mathbf{p}) = u(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \delta u(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \tag{11.13}$$

képletet kapjuk, amely az u dinamikai mennyiség δu megváltozásának a definíciója.

Belátjuk, hogy passzív felfogásban

$$\delta u(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})\delta\varphi, u(\mathbf{r}, \mathbf{p})\} \tag{11.14}$$

A bizonyítást az egyszerűség kedvéért egyetlen részecskére mutatjuk be:

$$\delta u(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = u(\mathbf{r} - \delta\mathbf{r}, \mathbf{p} - \delta\mathbf{p}) - u(\mathbf{r}, \mathbf{p}) =$$

$$= -\delta x_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \delta p_\alpha \frac{\partial u}{\partial p_\alpha} = \left(-[\mathbf{n} \times \mathbf{r}]_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - [\mathbf{n} \times \mathbf{p}]_\alpha \frac{\partial u}{\partial p_\alpha}\right) \delta\varphi =$$

$$= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \left(-x_\gamma \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - p_\gamma \frac{\partial u}{\partial p_\alpha}\right) \delta\varphi = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \left(-x_\gamma \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + p_\alpha \frac{\partial u}{\partial p_\gamma}\right) \delta\varphi =$$

$$= \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \{x_\gamma p_\alpha, u\} \delta\varphi = \epsilon_{\beta\gamma\alpha} n_\beta \{x_\gamma p_\alpha, u\} \delta\varphi = n_\beta \{J_\beta, u\} \delta\varphi = \{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})\delta\varphi, u\}.$$

A (11.14) azonban ellentmond (11.11)-nek. Legyen például $u = x$, $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ és természetesen $\mathbf{r} = (x, y, z)$. A (11.14) és (11.7) szerint ekkor

$$\delta x = \{J_z, x\}\, \delta\varphi = +y\delta\varphi.$$

Másrészt azonban (11.11)-ből

$$\delta x = [\mathbf{n} \times \mathbf{r}]_x \delta\varphi = -y\delta\varphi.$$

Mint látjuk, a mechanikában a transzformációk passzív felfogása ellentmondáshoz vezet annak következtében, hogy összemosódik a koordináták hely-megjelölő és objektum-megjelölő funkciója. Aktív felfogásban ugyanazt a transzformációt az objektumok áthelyezéseként fogjuk fel a koordinátarendszer transzformációjával ellentétes irányban. A korábbi jelölésünket használva ezt úgy fejezhetjük ki, hogy (11.12)-ben az $x \longrightarrow x'$ átmenetet az ellenkező irányú $x' \longrightarrow x$ átmenettel helyettesítjük, ezért az u dinamikai mennyiség megváltozását az

$$u'(x) = u(x') \tag{11.15}$$

képlettel definiáljuk. Ennek a definíciónak az alapján δu előjele az ellenkezőjére változik, vagyis (11.14) helyett aktív felfogásban a

$$\delta u(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})\delta\varphi, u(\mathbf{r}, \mathbf{p})\} \tag{11.16}$$

képlet lép érvénybe. Ez a képlet már nem mond ellent (11.11)-nek.

A geometriai transzformációs csoportok tárgyalásánál (a forgatások ilyenek) ezért a dinamikai mennyiségeket az aktív felfogásnak megfelelő (11.15) szabály szerint transzformáljuk. Más összefüggésben azonban (pl. a 13. fejezetben) többnyire a (11.12) képletet fogjuk használni.

Legyen u forgásinvariáns. A (11.10), (11.11) transzformációnál ekkor $\delta u = 0$, és a (11.16) következtében u Poisson-zárójele $\mathbf{J}$ bármely komponensével nullával egyenlő. Speciálisan

$$\{J_\alpha, (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)\} = \{J_\alpha, (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j)\} = \{J_\alpha, (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{p}_j)\} = 0,$$

mert a tömegpontok (vagy a koordinátarendszer) elforgatásakor a skalárszorzatok változatlanok maradnak.

A forgásinvariancia azonban csak akkor áll fenn, ha a skalárszorzat mindkét tényezője dinamikai mennyiség. Amikor az egyikük rögzített (külső) vektor (pl. $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ vagy $\mathbf{A}$), akkor a szóban forgó skalárszorzat nem is válik nullává.

Legyen mondjuk $\mathbf{E} = (0, 0, \mathcal{E})$ konstans z-rányú elektromos mező. Mivel $\mathcal{E}$ semleges elem, ezért

$$\{J_x, \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}\} = \{J_x, \mathcal{E}z\} = \mathcal{E}\,\{J_x, z\} = -\mathcal{E}y \neq 0.$$

Fontos következmény: Ha a H Hamilton-függvény forgásinvariáns, akkor az $u = \mathbf{J}$ impulzusmomentum mozgásállandó:

$$\dot{J}_\alpha = \{J_\alpha, H\} = 0. \tag{11.17}$$

Figyeljünk fel ennek a képletnek a kétarcúságára: A H-ról azt állítja, hogy forgásinvariáns, a $\mathbf{J}$-ről pedig azt, hogy megmarad. A jelen kurzus egyik főfeladata az ilyen típusú kapcsolatok feltérképezése a mechanikában.

12. Hamilton-mechanika kényszerekkel

A) Lagrange-formalizmus.

Rójunk ki az n szabadsági fokú rendszerünkre $k < n$ koordinátafüggő holonóm kényszerfeltételt:

$$\phi_\alpha(q) \equiv \phi_\alpha(q_1, \dots q_n) = 0. \qquad (\alpha = 1, \dots k < n) \tag{12.1}$$

A Lagrange-elmélet szerint egy ilyen rendszer helyes tárgyalása az, hogy a kényszerek felhasználásával $L(q_1, \dots q_n, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_n)$-ből kizárunk k koordinátát és sebességet, és az így létrejövő $\mathcal{L}(q_1, \dots q_{n-k}, \dot{q}_1, \dots \dot{q}_{n-k})$ Lagrange-függvényre alkalmazzuk a hatáselvet és vele írjuk fel a Lagrange-egyenleteket. Az indoklás lényege: Ha az eredeti n változóban a $q(t_0)$, $q(t_1)$ (ld. az 2. fejezet B. pontját) eleget tesz a (12.1) kényszerfeltételeknek, akkor az $\int dt\, L$ feltételes szélsőértéke és az $\int dt\, \mathcal{L}$ szélsőértéke ugyanahhoz a pályához tartozik.

Ezzel ekvivalens, de szimmetrikusabb eljárás az u.n. *multiplikátor módszer*, amelyben az eredeti L Lagrange-függvény helyett az

$$\tilde{L} = L - \lambda_\alpha(t)\phi_\alpha \tag{12.2}$$

Lagrange-függvényből származtatjuk a Lagrange-egyenleteket (az α-ra természetesen összegzés értendő), és az n darab Lagrange-egyenletet a k darab kényszerfeltétellel együtt oldjuk meg a $q_i(t)$ *és* a $\lambda_\alpha(t)$ függvényekre nézve. A két eljárás ekvivalenciája a

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt\, \tilde{L} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r(t)\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt\, \left[\frac{\partial L}{\partial q_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right] \delta q_r(t) - \int_{t_0}^{t_1} dt\, \lambda_\alpha(t) \delta\phi_\alpha$$

képletből következik, amely mutatja, hogy ha a variációt a kényszerekkel összhangban végezzük ($\delta\phi_\alpha = 0$), akkor mindkét eljárás ugyanazt az extremálist szolgáltatja.

Az $\tilde{L}$-ből következő

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \lambda_\alpha \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q_r} = 0$$

mozgásegyenletek mindegyikében megjelenik egy $\lambda_\alpha(t)$-vel arányos tag, amelyek a kényszererőket reprezentálják. Ha a kényszerfeltételeket nem L-ben, hanem az L-ből származó Lagrange-egyenletekben használnánk ki, akkor ezek a tagok hiányoznának. *Ezért* nem fogadható el az az eljárás, amikor a kényszereket utólag, az L-ből származtatott egyenletekben használjuk ki.

B) Hamilton-formalizmus.

Áttérünk a hamiltoni leírásra. Bizonyosan korrekt Hamilton-egyenletekhez jutunk akkor, ha $\mathcal{L}$-ből térünk át Hamilton-formalizmusra:

$$\text{Korrekt:} \qquad L \xrightarrow[\text{kizárása}]{k \text{ változó}} \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{H}$$

$$\text{Hibás:} \qquad L \longrightarrow H \xrightarrow[\text{kizárása}]{k \text{ változó}} \overline{\mathcal{H}}.$$

A második eljárás azért hibás, mert a Hamilton-egyenletek a speciális $\Lambda = \sum \dot{q}p - h$ alakú Λ függvény variációs problémájának a megoldásai, és a kényszerek általában elrontják ezt a kanonikus alakot.

A multiplikátor módszerben a (12.2)-ben definiált $\tilde{L}$-ből a standard módszerrel határozhatjuk meg a Hamilton-függvényt. Továbbra is feltesszük, hogy a kényszerek csak a koordinátáktól függnek, ezért

$$\tilde{H} = H + \lambda_\alpha \phi_\alpha, \tag{12.3}$$

ahol H továbbra is az L-hez tartozó Hamilton-függvény. A λ_α multiplikátorokról ki fog derülni, hogy dinamikai függvények, ezért ennek megfelelően kell kezelni őket.

A Hamilton-egyenletek képzése során $\tilde{H}$-t deriválni kell a koordináták szerint. A ϕ_α parciális deriváltjai általában nem tűnnek el ott, ahol ezek a függvények maguk nullák, ezért meg kell őket tartani $\tilde{H}$-ban.

Célszerű bevezetnia következő terminológiát: Egy $G(q,p)$ kifejezés *gyengén nulla* ($\approx$), ha a kényszerek kihasználása után ő maga eltűnik, a deriváltjai azonban nullától különbözők maradnak. Ha még az első parciális deriváltjai is zérusokká válnak, akkor a kifejezés *erősen nulla* ($=$). Maguk a kényszerek nyilván gyengén nullák, ezért a kényszerfeltételeket

$$\phi_\alpha \approx 0 \tag{12.4}$$

alakban kell felírni

Egy gyengén eltűnő kifejezés Poisson-zárójele nyilván különbözik nullától, ezért a $\approx$ kihasználása csak a Poisson-zárójelek kiszámítása *után* (vagyis magukban a mozgásegyenletekben) van megengedve.

Maguknak a $\phi_\alpha(q)$ kényszereknek az időderiváltja nem tűnik el automatikusan:

$$\dot{\phi}_\alpha = \left\{\phi_\alpha, \tilde{H}\right\} = \{\phi_\alpha, H\} + \{\phi_\alpha, \lambda_\beta \phi_\beta\} =$$

$$= \{\phi_\alpha, H\} + \lambda_\beta \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} + \{\phi_\alpha, \lambda_\beta\} \phi_\beta.$$

Mivel a ϕ_α-k feltevés szerint csak a koordinátáktól függnek és gyengén eltűnnek, ezért

$$\dot{\phi}_\alpha \approx \{\phi_\alpha, H\}.$$

Ahhoz tehát, hogy (12.4) folyamatosan teljesülhessen, a jobboldalnak nullával kell egyenlőnek lennie. A $\phi_\alpha \approx 0$ kényszerfeltételek *konzisztencia feltétele* tehát

az, hogy a $\{\phi_\alpha, H\}$ dinamikai mennyiségek maguk is kényszerek legyenek és (legalább) gyengén eltűnjenek:

$$\chi_\alpha \equiv \{\phi_\alpha, H\} \approx 0. \tag{12.5}$$

A χ_α-kat *szekundér*, a ϕ_α-kat pedig ennek megfelelően *primér* kényszereknek hívjuk.

A szekundér kényszerek konzisztenciafeltétele megköveteli, hogy az ő időderiváltjaik is (legalább) gyengén legyenek nullák. A (12.4) figyelembe vételével ennek feltétele a következő:

$$\dot{\chi}_\alpha = \{\chi_\alpha, H\} + \{\chi_\alpha, \lambda_\beta \phi_\beta\} \approx \{\chi_\alpha, H\} + \lambda_\beta \{\chi_\alpha, \phi_\beta\} = 0.$$

Ez a feltétel a λ_α multiplikátorok alkalmas megválasztásával teljesíthető. Vezessük be a $k \times k$ dimenziós M mátrixot az

$$M_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \phi_\beta\}$$

definícióval, és legyen

$$\lambda_\beta = -M^{-1}_{\beta\alpha} \{\chi_\alpha, H\}.$$

Ennél a választásnál

$$\dot{\chi}_\alpha = \{\chi_\alpha, H\} - M_{\alpha\beta} M^{-1}_{\beta\gamma} \{\chi_\gamma, H\} = 0.$$

A multiplikátor-módszer Hamilton-függvénye tehát

$$\tilde{H} = H - \phi_\beta M^{-1}_{\beta\alpha} \{\chi_\alpha, H\}. \tag{12.6}$$

Ha ezt használjuk és a primér és szekundér kényszereket $t = 0$-ban kielégítjük, akkor minden időpillanatban teljesülni fognak.

C) Lie-algebra struktúra kényszerek esetében: A csillag zárójel.

Az előző fejezet B. pontjában láttuk, hogy a dinamikai mennyiségek Lie-algebra struktúrát alkotnak a Poisson-zárójelre mint szorzásra nézve. Ez a Lie-algebra azonban nem invariáns a kényszerekre, ugyanis a Poisson-zárójel alatt a kényszerfeltételek nem használhatók ki. Definiálható azonban egy módosított Poisson-zárójel, a *csillag-zárójel*, vagy *Dirac-zárójel*, amely rendelkezik a Poisson-zárójelnek a 11. fejezet A. és B. pontjában felsorolt tulajdonságaival[13], ezért egy csillag-zárójel kiszámítását is vissza lehet vezetni a fundamentális zárójelekre. Ezek azonban nem egyenlők a (11.6)-ban található értékekkel, hanem minden feladatban külön ki kell számítani őket.

[13] *Dirac* a *Lectures on Quantum Mechanics* 42. oldalán ezt írja: „I don't know of any neat way of proving the Jacobi identity for the new Poisson brackets. If one just substitutes according to the definition and works it out in a complicated way, one does find that all the terms cancel out and the left-hand side equals zero. I think there ought to be some neat way of proving it."

Definiáljuk az antiszimmetrikus

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} \{\phi_\alpha, \phi_\beta\} & \{\phi_\alpha, \chi_\beta\} \\ \{\chi_\alpha, \phi_\beta\} & \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \end{pmatrix} \equiv \{\xi_i, \xi_j\} \tag{12.7}$$

$(2k \times 2k)$-s mátrixot, amelyben $\alpha, \beta = 1, \ldots, k$ és $i, j = 1, \ldots, 2k$, valamint $\phi_1, \ldots, \phi_k, \chi_1, \ldots, \chi_k = \xi_1, \ldots \xi_{2k}$.

Ezeknek a definícióknak a felhasználásával a csillag-zárójel így definiálható:

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \xi_i\}\, \Delta^{-1}_{ij}\, \{\xi_j, B\}\,. \tag{12.8}$$

Az i, j-re természetesen összegzés értendő. Ebből a képletből nyilvánvaló, hogy a csillag-zárójelen belül a kényszerek kihasználhatók:

$$\{A, \xi_i\}^* = 0.$$

Fontos tulajdonság, hogy a mozgásegyenletekben a Poisson-zárójel helyettesíthető csillag-zárójellel:

$$\left\{A, \tilde{H}\right\} \approx \{A, H\}^* \qquad (\forall A). \tag{12.9}$$

A bizonyításhoz vegyük észre, hogy $\{\phi_\alpha, \phi_\beta\} = 0$ következtében

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -M^{tr} \\ M & M_1 \end{pmatrix}, \qquad \Delta^{-1} = \begin{pmatrix} M_2 & M^{-1} \\ -M^{tr\,-1} & 0 \end{pmatrix}$$

(az M_1, M_2 konkrét alakjára nem lesz szükség). Így

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \phi_\alpha\}\, M^{-1}_{\alpha\beta}\, \{\chi_\beta, B\} +$$

$$+ \{A, \chi_\alpha\}\, M^{-1}_{\alpha\beta}\, \{\phi_\beta, B\} - \{A, \phi_\alpha\}\, (M^{-1})_{\alpha\beta}\, \{\chi_\beta, B\}\,.$$

Ha ezt $B = H$-ra alkalmazzuk, akkor $\{\phi_\beta, H\} \equiv \chi_\beta \approx 0$ következtében

$$\{A, H\}^* \approx \{A, H\} - \{A, \phi_\alpha\}\, M^{-1}_{\alpha\beta}\, \{\chi_\beta, H\}\,.$$

Másrészt (12.6)-ből $\phi_\beta \approx 0$ figyelembe vételével

$$\left\{A, \tilde{H}\right\} = \{A, H\} - \left\{A, \phi_\alpha M^{-1}_{\alpha\beta}\, \{\chi_\beta, H\}\right\} \approx \{A, H\} - \{A, \phi_\alpha\}\, M^{-1}_{\alpha\beta}\, \{\chi_\beta, H\}\,,$$

tehát (12.9) valóban teljesül.

D) Egy egyszerű példa.

Tekintsük az α szögű lejtőn súrlódásmentesen csúszó tömegpontot. Ha x a vízszintes, y a függőleges Descartes-koordináta, akkor a Lagrange-függvény

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy,$$

az egyetlen kényszerfeltétel pedig

$$\phi = y - ax \approx 0, \quad \text{ahol} \quad a = \operatorname{tg}\alpha.$$

Oldjuk meg először a feladatot az y változó kizárásával.

$$\mathcal{L}(x,\dot{x}) = L(x,y,\dot{x},\dot{y})\big|_{y=ax} = \frac{m\left(1+a^2\right)}{2}\dot{x}^2 - mgax.$$

Az egyetlen Lagrange-egyenlet

$$\mathcal{L}_x \equiv m\left(1+a^2\right)\ddot{x} + mga = 0,$$

ahonnan

$$\ddot{x} = -\frac{ag}{1+a^2} = -g\sin\alpha\cos\alpha \tag{12.10}$$

helyesen.

A multiplikátor módszerben

$$\tilde{L} = L - \lambda\phi = \frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - mgy - \lambda(y-ax).$$

A Lagrange-egyenletek

$$\tilde{L}_x \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial\tilde{L}}{\partial x} = m\ddot{x} - a\lambda = 0,$$

$$\tilde{L}_y \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{y}} - \frac{\partial\tilde{L}}{\partial y} = m\ddot{y} + mg - a\lambda = 0.$$

Ezt a két Lagrange-egyenletet az

$$y - ax = 0$$

kényszerfeltétellel együtt kell megoldani a *három* $x(t)$, $y(t)$, $\lambda(t)$ ismeretlen t-függvényre. Az y és a λ kizárásával például természetesen újra (12.10)-re jutunk.

Hibás lagrange-i megoldás: A kényszermentes

$$m\ddot{x} = 0, \qquad m\ddot{y} + mg = 0$$

Lagrange-egyenletek nyilván ellentmondanak (12.10)-nek, hiába zárnánk ki y-t a kényszerfeltétel segítségével.

Az $\mathcal{L}$-ről azonban áttérhetünk $\mathcal{H}$-ra:

$$p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = m\left(1+a^2\right)\dot{x},$$

ezért

$$\mathcal{H} = p_x\dot{x} - \mathcal{L} = \frac{p_x^2}{2m\left(1+a^2\right)} + mgax.$$

$$\frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = -mga.$$

Ide p_x-et behelyettesítve újra megkapjuk (12.10)-et.

Hibás hamiltoni megoldás: Az L-ből kapható H a következő:

$$H(x,y,p_x,p_y)=\frac{p_x^2+p_y^2}{2m}+mgy, \quad \text{amelyben} \quad p_x=m\dot{x}, p_y=-m\dot{y}.$$

Ha innen az $y=ax$, $p_y=m\dot{y}=ma\dot{x}$ egyenletek segítségével kizárjuk az y változót, a hibás

$$H'=\frac{1+a^2}{2m}p_x^2+mgax$$

Hamilton-függvényre jutunk.

Hamiltoni leírás multiplikátor módszerrel: Mivel

$$H=\frac{p_x^2+p_y^2}{2m}+mgy,$$

ezért a (12.5) definíció szerint a szekundér kényszer a következő:

$$\{\phi,H\}=\left\{(y-ax),\frac{p_x^2+p_y^2}{2m}+mgy\right\}=\frac{1}{m}(p_y-ap_x).$$

Az $1/m$-et elhagyhatjuk, ezért

$$\chi=p_y-ap_x\approx 0.$$

A csillag-zárójel definíciója:

$$\{A,B\}^*=\{A,B\}-\{A,\phi\}\cdot\frac{1}{M}\cdot\{\chi,B\}+\{A,\chi\}\cdot\frac{1}{M}\cdot\{\phi,B\},$$

$$\text{ahol} \quad M=\{\mathrm{ch},\phi\}=-(1+a^2).$$

$$\{A,B\}^*=\{A,B\}+\frac{1}{1+a^2}\{A,(y-ax)\}\cdot\{(p_y-ap_x),B\}-$$

$$-\frac{1}{1+a^2}\{A,(p_y-ap_x)\}\cdot\{(y-ax),B\}$$

Minden zárójelet visszavezethetünk a fundamentális zárójelekre. Példánkban ezek a következők:

$$\{x,y\}^*=\{p_x,p_y\}^*=0,$$

$$\{x,p_x\}^*=\frac{1}{1+a^2},$$

$$\{x,p_y\}^*=\{y,p_x\}^*=\frac{a}{1+a^2},$$

$$\{y,p_y\}^*=\frac{a^2}{1+a^2}.$$

A Hamilton-egyenletek:

$$\dot{x} = \{x, H\}^* = \frac{1}{m} p_x \{x, p_x\}^* + \frac{1}{m} p_y \{x, p_y\}^* = \frac{p_x}{m} + \frac{1}{m} \cdot \frac{a}{1+a^2} \overbrace{(p_y - a p_x)}^{\chi} \approx \frac{p_x}{m}$$

$$\dot{y} = \{y, H\}^* = \frac{1}{m} p_x \{y, p_x\}^* + \frac{1}{m} p_y \{y, p_y\}^* == \frac{p_y}{m} - \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1+a^2} \overbrace{(p_y - a p_x)}^{\chi} \approx \frac{p_y}{m}$$

$$\dot{p}_x = \{p_x, H\}^* = mg \{p_x, y\}^* = -\frac{mga}{1+a^2}$$

$$\dot{p}_y = \{p_y, H\}^* = mg \{p_y, y\}^* = -\frac{mga^2}{1+a^2}.$$

Ezek a korrekt Hamilton-egyenletek, amelyeket a $\phi \approx 0$, $\chi \approx 0$ kényszerfeltételeket kielégítő kezdőfeltételekkel kell megoldani.

13. A kanonikus transzformációk

A) A kanonikus transzformáció definíciója.

A 2.fejezetben láttuk, hogy a Lagrange-egyenletek konfigurációs tér (a koordináták) tetszőleges transzformációival szemben invariánsak. Ez abból következik, hogy (1) a Lagrange-függvény a (3.1)-nek megfelelően skalárisan transzformálódik, és (2) a Lagrange-egyenletek a $\delta \int dt\, L(q, \dot{q}, t) = 0$ variációs elvből származtathatók.

A 7. fejezet B. pontjában megmutattuk, hogy a Hamilton-egyenletek is megkaphatók variációs elvből, de csak akkor, ha a variálandó függvény speciális alakú: $\Lambda(p, q, \dot{q}, t) = p_r \dot{q}_r - H(q, p, t)$. Ez az alak azonban nem őrződik meg a fázistér (a koordináták és az impulzusok) tetszőleges transzformációjával szemben, és elég nyilvánvaló, hogy különös figyelmet érdemelnek a fázistérnek azok a transzformációi, amelyek a Hamilton-egyenletek struktúráját változatlanul hagyják.

A kanonikus transzformációk ilyenek (ld. alább az E. pontot), de nem ez a definíciójuk. A fázistér

$$\left.\begin{aligned} q'_i &= F_i(q, p, t) \qquad & q_i &= f(q', p', t) \\ p'_i &= G_i(q, p, t) \qquad & p_i &= g(q', p', t) \end{aligned}\right\} \tag{13.1}$$

transzformációját akkor nevezzük *kanonikusnak*, ha bármely két $u(q, p, t)$, $v(q, p, t)$ dinamikai mennyiségre teljesül a

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u'}{\partial q'_i} \frac{\partial v'}{\partial p'_i} - \frac{\partial u'}{\partial p'_i} \frac{\partial v'}{\partial q'_i} \right) \tag{13.2}$$

egyenlőség, amelyben természetesen

$$u(q,p,t) = u'(q',p',t) \qquad v(q,p,t) = v'(q',p',t). \tag{13.3}$$

Rövidebben ezt a definíciót

$$\{u,v\}_{q,p} = \{u,v\}_{q',p'} \tag{13.4}$$

alakban is felírhatjuk. A kanonikus transzformációk körében eszerint a többértelműség veszélye nélkül írhatunk egyszerűen $\{u,v\}$-t.

A Poisson-zárójelek deriválási tulajdonságai alapján a

$$\frac{\partial u}{\partial q_i'} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial q_i'} + \frac{\partial u}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q_i'} \right) \quad \text{stb.}$$

felhasználásával azonban könnyű igazolni, hogy már a *fundamentális zárójelek* invarianciája is elégséges (és szükséges) feltétele a transzformáció kanonikusságának. Eszerint a (13.1) transzformáció akkor és csakis akkor kanonikus, ha

$$\left.\begin{aligned} \{q_i', p_j'\}_{qp} &= \{q_i, p_j\}_{qp} = \delta_{ij} \\ \{q_i', q_j'\}_{qp} &= \{q_i, q_j\}_{qp} = 0 \\ \{p_i', p_j'\}_{qp} &= \{p_i, p_j\}_{qp} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{13.5}$$

azaz

$$\{F_i, G_j\} = \delta_{ij}, \qquad \{F_i, F_j\} = \{G_i, G_j\} = 0.$$

Ugyanilyen feltételt az inverz transzformációra is felírhatunk:

$$\left.\begin{aligned} \{q_i, p_j\}_{q'p'} &= \{q_i', p_j'\}_{q'p'} = \delta_{ij} \\ \{q_i, q_j\}_{q'p'} &= \{q_i', q_j'\}_{q'p'} = 0 \\ \{p_i, p_j\}_{q'p'} &= \{p_i', p_j'\}_{q'p'} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{13.6}$$

azaz

$$\{f_i, g_j\} = \delta_{ij}, \qquad \{f_i, f_j\} = \{g_i, g_j\} = 0.$$

Mindezt röviden úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a kanonikus transzformációk a fázistérnek azok a transzformációi, amelyekkel szemben a Poisson-zárójel invariáns.

B) A mozgás kanonikus transzformáció.

A mozgásprobléma megoldása legyen

$$q_i = F_i(q_0, p_0, t), \qquad p_i = G_i(q_0, p_0, t).$$

Akkor

$$\{F_i, G_j\} = \delta_{ij}, \qquad \{F_i, F_j\} = \{G_i, G_j\} = 0.$$

A harmonikus oszcillátorra például

$$q \equiv F = q_0 \cos\omega t + \frac{1}{m\omega} p_0 \sin\omega t$$

$$p \equiv G = p_0 \cos\omega t - m\omega q_0 \sin\omega p$$

Ez a megoldás valóban eleget tesz a fenti Poisson-zárójel relációknak.

A dt-ben lineáris pontossággal könnyű belátni, hogy a $(t, t+dt)$ infinitezimális időintervallumban végbemenő mozgás kanonikus transzformáció. Ehhez azt kell igazolni, hogy ha a $q_i(t) \equiv q_i$, $p_i(t) \equiv p_i$ kielégíti a fundamentális zárójeletet, akkor a $q_i(t+dt) \equiv q_i'$, $p_i(t+dt) \equiv p_i'$ is kielégíti őket. Ezt könnyű igazolni, mert megvalósuló mozgásra a Hamilton-egyenletek alapján a dt-ben lineáris pontossággal

$$q_i' = q_i + \dot{q}_i dt = q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dt,$$

$$p_i' = p_i + \dot{p}_i dt = q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dt.$$

Ennek következtében

$$\{q_i', q_j'\} \approx \left(\left\{ q_i, \frac{\partial H}{\partial p_j} \right\} + \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i}, q_j \right\} \right) dt = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} \right) = 0,$$

$$\{p_i', p_j'\} \approx \left(- \left\{ p_i, \frac{\partial H}{\partial q_j} \right\} - \left\{ \frac{\partial H}{\partial q_i}, p_j \right\} \right) dt = \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_i} \right) = 0,$$

$$\{q_i', p_j'\} \approx \left(\{q_i, p_j\} - \left\{ q_i, \frac{\partial H}{\partial q_j} \right\} + \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_i}, p_j \right\} \right) dt = \left(\{q_i, p_j\} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i} \right) = \delta_{ij}.$$

Az általános bizonyításhoz az (5.1) és az (5.7) második egyenletéből indulunk ki, amelyek megvalósuló mozgásra érvényesek:

$$p_i = \frac{\partial S(q, q_0, t)}{\partial q_i}, \qquad p_{0i} = -\frac{\partial S(q, q_0, t)}{\partial q_{0i}}. \tag{13.7}$$

Az eljárás ezután teljesen mechanikus. Képezzük mindkét egyenlet parciális deriváltjait az összes q_{0m}, p_{0m} szerint, az így kapható egyenletrendszerből kifejezzük a $\{q_i, p_j\}_{q_0 p_0}$, $\{q_i, q_j\}_{q_0 p_0}$, $\{p_i, p_j\}_{q_0 p_0}$ Poisson-zárójelekben szereplő parciális deriváltakat, és megmutatjuk, hogy ezek értéke rendre δ_{ij}, 0, 0.

A kiindulási egyenletrendszer

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_{0m}} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_l} \cdot \frac{\partial q_l}{\partial q_{0m}} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_{0m}}, \tag{a}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_{0m}} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_l} \cdot \frac{\partial q_l}{\partial p_{0m}}, \tag{b}$$

$$0 = -\frac{\partial^2 S}{\partial q_{0i} \partial q_l} \cdot \frac{\partial q_l}{\partial q_{0m}} - \frac{\partial^2 S}{\partial q_{0i} \partial q_{0m}}, \tag{c}$$

$$\delta_{im} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_{0i} \partial q_l} \cdot \frac{\partial q_l}{\partial p_{0m}}. \tag{d}$$

Legyen

$$A_{il} = A_{li} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_l}, \qquad B_{il} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_{0i} \partial q_l}, \quad C_{il} = C_{li} = \frac{\partial^2 S}{\partial q_{0i} \partial q_{0l}}.$$

Akkor

$$\frac{\partial q_j}{\partial p_{0m}} = -B^{-1}_{jm}, \tag{d'}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_{0m}} = -A_{il} B^{-1}_{lm}, \tag{b'}$$

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_{0m}} = -B^{-1}_{ji} C_{im}, \tag{c'}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_{0m}} = -A_{il} B^{-1}_{lj} C_{jm} + B_{mi}. \tag{a'}$$

Ezek alapján

$$\{q_i, p_j\}_{q_0 p_0} = \frac{\partial q_i}{\partial q_{0m}} \frac{\partial p_j}{\partial p_{0m}} - \frac{\partial q_i}{\partial p_{0m}} \frac{\partial p_j}{\partial q_{0m}} =$$

$$= \left(-B^{-1}_{is} Csm\right) \left(-A_{jl} B^{-1}_{lm}\right) - \left(-B^{-1}_{im}\right) \left(-A_{jl} B^{-1}_{ls} C_{sm} + B_{mj}\right) = \delta_{ij}$$

ahogy vártuk. Ugyanígy látható be a többi Poisson-zárójel reláció is.

Vegyük észre, *formálisan* seholse használtuk ki, hogy $S(q, q_0, t, t_0)$ maga a hatásfüggvény, és azt se, hogy függ t-től és t_0-tól. A levezetés akkor is érvényben marad, ha a hatásfüggvény helyett valamilyen önkényes $F(q, q_0)$-t választunk, vagyis (13.7) helyett a

$$p_i = \frac{\partial F(q, q_0)}{\partial q_i}, \qquad p_{0i} = -\frac{\partial F(q, q_0)}{\partial q_{0i}}. \tag{13.8}$$

egyenlettel definiáljuk a q, p függését a q_0, p_0 változó pártól. Ebben az esetben is kanonikus transzformációra jutunk, amely azonban csak akkor lesz éppen a q_0, p_0 kezdőfeltételekkel induló megvalósuló mozgás, amikor $F = S$.

A (13.8) egyenletet a szokásosabb jelölésmódot használva a tömörebb

$$p'_i dq'_i - p_i dq_i = dF(q', q) \tag{13.9}$$

alakban is felírhatjuk (az i-re természetesen összegezni kell). Ezek az egyenletek implicit módon határozzák meg a kanonikus transzformációt, mert még meg kell oldani őket a vesszős (vagy a vesszőtlen) változókra. Differenciálegyenletet azonban már nem kell megoldani[14].

C) A konfigurációs tér koordináta transzformációi meghatározott kanonikus transzformációt indukálnak a fázistérben.

A Lagrange-formalizmusban minden

$$q_i \longrightarrow q'_i = Q_i(q), \qquad q'_i \longrightarrow q_i = Q_i^{-1}(q')$$

koordináta transzformációhoz (5.5) valamint a Lagrange-függvény (3.1) skaláris transzformációs törvénye alapján hozzárendelhetjük az impulzusok

$$p_j \longrightarrow p'_j = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_j}, \qquad p'_j \longrightarrow p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

transzformációját. Könnyű igazolni, hogy az így definiált $q, p \longrightarrow q', p'$ transzformáció, amelyben a q és a p (valamint a q' és a p') már függetlenek egymástól, kanonikus. Ehhez csupán annyit kell észrevenni, hogy a dt invarianciája következtében

$$p'_j = p_i \frac{\partial q_i}{\partial q'_j} = p_i \frac{\partial Q_i^{-1}(q')}{\partial q'_j}, \qquad p_i = p'_j \frac{\partial q'_j}{\partial q_i} = p'_j \frac{\partial Q_j(q)}{\partial q_i}. \tag{13.10}$$

A kanonikusságot (13.5) három egyenletének igazolásával lehet bizonyítani. Ezekben a második egyenlőség természetesen triviálisan teljesül, csak az elsőt kell mindegyikben bizonyítani.

$$\left\{q'_i, p'_j\right\}_{q,p} = \frac{\partial q'_i}{\partial q_l}\frac{\partial p'_j}{\partial p_l} - \frac{\partial q'_i}{\partial p_l}\frac{\partial p'_j}{\partial q_l}.$$

(Itt és a következőkben l-re — mint a kétszer előforduló indexekre általában — összegzés értendő). Ha figyelembe vesszük, hogy

$$\frac{\partial q'_i}{\partial p_l} = 0, \quad \text{valamint} \quad \frac{\partial p'_j}{\partial p_l} = \frac{\partial q_l}{\partial q'_j},$$

[14] Az 5. fejezet A. pontjában láttuk, hogy a (13.7) egyenletek, amelyekből a kanonikusság (13.9) feltételét származtattuk, csak a centrális extremális mezőben érvényesek. Hasonló természetű korlátozások állnak fenn a (13.9)-cel szemben is. Azokat a kanonikus transzformációkat, amelyek ennek a képletnek az alapján származtathatók, számomra ismeretlen okból *szabad kanonikus transzformációknak* hívják.

akkor láthatjuk, hogy

$$\{q'_i, p'_j\} = \frac{\partial q'_i}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial q'_j} = \frac{\partial q'_i}{\partial q'_j} = \delta_{ij}.$$

A (13.5) első egyenlete tehát teljesül. A második egyenlet triviálisan igaz, mert a q'-k nem függenek az impulzusoktól. Az impulzusok azonban függenek a koordinátáktól, ezért a harmadik sort igazolni kell.

$$\{p'_i, p'_j\}_{q,p} = \frac{\partial p'_i}{\partial q_l}\frac{\partial p'_j}{\partial q_l} - (i \leftrightarrow j)$$

Megmutatjuk, hogy az első tag i, j felcserélésével szemben szimmetrikus, ezért ez a kifejezés valóban nullával egyenlő.

$$\frac{\partial p'_i}{\partial q_l}\frac{\partial p'_j}{\partial q_l} = p_s\frac{\partial^2 q_s}{\partial q_l \partial q'_i}\frac{\partial q_l}{\partial q'_j} = p_s\frac{\partial^2 q_s}{\partial q'_m \partial q'_i}\frac{\partial q'_m}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial q'_j} =$$

$$= p_s\frac{\partial^2 q_s}{\partial q'_m \partial q'_i}\frac{\partial q'_m}{\partial q'_j} = p_s\frac{\partial^2 q_s}{\partial q'_i \partial q'_j},$$

amely valóban szimmetrikus i, j-ben.

Megjegyezzük még, hogy az impulzusok (13.10) transzformációs szabályát a rövid

$$p'_i dq'_i = p_i dq_i \tag{13.11}$$

képlettel is megadhatjuk, amely (13.9) speciális esete $F = 0$-nál. A B. pont gondolatmenetének $F = 0$-nál természetesen nincs értelme, de mint látjuk, a (13.10) alakban megadott végeredmény ebben az esetben is érvényes marad.

Azt is megállapíthatjuk, hogy a fázistérbeli transzformációknak csak egy része kanonikus, de ez a rész magában foglalja a konfigurációs tér összes transzformációját.

D) A dinamikai mértéktranszformációk kanonikusak.

A (5.8)-ben definiált

$$q'_i = q_i, \qquad p'_i = p_i + \frac{\partial f(q)}{\partial q_i}$$

dinamikai mértéktranszformációk kielégítik a három (13.5) egyenletet, ezért kanonikus transzformációk.

E) A kanonikus transzformációk őrzik a Hamilton-egyenleteket valamilyen Hamilton-függvénnyel.

Legyen

$$q'_i = F_i(q, p, t), \qquad p'_i = G_i(q, p, t) \tag{13.12}$$

kanonikus transzformáció, azaz teljesüljenek az

$$\{u,v\}_{qp} = \{u',v'\}_{q'p'} \quad (\forall u,v)$$

relációk.

A (11.4) szerint az F_i és a G_i mint dinamikai mennyiségek eleget tesznek a

$$\left.\begin{aligned} \dot{F}_i &= \{F_i,H\}_{qp} + \frac{\partial F_i}{\partial t} \\ \dot{G}_i &= \{G_i,H\}_{qp} + \frac{\partial G_i}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{13.13}$$

mozgásegyenleteknek. A (13.12) kanonikussága következtében azonban

$$\{F_i,H\}_{qp} = \{q_i',H'\}_{q'p'} = \frac{\partial H'}{\partial p_i'},$$

$$\{G_i,H\}_{qp} = \{p_i',H'\}_{q'p'} = -\frac{\partial H'}{\partial q_i'},$$

ezért amikor az F_i és G_i kanonikus transzformáció nem függ explicite az időtől, (13.13) átírható Hamilton-egyenlet alakba a vesszős változókban:

$$\dot{q}_i' = \frac{\partial H'}{\partial p_i'}, \qquad \dot{p}_i' = -\frac{\partial H'}{\partial q_i'}.$$

Ezzel igazoltuk, hogy olyan kanonikus transzformációkkal szemben, amelyek nem függnek explicite az időtől, a Hamilton-egyenletek invariánsak és a Hamilton-függvény skalárként transzformálódik: $H(q,p) = H'(q',p')$.

Amikor F_i és G_i t-függő, akkor azt kell igazolni, hogy a $\dfrac{\partial F_i}{\partial t}$, $\dfrac{\partial G_i}{\partial t}$ járulékok beolvaszthatók H'-be, vagyis létezik *egyetlen* olyan χ függvény, amely eleget tesz a $2n$ darab

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial t} &= \{F_i,\chi\}_{qp} \\ \frac{\partial G_i}{\partial t} &= \{G_i,\chi\}_{qp} \end{aligned}\right\} \tag{13.14}$$

relációnak. Ebben az esetben ugyanis

$$\dot{q}_i' = \{F_i,(H+\chi)\}_{qp} = \{q_i',(H'+\chi')\}_{q'p'} = \frac{\partial \overline{H}'}{\partial p_i'},$$

$$\dot{p}_i' = \{G_i,(H+\chi)\}_{qp} = \{p_i',(H'+\chi')\}_{q'p'} = -\frac{\partial \overline{H}'}{\partial q_i'},$$

tehát a kanonikus egyenletek teljesülnek a $\overline{H}' = H' + \chi'$ Hamilton-függvénnyel.

A χ létezésének igazolása: A $q,p \longrightarrow q',p'$ kanonikussága következtében (13.14) így is írható:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F_i}{\partial t} &= \{F_i,\chi\}_{qp} = \{q_i',\chi'\}_{q'p'} = \frac{\partial \chi'}{\partial p_i'},\\ \frac{\partial G_i}{\partial t} &= \{G_i,\chi\}_{qp} = \{p_i',\chi'\}_{q'p'} = -\frac{\partial \chi'}{\partial q_i'}.\end{aligned}\right\} \tag{13.15}$$

Legyen

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} \equiv \mathcal{F}_i \quad \text{és} \quad \frac{\partial G_i}{\partial t} \equiv \mathcal{G}_i. \tag{13.16}$$

Akkor

$$\frac{\partial \chi'}{\partial p_i'} = \mathcal{F}_i', \qquad \frac{\partial \chi'}{\partial q_i'} = -\mathcal{G}_i'. \tag{13.17}$$

Ezeknek az egyenleteknek az integrálhatósági feltétele a keresztderiváltak egyenlősége, például

$$\frac{\partial^2 \chi'}{\partial p_j' \partial p_i'} = \frac{\partial^2 \chi'}{\partial p_i' \partial p_j'},$$

amely a $\mathcal{F}$-ekre a

$$\frac{\partial \mathcal{F}_i'}{\partial p_j'} = \frac{\partial \mathcal{F}_j'}{\partial p_i'} \tag{13.18}$$

feltételt rója. Ez a reláció így is írható:

$$\left\{q_j', \mathcal{F}_i'\right\}_{q'p'} = \left\{q_i', \mathcal{F}_j'\right\}_{q'p'}.$$

A transzformáció kanonikussága következtében ez

$$\{F_j, \mathcal{F}_i\}_{qp} = \{F_i, \mathcal{F}_j\}_{qp},$$

vagy

$$\left\{F_j, \frac{\partial F_i}{\partial t}\right\} = \left\{F_i, \frac{\partial F_j}{\partial t}\right\}$$

$$\left\{F_j, \frac{\partial F_i}{\partial t}\right\} + \left\{\frac{\partial F_j}{\partial t}, F_i\right\} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F_i, F_j\} = 0.$$

Ez a reláció valóban teljesül, mert

$$\{F_i, F_j\}_{qp} = \left\{q_i', q_j'\right\}_{qp} = 0.$$

Ugyanígy igazolható a többi (13.18)-cal analóg integrálhatósági feltétel is.

Az állításunkat ezzel beláttuk. A megfordítása azonban nem igaz: Az olyan transzformációk, amelyek őrzik a Hamilton-egyenletek alakját valamilyen Hamilton-függvénnyel *általában* nem kanonikusak.

Egyetlen szabadsági foknál pl. legyen

$$q' = q, \qquad p' = ap \qquad (a = \text{konstans}), \tag{13.19}$$

valamint

$$\overline{H}'(q', p') = aH'(q', p') = aH(q, p).$$

Ha a Hamilton-egyenletek teljesülnek H-val a vesszőtlen koordinátákban, akkor nyilván teljesülnek $\overline{H}'$-vel a vesszősekben is:

$$\dot{q}' = \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = a\frac{\partial H'}{\partial p'} = \frac{\partial \overline{H}'}{\partial p'}$$

$$\dot{p}' = a\dot{p} = -a\frac{\partial H}{\partial q} = -a\frac{\partial H'}{\partial q'} = -\frac{\partial \overline{H}'}{\partial q'}.$$

A (13.19) azonban mégsem kanonikus transzformáció, mert

$$\{q', p'\}_{qp} = a\,\{q, p\}_{qp} = a \neq 1.$$

F) Két példa.

A lehető legegyszerűbb példaként tekintsünk egy tömegpontot, amely szabadon mozog az x tengely mentén, és legyen mondjuk

$$x' = x - \frac{a}{2}t^2 \equiv F(x, p, t). \tag{13.20}$$

A (13.10) szerint ekkor

$$p' = \frac{\partial x}{\partial x'}p = p \equiv G(x, p, t). \tag{13.21}$$

Nyilván

$$H'(x', p') = H(x, p) = \frac{p^2}{2m} = \frac{p'^2}{2m}.$$

Az F explicit időfüggése következtében azonban a helyes Hamilton-függvény nem ez, hanem $\overline{H}' = H' + \chi'$. A χ'-t (13.16)-ból kell meghatározni, amelyben $\mathcal{F} = -at$:

$$\frac{\partial \chi'}{\partial p'} = -at, \longrightarrow \chi' = -ap't.$$

Így végül a Hamilton-függvény a vesszős változókban

$$\overline{H}' = \frac{p'^2}{2m} - ap't. \tag{13.22}$$

A Hamilton-egyenletek a következők:

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial \overline{H}'}{\partial p'} = \frac{p'}{m} - at,$$

$$\frac{dp'}{dt} = -\frac{\partial \overline{H}'}{\partial x'} = 0.$$

A második egyenlet szerint a p' impulzus konstans (!), ezért az egyenletrendszer megoldása

$$x' = x_0 + v_0 t - \frac{a}{2}t^2, \qquad (v_0 = p'/m = \text{konstans}),$$

ami nyilván korrekt.

Megjegyezzük, hogy ha a Lagrange-függvényben vezetjük be a vesszős változókat és ezután térünk át a Hamilton-egyenletekre, akkor a Hamilton-függvényre azonnal a helyes $\overline{H}'$-t kapjuk meg. Végül is arról van tehát szó, hogy míg a Lagrange-függvény időfüggő változócseréknél is skalárként transzformálódik, az energiára ez nem igaz (ami elég nyilvánvaló).

A második példánk a forgó koordinátarendszerre történő áttérés, amit a Lagrange-formalizmus alapján már a 2. fejezetben tárgyaltunk. Ott láttuk, hogy

$$\mathbf{r} = \hat{R}(\Omega t)\mathbf{r}'. \tag{13.23}$$

A vesszős impulzus meghatározására a (13.11) képletet használhatjuk:

$$p'_\beta dx'_\beta = p_\alpha dx_\alpha = p_\alpha \hat{R}_{\alpha\beta}(\Omega t) dx'_\beta.$$

Ebből (az $\hat{R}$ mátrix ortogonalitását kihasználva)

$$p'_\beta = p_\alpha \hat{R}_{\alpha\beta}(\Omega t) = \hat{R}^{-1}_{\alpha\beta}(\Omega t) p_\alpha. \tag{13.24}$$

A (13.23),(13.24) képletek alapján

$$H' = \frac{p'^2}{2m} + U(r').$$

A korrekt $\overline{H}'$-t azonban az előző példa alapján a (3.3) transzformált L'-ből kapjuk meg a

$$\overline{H}' = \mathbf{p}'\mathbf{v}' - L'$$

képlet szerint, amelyben

$$\mathbf{p}' = \frac{\partial L'}{\partial \mathbf{v}'} = m\mathbf{v}' + m[\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}'] \tag{13.25}$$

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{m}\mathbf{p}' - [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}']. \tag{13.26}$$

A $\overline{H}'$-re rövid átalakítás után a

$$\overline{H}' = H' - \boldsymbol{\Omega} \cdot [\mathbf{r}' \times \mathbf{p}'] = H' - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{J} \tag{13.27}$$

képletet kapjuk, amelyből

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt} = -\frac{\partial \overline{H}'}{\partial \mathbf{r}'} = -\frac{\partial H'}{\partial \mathbf{r}'} + [\mathbf{p}' \times \boldsymbol{\Omega}].$$

Ha itt (13.25) segítségével kifejezzük $\mathbf{p}'$-t a sebességen keresztül, újra megkapjuk a (3.4) mozgásegyenletet.

14. Infinitezimális kanonikus transzformációk.

Korábban már kétszer is találkoztunk infinitezimális transzformációval. Az előző fejezetet azzal a megállapítással kezdtük, hogy a Hamilton-egyenletek infinitezimális kanonikus transzformációk. Ezt most általánosítani fogjuk. A 10. fejezet E. pontjában pedig az infinitezimális forgatásokkal kapcsolatban arra a megállapításra jutottunk, hogy ilyen esetekben a transzformációk aktív felfogása a célszerű nézőpont. A továbbiakban ezt az észrevételt is hasznosítani fogjuk.

A 12. fejezet B. pontjában láttuk, hogy a koordináták és az impulzusok infinitezimális (dt-ben lineáris pontosságú) megváltozása, amelyet a Hamilton-egyenletek generálnak, infinitezimális kanonikus transzformáció. Ha ezekben a képletekben a Hamilton-függvényt valamilyen $W(q,p)$ dinamikai függvénnyel, a t időt pedig egy s paraméterrel helyettesítjük, akkor az ottani bizonyítást megismételve láthatjuk, hogy a

$$\delta q_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}\delta s = \{q_i, W\}\,\delta s, \qquad \delta p_i = -\frac{\partial W}{\partial q_i}\delta s = \{p_i, W\}\,\delta s \tag{14.1}$$

képletek infinitezimális kanonikus transzformációt definiálnak.

A W a transzformáció *generátora*, amely nem függ explicite a transzformáció s paraméterétől. A 12. fejezet B. pontjának levezetését megismételve azt találjuk, hogy a

$$\frac{dq_i}{ds} = \{q_i, W\} = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{ds} = \{p_i, W\} = -\frac{\partial W}{\partial q_i} \tag{14.2}$$

egyenletek

$$q_{is} = F_i(q,p;s), \qquad p_{is} = G_i(q,p;s) \qquad (q_i \equiv q_{i0},\, p_i \equiv p_{i0}) \tag{14.3}$$

megoldásai minden s-re kanonikus transzformációt határoznak meg.

A másik feladat az, hogy a (13.1) transzformáció kanonikusságának a kritériumát a dinamikai mennyiségek (11.12) passzív transzformációs szabálya helyett a (11.15) aktív szabály felhasználásával fogalmazzuk meg.

Alkalmazzuk először is a (13.1) kanonikusságának (13.4) kifejezését, amely a (13.2) rövid alakja, az $u'(q,p)$, $v'(q,p)$ függvényekre:

$$\{u'(q,p),v'(q,p)\}_{qp}=\{u'(q,p),v'(q,p)\}_{q'p'}\,.$$

Mivel az aktív szemléletben a dinamikai mennyiségek a (11.15) előírás szerint transzformálódnak, ezt az egyenlőséget átírhatjuk

$$\{u'(q,p),v'(q,p)\}_{qp}=\{u(q',p'),v(q',p')\}_{q'p'}\equiv w(q',p')$$

alakba, amely egyben a w dinamikai függvény definíciója.

Az aktív szemléletben ez utóbbi transzformáltját a

$$w(q',p')=w'(q,p)\equiv\Big(\{u(q,p),v(q,p)\}_{qp}\Big)'\stackrel{def}{=}\{u(q,p),v(q,p)\}'_{qp}$$

definiálja, ezért végül

$$\{u'(q,p),v'(q,p)\}_{qp}=\{u(q,p),v(q,p)\}'_{qp}\,,$$

vagy röviden

$$\{u',v'\}=\{u,v\}'\,. \tag{14.4}$$

Aktív szemléletben ez az egyenlőség fejezi ki a (13.1) transzformáció kanonikusságát, amely így fogalmazható meg: *Kanonikus transzformációnál a transzformált függvények Poisson-zárójele egyenlő a Poisson-zárójelük transzformáltjával.*

A $q'=q+\delta q$, $p'=p+\delta p$ infinitezimális transzformációnál az $u(q,p)$ így változik meg:

$$u'(q,p)=u(q',p')=u(q+\delta q,p+\delta p)=u(q,p)+\frac{\partial u}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial u}{\partial p_i}\delta p_i.$$

A W által generált transzformációnál a q,p megváltozását vehetjük (14.1)-ből, ezért

$$\delta u=\sum_i\left(\frac{\partial u}{\partial q_i}\frac{\partial W}{\partial p_i}-\frac{\partial u}{\partial p_i}\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)\delta s=\{u,W\}\,\delta s,$$

vagyis

$$\frac{du_s}{ds}=-\{W,u_s\}\,. \tag{14.5}$$

Ha ismerjük a (14.2) differenciálegyenlet-rendszer (14.3) megoldását, akkor ismerjük a (14.5)-t kielégítő u_s függvényt is:

$$u_s(q,p)=u(q_s,p_s)=u\left(F(q,p),G(q,p)\right).$$

De végtelen sor alakjában ezt a megoldást az F_i, G_i függvények ismerete nélkül is felírhatjuk:

$$u_s=u+\frac{(-s)^1}{1!}\{W,u\}+\frac{(-s)^2}{2!}\{W,\{W,u\}\}+\frac{(-s)^3}{3!}\{W,\{W,\{W,u\}\}\}+\ldots \tag{14.6}$$

Ez a végtelen sor formálisan valóban eleget tesz (14.5)-nek és az $u_0 = u$ kezdőfeltételnek, mert

$$\frac{du_s}{ds} = -\left(\{W,u\} + \frac{(-s)^1}{1!}\{W,\{W,u\}\} + \frac{(-s)^2}{2!}\{W,\{W,\{W,u\}\}\} + \dots\right) =$$

$$-\left\{W, \left(u + \frac{(-s)^1}{1!}\{W,u\} + \frac{(-s)^2}{2!}\{W,\{W,u\}\} + \dots\right)\right\} = -\{W,u_s\}.$$

Itt használtuk ki először, hogy a $W(q,p)$ generátor nem függ az s paramétertől.

Megjegyezzük még, hogy ha $u = u_0$ semleges elem, akkor $u_s = u$.

A (14.6) hatványsor szerkezete emlékeztet az e^{-x} függvény hatványsorára, ezért az $e^{-Ws}u$ *szimbólikus* jelölést vezetjük be rá. Ha ezt használjuk, akkor

$$u_s = e^{-Ws}u.$$

A Hamilton-egyenletek megoldása például ennek a jelölésnek a felhasználásával a következő:

$$q_{it} = e^{-Ht}q_i, \qquad p_{it} = e^{-Ht}p_i.$$

Az e^{-Ws} a W által generált s paraméterű *kanonikus* transzformációra utaló szimbólum, ezért a kanonikus transzformációk (14.4) tulajdonságának a következtében a Poisson-zárójel alól kiemelhető:

$$\left\{e^{-Ws}u, e^{-Ws}v\right\} = e^{-Ws}\{u,v\}. \tag{14.7}$$

Példa: Legyen $W = J_z = xp_y - yp_x$ (ld. a 11. fejezet D. pontját) és $s = \varphi$ az azimutszög. A feladat az $x_\varphi = e^{-J_z\varphi}x$ dinamikai mennyiség kiszámítása.

A (14.6)-ban fellépő Poisson-zárójelek a 11. fejezet alapján számíthatók ki:

$$\{J_z,x\} = y, \qquad \left\{J_z, \overbrace{\{J_z,x\}}^{y}\right\} = -x,$$

$$\left\{J_z, \overbrace{\{J_z,\{J_z,x\}\}}^{-x}\right\} = -y, \quad \text{majd} \quad x,y,-x,-y,x,y,\dots$$

Eszerint

$$x_\varphi = x + \frac{(-\varphi)^1}{1!}y + \frac{(-\varphi)^2}{2!}(-x) + \frac{(-\varphi)^3}{3!}(-y) + \frac{(-\varphi)^4}{4!}(+x) + \frac{(-\varphi)^5}{5!}(+y) + \dots =$$

$$= x\cdot\cos\varphi - y\cdot\sin\varphi.$$

Az y_φ, z_φ, $p_{x\varphi}$, $p_{y\varphi}$, $p_{z\varphi}$, kiszámításával meggyőződhetünk róla, hogy a J_z által generált φ paraméterű kanonikus transzformáció egy tömegpont helyzetvektorát és impulzusát a jobbkéz szabály szerint a z koordináta tengely körül φ szöggel forgatja el. A (14.7) és a semleges elemek invarianciája következtében a tetszőleges φ-hez tartozó mennyiségek ugyanazokat a Poisson-zárójel relációkat elégítik ki, mint az index nélküli (azaz $\varphi = 0$-hoz tartozó) megfelelő mennyiségek.

15. Vektormezők.

A) A vektormező definíciója.

A vektormező terminus magáért beszél: Az n-dimenziós sokaság minden pontjában elképzelünk egy n komponensű vektort, amely helyről-helyre változik: $\mathbf{A}(x) = (A_1(x), \dots A_n(x))$. Amikor az $x'_i = F_i(x_1, \dots x_n)$ képlettel új koordinátarendszerre térünk át, a komponensek definíció szerint úgy változnak, mint a dx_i koordináta-differenciálok:

$$dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j, \Longrightarrow A'_i(x') = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j(x). \tag{15.1}$$

A kétszer előforduló indexre természetesen összegzés értendő. A vektormező vesszős komponenseit a vesszős koordinátákon keresztül kifejezve képzeljük el, ezért a transzformációs képlet jobboldalán a vesszőtlen koordinátákat az $x' = F(x)$ inverze segítségével ki kell fejezni a vesszős koordinátákon keresztül.

Egy szám n-est a (15.1) transzformációs törvény tesz vektorkomponensekké[15].

Az $\mathbf{A}$ vektormező $x_i(s)$ *áramvonalainak* azokat a görbéket nevezzük, amelyek kielégítik a

$$\frac{dx_i(s)}{ds} = A_i\left(x(s)\right) \tag{15.2}$$

közönséges differenciálegyenlet-rendszert, tehát az érintővektoruk minden pontjukban az $\mathbf{A}$ vektormező eleme abban a pontban. Ennek az egyenletrendszernek az $x_i(0) = a_i$ kezdőfeltételhez tartozó megoldását alább majd $G_i(s; a_1, \dots a_n)$-nel fogjuk jelölni.

Az s valós szám az áramvonal paramétere, és az egyenletrendszernek mindig van megoldása legalább is nem túl nagy $|s|$-re.

Képzeljünk el valamilyen folyadék stacionér áramlását a térben valamilyen rögzített Descartes-koordinátákhoz viszonyítva. A stacionaritás azt jelenti, hogy a $\mathbf{V}(x, y, z)$ sebesség-mező nem függ t-től. Az az infinitezimális folyadékelem, amely a $t = 0$ pillanatban az x, y, z koordinátájú pontot foglalta el, a t pillanatban az $x(t), y(t), z(t)$ pontban lesz (vagy volt), és a t függvényében kirajzol egy áramvonalat, amely minden pontjában érinti a $\mathbf{V}$ sebességvektort. Az $x = x(0), y = y(0), z = z(0)$ pontot az áramvonal kezdőpontjának nevezhetünk, noha az áramlás már a $t = 0$ pillanat előtt is létezett. Az elnevezés inkább azt fejezi ki, hogy az áramló folyadék-elem annak a pontnak a koordinátáiról kapta a nevét, amelyben a $t = 0$ pillanatban tartózkodott.

Ezt a képet általánosítjuk a *folyam* fogalma segítségével tetszőleges vektormező áramvonalaira, amelyeket egy előre nem meghatározott fizikai jelentésű s

[15] A (15.1) képlet szerint transzformálódó vektorokat *kontravariáns vektoroknak* hívják, és többnyire felső indexszel látják el őket. Mivel a koordináta-differenciálok is ilyen típusú vektorok, a koordináta indexek is felső helyzetűek: A^j, dx^j, x^j. Az alsó indexű *kovariáns vektorok* transzformációs törvénye (15.1)-től a vesszős és a vesszőtlen változók felcserélésében különbözik. Ettől a nagyon általános jelölési gyakorlattól azért térünk el, mert a továbbiakban csak a (15.1) szerint transzformálódó vektorokról lesz szó

parametrál a (15.2) szerint. Maga a vektormező független s-től. Az $\mathbf{A}$ vektormezőhöz tartozó folyamra a tömör A^s szimbólumot használhatjuk:

$$x_i(s) \equiv G_i(s; x_1, \dots x_n) \equiv A^s x_i, \tag{15.3}$$

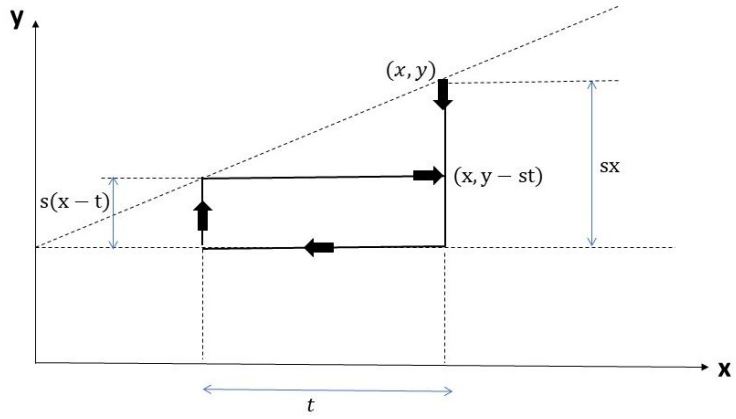
amelyben $x_i \equiv x_i(0)$ a sokaság pontjainak a koordinátái. Ez a folyam természetesen úgy is felfogható, mint a folytonos s paramétertől függő *koordinátatranszformációk* sorozata, amelyben az azonos transzformáció az $s = 0$-hoz tartozik.

B) A folyamok felcserélhetősége.

Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két vektormező, a hozzájuk tartozó folyamok pedig A^t és B^s tetszőleges fizikai jelentésű t és s paraméterekkel. Az A^tB^s összetett szimbólum azt fejezi ki, hogy a sokaság x_i pontja először átkerül a $B^s x_i$, majd pedig az $A^tB^s x_i$ pontba. Nyílvánvaló, hogy $A^tA^{-t}x_i = x_i$ az azonos transzformáció, amelyet egyszerűen 1-el jelölünk: $A^tA^{-t} = 1$.

Két különböző folyam általában nem cserélhető fel egymással: $A^tB^s \neq B^sA^t$. Ezt a kritériumot inkább $A^tB^sA^{-t}B^{-s} \neq 1$ alakban szokás használni, amelyet a két folyam (vagy mező) *kommutátorának* hívnak.

Illusztráljuk a felcserélhetőség hiányát egy egyszerű példán!



15.1 ábra

Kétdimenziós felületen tekintsük az

$$\mathbf{A} = (1, 0), \qquad \mathbf{B} = (0, x)$$

vektormezőket.

Az **A** mező áramvonalainak egyenlete és megoldása

$$\frac{dx}{dt} = 1, \qquad x(t) = t + x$$

$$\frac{dy}{dt} = 0, \qquad y(t) = y.$$

Az **A** folyama tehát $A^t(x, y) = (t + x, y)$.

A **B** mező áramvonalainak egyenlete és megoldása

$$\frac{dx}{ds} = 0, \qquad x(s) = x$$

$$\frac{dy}{ds} = x, \qquad y(s) = sx + y.$$

A **B** folyama tehát $B^s(x, y) = (x, sx + y)$.

Az ábrán követhetjük, hogy az $A^tB^sA^{-t}B^{-s}$ kommutátor transzformációi hogyan viszik át a tetszőleges (x, y) pontot az $(x, y - st)$ pontba. Képletekben ugyanez:

$$A^tB^sA^{-t}B^{-s}(x, y) = A^tB^sA^{-t}(x, -sx + y) = A^tB^s(-t + x, -sx + y) =$$

$$= A^t\left(-t + x, s(-t + x) - sx + y\right) = A^t(-t + x, y - st) = (x, y - st) \neq (x, y).$$

Általános mezők felcserélhetősége pontról-pontra változhat, ezért infinitezimálisan kis s, t-jű folyamokkal kell meghatároznunk. Ezt úgy tehetjük meg, hogy az $A^tB^sA^{-t}B^{-s}$ kommutátort a paraméterek hatványai, vagyis a t^ls^k $(l, k = 1, 2, \dots)$ kifejezések szerint sorbafejtjük, és a felcserélhetőséget a ts rendű tag koefficiensével jellemezzük.

Amikor akár l, akár k nulla, a kommutátor 1-gyel egyenlő, ezért

$$A^tB^sA^{-t}B^{-s}x_i = x_i + C_i(x)ts + o(s^2t, st^2). \tag{15.4}$$

$t, s \longrightarrow 0$-nál $dx^i = A^tB^sA^{-t}B^{-s}x_i - x_i$ két infinitezimálisan közeli pont koordináta-különbsége, ezért vektor, és ennek következtében a $C_i(x)$-k egy $\mathbf{C}(x)$ vektormező komponensei, amelyet az **A** és a **B** *Lie-zárójelének* hívunk[16]:

$$C_i = (\mathbf{A}, \mathbf{B})_i, \qquad \mathbf{C} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

A példánkban

$$A^tB^sA^{-t}B^{-s}(x, y) = (x, y) + (0, -1)st,$$

ezért $\mathbf{C} = (0, -1)$.

A Lie-zárójel antiszimmetrikus a vektormezők felcserélésével szemben: $(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = -(\mathbf{B}, \mathbf{A})$. Ez abból következik, hogy amikor az $A^tB^sA^{-t}B^{-s}$ transzformációban

[16] Megjegyezzük, hogy a Lie-zárójel deriválási művelet is: Az $(\mathbf{A}, \mathbf{B})^i$ az **A** kontravariáns vektormező $\mathcal{L}_BA^i$ *Lie-deriváltja* az **B** szerint. Részletesebben ld. az *Általános relativitáselmélet és kozmológia* című jegyzetem 7. fejezetében itt a honlapomon.

a vektormezőket felcseréljük egymással ($A^{\pm t} \leftrightarrow B^{\pm s}$), akkor fordított irányú műveletsort hozunk létre ($B^s A^t B^{-s} A^{-t} \cdot A^t B^s A^{-t} B^{-s} = 1$), amely a kezdő- és a végpontot felcseréli egymással.

Megmutatjuk, hogy

$$(\mathbf{A},\mathbf{B})_i = \sum_j \left(B_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - A_j \frac{\partial B_i}{\partial x_j} \right), \quad \text{vagy} \quad (\mathbf{A},\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}. \tag{15.5}$$

A bizonyítást kezdjük azzal, hogy (15.2) felhaszálásával a kellő pontossággal

$$B^{-s} x_i = x_i + \frac{dx_i}{ds}(-s) + o(s^2) = x_i - B_i(\mathbf{x})s.$$

Jelöljük ezt a vektort **u**-val:

$$u_i = x_i - B_i(\mathbf{x})s.$$

Akkor

$$A^t B^s A^{-t} B^{-s} x_i = A^t B^s A^{-t} u_i.$$

Folytatjuk ugyanígy:

$$A^{-t} u_i = u_i - A_i(\mathbf{u})t = x_i - B_i(\mathbf{x})s - A_i\left(\mathbf{x} - \mathbf{B}(\mathbf{x})s\right)t =$$

$$= x_i - B_i(\mathbf{x})s - A_i(\mathbf{x})t + B_j(\mathbf{x})\frac{\partial A_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} st \equiv v_i.$$

Tovább ugyanígy:

$$A^t B^s A^{-t} B^{-s} x_i = A^t B^s v_i.$$

$$B^s v_i = v_i + B_i(\mathbf{v})s = x_i - \cancel{B_i(\mathbf{x})s} - A_i(\mathbf{x})t + B_j(\mathbf{x})\frac{\partial A_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} st +$$

$$+ \cancel{B_i(\mathbf{x})s} - A_j(\mathbf{x})\frac{\partial B_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} ts \equiv w_i.$$

Végül

$$A^t B^s A^{-t} B^{-s} x_i = A^t w_i = w_i + A_i(\mathbf{w})t =$$

$$= x_i - \cancel{A_i(\mathbf{x})t} + B_j(\mathbf{x})\frac{\partial A_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} st - A_j(\mathbf{x})\frac{\partial B_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} ts + \cancel{A_i(\mathbf{x})t}.$$

A (15.5)-et ezzel igazoltuk. Belátható, hogy két folyam felcserélhetőségének szükséges és elégséges feltétele a két vektormező Lie-zárójelének eltűnése.

A vektormezők a Lie-zárójelre nézve Lie-algebrát alkotnak, mert $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ bilineáris, antiszimmetrikus, és közvetlen behelyettesítésel igazolható, hogy kielégíti a Jacobi-identitást:

$$(\mathbf{A},(\mathbf{B},\mathbf{C})) + (\mathbf{B},(\mathbf{C},\mathbf{A})) + (\mathbf{C},(\mathbf{A},\mathbf{B})) = 0.$$

Standard vektoranalitikai képletek segítségével könnyen igazolható, hogy háromdimenziós euklidészi térben

$$(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \nabla \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] + \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}).$$

Amikor például $\mathbf{A} = [\mathbf{a} \times \mathbf{r}]$ és $\mathbf{B} = [\mathbf{b} \times \mathbf{r}]$, ahol $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ konstans vektorok, akkor

$$(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \nabla \times [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \big[[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{r}\big]. \tag{15.6}$$

Az $\mathbf{A} = [\mathbf{a} \times \mathbf{r}]$ típusú vektormezők folyama az origót tartalmazó $\mathbf{a}$ irányú tengely körüli koncentrikus körökből áll. Jelöljük $\mathbf{X}$-szel, $\mathbf{Y}$-nal, valamint $\mathbf{Z}$-vel azokat a vektormezőket, amelyeket úgy kapunk, hogy $\mathbf{a}$-t rendre az x, az y és a z tengely egységvektorának választjuk[17]. Ezeknek a vektormezőknek a folyamai koncentrikus körök az x, y, z tengely körül, Lie-zárójeleik pedig a következők:

$$(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{Z}, \qquad (\mathbf{Y},\mathbf{Z}) = \mathbf{X}, \qquad (\mathbf{Z},\mathbf{X}) = \mathbf{Y}. \tag{15.7}$$

A körökön célszerű a φ_x, φ_y, φ_z középponti szögeket tekinteni paraméternek, amelyek a jobbkézszabálynak megfelelő irányban nőnek. A (15.4) képlet mondjuk az $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ párra ekkor a következő:

$$X^{\varphi_x} Y^{\varphi_y} X^{-\varphi_x} Y^{-\varphi_y} x_i = x_i + Z_i(x)\varphi_x\varphi_y + o({\varphi_x}^2\varphi_y, \varphi_y{\varphi_x}^2). \tag{15.8}$$

Foglaljuk össze türelmesen ennek a képletnek a geometriai jelentését. Elképzelünk egy Descartes-koordinátarendszert és egy P_0 pontot. Az $\mathbf{Y}$ vektormező y-tengelyű koncentrikus körei beborítják az egész teret, az egyikük áthalad a P_0-n. Mozduljunk el P_0-ból ezen a körön negatív irányba $-\varphi_y$-nyit a P_1 pontba. Ezután az x-tengelyű koncentrikus körök közül azon, amely áthalad P_1-en, mozduljunk el $-\varphi_x$ szöggel negatív irányba, a P_2 pontba. Az eljárást folytatva két egymás utáni pozitív irányú φ_y, majd φ_x szögű elmozdulással jutunk el a P_3, végül pedig a P_4 pontba. Ez a négy elmozdulás nem visz vissza az eredeti pontba: P_4 különbözik P_0-tól. Csak annyit mondhatunk, hogy ha az elmozdulások elég kicsik, akkor $\overrightarrow{P_0P_4} \approx \mathbf{Z}\varphi_x\varphi_y$.

C) A gradiens-mező.

Tegyük fel, hogy valamilyen koordinátarendszerben fennállnak az

$$A_i(x) = \frac{\partial W(x)}{\partial x_i} \tag{15.9}$$

egyenletek valamilyen $W(x)$ skalár függvénnyel. Elég nyilvánvaló, hogy tetszőleges koordináta-transzformációval szemben ezek nem maradhatnak fenn (nem invariánsak). A baloldal ugyanis vektormező, amely a (15.2) törvény szerint transzformálódik:

$$A'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j \equiv M_{ij} A_j.$$

[17] Ezeknek az egységvektoroknak a standard jelölése $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

A jobboldal transzformációs törvénye azonban különbözik a vektormezőétől:

$$\frac{\partial W}{\partial x'_i} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\frac{\partial W}{\partial x_i}, \qquad \big(W(x) = W'(x')\big).$$

Egyenletrendszerünk ezért csak az olyan transzformációkkal szemben marad érvényben, amelyekre fennállnak a

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

egyenlőségek. Alakítsuk át ezt az összefüggés-rendszert:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} \quad \Big| \cdot \frac{\partial x'_k}{\partial x_j},$$

és összegezzünk a kétszer előforduló j-re. Ezt kapjuk:

$$\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\frac{\partial x'_k}{\partial x_j} = \delta_{ik}, \quad \text{vagyis} \quad MM^{tr} = 1.$$

Az M tehát ortogonális mátrix.

A (15.9) egyenletrendszer tehát csak (általában helyfüggő) ortogonális transzformációkkal szemben invariáns.

Azokat a vektormezőket, amelyek bizonyos, egymástól ortogonális transzformációban különböző koordinátarendszerekben (15.9) alakúak valamilyen $W(x)$ skalárfüggvénnyel, *gradiens mezőnek* hívjuk.

D) Hamiltoni-vektormezők.

A kanonikus elméletben a gradiens-mezőnek egy speciális változata, a *hamiltoni vektormező* játszik fontos szerepet, amit a q és a p koordináták megkülönböztetése tesz lehetővé.

Egy n szabadsági fokú rendszer fázistere $2n$ dimenziós, ezért a fázistér vektorai $2n$ dimenziósak. Így fogjuk jelölni őket:

$$\mathbf{A} = (A_{q_1}, \dots A_{q_n}, A_{p_1}, \dots A_{p_n}).$$

Ezt a „szám $2n$-est" természetesen a transzformációs törvénye tesz vektorrá:

$$\left.\begin{aligned} A'_{q_r} &= \frac{\partial q'_r}{\partial q_s}A_{q_s} + \frac{\partial q'_r}{\partial p_s}A_{p_s} \\ A'_{p_r} &= \frac{\partial p'_r}{\partial q_s}A_{q_s} + \frac{\partial p'_r}{\partial p_s}A_{p_s}. \end{aligned}\right\} \tag{15.10}$$

Hamiltoninak akkor nevezünk egy vektormezőt, ha a fázistérben van olyan koordinátarendszer, amelyben a komponensei egy $W(q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n)$ *skalárfüggvény* $\big(W'(q', p') = W(q, p)\big)$ parciális deriváltjai a következő sorrendben

és előjellel:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial p_1},\dots\frac{\partial W}{\partial p_n},-\frac{\partial W}{\partial q_1},\cdots-\frac{\partial W}{\partial q_n}\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial W}{\partial p}\\[2ex] -\dfrac{\partial W}{\partial q}\end{pmatrix}, \tag{15.11}$$

vagy szimmetrikusabban

$$\left(\{q_1,W\},\dots\{q_n,W\},\{p_1,W\},\dots\{p_n,W\}\right)=\begin{pmatrix}\{q,W\}\\[2ex] \{p,W\}\end{pmatrix}.$$

Az oszlop alak nyilván szimbolikus, mindkét eleme egy-egy n-komponensű oszlop.

Az egyezés azonban nem állhat fenn minden koordinátarendszerben, mert ennek a deriváltakból álló struktúrának a

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial W'}{\partial p'_r}&=\frac{\partial p_s}{\partial p'_r}\frac{\partial W}{\partial p_s}-\frac{\partial q_s}{\partial p'_r}\left(-\frac{\partial W}{\partial q_s}\right)\\ -\frac{\partial W'}{\partial q'_r}&=\left(-\frac{\partial p_s}{\partial q'_r}\right)\frac{\partial W}{\partial p_s}+\frac{\partial q_s}{\partial q'_r}\left(-\frac{\partial W}{\partial q_s}\right).\end{aligned}\right\}$$

transzformációs törvénye különbözik a fázistér vektorainak (15.10) transzformációjától.

A gradiens-mező tárgyalásához hasonlóan feltehetjük a kérdést: Ha egy vektormező valamilyen koordinátarendszerben egyenlő (15.11)-tel, akkor milyen fáziskoordináta-transzformációk azok, amelyekkel szemben ez az egyenlőség invariáns?

Az egyszerűség kedvéért a szabadsági fokok száma legyen $n=1$. Ezzel a q és a p indexelése szükségtelenné válik, ami áttekinthetőbbé teszi a képleteket. A gondolatmenet $n>1$-nél a hiányzó indexek pótlása után változatlan marad.

Legyen tehát a $\mathcal{K}$-beli

$$\begin{pmatrix}A_q\\[2ex] A_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial W}{\partial p}\\[2ex] -\dfrac{\partial W}{\partial q}\end{pmatrix} \tag{15.12}$$

egyenlet érvényes valamilyen másik $\mathcal{K}'$-ben is:

$$\begin{pmatrix}A'_q\\[2ex] A'_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial W'}{\partial p'}\\[2ex] -\dfrac{\partial W'}{\partial q'}\end{pmatrix}.$$

Milyen feltételt ró ez a követelmény a $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ transzformációra?

Ahhoz, hogy erre a kérdésre válaszolni tudjunk, meg kell próbálnunk a második egyenletet visszavezetni az elsőre. Ennek érdekében először átírjuk

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial q'}{\partial q} & \dfrac{\partial q'}{\partial p} \\ \dfrac{\partial p'}{\partial q} & \dfrac{\partial p'}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_q \\ A_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial p'} & -\dfrac{\partial q}{\partial p'} \\ -\dfrac{\partial p}{\partial q'} & \dfrac{\partial q}{\partial q'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial p} \\ -\dfrac{\partial W}{\partial q} \end{pmatrix}$$

alakba, amelyben kihasználtuk, hogy $W'(q', p') = W(q, p)$. Ezután végigszorozzuk az egyenletet a baloldali mátrix inverzével:

$$\begin{pmatrix} A_q \\ A_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial q}{\partial q'} & \dfrac{\partial q}{\partial p'} \\ \dfrac{\partial p}{\partial q'} & \dfrac{\partial p}{\partial p'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial p'} & -\dfrac{\partial q}{\partial p'} \\ -\dfrac{\partial p}{\partial q'} & \dfrac{\partial q}{\partial q'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial p} \\ -\dfrac{\partial W}{\partial q} \end{pmatrix}$$

A jobboldalon a két mátrix szorzását elvégezve az

$$\begin{pmatrix} A_q \\ A_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{q,p\}_{q'p'} & \{q,q\}_{q'p'} \\ \{p,p\}_{q'p'} & \{q,p\}_{q'p'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial q} \\ -\dfrac{\partial W}{\partial p} \end{pmatrix}$$

egyenletre jutunk. Ez abban az esetben azonos (15.12)-vel, ha a Poisson-zárójelek a fundamentális zárójelek 0,1 értékét veszik fel, vagyis amikor a $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ transzformáció kanonikus (13. fejezet A.).

Ehhez a bizonyításhoz két megjegyzést kell fűznünk. Először is nyilvánvaló, hogy szorosan kapcsolódik a 13. fejezet E. pontjában a Hamilton-egyenleteknek a kanonikus transzformációkkal szembeni invarianciájához abban az esetben, amikor a Hamilton-függvény nem függ explicite az időtől. A Hamilton-egyenletek baloldala ugyan nem vektormező, hanem a fázistrajektória érintő vektora, de az ottani és a most bebizonyított állítás szempontjából az a lényeges, hogy mindkettő vektor, ezért új koordinátarendszerre történő áttérésnél egyformán transzformálódnak. Emellett hamiltoni-vektormezőknél az A^s folyam nyilván azonos a 14. fejezetben tárgyalt $e^{-Ws}x$ transzformációk összeségével.

A másik megjegyzés a $W'(q', p') = W(q, p)$ passzív transzformációs törvényre vonatkozik. Nem mondunk-e ellent ezzel az előírással annak a megállapodásunknak, hogy a dinamikai mennyiségek (függvények) transzformációjánál a $W'(q, p) = W(q', p')$ aktív szemléletet fogjuk alkalmazni?

A kérdés valójában egyáltalán nem indokolt, mert a hamiltoni-vektormező *definíciójában* jogunk van előírni, hogy a mezőt generáló $W(q, p)$ függvény *legyen* skalár (ami automatikusan tartalmazza a passzív transzformációs formula alkalmazását). Más összefüggésben ugyanez a $W(q, p)$ függvény reprezentálhat valamilyen dinamikai mennyiséget. Megállapodásunk szerint ilyenkor a $W'(q, p) = W(q', p')$ aktív formula szerint kell transzformálni.

Vizsgáljuk meg példaként a Hamilton-függvényt! A 13. fejezet E.-ben a $H'(q',p') = H(q,p)$ szabályt alkalmaztuk. Nem tehettünk mást, mert ezek az egyenletek variációs elvből származtathatók (8. fejezet B.), amelynek az alkalmazhatósága ezen a szabályon alapul. Másrészt $H(q,p)$ a rendszer energiája. Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogyan változik az energia a fizikai rendszer z-tengely körüli elforgatásánál, akkor a (14.5) képletet kell alkalmaznunk $u(q,p) = H(q,p)$, $s = \varphi$, $W = J_z$ választással. Mint a (14.5) levezetése mutatja, ez a képlet a

$$H'(q,p) = H(q',p') = H(q+\delta q, p+\delta p) = H(q,p) + \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i$$

aktív transzformációs felfogáson alapul.

E) A hamiltoni-vektormezők Lie-algebrája.

A hamiltoni-vektormezők a vektormezők Lie-algebrájának invariáns részalgebráját alkotják. Ehhez elég annyit igazolni, hogy két hamiltoni-vektormező Lie-zárójele is hamiltoni.

Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két hamiltoni-vektormező, amelyeket az A, B függvények generálnak a (15.11) értelmében. Akkor $(\mathbf{A},\mathbf{B})$ szintén hamiltoni, amelyet $\{A,B\}$ generál.

A bizonyítás direkt számolással történik.

$$(\mathbf{A},\mathbf{B})_{q_s} = \sum_r \left(B_{q_r}\frac{\partial A_{q_s}}{\partial q_r} - A_{q_r}\frac{\partial B_{q_s}}{\partial q_r} + B_{p_r}\frac{\partial A_{q_s}}{\partial p_r} - A_{p_r}\frac{\partial B_{q_s}}{\partial p_r}\right) =$$

$$= \sum_r \left[\left(\frac{\partial B}{\partial p_r}\frac{\partial A_{q_s}}{\partial q_r} - \frac{\partial B}{\partial q_r}\frac{\partial A_{q_s}}{\partial p_r}\right) - \left(\frac{\partial A}{\partial p_r}\frac{\partial B_{q_s}}{\partial q_r} - \frac{\partial A}{\partial q_r}\frac{\partial B_{q_s}}{\partial p_r}\right)\right] =$$

$$= \{A_{q_s}, B\} - \{B_{q_s}, A\} = \{\{q_s, A\}, B\} - \{\{q_s, B\}, A\} = \{q_s, \{A, B\}\},$$

és hasonlóan igazolható a

$$(\mathbf{A},\mathbf{B})_{p_s} = \{p_s, \{A,B\}\}$$

reláció.

A (11.8) szerint például $\{J_x, J_y\} = J_z$, ezért ha kis elforgatásokról van szó, egy $x-$, majd $y-$tengely körüli forgatás egy $z-$körüli elforgatásban különbözik az ellenkező sorrendben elvégzett forgatásoktól.

Következmény: Két hamiltoni folyam akkor és csakis akkor felcserélhető egymással, ha $\{A,B\}$ Poisson-zárójelük semleges elem. Ekkor ugyanis $(\mathbf{A},\mathbf{B}) = 0$, és ez szükséges és elégséges feltétele a folyamok felcserélhetőségének.

F) Megmaradási törvények.

Egy $u(q,p)$ dinamikai függvény akkor *megmaradó* az A^s folyammal szemben, ha $u(A^s q, A^s p) = u(q,p)$. Speciálisan hamiltoni folyamra ez a feltétel

$u(e^{-As}q, e^{-As}p) = u(q,p)$, amit (14.7) alapján $e^{-As}u = u$-ként is felírhatunk. A baloldal (14.6) kifejtéséből látható, hogy az

$$\{A, u\} = 0 \tag{15.13}$$

egyenlőség a feltétele annak, hogy az u megmaradjon az A által generált kanonikus folyammal szemben.

Vegyük észre, hogy a „megmaradás" terminust az időbeli megmaradásnál általánosabb értelemben használjuk. Ha pl. $A = J_z$ és $s = \varphi$, akkor a szóban forgó folyam a Z-tengely körüli elforgatásokhoz tartozó transzformáció-sorozat a fázistérben. Az u „megmaradása" ekkor azt fejezi ki, hogy u a z-re nézve tengelyszimmetrikus. A korábbi (szűkebb) értelemben vett megmaradás az $A = H$, $s = t$ (idő) választásnak felel meg.

A (15.13) megmaradási tétel szimmetrikus az A és az u felcserélésével szemben, ezért ha u megmarad az A által generált folyammal szemben, akkor A is megmarad az u-hoz tartozó folyammal szemben. Ez a Noether-tétel általánosítása, mert nem szükséges, hogy az egyik megmaradás szűk értelemben vett időbeli megmaradás legyen. A (15.13)-nak ez a „duális jelentése" annak köszönhető, hogy a fázistér függvényei dinamikai mennyiségek is, generátorok is egyszerre.

16. Lie-csoportok.

A) A Lie-csoport fogalma.

A $\mathcal{G}$ diszkrét csoport fogalma: Az

$$a, b, c, \cdots \in \mathcal{G},$$

elemek akkor alkotnak csoportot, ha teljesül a következő négy feltétel:

1. Az elemek között értelmezve van egy szorzási művelet (csoportszorzás), amely általában nem kommutatív:

$$a, b \longrightarrow f(a,b) \equiv a \cdot b \equiv ab \in \mathcal{G} \quad (\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}).$$

2. Létezik egységelem:

$$\exists e \in \mathcal{G} \longrightarrow e \cdot a = a \cdot e = a \quad (\forall a).$$

3. Minden elemnek van inverze:

$$\forall a \quad \exists a^{-1} \in \mathcal{G} \quad a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e.$$

4. A szorzás asszociatív:

$$\forall a, b, c \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Példa: n-elem permutációi csoportot alkotnak (a P_n permutációs csoportot), amelynek $n = 5$-nél egyik eleme például a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

szimbólum, amelynek jelentése a következő: Az 1. elemet tedd a 3. helyre, a 2. elemet hagyd a 2. helyen, stb.

A csoportszorzás:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \text{de}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

A Lie-csoportok a $\mathcal{G}$ olyan általánosításai, amelyekben az elemek száma bizonyos folytonos értelemben végtelen. Az n paraméteres Lie-csoport elemeit n valós szám „indexeli" valamilyen megadott intervallumban: A csoport elemei $a \equiv (a_1, a_2, \dots a_n)$, $b \equiv (b_1, b_2, \dots b_n)$, $c \equiv (c_1, c_2, \dots c_n)$ stb.

Példaként tekintsük a következő csoportszorzási szabállyal megadott kétparaméteres nemkommutatív Lie-csoportot:

$$c_1 = f_1(a, b) = a_1 + b_1, \qquad c_2 = f_2(a, b) = e^{a_1} b_2 + a_2. \tag{16.1}$$

Az egységelem nyilván $e = (0, 0)$, az $a \equiv (a_1, a_2)$ elem inverze pedig $a^{-1} = (-a_1, -a_2 e^{-a_1})$. Az asszociativitás teljesülése nem evidens, igazolását az olvasóra bízzuk.

A példánkon bemutathatjuk a Lie-csoportok mátrixreprezentációjának a fogalmát: Minden csoportelemhez hozzárendelhető egy mátrix (ebben a példában ez 2×2-es mátrix) úgy, hogy a csoportszorzást a mátrixszorzás helyettesíti:

$$a \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{a_1} & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (a_1, a_2 \in \mathbb{R}), \tag{16.2}$$

$$\begin{pmatrix} e^{a_1} & a_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{b_1} & b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{c_1} & c_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad a^{-1} \longrightarrow \begin{pmatrix} e^{-a_1} & -a_2 e^{-a_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az asszociativitás a mátrixszorzásra automatikusan teljesül. A Lie-csoportot — talán némileg pongyola módon, — sokszor valamelyik mátrixábrázolásának a segítségével adják meg, mert a csoportszorzást rögzítő $f_i(a, b, \dots)$ függvények túl bonyolultak lehetnek. Az alkalmazásoknál mi is ezt az eljárást fogjuk követni.

A relativitáselméletben betöltött fontos szerepe miatt mutatjuk be röviden a következő egyparaméteres kommutatív Lie-csoportot ($a_1 \equiv a$ stb.), amelyben a csoportszorzást az

$$f(a, b) \equiv a \cdot b = \frac{a + b}{1 + ab}, \qquad |a|, |b| \leq 1 \tag{16.3}$$

képlet definiálja. Nyilván $e = 0$, $a^{-1} = -a$, és az asszociativitás is teljesül, mert

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = \frac{a + b + c + abc}{1 + ab + ac + bc}.$$

A Függelékben megmutatjuk, hogy ha a csoportelemeken *sebesség/c*-t értünk, akkor a csoportművelet a relativisztikus sebességösszeadás képlete, a csoport 2×2-es mátrixábrázolása pedig a Lorentz-transzformáció *mátrixa*.

B) A paramétertér.

A paramétertér minden pontja egy csoportelemet reprezentál. Az első példában a paramétertér az a_1, a_2 egyenesvonalú koordinátákkal ellátott sík, amelynek minden (a_1, a_2) koordinátájú pontja egy (16.2) csoportelemet reprezentál. Az elméletnek a paramétertér az egyik legfontosabb fogalma. A csoportszorzás a paramétertér bármely rendezett párjához egyértelműen hozzárendel egy harmadikat. Ha a paramétertér dimenziója n, a Lie-csoport n-paraméteres.

A csoport parametrálása nem egyértelmű: A paramétertérben új koordinátákat bevezetve a csoport átparametrálható.

Konvenció: Az egységelemet *mindig* az origóhoz (zérus paraméterekhez) rendeljük. A példáinkban nem is lehet másképp: az egységelem az $a_1 = a_2 = 0$, vagy az $a = 0$ paraméterű mátrix.

A paramétertér topológiáját („szerkezetét”) a csoportszorzás determinálja. Ez általában bonyolult, nehezen áttekinthető. A bonyolultság mértékét a zárt görbék *homotópiája* jelzi. Két zárt görbét akkor neveznek homotópnak, ha folytonos módon egymásba deformálhatók. Az egymással homotóp görbék egy homotópia-osztályba tartoznak.

A (16.2) példában a „paramétersík” minden zárt görbéje homotóp egymással, mindegyik folytonos módon összehúzható egyetlen ponttá.

Bonyolultabb eset a forgáscsoport[18], amely a fizika számára különösen fontos. Képzeljünk el egy merev testet, amely egy rögzített pontja körül tetszőleges módon elfordítható. A standardizálás érdekében a testet helyettesíthetjük egy hozzá rögzített XYZ koordinátarendszerrel, amelyet az origója körül lehet elfordítani.

Az elforgatások parametrálására többnyire az Euler-szögeket használják. Számunkra azonban egy másik parametrálási mód lesz kényelmesebb[19], amely Eulernek azon a tételén alapul, hogy a merev testek rögzített pontjuk körüli orientációjának bármilyen megváltoztatása ekvivalens a pontot tartalmazó fix tengely körüli elforgatásukkal valamilyen α szöggel a $(-\pi, \pi)$ szögtartományban. Ez a parametrálás alkalmasabb annak a tapasztalatból absztrahált következtetésnek a kifejezésére, amely szerint az üres térben minden forgástengely-irány egyenértékű.

[18] Az „elforgatások csoportja” pontosabb megnevezés lenne, de a „forgáscsoport” vált általánosan elfogadottá.

[19] Az Euler-szögeket a 19. fejezet C. pontjában fogjuk felhasználni, de nem a paramétertér koordinátázására, hanem a merev test orientációját meghatározó koordinátákként a fázistérben.

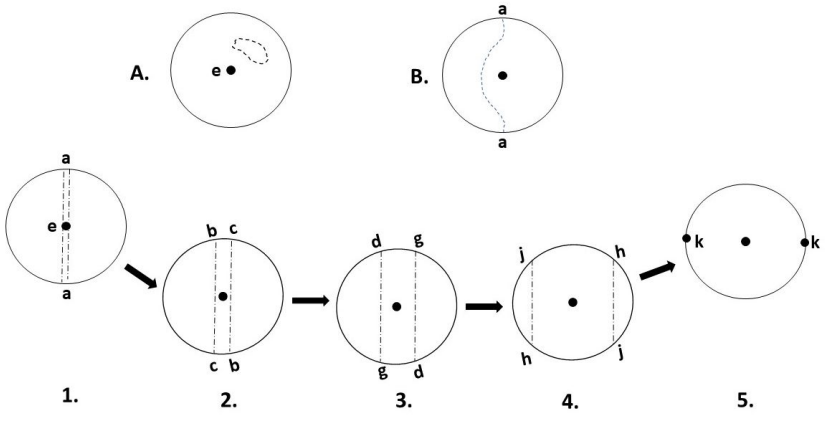
Ebben a parametrálási módban a paramétertér nyilván egy π sugarú *gömb*. Az O a gömb origója, amely a nulla-szögű forgásnak (vagyis az e csoportelemnek) felel meg, P belső pontja pedig a testhez rögzített koordinátarendszer $\vec{OP}$ irány körüli $|\vec{OP}|$ nagyságú pozitív (a jobbkéz szabály szerinti) elforgatását reprezentálja.

A gömb különböző *belső* pontjai által meghatározott elforgatások mind különböznek egymástól. A *felület* diametrálisan ellentétes pontjai azonban a testhez rögzített koordinátarendszer orientációjának ugyanazt a megváltozását határozzák meg két egymással ellentétesen irányított tengely körüli 180°-os pozitív irányú elforgatás formájában. Ez tény kihat a paramétertér homotópiájára.

A 16.1 ábrán a körök valójában a paraméterteret reprezentáló gömböket jelentik. A szaggatott vonalakat célszerű olyan „folyamatként" elképzelni, amelyen végighaladva a testhez rögzített koordinátarendszer orientációja folytonosan változik.

Az A. ábrán egy zárt kontúrt látunk, amely nyilván összehúzható ponttá úgy, hogy a kontúr közben végig zárt marad. Az összes ilyen tulajdonságú kontúr egy homotópia osztályba tartozik (a standard jelölése π_0), amelyben — pontszerű zárt kontúrként — a paramétertér origója is benne van.

A forgatott test orientációja szempontjából a B. ábra kontúrja is zárt, hiszen a gömb felszínén a két végpontja diametrálisan ellentétes helyzetű lévén a test ugyanazon orientációját parametrálja. Ez a zárt kontúr azonban nyilván nem húzható össze ponttá anélkül, hogy megszakítanánk. A test 360°-os elforgatása a z-tengely körül ilyen kontúron történik, és ez az operáció nem határesete az olyan műveleteknek, amikor a koordinátarendszert a kiinduló helyzetéből valamennyire elforgatjuk, majd az alaphelyzetbe visszavisszük. Az ilyen típusú kontúrok tehát egy új homotópia osztályba (a π_1-be) tartoznak, amely a testek egyszeri körülforgatását tartalmazza.



16.1 ábra

Azt gondolhatnánk, hogy a test kétszeri körülforgatása újabb homotópia osztály eleme, de ez nincs így. Egy test kétszeri körülforgatása mondjuk a z-tengely

körül ugyanis folytonosan, a műveletsor zártságának megszakítása nélkül átdeformálható a paramétertér egy belső pontjává (vagy egy diametrálisan ellentétes helyzetű felületi pontpárrá). Ezt a műveletet illusztrálja a 16.1 ábrán a kontúrok $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$ folytonos deformációja.

A kétszeri körbeforgatás tehát a π_0-ba tartozik. A forgáscsoportnak csak két homotópia osztálya van, a π_0 és a π_1.

A továbbiakban elég lesz a paramétertérnek az origó körüli tartományára, a Lie-csoport *lokális* tulajdonságaira korlátozódni, az olyan *globális sajátosságok* ismeretetére, mint a homotópia osztályok, nem lesz szükségünk. Ez jelentős egyszerűsítés, ugyanis bebizonyítható, hogy *lokálisan* minden n-paraméteres Lie-csoport paramétertere $\mathbb{R}^n$, amelyben minden zárt kontúr összehúzható ponttá.

Összefoglalás: Egy n-dimenziós Lie-csoport olyan n-dimenziós (differenciálható) $\mathcal{M}$ sokaság (paramétertér), amelyen adva van egy kellő számszor differenciálható $\mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ leképezés (csoportszorzás) a

$$c_i = f_i(a_1, \dots a_n; b_1, \dots b_n) \qquad (i = 1, \dots n),$$

vagy szimbolikusan $c = f(a; b)$ függvényekkel. Ez a csoportszorzás általában nem kommutatív: $f(a; b) \neq f(b; a)$.

Létezik egységelem (e): $a = f(e; a) = f(a; e)$, azaz

$$a_i = f_i(0, \dots 0; a_1, \dots a_n) = f_i(a_1, \dots a_n; 0, \dots 0).$$

A csoportszorzás asszociatív:

$$f\left(f(a; b), c\right) = f\left(a; f(b; c)\right).$$

Ha az f függvény kellően síma, ezek a feltételek már biztosítják az inverz létét.

C) Invariáns vektormezők.

Mint minden sokaságon, az $\mathcal{M}$ paramétertéren is lehet vektormezőket definiálni, és ezek Lie-algebrát fognak alkotni a Lie-zárójellel szemben. A paramétertérben azonban az $\mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ csoportszorzás felhasználásával ki lehet választani speciális vektormezőket, amelyek maguk részalgebrát alkotnak. Ezekre az u.n. *invariáns vektormezőkre* lesz elsősorban szükségünk.

Az invariáns vektormezők speciális módon képzett folyamok érintővektorai. Vegyünk egy tetszőleges szám n-est:

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n\} \equiv \alpha,$$

amelyeket egy α *infinitezimális vektor komponenseinek* fogunk nevezni[20].

Legyenek a szóbanforgó folyamok áramvonalai a paramétertérben az $x_i(t)$ függvények és tegyük fel, hogy az áramvonal $(t + dt)$ paraméterű pontját a t paraméterű pontból mindig az

$$x_i(t + dt) = f_i(\alpha dt; x(t)) \tag{16.4}$$

[20]Az elnevezés félrevezető lehet, mert a vektor komponensei véges számok. Az „infinitezimális" jelző arra utal, hogy az alábbi gondolatmenetben ez a vektor mindig dt-vel van szorozva.

szabály alkalmazásával kapjuk meg.

Vagyis: A görbe t-paraméterű pontjához tartozó Lie-csoport elemet — az $x(t)$-t, — balról megszorozzuk az αdt koordinátájú e-hez infinitezimálisan közeli csoportelemmel, és az így kapott csoportelem paramétereit azonosítjuk $x_i(t+dt)$-vel. Következésképpen *minden áramvonal minden pontjában azonos módon folytatódik a csoportművelet értelmében.* Ezt az elvet alkalmazzuk ösztönösen, amikor pl. egy testet forgatunk valamilyen rögzített $\mathbf{n}$ tengelye körül.

Figyeljünk rá, hogy a „paraméter" terminust két egészen különböző értelemben használjuk, amelyeket nem szabad összekeverni: Egyrészt a Lie-csoport elemeit n valós paraméter jellemzi, amelyek a csoportelem koordinátái a paramétertérben. Másrészt a paramétertérben a görbéket egy paraméter függvényében adjuk meg.

A (16.4)-t az alábbi lépésekben alakíthatjuk át differenciálegyenletté:

$$x_i(t+dt) = x_i(t) + dx_i(t),$$

$$f_i\left(\alpha dt; x(t)\right) = \underbrace{f_i\left(0; x(t)\right)}_{x_i(t)} + \left[\frac{\partial f_i\left(y; x(t)\right)}{\partial y_j}\right]_{y=0} \cdot \alpha_j \cdot dt,$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_j \cdot \left[\frac{\partial f_i\left(y; x\right)}{\partial y_j}\right]_{y=0} \equiv \alpha_j P_{ji}(x). \tag{16.5}$$

Ez az egyenlet definiálja a $P_{ij}(x)$ függvényt, amely az alábbiakban fontos szerepet játszik.

Az utolsó egyenlet baloldala vektor, tehát a jobboldal is vektor. Az

$$A_i(x) = \alpha_j \cdot P_{ji}(x) \tag{16.6}$$

struktúrájú vektormezőt nevezzük *invariáns vektormezőnek.*

Belátjuk, hogy

$$A_i(e) = \alpha_i.$$

Valóban, az f_i kellő simasága következtében

$$P_{ji}(e) = \left[\frac{\partial f_i\left(y; 0\right)}{\partial y_j}\right]_{y=0} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial y_j}\right)_{y=0} = \delta_{ij}. \tag{16.7}$$

Az invariáns vektormezőket tehát *meghatározza* az e-ben felvett értékük. Minden e-beli vektor definiál egy invariáns vektormezőt.

Az „invariáns" jelző magyarázata: Egy vektormező transzformációs törvénye

$$A'_i(x') = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j(x), \qquad x'_i = F_i(x_1, \ldots x_n). \tag{16.8}$$

Az $\mathbf{A}$ vektormező akkor invariáns az F transzformációval szemben, ha

$$A'_i(x') = A_i(x'). \tag{16.9}$$

Állítás: A (16.6) vektormező invariáns a paramétertér

$$x_i' = f_i(x;b) \tag{16.10}$$

transzformációval szemben *minden* b csoportelemre. A (16.8) és (16.9) alapján ez azt jelenti, hogy

$$A_j(x)\cdot\frac{\partial f_i(x;b)}{\partial x_j} = A_i\left(f(x;b)\right). \tag{16.11}$$

Bizonyítás előtt a (16.2) mátrixcsoport példáján illusztráljuk a tétel jelentését. Ebben a példában $n=2$ és

$$f_1(y;x) = y_1 + x_1, \qquad f_2(y;x) = e^{y_1}x_2 + y_2. \tag{16.12}$$

$$P_{ij}(x) = \left[\frac{\partial f_j(y;x)}{\partial y_i}\right]_{y=e} = \begin{pmatrix} 1 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{16.13}$$

A két lineárisan független invariáns vektormező legyen $\mathbf{A}(x)$ és $\mathbf{B}(x)$, és az őket definiáló infinitezimális vektorok legyenek

$$\mathbf{A}(e) \equiv \alpha = (1,0), \qquad \mathbf{B}(e) \equiv \beta = (0,1).$$

Akkor (16.6) szerint

$$\mathbf{A}(x) = (1, x_2), \qquad \mathbf{B}(x) = (0,1). \tag{16.14}$$

A bizonyítandó tétel szerint ezek a vektormezők minden $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ választásnál invariánsak az

$$x_1' = x_1 + b_1, \qquad x_2' = e^{x_1}b_2 + x_2$$

transzformációval szemben.

A példában

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{x_2}b_2 & 1 \end{pmatrix},$$

ezért

$$A_1'(x') = \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}A_1(x) + \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}A_2(x) = 1\cdot 1 + 0\cdot x_2 = 1,$$

$$A_2'(x') = \frac{\partial x_2'}{\partial x_1}A_1(x) + \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}A_2(x) = e^{x_1}b_2\cdot 1 + 1\cdot x_2 = x_2',$$

tehát valóban

$$\mathbf{A}'(x') = (1, x_2') = \mathbf{A}(x').$$

Ugyanígy

$$B_1'(x') = \frac{\partial x_1'}{\partial x_1}B_1(x) + \frac{\partial x_1'}{\partial x_2}B_2(x) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0,$$

$$B_2'(x') = \frac{\partial x_2'}{\partial x_1}B_1(x) + \frac{\partial x_2'}{\partial x_2}B_2(x) = e^{x_1}b_2\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1,$$

$$\mathbf{B}'(x') = (0,1) = \mathbf{B}(x').$$

Az igazoláshoz belátjuk a következő *lemmát*:

$$P_{ji}\left(f(b;c)\right) = P_{jl}(b)\frac{\partial f_i(b;c)}{\partial b_l}. \tag{16.15}$$

Az asszocivitásból indulunk ki:

$$f_i\left(f(a;b);c\right) = f_i\left(a;f(b;c)\right). \tag{16.16}$$

Tekintsük a-t infinitezimálisnak:

$$f_j(a;b) = f_j(e;b) + a_i\left[\frac{\partial f_j(a;b)}{\partial a_i}\right]_{a=e} = b_j + a_i\cdot P_{ij}(b).$$

Ennek alapján

$$(16.16)\text{ baloldala} = f_i\left(b + aP(b);c\right) = f_i(b;c) + a_jP_{jl}\frac{\partial f_i(b;c)}{\partial b_l},$$

$$(16.16)\text{ jobboldala} = f_i\left(e;f(b;c)\right) + a_j\left[\frac{\partial f_i(a;f(b;c))}{\partial a_j}\right]_{a=e} = f_i(b;c) + a_jP_{ji}\left[f\right)a;c\right].$$

Az a_j koefficienseit egyenlítve kapjuk a (16.15) lemmát, amelyből egyenesen következik (16.6) invarianciája a paramétertér (16.10) transzformációival szemben:

$$A_i\left(f(x;b)\right) = \alpha_lP_{li}\left(f(x;b)\right) = \alpha_lP_{lj}(x)\frac{\partial f_i(x;b)}{\partial x_j} = A_j(x)\frac{\partial f_i(x;b)}{\partial x_j}.$$

D) Az invariáns vektormezők Lie-algebrája.

Állítás: Az invariáns vektormezők Lie-algebrát alkotnak a Lie-zárójelre nézve.

A (16.14) vektormezők esetében például ez azt jelenti, hogy $(\mathbf{A},\mathbf{B}) = u\mathbf{A} + v\mathbf{B}$ konstans u,v-vel. Ez teljesül is, mert

$$(\mathbf{A},\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x_2} = \mathbf{B}.$$

Az általános esetben

$$A_i(x) = \alpha_kP_{ki}(x), \qquad B_j(x) = \beta_lP_{lj}(x).$$

$$\left.\begin{aligned} C_i(x) = (\mathbf{A},\mathbf{B})_i = B_j\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - (A\leftrightarrow B) = \beta_l\alpha_k\frac{\partial P_{ki}}{\partial x_j} - (A\leftrightarrow B) = \\ = \left(P_{lj}\frac{\partial P_{ki}(x)}{\partial x_j} - P_{kj}\frac{\partial P_{li}(x)}{\partial x_j}\right)\alpha_k\beta_l. \end{aligned}\right\} \tag{16.17}$$

Belátjuk, hogy $\mathbf{C}$ invariáns vektormező, azaz

$$C_i\left(f(x;y)\right) = C_j(x)\frac{\partial f_i(x;y)}{\partial x_j}.$$

A (16.17), majd a (16.15), végül megint a (16.17) alapján

$$C_i\left(f(x;y)\right) = \beta_l\alpha_k P_{lj}\left(f(x;y)\right)\cdot\left[\frac{\partial P_{ki}(z)}{\partial z_j}\right]_{z=f(x;y)} - (\alpha\leftrightarrow\beta) =$$

$$= \beta_l\alpha_k P_{ls}(x)\frac{\partial P_{ki}\left(f(x;y)\right)}{\partial x_s} - (\alpha\leftrightarrow\beta) = \beta_l\alpha_k P_{ls}(x)\frac{\partial}{\partial x_s}\left[P_{kr}(x)\frac{\partial f_i(x;y)}{\partial x_r}\right] - (\alpha\leftrightarrow\beta) =$$

$$= \beta_l\alpha_k P_{ls}(x)\frac{\partial P_{kr}(x)}{\partial x_s}\frac{\partial f_i(x;y)}{\partial x_r} + \beta_l\alpha_k P_{ls}(x)P_{kr}(x)\frac{\partial^2 f_i(x;y)}{\partial x_r\partial x_s} - (\alpha\leftrightarrow\beta) =$$

$$= \left(\beta_l\alpha_k P_{ls}(x)\frac{\partial P_{kr}(x)}{\partial x_s} - (\alpha\leftrightarrow\beta)\right)\frac{\partial f_i(x;y)}{\partial x_r} = C_r(x)\frac{\partial f_i(x;y)}{\partial x_r} \qquad \text{qu.e.d.}$$

Hogyan lehet kifejezni a $\mathbf{C} = (\mathbf{A},\mathbf{B})$ vektormező γ infinitezimális vektorát az $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{B}$ α, β infinitezimális vektorain keresztül?

A (16.17) alapján

$$\gamma_i = C_i(e) = \left(P_{lj}(e)\left[\frac{\partial P_{ki}(x)}{\partial x_j}\right]_{x=e} - P_{kj}(e)\left[\frac{\partial P_{li}(x)}{\partial x_j}\right]_{x=e}\right)\alpha_k\beta_l.$$

De a (16.7) szerint

$$P_{lj}(e) = \delta_{lj}, \qquad P_{kj}(e) = \delta_{kj}.$$

Továbbá

$$\left[\frac{\partial P_{ki}(x)}{\partial x_j}\right]_{x=e} = \left[\frac{\partial^2 f_i(y;x)}{\partial y_k\partial x_j}\right]_{x=y=e} \qquad \left[\frac{\partial P_{li}(x)}{\partial x_j}\right]_{x=e} = \left[\frac{\partial^2 f_i(y;x)}{\partial y_l\partial x_j}\right]_{x=y=e}.$$

Mindezekből

$$\gamma_i = c_{i,kl}\alpha_k\beta_l, \tag{16.18}$$

ahol

$$c_{i,kl} = -c_{i,lk} = \left(\frac{\partial^2 f_i(y;x)}{\partial y_k\partial x_l} - \frac{\partial^2 f_i(y;x)}{\partial y_l\partial x_k}\right)_{x=y=e} \tag{16.19}$$

a *struktúraállandók*. A (16.18) jobboldalán álló kifejezés az α és a β infinitezimális vektorok *Lie-szorzata* (pontosabban a Lie-szorzat i-ik komponense). Az $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{B}$ invariáns vektormezők Lie-zárójelének infinitezimális vektora tehát a két mező infinitezimális vektorainak Lie-szorzatával egyenlő. Mivel (1) az invariáns vektormezők Lie-algebrát alkotnak a Lie-zárójelre vonatkozóan és (2) egy-egy értelmű kapcsolatban vannak az infinitezimális vektorokkal, ezért az

utóbbi vektorok is Lie-algebrát alkotnak a Lie-szorzatra nézve. Ennek következtében a Lie-szorzat kielégíti a Jacobi-azonosságot, amely a következő feltételt rója a struktúraállandókra:

$$c_{l,ij}c_{r,lk} + c_{l,jk}c_{r,li} + c_{l,ki}c_{r,lj} = 0. \tag{16.20}$$

A struktúraállandókat a csoportstruktúra egyértelműen meghatározza (a paramétertér-beli koordináta-transzformáció erejéig). És megfordítva: a struktúraállandók ismeretében a csoport lokális szerkezete rekonstruálható (nem bizonyítjuk).

E) Mátrixcsoportok, csoportalgebra.

Az infinitezimális vektor fogalmát a (16.5), vagyis a

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_j P_{ji}(x) \tag{16.21}$$

egyenletből kiindulva értelmeztük. Az egyenlet megoldásai görbék a paramétertéren. Vegyük azt a megoldást, amely $t = 0$-ban paramétertér origóján egy keresztül: $x_i(0) = 0$. Akkor (16.7) következtében

$$\alpha_i = \left(\frac{dx_i}{dt}\right)_{t=0}.$$

Az infinitezimális vektorok tehát az invariáns folyamok azon áramvonalainak érintővektorai a paramétertér origójában, amelyek ezen a ponton haladnak át.

Vegyünk most egy mátrixcsoportot, amelynek elemei a paramétertér pontjaihoz rendelt $M(x_1, \ldots x_n) \equiv M(x)$ $(k \times k)$-s mátrixok. A csoportszorzás szabálya legyen azonos a mátrixszorzással, de úgy, hogy az alapul vett Lie-csoport $f(x, y)$ szorzási műveletét *reprezentálja*:

$$M_{ij}\left(f(y; x)\right) = M_{iq}(y) \cdot M_{qj}(x) \tag{16.22}$$

és a q-ra természetesen összegzés értendő 1-től k-ig.

Az A. pontban tárgyalt 2×2-es mátrixcsoport ilyen: A paramétertér-beli (16.1) képleteket tekintjük elsődlegesnek, a (16.2) mátrixokat pedig annak a mátrixcsoportnak, amelyben a (16.1) csoportszorzást a mátrixok összeszorzása reprezentálja. A (16.22)-ból következik (és a példa mutatja is), hogy a csoport e eleméhez, amelyhez a paramétertérben az origó tartozik, az I egységmátrixot kell hozzárendelnünk.

Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy egy tetszőleges Lie-csoport reprezentálható mátrixokkal. Bebizonyítható azonban, hogy *lokálisan* minden Lie-csoport equivalens valamilyen mátrixcsoporttal (*Ado tétele*), ezért a mátrixreprezentációk felhasználásával kapható tételek a Lie-csoportokra általában is érvényesek.

A mátrixreprezentáció rögzíti azt a *bázist* amelyben az infinitezimális vektorok komponensei az α_i számok.

A paramétertér fentebb tárgyalt $x_i(t)$ áramvonalain a mátrixelemek is t-függők, ezért

$$\left(\frac{dM_{ij}}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{dM_{ij}}{dx_k}\right)_{x=0}\left(\frac{dx_k}{dt}\right)_{t=0} = \alpha_k \cdot \left(\frac{dM_{ij}}{dx_k}\right)_{x=0}. \tag{16.23}$$

Itt célszerű a

$$\xi^{(k)} = \left(\frac{dM}{dx_k}\right)_{x=0}, \qquad \xi^{(k)}_{ij} = \left(\frac{dM_{ij}}{dx_k}\right)_{x=0} \tag{16.24}$$

mátrixokat *báziselemeknek* tekinteni az infinitezimális vektorok terében, amelyben az α infinitezimális vektor az

$$\alpha \equiv \left(\frac{dM}{dt}\right)_{t=0} = \alpha_k \xi^{(k)} \tag{16.25}$$

mátrixszal azonosítható. A 2×2-s példánkban

$$\xi^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{pmatrix} e^{x_1} & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\xi^{(2)} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{pmatrix} e^{x_1} & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fontos: A $\xi^{(k)}$ mátrixok (általában) nem csoportelemek, ahogy ebben a példában sem azok.

A fizikai alkalmazások szempontjából alapvető fontosságú a következő tétel: A $c_{i,kl}$ struktúraállandók a

$$[\xi^{(k)}, \xi^{(l)}] = c_{i,kl}\xi^{(i)} \tag{16.26}$$

relációból olvashatók le, ahol $[,]$ *mátrixkommutátort* jelöl.

A 2×2-es példánkban

$$[\xi^{(1)}, \xi^{(2)}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \xi^{(2)},$$

tehát

$$c_{1,12} = 0, \qquad c_{2.12} = 1.$$

Ennek az eredménynek a helyességét (16.19) és (16.12) alapján ellenőrizhetjük is.

A (16.18) és (16.26) következtében a $\mathbf{C} = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ Lie-zárójel infinitezimális vektora a következő formában is felírható:

$$\gamma = \gamma_i \xi^{(i)} = c_{i,kl}\alpha_k\beta_l\xi^{(i)} = \alpha_k\beta_l[\xi^{(k)}, \xi^{(l)}] = [\alpha, \beta], \tag{16.27}$$

vagyis *mátrixcsoportoknál a Lie-szorzat a mátrixkommutátorral egyenlő.* Mivel a mátrixkommutátor bilineáris, antiszimmetrikus és eleget tesz a Jacobi-identitásnak, ezért — mint várható, — a mátrixábrázolás infinitezimális vektorai Lie-algebrát alkotnak mátrixkommutátorra nézve. Ennek a Lie-algebrának a neve *csoportalgebra.*

A (16.26) képlet helyességét azonban még be kell bizonyítani.

Deriváljuk (16.22)-t parciálisan y_k, majd x_l szerint:

$$\left[\frac{\partial M_{ij}(z)}{\partial z_s}\right]_{z=f(y;x)} \cdot \frac{\partial f_s(y;x)}{\partial y_k} = \frac{\partial M_{iq}(y)}{\partial y_k} M_{qj}(x)$$

$$\left[\frac{\partial^2 M_{ij}(z)}{\partial z_s \partial z_r}\right]_{z=f(y;x)} \cdot \frac{\partial f_r(y;x)}{\partial x_l}\frac{\partial f_s(y;x)}{\partial y_k} + \left[\frac{\partial M_{ij}(z)}{\partial z_s}\right]_{z=f(y;x)} \cdot \frac{\partial^2 f_s(y;x)}{\partial y_k \partial x_l} = \frac{\partial M_{iq}(y)}{\partial y_k}\frac{\partial M_{qj}(x)}{\partial y_l}.$$

Mindkét oldalt antiszimmetritáljuk k, l-ben. A baloldal első tagja nem ad járulékot, mert szimmetrikus, ezért

$$\left[\frac{\partial M_{ij}(z)}{\partial z_s}\right]_{z=f(y;x)} \cdot \left(\frac{\partial^2 f_s(y;x)}{\partial y_k \partial x_l} - \frac{\partial^2 f_s(y;x)}{\partial y_l \partial x_k}\right) = \frac{\partial M_{iq}(y)}{\partial y_k}\frac{\partial M_{qj}(x)}{\partial y_l} - \frac{\partial M_{iq}(y)}{\partial y_l}\frac{\partial M_{qj}(x)}{\partial y_k}.$$

Itt $x, y \to e$ határátmenet után a (16.19), (16.24) alapján

$$\xi^{(s)}_{ij} \cdot c_{s,kl} = \xi^{(k)}_{iq} \cdot \xi^{(l)}_{qj} - \xi^{(l)}_{iq} \cdot \xi^{(k)}_{qj} = [\xi^{(k)}, \xi^{(l)}],$$

ahogy lennie kell.

Technikai megjegyzés: A

$$\xi^k = \left(\frac{\partial M}{\partial x_k}\right)_{x=0}$$

relációban a jobboldalon az x_k kivételével a többi x_j a deriválás előtt zérussá tehető. Definiáljuk tehát az $M^{(k)}(t)$ mátrixot így:

$$M^{(k)}(t) = M(x)|_{x_k=t,\ \text{a többi}\ x_j=0}\,.$$

Ezzel a definícióval

$$\xi^k = \left(\frac{dM^{(k)}(t)}{dt}\right)_{t=0}. \tag{16.28}$$

Példa: Az SO_3 forgáscsoport, amelynek jól ismert mátrix reprezentációja a (3×3)-as ortogonális unimoduláris mátrixok. Ezeket M helyett R-el szokás jelölni. Az $x, y, z \equiv x_1, x_2, x_3$ tengely körüli φ szögű elforgatások mátrixai a következők:

$$R^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}; \qquad R^{(2)} = \begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix}; \qquad R^{(3)} = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

amelyekben $s = \sin\varphi$, $c = \cos\varphi$. A csoportalgebra (so_3)

$$\xi^k = \left(\frac{dR^{(k)}}{d\varphi}\right)_{\varphi=0}$$

báziselemei a következők:

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \xi^{(3)} = \begin{pmatrix} c & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezek a mátrixok nem elemei az SO_3 csoport mátrix reprezentációjának.

A báziselemek kommutátorai — mint könnyen ellenőrizhető, — a következők:

$$\left[\xi^{(1)}, \xi^{(2)}\right] = \xi^{(3)}, \qquad \left[\xi^{(2)}, \xi^{(3)}\right] = \xi^{(1)}, \qquad \left[\xi^{(3)}, \xi^{(1)}\right] = \xi^{(2)}. \tag{16.29}$$

A független nemzérus struktúraállandók tehát $c_{3,12} = c_{1,23} = c_{2,31} = 1$, vagy röviden $c_{i,kl} = \epsilon_{ikl}$.

Ha figyelembe vesszük, hogy az infinitezimális vektorok Lie-algebrát alkotnak a mátrixkommutátorra nézve (és természetesen azt is, hogy az $1, 2, 3$ index azonos az x, y, z indexeléssel), akkor ennek, valamint a (15.7) képletnek a hasonlósága szembeszökő.

A (15.7) a háromdimenziós euklidészi teret kitöltő $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ vektormezőkre vonatkozik, amelyeknek a folyama szemléltethető egy x, y vagy z tengely körül forgó merev test pontjainak a pályájával. Ez az a paradigmatikus példa, amelynek a segítségével megmutatjuk, mit értünk azon a terminuson, hogy *forgás*.

Ahhoz, hogy a forgás (elforgatás) *elvont fogalmát* matematikailag elemezhetővé tegyük, a forgó test helyett a koordinátarendszerre koncentrálunk, amelyhez képest forog. A test és a koordinátarendszer relatív helyzetének a megváltozását ugyanis felfoghatjuk úgy is, mint a koordinátarendszer forgását a nyugvó testhez képest. Ebben a felfogásban a forgást nem a háromdimenziós euklidészi térben írjuk le, amelynek egy tartományát a merev test kitölti, hanem az elvont *paramétertérben*, amelynek pontjai a koordinátarendszer elfordulását határozzák meg egy kezdőhelyzethez képest.

Ennek a fejezetnek a B. pontjában láttuk, hogy a paramétertér elgondolható egy gömb belsejeként. Azok a vektormezők, amelyekből kiindulva a (16.29) képlethez eljutottunk, a $\xi^{(1)}$, a $\xi^{(2)}$ és a $\xi^{(3)}$ infinitezimális vektorok által meghatározott invariáns vektormezők ezen a paramétertéren. Ha ezeknek a vektormezőknek a mátrixreprezentációjára alkalmazzuk a (15.4) képletet, ugyanarra az interpretációra kell jutnunk a csoportparaméterek terminusaiban, mint amelyet a (15.7)-hez fűztünk a 15. fejezet B. pontjának végén a geometriai terünkben történő elmozdulások segítségével.

Az SO_3 Lie-csoport tehát magát a forgás fogalmát fejezi ki matematikai formában anélkül, hogy a forgás bármilyen konkrét *realizációjához* tapadna. Ezzel egyben lehetővé teszi, hogy a forgás fogalmát realizálhassuk a fizikai valóság olyan tartományaiban is, ahol az intuíciónk ebben már nem lehet a segítségünkre. A kvantumelmélet bővelkedik ilyen példákban, de a 18. fejezettől kezdve találkozunk majd a fázistéren történő kanonikus realizációval, amely a klasszikus mechanikában is demonstrálja a szimmetriák csoportelméleti megközelítésének a hatékonyságát.

Megjegyezzük még, hogy a részecskefizikában fontos szerepet játszó Lie-szimmetriák többnyire egyáltalán nem köthetők a forgáshoz hasonló, már ele-

ve adott szemléletes fogalmakhoz. Az ilyen alkalmazásokban a (15.7) mezőnek megfelelő szint természetesen hiányzik, a csoportelmélet által felkínált Lie-csoportok közül kell kiválasztani azt, amelyik a tapasztalattal összeférő elmélethez vezet.

F) Egyparaméteres alcsoportok.

Az egyparaméteres alcsoportok a (16.21), vagyis a

$$\frac{dx_i}{dt} = \alpha_j P_{ji}(x)$$

egyenlet olyan $x_i(t)$ megoldásai a paramétertérben, amelyekre $x_i(0) = 0$. Ezek azok a transzformációk, amelyek a heurisztikus gondolatmenetekben természetes módon jönnek elő.

Az $x(t)$ transzformációk egyparaméteres alcsoportot alkotnak a t *additív paraméterre* nézve:

$$x_i(t+s) = f_i\left(x(t); x(s)\right), \tag{16.30}$$

vagy ponttal jelölve a csoportszorzást

$$x(t+s) = x(t) \cdot x(s).$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy $x(t) \cdot x(s) = x(s) \cdot x(t)$.

A (16.30) tulajdonság nem csak a trajektóriákon múlik, hanem a *paraméterálás módján* is. Ha t helyett új paramétert vezetünk be a $t = \chi(t')$ relációval, akkor az

$$x_i'(t') = x_i\left(\chi(t')\right)$$

trajektóriára (16.30) már nem lesz érvényes (a t' paraméter nem additív), mert a (16.21) egyenlet nem invariáns a $t = \chi(t')$ transzformációval szemben (kivéve, ha $t = at' + b$ konstans a, b-vel).

A (16.30) additivitás viszont következik (16.21)-ből, mert konstans s mellett (16.30) mindkét oldala kielégíti ezt az egyenletet és a két oldal $s = 0$-nál egyenlő egymással. Csak azt kell tehát belátni, hogy (16.30) jobboldala is eleget tesz (16.21)-nek, mert konstans s-nél a baloldalra ez triviálisan igaz.

Legyen tehát $f\left(x(t); x(s)\right) = b(t)$ (s rögzített).

$$\frac{db_i(t)}{dt} = \frac{d}{dt} f_i\left(x(t); x(s)\right) = \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{\partial f_i\left(x(t); x(s)\right)}{\partial x_j(t)}.$$

Használjuk most ki (16.21)-et, majd a (16.15) lemmát:

$$\frac{db_i(t)}{dt} = \alpha_k \cdot P_{kj}\left(x(t)\right) \frac{\partial f_i\left(x(t); x(s)\right)}{\partial x_j(t)} = \alpha_k P_{ki}\left(f\left(x(t); x(s)\right)\right) = \alpha_k P_{ki}\left(b(t)\right).$$

Mint látjuk, (16.30) jobboldala valóban kielégíti (16.21)-et.

A 2×2-s mátrixcsoportos példánkban (16.13) szerint a (16.21) egyenlet a következő:

$$\frac{dx_1}{dt} = \alpha_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = \alpha_1 x_2 + \alpha_2.$$

Ennek az egyenletrendszernek az $x_i(0) = 0$ feltételt kielégítő megoldása

$$x_1(t) = \alpha_1 t, \qquad x_2(t) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(e^{\alpha_1 t} - 1\right).$$

A (16.2) szerint az egyparaméteres alcsoportok tehát az

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} & \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(e^{\alpha_1 t} - 1\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixok, amelyekre a mátrixszorzás értelmében valóban teljesül az $x(t+s) = x(t) \cdot x(s)$ reláció.

Megmutatjuk, hogy

$$X(t) = e^{(\alpha_1 \xi^{(1)} + \alpha_2 \xi^{(2)})t} = e^{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t}.$$

Valóban, könnyen ellenőrizhető, hogy $N \geq 1$-nél

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} \alpha_1^N & \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\alpha_1^N \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ennek alapján

$$e^{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{t}{1!}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\alpha_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} \alpha_1^2 & \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\alpha_1^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} & \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(e^{\alpha_1 t} - 1\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Általában is igaz, hogy az egyparaméteres alcsoportok mátrixai

$$M(t) = e^{t\alpha_i \xi^{(i)}} \tag{16.31}$$

alakúak, ahol természetesen $M(t) \equiv M\left(x(t)\right)$.

A bizonyítás így történik: A (16.30) majd a (16.22) felhasználásával

$$M(t+s) \equiv M\left(x(t+s)\right) = M\left(f(x(t); x(s)\right) = M\left(x(t)\right) \cdot M\left(x(s)\right) \equiv M(t) \cdot M(s)$$

$$\frac{dM(t+s)}{dt} = \frac{dM(t+s)}{ds} = M(t) \cdot \frac{dM(s)}{ds}.$$

Legyen $s = 0$. Akkor (16.25) alapján

$$\frac{dM(t)}{dt} = M(t) \cdot \left.\frac{dM(s)}{ds}\right|_{s=0} = M(t) \cdot \alpha_i \xi^{(i)}.$$

Ennek az egyenletnek az $M(0) = I$ kezdőfeltételhez tartozó megoldása valóban (16.31)

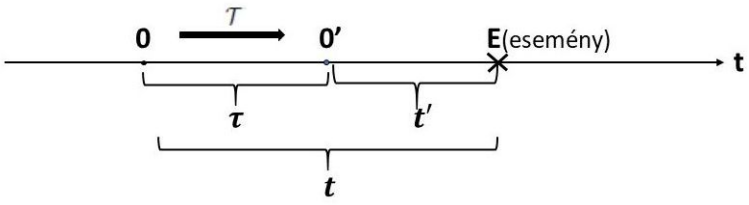
Forgáscsoportnál például ezek a mátrixok az $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ komponensű vektor iránya körüli t-szögű elforgatások (ha a t paramétert radiánban mérjük, akkor az $|\alpha| = 1$ feltétel rögzíti α hosszát).

G) Összefoglalás.

1. Lie-csoport = n-dimenziós sokaság (paramétertér) csoporművelettel.
2. A csoportszorzás kiválasztja a fontos (invariáns) folyamokat és vektormezőket.
3. Az invariáns vektormezők Lie-algebrája zárt a Lie-zárójelre nézve.
4. Az invariáns vektormezőket egyértelműen meghatározza a paramétertér origójában felvett értékük (infinitezimális vektor).
5. Az invariáns vektormezők Lie-algebrája indukálja a csoportalgebrát az infinitezimális veztorok terében, amelyben a szorzást (Lie-szorzat) a struktúraállandók határozzák meg.
6. Mátrixábrázolásban a csoportalgebra elemei is mátrixok és a Lie-szorzat a mátrixkommutátor.
7. Mátrixábrázolásban az egyparaméteres alcsoportok mátrixai a csoportalgebra-elemek exponencializálásával kaphatók meg.

17. A fontosabb dinamikai Lie-csoportok.

A) Az időeltolás csoportja ($\mathcal{T}$).



17.1 ábra

Egyetlen csoportparaméter van, a τ, amely t időt transzformálja a

$$t \longrightarrow t' = t - \tau \tag{17.1}$$

szabály szerint. A paramétertér tehát egydimenziós. A csoport „működésének" az illusztációja a 17.1 ábrán azon a nagyon nemtriviális intuíciónkon alapul, hogy az időbeli eltolás a térbeli eltolás mintájára képzelhető el.

A csoportszorzás $f(\tau_1;\tau_2)=\tau_1+\tau_2.$, amely azt fejezi ki, hogy egymás után végezzük el a τ_1, majd τ_2 *időbeli eltolást* (vagy röviden *időeltolást*). Ez a művelet nyilván kommutatív, mindegy, milyen sorrendben végezzük el őket.

A mátrixábrázolás

$$\tau \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{17.2}$$

mert ekkor

$$\begin{pmatrix} 1 & -\tau_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\tau_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(\tau_1+\tau_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Magát a (17.1) transzformációt ábrázolhatjuk a (17.2) mátrix hatásaként a következő módon:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-\tau \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{17.3}$$

Az egyetlen t paramétertől függő oszlopvektort, amelyre a transzformáció mátrixa hat, azért vagyunk kénytelenek két komponenssel leírni, mert a transzformáció inhomogén: Mivel a csoport*szorzás* valójában összeadás, a nulla értéket nem hagyja meg nullának.

A Lie-algebra egydimenziós, a bázisvektor

$$\theta = \frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\Big|_{\tau=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17.4}$$

Ennek a csoportnak a tárgyalását furcsa módon a csoport rendkívüli egyszerűsége teszi nehézen érthetővé. Mégis ezzel kellett kezdenünk, mert a dinamika lényege az időbeli fejlődés, ennek csoportelméleti háttere a $\mathcal{T}$ csoport, amellyel általában egy nagyobb csoport alcsoportjaként találkozunk.

B) A dinamikai forgáscsoport[21] ($SO_\tau(3)$).

Az SO_3 forgáscsoportról az előző fejezet E. pontjának a végén volt szó. A $SO_\tau(3)$ a forgáscsoport időbeli eltolással kiegészítve. A centrális erőtérben vagy a mágneses monopólus körül történő mozgás, a pörgettyű szabad precessziója rendelkeznek ezzel a típusú szimmetriával.

Az $SO_\tau(3)$ paramétertere négydimenziós: Egy paraméter jellemzi az időeltolást, a további három pedig, amelyeknek a pontos specifikációjára nem lesz szükségünk, az origo körüli elforgatást leíró 3×3-as R mátrixban szerepel:

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow t' = t-\tau \\ x_i &\longrightarrow x_i' = R_{ij}x_j \end{aligned} \tag{17.5}$$

Az elforgatást leggyakrabban az α, β, γ Euler-szögekkel szokás megadni, amelyeket majd kicsit később, a 19. fejezet C. pontjában definiálunk. Az R mátrix ezektől függ. A csoportszorzást meghatározó $f_i(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1;\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ $(i=$

[21] Nem általánosan használt fogalom.

α, β, γ) függvények nagyon bonyolultak, nem is írjuk fel őket. A struktúraállandókat azonban, amelyekre elsősorban szükségünk lesz, az előző fejezet eredményeit felhasználva mátrixreprezentációban enélkül is kiszámíthatjuk.

A csoport a következő típusú mátrixokkal reprezentálható:

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\tau \\ \hline 0 & & & & 0 \\ 0 & & R & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \tag{17.6}$$

mert a mátrixszorzat ekkor valóban reprezentálja a csoportszorzást:

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\tau_1 \\ \hline 0 & & & & 0 \\ 0 & & R_1 & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\tau_2 \\ \hline 0 & & & & 0 \\ 0 & & R_2 & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -(\tau_1+\tau_2) \\ \hline 0 & & & & 0 \\ 0 & & R_1R_2 & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

A (17.6)-ból látható, hogy amikor R az I egységmátrix, akkor ezek a mátrixok a $\mathcal{T}$ alcsoportot, amikor pedig $\tau = 0$, akkor az SO_3 forgás alcsoportot reprezentálják.

A (17.5) csoporttranszformációt a (17.6) hatásaként most így adhatjuk meg:

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\tau \\ \hline 0 & & & & 0 \\ 0 & & R & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-\tau \\ R_{1i}x_i \\ R_{2i}x_i \\ R_{3i}x_i \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{17.7}$$

A Lie-algebrára történő áttéréshez jelöljük a (17.6) mátrixot M-mel, az i-ik tengely körüli forgatásokhoz tartozókat pedig $M^{(i)}$-vel[22]. Akkor a Lie-algebra báziselemei a következők[23]:

$$\theta = \left(\frac{\partial M}{\partial \tau}\right)_0, \qquad \xi^{(i)} = \left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right)_0 = \left(\frac{\partial M^{(i)}}{\partial \varphi}\right)_0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

[22] Ld. az előző fejezet E. pontjában a „Technikai megjegyzést” .

[23] Korábban minden Lie-algebra báziselemet $\xi^{(i)}$-vel jelöltünk. A továbbiakban azonban ezt a jelölést a térbeli forgatásokhoz tartozó báziselemek számára tartjuk fenn.

A báziselemek mátrixábrázolásai ezek szerint

$$\theta = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\xi^{(1)} = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad \xi^{(2)} = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad \xi^{(3)} = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

A csoportstruktúrát meghatározó Lie-szorzatok (mátrixkommutátorok)

$$\left[\xi^{(i)}, \xi^{(j)}\right] = \epsilon_{ijk}\xi^{(k)}, \tag{17.8}$$

$$\left[\theta, \xi^{(i)}\right] = 0. \tag{17.9}$$

Az eddigi két példán látható, hogy a csoportműveletet annak alapján adjuk meg, hogy a *téridő pontjainak* miféle transzformációit akarjuk vizsgálni. Ehhez kellenek a téridő-pontok t, x_1, x_2, x_3 koordinátái. Ezek azonban *nem csoportparaméterek*. A csoportparaméterekkel a (t, x_1, x_2, x_3)-ra ható *transzformációkat* jellemezzük (indexeljük).

C) A Galilei-csoport($\mathcal{G}$).

A Galilei-csoport az inerciarendszerekhez rögzített Descartes-koordinátarendszerek közötti áttérést írja le nemrelativisztikus esetben ($v \ll c$):

$$t \longrightarrow t' = t - \tau$$

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x}'_\mathbf{i} = R\mathbf{x} - \mathbf{v}t + \mathbf{a}.$$

A csoport paramétertere tíz dimenziós: a τ, az R-et meghatározó három Euler-szög, a $\mathcal{K}$' mozgó koordinátarendszer $\mathcal{K}$-hoz viszonyított $\mathbf{v}$ sebességének három komponense, valamint a $\mathcal{K}$' origójának helyzetét meghatározó $\mathbf{a}$ helyzetvektor komponensei.

A csoporttranszformációt a (17.7) mintájára adjuk meg:

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\tau \\ \hline -v_1 & & & & a_1 \\ -v_2 & & R & & a_2 \\ -v_3 & & & & a_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} t \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} t - \tau \\ R_{1i}x_i + a_1 - v_1 t \\ R_{2i}x_i + a_2 - v_2 t \\ R_{3i}x_i + a_3 - v_3 t \\ 1 \end{array}\right). \tag{17.10}$$

A B. tárgyalási sorrendjét megfordítva megállapíthatuk, hogy az itt szereplő 5×5-ös M mátrix a $\mathcal{G}$ mátrixreprezentációja, a csoportművelet két ilyen mátrix szorzatából olvasható le.

A Lie-algebra báziselemei a következők[24]:

$$\left.\begin{aligned}
\theta &= \left(\frac{\partial M}{\partial \tau}\right)_0 && \text{(időeltolás)}\\
\xi^{(i)} &= \left(\frac{\partial M}{\partial \varphi_i}\right)_0 && \text{(elforgatás)}\\
\eta^{(i)} &= \left(\frac{\partial M}{\partial a_i}\right)_0 && \text{(térbeli eltolás, vagy transzláció)}\\
\kappa^{(i)} &= \left(\frac{\partial M}{\partial v_i}\right)_0 && \text{(buszt)}
\end{aligned}\right\} \tag{17.11}$$

Ha kiszámítjuk ezeket a mátrixokat, felírhatjuk a csoportstruktúrát meghatározó Lie-szorzatokat:

$$\left[\xi^{(i)},\xi^{(j)}\right] = \epsilon_{ijk}\xi^{(k)} \tag{17.12}$$

$$\left[\kappa^{(i)},\kappa^{(j)}\right] = 0 \tag{17.13}$$

$$\left[\xi^{(i)},\kappa^{(j)}\right] = \epsilon_{ijk}\kappa^{(k)} \tag{17.14}$$

$$\left[\eta^{(i)},\eta^{(j)}\right] = 0 \tag{17.15}$$

$$\left[\eta^{(i)},\theta\right] = 0 \tag{17.16}$$

$$\left[\xi^{(i)},\theta\right] = 0 \tag{17.17}$$

$$\left[\kappa^{(i)},\eta^{(j)}\right] = 0 \tag{17.18}$$

$$\left[\xi^{(i)},\eta^{(j)}\right] = \epsilon_{ijk}\eta^{(k)} \tag{17.19}$$

$$\left[\kappa^{(i)},\theta\right] = \eta^{(i)} \tag{17.20}$$

D) A Poincaré-csoport($\mathcal{P}$).

A Poincaré-csoport a Galilei-csoport relativisztikus általánosítása ($v<c$). A transzformációs törvény származtatásának alapja a fénysebesség állandóságának

[24] A *buszt* (a *boost* magyarítása) mozgó vonatkoztatási rendszerre történő áttérést jelent.

az elve: Ha $E(t,\mathbf{x})$, $\tilde{E}(\tilde{t},\tilde{\mathbf{x}})$ két esemény, amelyeket fényjel köt össze, akkor (az x_i-k Descartes-koordináták) a

$$c^2(t-\tilde{t})^2-(x_1-\tilde{x}_1)^2-(x_2-\tilde{x}_2)^2-(x_3-\tilde{x}_3)^2=0 \tag{17.21}$$

egyenlőség *minden inerciarendszerben érvényes.*

Ebből a posztulátumból levezethető, hogy pl. 1-irányú busztnál és tetszőleges időbeli és térbeli eltolásnál

$$\begin{aligned}
x_0 &\longrightarrow x_0'=\frac{1}{\sqrt{1-{v_1}^2/c^2}}\left(x_0-\frac{v_1}{c}x_1\right)-a_0\\
x_1 &\longrightarrow x_1'=\frac{1}{\sqrt{1-{v_1}^2/c^2}}\left(x_1-\frac{v_1}{c}x_0\right)+a_1\\
x_2 &\longrightarrow x_2'+a_2\\
x_3 &\longrightarrow x_3'+a_3,
\end{aligned}$$

ahol[25] $x_0=ct$, $a_0=c\tau$. A $\mathcal{P}$ paramétertere a $\mathcal{G}$-éhez hasonlóan tíz dimenziós.

A mátrixábrázolás (17.10) általánosítása:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
\Lambda_{00} & \Lambda_{01} & \Lambda_{02} & \Lambda_{03} & -a_0\\
\Lambda_{10} & \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & a_1\\
\Lambda_{20} & \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} & a_2\\
\Lambda_{30} & \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} & a_3\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\\1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}x_0'\\x_1'\\x_2'\\x_3'\\1\end{array}\right), \tag{17.22}$$

ahol Λ a (17.21) követelménynek megfelelően nem ortogonális, hanem *pszeudo-ortogonális* mátrix:

$$\Lambda\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}\Lambda^{tr}=\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}.$$

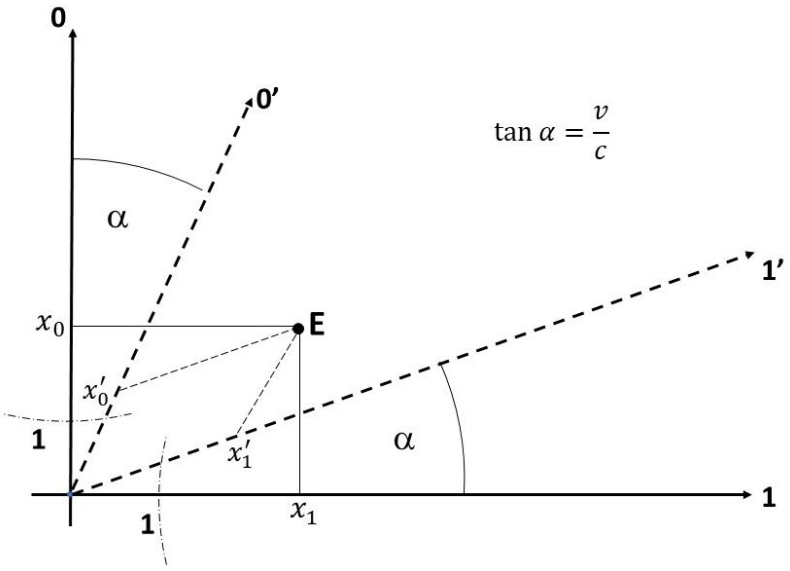
Amikor $\mathbf{v}=0$, akkor

$$\Lambda=\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline0&&&\\0&&R&\\0&&&\end{array}\right).$$

[25] A relativitáselméletben a τ a sajátidő standard jele. Itt most nem sajátidőt, hanem időbeli eltolást jelöl.

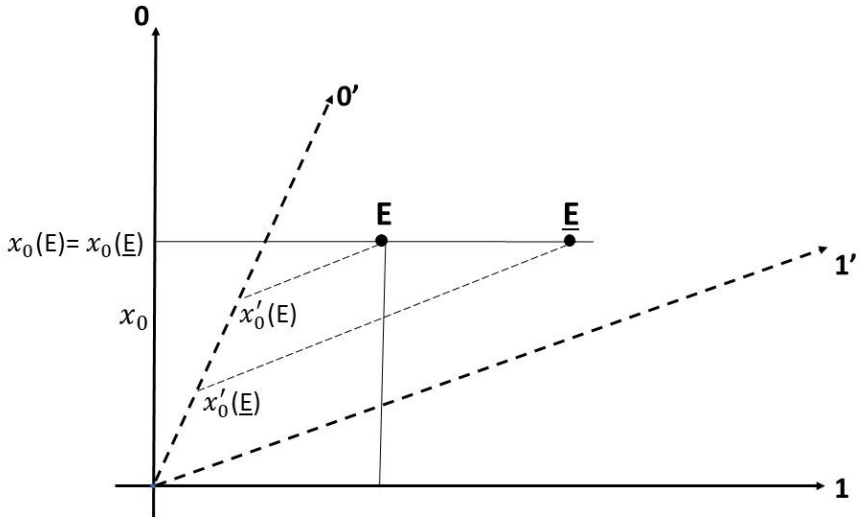
Tiszta busztnál Λ a Lorentz-transzformáció mátrixa. Amikor a buszt x_1 irányú, akkor

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-{v_1}^2/c^2}} & -\frac{v_1/c}{\sqrt{1-{v_1}^2/c^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{v_1/c}{\sqrt{1-{v_1}^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-{v_1}^2/c^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



17.2 ábra

Az 1-irányú buszthoz tartozó Lorentz-transzformációt a 17.2 ábrán felvázolt Minkowski-diagram szemlélteti. A diagrammon az **E** esemény 0. és 1. koordinátája látható a $\mathcal{K}$ és a $\mathcal{K}$' koordinátarendszerben. A vesszős és a vesszőtlen tengelyek 1 koordinátájú pontja a tengelyek és az $x_0^2 - x_1^2 = \pm 1$ hiperbolák metszéspontjában van.



17.3 ábra

A speciális relativitáselmélet alapja az egyidejűség viszonylagosságának felismerése. A 17.3 ábra mutatja, hogy az **E** és a $\underline{\mathbf{E}}$ esemény $\mathcal{K}$-ban egyidejű, $\mathcal{K}$'-ben azonban $\underline{\mathbf{E}}$ előbb történik, mint **E**.

A Lie-algebra tíz dimenziós, báziselemeit most is a (17.11) képletek alapján számíthatjuk ki, ha M-en a (17.22) képletben szereplő 5×5-ös mátrixot értjük. Ennek a mátrixnak csak speciális eseteit írtuk fel explicite, de a báziselemek kiszámításánál természetesen az általános képletet használjuk. A báziselemek *geometriai jelentése* azonban a Galilei- és a Poincaré-csoportban ugyanaz.

A nem bonyolult számítás azt mutatja, hogy a forgatásokhoz és a transzlációkhoz rendelt báziselemek a $\mathcal{P}$-ben ugyanazok, mint a $\mathcal{G}$-ben:

$$\xi_{\mathcal{P}}^{(i)} = \xi_{\mathcal{G}}^{(i)}, \qquad \eta_{\mathcal{P}}^{(i)} = \eta_{\mathcal{G}}^{(i)}.$$

A θ-k is megegyeznek egymással, ha a $\mathcal{P}$-ben nem τ-t, hanem a_0-t tekintjük időeltolási paraméternek. Ennek az az oka, hogy időkoordinátának $\mathcal{P}$-ben nem t-t hanem ct-t tekintjük:

$$\theta_{\mathcal{P}} = \left(\frac{\partial M_{\mathcal{P}}}{\partial a_0}\right)_0 = \left(\frac{\partial M_{\mathcal{G}}}{\partial \tau}\right)_0 = \theta_{\mathcal{G}}.$$

A $\kappa^{(i)}$-k mátrixai azonban megváltoznak, a Poincaré-csoportban a következők:

$$\kappa_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \kappa_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \kappa_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A $\kappa^{(i)}$-t nem tartalmazó kommutátorok ugyanazok, mint $\mathcal{G}$-ben, de a $\kappa^{(i)}$-t tartalmazók között is vannak változatlanok. Csak a (17.13) és a (17.18) módosul:

$$\left[\kappa^{(i)}, \kappa^{(j)}\right] = -\epsilon_{ijk}\xi^{(k)} \tag{17.23}$$

$$\left[\kappa^{(i)}, \eta^{(j)}\right] = \theta\delta_{ij}. \tag{17.24}$$

A $\mathcal{G}$-ben a jobboldalon mindkét esetben nulla áll.

A (17.23) azt fejezi ki, hogy ha elvégzünk egy x_1 és utána egy x_2 irányú busztot valamilyen sebességgel, majd pedig fordított sorrendben végezzük el őket, akkor nem ugyanarra a koordinátarendszerre jutunk vissza, hanem olyanra, amelyik elfordult az x_3 irány körül. Ez a gyökere a Thomas-precesszióként ismert relativisztikus jelenségnek. A (17.24) pedig azt mutatja, hogy a relativisztikus fizikában időbeli eltolást busztok és térbeli eltolások kombinációjából is kaphatunk. Azonban nem tudok megjelölni olyan relativisztikus jelenséget, amely ennek a képletnek a következménye, mert nem tudom, hogyan lehet a térbeli eltolást kísérletben realizálni.

18. Lie-csoportok kanonikus realizációja.

A) Definíció.

Tekintsünk egy dinamikai rendszert, amelyet a $q_1, \dots q_r, p_1, \dots p_r$ kanonikus változókkal tudunk leírni, valamint egy Lie-csoportot. A csoport paramétertérében a koordináták legyenek $x_1, \dots x_n \equiv x$.

Azt mondjuk, hogy a csoport *hat* a dinamikai rendszeren (vagy a fázistéren), ha minden x-hez adott a

$$q_i' = F_i(q, p; x), \qquad p_i' = G_i(q, p; x) \tag{18.1}$$

transzformáció mégpedig művelettartó módon:

$$\left.\begin{aligned} F_i\left(F(q,p;y), G(q,p;y); x\right) &= F_i(q,p;x\cdot y) \\ G_i\left(F(q,p;y), G(q,p;y); x\right) &= G_i(q,p;x\cdot y), \end{aligned}\right\} \tag{18.2}$$

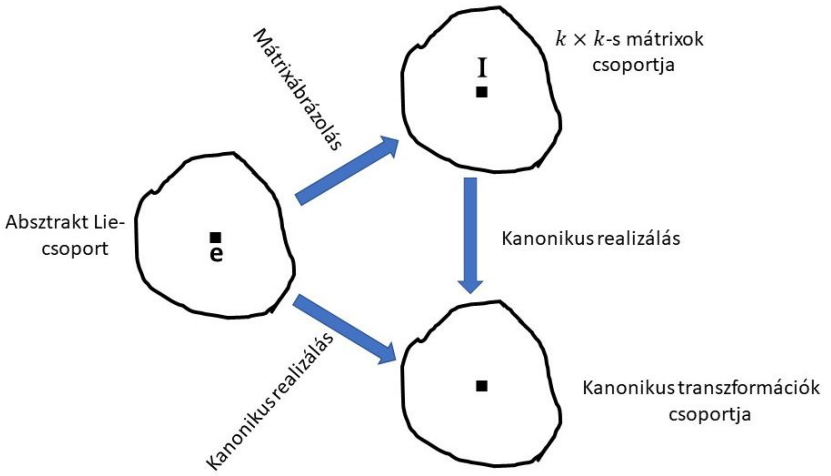
ahol $x \cdot y = f(x; y)$ a csoportszorzás, és

$$F_i(q, p; 0) = q_i, \qquad G_i(q, p; 0) = p_i.$$

Ha továbbá a q', p' sorozat minden szempontból egyenértékű a q, p fáziskoordinátákkal, akkor mondjuk azt, hogy (18.1) (vagy a szóbanforgó dinamikai rendszer) *kanonikusan realizálja* a csoportot.

A „kanonikus" jelző magyarázata az, hogy a vesszős és a vesszőtlen változók egyenértékűségéhez bizonyára szükséges (bár esetleg nem elegendő) az, hogy (18.1) *kanonikus transzformácó* legyen. Ellenkező esetben ugyanis a mozgásegyenletek a vesszős változókban már nem lennének Hamilton-egyenlet alakúak, és ez elrontaná a két leírás ekvivalenciáját.

Röviden: A (18.1) kanonikus transzformáció sereget a Lie-csoport kanonikus realizációjának nevezzük, ha teljesül a (18.2) kompozíciós törvény. A fizikai alkalmazásokban többnyire a Lie-csoport mátrixreprezentációját használjuk, ezért szerepel ez az elem is a 18.1 ábrán.



18.1 ábra

Amikor a Lie-csoport tartalmaz időeltolást, akkor a kanonikus realizálás ismerete tartalmazza a dinamika ismeretét. Ha ugyanis x-ként időeltoláshoz tartozó paramétert választunk — a példáinkban ez $x = (\tau, 0, \dots 0)$ alakú —, akkor (18.1) egyszerűen a mozgásegyenlet megoldása, amelyben τ játssza a t idő szerepét.

Ebben az esetben ugyanis ezek az egyenletek azt mondják meg, hogy ha egy $q_1, \dots q_n, p_1, \dots p_n$ koordinátájú rendszert milyen $q'_1, \dots q'_n, p'_1, \dots p'_n$ koordinátákkal látunk viszont az x paraméterű transzformáció elvégzése után. Eközben a rendszert időtlennek, befagyottnak kell elképzelni, amelyben minden változás látszólagos, mert csupán a szemlélő nézőpontjának a megváltozását tükrözi. Ha a szemlélő τ-val későbbre helyezi magát az időben, akkor természetesen egy megváltozott rendszert lát.

A kanonikus realizálás tehát a dinamika *általánosításának* tekinthető.

B) Redukálás a csoportalgebra leképezésére.

A csoport kanonikus realizálása helyettesíthető a csoportalgebra leképezésével (ábrázolásával) a dinamikai mennyiségek Lie-algebrájára (11. fejezet B. pont). Mivel az algebrák lineáris struktúrák, ezért elegendő véges számú bázis-elem realizálása. *Ez* az a lehetőség, amely utólag igazolja matematikai konstrukcióinkat a vektormezők bevezetésétől kezdődőleg.

Az állítás pontos megfogalmazása: Egy Lie-csoport kanonikus realizálásához

a csoportalgebra $\xi^{(i)}$ báziselemeit kell leképezni a dinamikai mennyiségek Lie-algebrájára művelettartó módon:

$$\xi^{(i)} \longrightarrow W^{(i)}, \qquad \left(W^{(i)} \equiv W^{(i)}(q,p)\right),$$

$$\left[\xi^{(i)}, \xi^{(j)}\right] = c_{k,ij}\xi^{(k)} \longrightarrow \left\{W^{(i)}, W^{(j)}\right\} = c_{k,ij}W^{(k)} + c_{ij}, \tag{18.3}$$

ahol c_{ij} semleges elem. Ennek a követelménynek az értelmét az világítja meg, hogy a csoportstruktúra a paramétertér folyamainak kommutátoraiban (15. fejezet B. pont) illetve ezek infinitezimális alakjában van kódolva. A (15.4) képlet a csoportalgebrára (16. fejezet E. pont) alkalmazva a következő:

$$e^{t\xi^{(i)}} e^{s\xi^{(j)}} e^{-t\xi^{(i)}} e^{-s\xi^{(j)}} = 1 + \left[\xi^{(i)}, \xi^{(j)}\right] ts + o\left(t^2 s, ts^2\right). \tag{18.4}$$

A $W(q,p)$ által generált e^{-sW} kanonikus transzformáció

$$e^{-sW} u = u + \frac{-s}{1!}\{u, W\} + \frac{(-s)^2}{2!}\{\{u, W\}, W\} + \ldots \tag{18.5}$$

képlete és a Jacobi-identitás alapján pedig könnyen megkapható az

$$e^{-tW^{(i)}} e^{-sW^{(j)}} e^{tW^{(i)}} e^{sW^{(j)}} = u + \left\{u, \left\{W^{(i)}, W^{(j)}\right\}\right\} + o\left(t^2 s, ts^2\right) \tag{18.6}$$

képlet is.

Ezért ha az $e^{t\xi^{(i)}}$ csoporttranszformációnak az $e^{-tW^{(i)}}$ kanonikus transzformációt feleltetjük meg és (18.3)-t előírjuk, akkor a $W^{(i)}$-k generált kanonikus transzformációk helyesen fogják tükrözni a csoportstruktúrát (ha még elhisszük Lie tételét a csoportszerkezet lokális rekonstrukciójáról a struktúraállandók alapján).

A (18.6)-ból látható, miért jelenhet meg semleges elem a (18.3) jobboldalán: A W és a (W + semleges elem) ugyanazt a kanonikus transzformációt generálja.

C) Kociklusok.

A c_{ij} semleges elemek az előző pontban már felírt

$$\left\{W^{(i)}, W^{(j)}\right\} = c_{k,ij}W^{(k)} + c_{ij} \tag{18.7}$$

definíciójuk, valamint a Poisson-zárójel tulajdonságainak következtében automatikusan eleget tesznek bizonyos feltételeknek. A Poisson-zárójel antiszimmetriája és a $c_{k,ij} = -c_{k,ji}$ következtében

$$c_{ij} = -c_{ji}.$$

Mivel továbbá a Poisson-zárójelek eleget tesznek a Jacobi-identitásnak, a struktúraállandók pedig a (16.20) feltételeknek, ezért a semleges elemek kielégítik a

$$c_{l,ij}c_{lk} + c_{l,jk}c_{li} + c_{l,ki}c_{lj} = 0$$

relációkat is.

A c_{ij}-k segítségével a csoportalgebrán képezhetünk

$$c(\alpha,\beta) = -c(\beta,\alpha) = c_{ij}\alpha_i\beta_j$$

típusú bilineáris függvényeket, amelyek eleget tesznek a

$$c\left([\alpha,\beta],\gamma\right) + c\left([\gamma,\alpha],\beta\right) + c\left([\beta,\gamma],\alpha\right) = 0$$

feltételeknek is. Az ilyen típusú bilineáris Lie-algebra függvényeket hívják *kociklusnak* (pontosabban 2-kociklusnak).

Ha (18.7)-ben a $W^{(k)}$-kat átdefiniáljuk így:

$$W^{(k)} \longrightarrow \bar{W}^{(k)} = W^{(k)} - c_k,$$

ahol c_k semleges elem, akkor

$$\left\{\bar{W}^{(i)}, \bar{W}^{(j)}\right\} = c_{k,ij}\bar{W}^{(k)} + \bar{c}_{ij},$$

ahol

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} + c_{k,ij}c_k.$$

A $\bar{c}(\alpha,\beta)$ szintén kociklus, amelyet az eredetivel *kohomológnak* nevezünk.

A kohomológ kociklusokat ekvivalensnek tekintjük, mert a generátorok triviális megváltoztatásával átalakíthatók egymásba. Az egymással kohomológ kociklusok közül azt érdemes választani, amelyben a legtöbb c_{ij} nulla.

Bizonyos csoportoknál minden kociklus a zérus kociklussal kohomológ. Ez a helyzet $SO_\tau(3)$-nál, $SO(3)$-nál és $\mathcal{P}$-nél (de a $\mathcal{G}$-nél nem).

Bizonyítás $SO(3)$-ra: Itt $c_{i,jk} = \epsilon_{ijk}$, tehát

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} + \epsilon_{kij}c_k \qquad (i,j,k = 1,2,3).$$

Legyen $c_1 = -c_{23},\ c_2 = -c_{31},\ c_3 = -c_{12}$. Akkor

$$\bar{c}_{23} = c_{23} + \epsilon_{k23}c_k = c_{23} + \epsilon_{123}c_1 = c_{23} - c_{23} = 0, \quad \text{stb.}$$

19. Az $SO_\tau(3)$ kanonikus realizációi.

A) A $W^{(i)}$ generátorok megválasztása.

Az $SO_\tau(3)$ csoport (17. fejezet B. pont) kanonikus realizációja azokat a követelményeket fejezi ki, amelyeket a tér izotrópiája ró a dinamikai rendszerekre. Láttuk, hogy a csoportnak négy generátora van, három a forgatást, egy az időbeli eltolást fejezi ki. A 6. fejezet eredményeit figyelembe véve ezeknek a transzformációknak kanonikus realizációja az impulzusmomentum és a Hamilton-függvény (az energia)

$$\xi^{(i)} \longrightarrow J_i, \qquad \theta \longrightarrow H,$$

amelyeknek (17.8) és (17.9), valamint (18.3) szerint ki kell elégíteniük a

$$\{J_i, J_j\} = \epsilon_{ijk} J_k + c_{ij}, \qquad \{H, J_i\} = a_i$$

Poisson-zárójel relációkat valamilyen c_{ij}, a_i semleges elemekkel. Az előző fejezet végén láttuk, hogy a J_i-k mindig választhatók úgy, hogy a c_{ij}-k legyenek nullák. A

$$\{\{J_i, J_j\}, H\} + \{\{H, J_i\}, J_j\} + \{\{J_j, H\}, J_i\} = 0$$

Jacobi-identitásból pedig, amelyet a Poisson-zárójel automatikusan kielégít,

$$\epsilon_{ijk} a_k = 0, \longrightarrow a_k = 0.$$

A generátorok két osztályát szokás megkülönböztetni. A *geometriai generátorok* azok, amelyek a t időt változatlanul hagyják, és a koordináták transzformációs törvénye alapján lehet őket megtalálni. Az $SO_\tau(3)$-ban ezek a J_i-k. A *dinamikai generátorok* a vizsgált (reprezentált) rendszer időbeli változását írják le. Az $SO_\tau(3)$-ban ez a H Hamilton-függvény, de általában (pl. a $\mathcal{P}$-ben) több dinamikai generátor is van.

A geometriai generátorok azonosak a Noether-tétel tárgyalásánál bevezetett G generátorokkal (6. fejezet). Láttuk, hogy egy

$$\mathbf{r}_i \longrightarrow \mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i(\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_N)\delta a$$

infinitezimális transzformáció generátora

$$G = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{v}_i(\mathbf{r}_1, \ldots \mathbf{r}_N)\mathbf{p}_i.$$

Ez a képlet Descartes-koordinátákat tételez fel, de át lehet írni általános koordinátákra is: A

$$q_i \longrightarrow q_i + \delta q_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$\delta q_i = v_i(q_1, \ldots, q_n)\delta a \equiv v_i(q)\delta a.$$

infinitezimális transzformáció generátora

$$G = \sum_{j=1}^{n} v_j(q) p_j. \tag{19.1}$$

Ez a G valóban *generálja* a szóbanforgó transzformációt, mert

$$\delta q_i = \{q_i, G\}\, \delta a.$$

A megfelelő *véges* a-jú transzformáció az e^{-aG} kanonikus transzformációval egyezik meg. Ha több különböző G van, a csoportstruktúrát ezek automatikusan kielégítik, és a geometriai generátorok közötti Poisson-zárójel relációk automatikusan teljesülnek.

Egy adott Lie-csoport különböző fizikai rendszerekre vonatkozó kanonikus realizációi természetesen különböznek egymástól. Ezt illusztrálandó az $SO_\tau(3)$ két különböző realizációját vizsgáljuk meg.

B) Realizáció tömegpontok fázisterén.

A 11. fejezet D. pontjából tudjuk, hogy Descartes koordinátákban ekkor

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^{N} [\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i],$$

és ezek a generátorok (11.8) szerint eleget tesznek a szükséges

$$\{J_\alpha, J_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma$$

Poisson-zárójel relációknak.

A H dinamikai generátor nem adható meg geometriai meggondolások alapján. A $\{H, J_\alpha\} = 0$-ból csak annyi következik, hogy H az $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{p}_i$ kanonikus változókból képezhető skalárok függvénye. A standard alak a következő:

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i} \mathbf{p}_i^2 + \sum_{i<j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|).$$

C) Realizáció izolált merev test fázisterén.

Az izolált („szabadon lebegő”) merev testek tömegközéppontjuk körüli forgását reguláris precessziónak (vagy szabad nutációnak) hívják. A test orientációját az α, β, γ Euler-szögek segítségével adjuk meg. A három J_i geometriai generátort annak alapján kell megtalálni, hogy hogyan változnak ezek a szögek az infinitezimális forgatások során.

Az Euler-szögekkel kapcsolatos jelölések és definíciók a következők:

$$OX, OY, OZ \ (= 1, 2, 3) \quad \text{a térben rögzített tengelyek,}$$

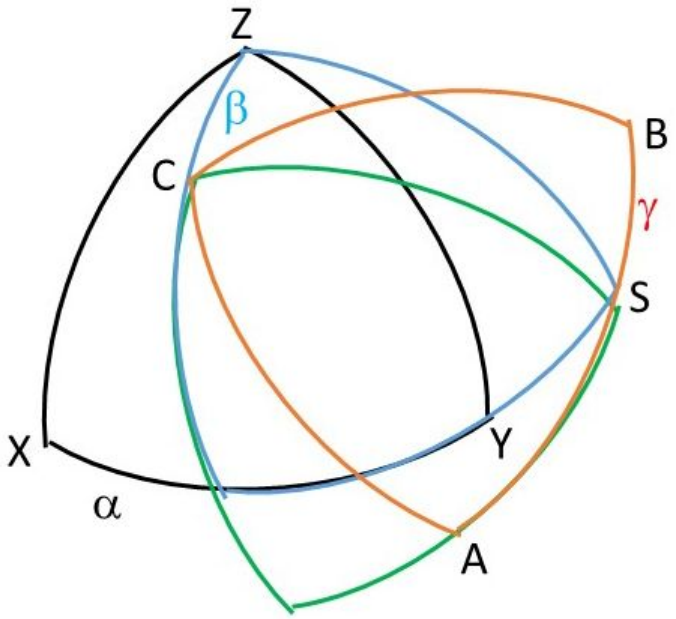
$$OA, OB, OC \ (= 1', 2', 3') \quad \text{a testhez rögzített tengelyek.}$$

Az Euler-szögek definíciója: A kiinduló helyzetben $ABC = XYZ$. Ezután

1. α-szögű forgatás a közös $OZ = OC$ tengely körül $(0 \leq \alpha < 2\pi)$

2. β-szögű forgatás az OY új helyzete $(\equiv OS)$ körül $(0 \leq \beta < \pi)$

3. a végleges orientáció eléréséhez γ szögű forgatás OC körül $(0 \leq \gamma < 2\pi)$.



19.1 ábra

A J_i-k meghatározásához abból kell kiindulni, hogy ezek a térben rögzített (laboratóriumi) tengelyek körüli forgatásokat generálják a test (rotátor) $\alpha, \beta, \gamma, p_\alpha, p_\beta, p_\gamma$ fázisterében. Vagyis: Ha $u(\alpha, \beta, \gamma, p_\alpha, p_\beta, p_\gamma)$ tetszőleges függvény ezen a fázistéren és az i-k tengely körül δs szögű forgatást végzünk, akkor az u megváltozását a

$$\delta_i u = \{u, J_i\}\, \delta s$$

képletnek kell kifejeznie.

Legyen sorban $u = \alpha, \beta, \gamma$, és definiáljuk az U_i, V_i, W_i függvényeket a

$$\delta_i \alpha = U_i(\alpha, \beta, \gamma)\delta s, \quad \delta_i \beta = V_i(\alpha, \beta, \gamma)\delta s, \quad \delta_i \gamma = W_i(\alpha, \beta, \gamma)\delta s \tag{19.2}$$

képletekkel. Az Euler-szögek geometriai jelentéséből kiindulva ezek a függvények megtalálhatók, és ha már ismerjük őket, akkor (19.1) alapján a J_i generátorok is felírhatók:

$$J_i = U_i p_\alpha + V_i p_\beta + W_i p_\gamma. \tag{19.3}$$

Ekkor ugyanis például

$$\{\alpha, p_\alpha\} = 1, \qquad \{\alpha, p_\beta\} = \{\alpha, p_\gamma\} = 0$$

következtében

$$\delta_i \alpha = \{\alpha, J_i\}\, \delta s = \{\alpha, U_i p_\alpha + V_i p_\beta + W_i p_\gamma\}\, \delta s = U_i \delta s,$$

ahogy várjuk.

A feladat tehát az U_i, V_i, W_i függvények megkeresése. Párhuzamosan mindjárt a mozgó tengelyekre vetett $J_{i'}$ vetületeket is kiszámítjuk.

Hasonlítsuk össze az (α, β, γ) és az $(\alpha+\delta\alpha, \beta+\delta\beta, \gamma+\delta\gamma)$ szögű forgatásokat! A különbségük egy infinitezimális forgatás, amelyet a

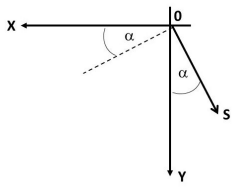
$$\left.\begin{aligned} \delta\vec{\varphi} &= \delta\vec{\alpha} + \delta\vec{\beta} + \delta\vec{\gamma} \\ \delta\vec{\alpha} = \delta\alpha \cdot \overrightarrow{OZ}, \qquad \delta\vec{\beta} &= \delta\beta \cdot \overrightarrow{OS}, \qquad \delta\vec{\gamma} = \delta\gamma \cdot \overrightarrow{OC} \end{aligned}\right\} \tag{19.4}$$

forgásvektor jellemez. Ennek a képletnek a felírásánál kihasználtuk, hogy az infinitezimális forgatások additívek (legalacsonyabb rendben).

Írjuk fel ezt a képletet komponensekben is:

$$\left.\begin{aligned} \delta\varphi_i &= \delta\alpha \cdot OZ_i + \delta\beta \cdot OS_i + \delta\gamma \cdot OC_i, \\ \delta\varphi_{i'} &= \delta\alpha \cdot OZ_{i'} + \delta\beta \cdot OS_{i'} + \delta\gamma \cdot OC_{i'}. \end{aligned}\right\} \tag{19.5}$$

A vesszőtlen komonensek számítása:



$$(OZ_1, OZ_2, OZ_3) = (0, 0, 1),$$

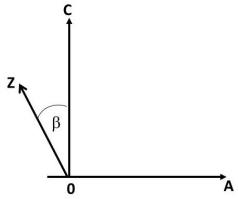
$$(OS_1, OS_2, OS_3) = (-\sin\alpha, \cos\alpha, 1),$$

$$(OC_1, OC_2, OC_3) = (-\sin\beta\cos\alpha, \sin\beta\sin\alpha, \cos\beta),$$

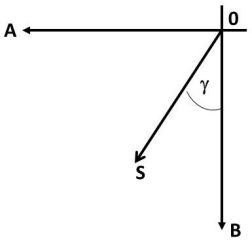
mert α és β az $\overrightarrow{OC}$ polárszögei $0XYZ$-ben.

A vesszős komponensek számítása:

$$(OZ_{1'}, OZ_{2'}, OZ_{3'}) = (-\sin\beta\cos\gamma, \sin\beta\sin\gamma, \cos\beta). \tag{19.6}$$



Magyarázat: A jobboldali ábra mutatja a β szögű forgatás után a mozgó rendszer OA, OC tengelyei által kifeszített síkot. Ekkor az $\overrightarrow{OZ}$ polárszögei az $OABC$ koordinátarendszerben π-vel és β-val egyenlők.



A γ szögű elforgatás az OA, OB síkjában történik OC körül (az OB a rajz síkjára merőleges) és a polárszögeket π, β-ról $(\pi - \gamma), \beta$-ra változtatja ($\gamma = \pi$-nél ugyanis a polárszögek értéke 0 és β). Az OZ vesszős komponensei tehát valóban $(\sin\beta \cdot \cos(\pi - \gamma), \sin\beta, \sin(\pi - \gamma), \cos\beta)) = (-\sin\beta\cos\gamma, \sin\beta\sin\gamma, \cos\beta)$.

A baloldali rajz alapján $OS_{1'}, OS_{2'}, OS_{3'} = (\sin\gamma, \cos\gamma, 0)$, végül pedig $OC_{1'}, OC_{2'}, OC_{3'} = (0, 0, 1)$. Írjuk be most ezeket (19.5)-be:

$$\left.\begin{aligned}\delta\varphi_1 &= -\sin\alpha\cdot\delta\beta+\sin\beta\cos\alpha\cdot\delta\gamma\\ \delta\varphi_2 &= \cos\alpha\cdot\delta\beta+\sin\beta\sin\alpha\cdot\delta\gamma\\ \delta\varphi_3 &= \delta\alpha+\cos\beta\cdot\delta\gamma.\end{aligned}\right\} \tag{19.7}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta\varphi_{1'} &= -\sin\beta\cos\gamma\cdot\delta\alpha+\sin\gamma\cdot\delta\beta\\ \delta\varphi_{2'} &= \sin\beta\sin\gamma\cdot\delta\alpha+\cos\gamma\cdot\delta\beta\\ \delta\varphi_{3'} &= \cos\beta\delta\alpha+\delta\gamma.\end{aligned}\right\} \tag{19.8}$$

Oldjuk meg ezeket a $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ megváltozásokra:

$$\left.\begin{aligned}\delta\alpha &= -\operatorname{ctg}\beta\cos\alpha\cdot\delta\varphi_1-\operatorname{ctg}\beta\sin\alpha\cdot\delta\varphi_2+\delta\varphi_3\\ \delta\beta &= -\sin\alpha\cdot\delta\varphi_1+\cos\alpha\cdot\delta\varphi_2\\ \delta\gamma &= \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\cdot\delta\varphi_1+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\delta\varphi_2.\end{aligned}\right\} \tag{19.9}$$

$$\left.\begin{aligned}\delta\alpha &= -\frac{\cos\gamma}{\sin\beta}\cdot\delta\varphi_{1'}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot\delta\varphi_{2'}\\ \delta\beta &= \sin\gamma\cdot\delta\varphi_{1'}+\cos\gamma\cdot\delta\varphi_{2'}\\ \delta\gamma &= \operatorname{ctg}\beta\cos\gamma\cdot\delta\varphi_{1'}-\operatorname{ctg}\beta\sin\gamma\cdot\delta\varphi_{2'}+\delta\varphi_{3'}.\end{aligned}\right\} \tag{19.10}$$

A (19.9) tartalmazza az U_i, V_i, W_i függvényeket. Valóban, ha például $\delta\varphi_1 = \delta s$ és $\delta\varphi_2 = \delta\varphi_3 = 0$, akkor $\delta\alpha = \delta_1\alpha$, $\delta\beta = \delta_1\beta$, $\delta\gamma = \delta_1\gamma$, tehát

$$\delta_1\alpha = -\operatorname{ctg}\beta\cos\alpha\cdot\delta s = U_1\delta s,\quad \delta_1\beta = -\sin\alpha\cdot\delta s = V_1\delta s,\quad \delta_1\gamma = -\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\delta s = W_1\cdot\delta s.$$

Így (19.3) alapján

$$\left.\begin{aligned}J_1 &= -\operatorname{ctg}\beta\cos\alpha\cdot p_\alpha-\sin\alpha\cdot p_\beta+\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\cdot p_\gamma\\ J_2 &= -\operatorname{ctg}\beta\sin\alpha\cdot p_\alpha+\cos\alpha\cdot p_\beta+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot p_\gamma\\ J_3 &= p_\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{19.11}$$

Nehézkes direkt számítás igazolja, hogy az A. pont követelményeinek megfelelően

$$\{J_i, J_j\} = \epsilon_{ijk}J_k. \tag{19.12}$$

A H dinamikai generátort forgásinvariáns mennyiségekből kell megkonstruálni. A **J** impulzusmomentum testhez rögzített (vesszős) komponensei forgásinvariánsak, mert nyilván változatlanok maradnak, amikor az $OXYZ$ laboratóriumi rendszert elforgatjuk[26] Ezeknek a komponenseknek a kiszámítása (19.11) levezetésével analóg módon történik. Legyen tehát

$$J_{i'} = U_{i'} p_\alpha + V_{i'} p_\beta + W_{i'} p_\gamma.$$

Az $U_{i'}$, $V_{i'}$, $W_{i'}$ a (19.10) alapján könnyen kiszámítható:

$$\left.\begin{aligned} J_{1'} &= -\frac{\cos\gamma}{\sin\beta}\cdot p_\alpha + \sin\gamma\cdot p_\beta + \operatorname{ctg}\beta\cos\gamma\cdot p_\gamma \\ J_{2'} &= \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\cdot p_\alpha + \cos\gamma\cdot p_\beta - \operatorname{ctg}\beta\sin\gamma\cdot p_\gamma \\ J_{3'} &= p_\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{19.13}$$

Direkt számolással belátható, hogy ezek a komponensek valóban forgásinvariánsak, azaz

$$\{J_{i'}, J_j\} = 0. \tag{19.14}$$

Ezenkívül teljesül a

$$\{J_{i'}, J_{j'}\} = -\epsilon_{i'j'k'} J_{k'} \tag{19.15}$$

Poisson-zárójel reláció is, amely a (19.12) standard alaktól csak egy előjelben különbözik[27].

A szabad forgás Hamilton-függvénye

$$H = \sum_{j'} \frac{1}{2I_{j'}} J_{j'}^2 = \frac{1}{2I_A} J_A^2 + \frac{1}{2I_B} J_B^2 + \frac{1}{2I_C} J_C^2,$$

amelyben $I_{1'}, I_{2'}, I_{3'} \equiv I_A, I_B, I_C$ a főtehetetlenségi nyomatékok, a rotátort jellemző számparaméterek. Ez a H nyilván forgásinvariáns, mert (19.14) következtében

$$\{H, J_i\} = 0.$$

A Hamilton-függvény ismeretében felírhatjuk a mozgásegyenleteket. A két Hamilton-egyenlet közül az első a sebességet (jelen esetben a szögsebességet), a második az impulzus (amely most a **J**) időderiváltját határozza meg.

[26] A képleteinknek, amelyek a transzformációk aktív felfogásán alapulnak (11. fejezet E. pont), jobban megfelelne, ha azt mondanánk, hogy az impulzusmomentum testhez rögzített komponensei változatlanok maradnak, amikor a forgó test orientációját az önmagához viszonyított forgásirányát megtartva elfordítjuk. A passzív nyelvet használó megfogalmazás ugyanezt fejezi ki rövidebben.

[27] Ha az $OABC$-t tekintjük rögzítettnek, akkor a forgásgenerátorok komponensei szerepet cserélnek ($J_{\text{vesszős}} \leftrightarrow -J_{\text{vesszőtlen}}$), a (19.15) szemléletes jelentést nyer, a (19.14) értelme pedig változatlan marad. A (19.11) és a (19.13) különbözőségét az magyarázza, hogy egy ilyen szemléletváltás az Euler-szöget átdefiniálását is megköveteli.

Az $\omega_{1'}$ szögsebesség-komponensre vonatkozó Hamilton-egyenlet származtatásánál először (19.8)-t, majd (19.13)-t használjuk:

$$\omega_{1'} \equiv \frac{d\varphi_{1'}}{dt} = -\sin\beta\cos\gamma\cdot\frac{d\alpha}{dt} + \sin\gamma\cdot\frac{d\beta}{dt} = -\sin\beta\cos\gamma\cdot\{\alpha,H\} + \sin\gamma\cdot\{\beta,H\} =$$

$$= -\sin\beta\cos\gamma\left[\frac{J_{1'}}{I_{1'}}\{\alpha,J_{1'}\} + \frac{J_{2'}}{I_{2'}}\{\alpha,J_{2'}\} + \frac{J_{3'}}{I_{3'}}\{\alpha,J_{3'}\}\right] + \sin\gamma\left[\frac{J_{1'}}{I_{1'}}\{\beta,J_{1'}\} + \frac{J_{2'}}{I_{2'}}\{\beta,J_{2'}\} +\right.$$

$$\left. + \frac{J_{3'}}{I_{3'}}\{\beta,J_{3'}\}\right] == -\sin\beta\cos\gamma\left[-\frac{J_{1'}}{I_{1'}}\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin\beta} + \frac{J_{2'}}{I_{2'}}\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right] + \sin\gamma\left[\frac{J_{1'}}{I_{1'}}\cdot\sin\gamma + \frac{J_{2'}}{I_{2'}}\cdot\cos\gamma\right] = \frac{1}{I_{1'}}J_{1'},$$

és általában

$$\omega_{i'} = \frac{1}{I_{i'}}J_{i'}. \tag{19.16}$$

Ez az első Hamilton-egyenlet. A másodikat (19.15) figyelembe vételével kapjuk:

$$\dot{J}_{i'} = \{J_{i'},H\} = \sum_{j'}\frac{1}{2I_{j'}}\left\{J_{i'},J_{j'}^2\right\} = -\sum_{j'k'}\frac{1}{I_{j'}}\epsilon_{i'j'k'}J_{j'}J_{k'}.$$

Az Euler-egyenlet a Lagrange-elméletnek felel meg. Úgy kapjuk meg, hogy $J_{i'}$ helyett $\dot{\omega}_{i'}$-t vezetjük be:

$$\dot{\omega}_{i'} = \frac{1}{I_{i'}}\dot{J}_{i'} = -\frac{1}{I_{i'}}\sum_{j'k'}\frac{1}{I_{j'}}\epsilon_{i'j'k'}J_{j'}J_{k'} = -\frac{1}{I_{i'}}\sum_{j'k'}\epsilon_{i'j'k'}I_{k'}\omega_{j'}\omega_{k'}.$$

Részletezve:

$$\left.\begin{aligned} I_A\dot{\omega}_A + (I_C - I_B)\omega_B\omega_C &= 0\\ I_B\dot{\omega}_B + (I_A - I_C)\omega_C\omega_A &= 0\\ I_C\dot{\omega}_C + (I_B - I_A)\omega_A\omega_B &= 0, \end{aligned}\right\}$$

a reguláris precesszió Euler-egyenletei[28]. Az egyenlet következő rövid alakja is használatos:

$$\dot{J}_{i'} + \epsilon_{i'j'k'}\omega_{j'}J_{k'} = 0. \tag{19.17}$$

D) Casimir-invariánsok.

A $\left\{J_i,\mathbf{J}^2\right\} = 0$ reláció a $\{J_i,J_j\} = \epsilon_{ijk}J_k$ következménye, ezért minden realizációban igaz (ld. az A. pontot). A $\left\{H,\mathbf{J}^2\right\} = 0$ ugyanilyen értelemben teljesül. Ebből következik, hogy $\mathbf{J}^2$ mind az SO_3-nak, mind az $SO_\tau(3)$-nak *Casimir-invariánsa.*

Casimir-invariánsnak a generátorok olyan C függvényeit nevezzük, amelyek *a csoportalgebra következtében* minden generátorral zérus Poisson-zárójelet adnak. A csoportalgebrától függően nem csak egyetlen Casimir-invariáns létezhet. A

[28] A Föld reguláris precessziójáról ld. *Merre mutat a Föld forgástengelye* című cikkemet itt a honlapomon.

realizációtól függően ezek lehetnek q, p függvények vagy semleges elemek. Az első esetben a csoport szóbanforgó kanonikus realizációja a fázistér

$$C(q,p) = \text{konstans}$$

hiperfelületeit invariánsan hagyja: A csoport hatása szempontjából ezek a felületek *felrétegezik* a fázisteret. Ekkor a realizálást *reducibilisnek* nevezzük. Ha az összes Casimir-invariáns semleges elem, akkor a realizálás *irreducibilis*. Az $SO_\tau(3)$ mindkét vizsgált realizációja reducibilis.

A gömbfelületen mozgó tömegpontra a kanonikus realizációt (19.11)-ből

$$\alpha \longrightarrow \varphi, \qquad \beta \longrightarrow \vartheta, \qquad \gamma = p_\gamma = 0$$

helyettesítéssel kapjuk:

$$J_1 = -\operatorname{ctg}\vartheta\cos\varphi\cdot p_\varphi - \sin\varphi\cdot p_\vartheta, \qquad J_2 = -\operatorname{ctg}\vartheta\sin\varphi\cdot p_\varphi + \cos\varphi\cdot p_\vartheta, \qquad J_3 = p_\varphi.$$

Ez a realizáció is reducibilis:

$$\mathbf{J}^2 = \frac{1}{\sin^2\vartheta}p_\varphi^2 + p_\vartheta^2.$$

20. A Galilei-csoport kanonikus realizálása.

A) A $W^{(i)}$ generátorok megválasztása és a kociklusok.

A csoportalgebra (17.11) báziselemeinek kanonikus realizálása a következő:

$$\begin{aligned} \theta &\longrightarrow H \qquad \text{(Hamilton-függvény; energia)} \\ \xi^{(i)} &\longrightarrow J_i \qquad \text{(impulzusmomentum)} \\ \eta^{(i)} &\longrightarrow P_i \qquad \text{(impulzus)} \\ \kappa^{(i)} &\longrightarrow G_i \qquad \text{(buszt)} \end{aligned}$$

A (17.12)-(17.20) szerint ezeknek a következő Poisson-zárójel-relációkat kell kielégíteniük:

$$\{J_i, J_j\} = \epsilon_{ijk}J_k + a_{ij} \tag{20.1}$$
$$\{G_i, G_j\} = b_{ij} \tag{20.2}$$
$$\{J_i, G_j\} = \epsilon_{ijk}G_k + c_{ij} \tag{20.3}$$
$$\{P_i, P_j\} = d_{ij} \tag{20.4}$$
$$\{P_i, H\} = e_i \tag{20.5}$$
$$\{J_j, H\} = f_i \tag{20.6}$$
$$\{G_i, P_j\} = g_{ij} \tag{20.7}$$
$$\{J_i, P_j\} = \epsilon_{ijk}P_k + h_{ij} \tag{20.8}$$
$$\{G_j, H\} = P_j + l_j \tag{20.9}$$

Az a_{ij}, b_{ij}, d_{ij} semleges elemek antiszimmetrikusak, a c_{ij}, g_{ij}, h_{ij} azonban nem. Ezért például $\{J_1, G_1\} = -\{G_1, J_1\} = c_{11}$ nem kötelezően nulla. Ez a tény azért nem mond ellent a semleges elemek 18. fejezet C. pontjában bebizonyított antiszimmetriájának, mert a (20.1)-(20.9) képletekben a semleges elemek jelölése pongyola: Például a c_{11} helyes felírási módja $c_{J_1G_1}$ volna, ezért c_{11} valójában nem diagonális semleges elem.

A semleges elemek alább következő diszkussziója a (18.3) képleten alapul. Ebben mind a $\xi^{(i)}$-k mátrixkommutátorai, mind a $W^{(i)}$-k Poisson-zárójelei eleget tesznek a Jacobi-identitásnak. Az előbbiekből következik, hogy (16.26)-n keresztül a struktúraállandók kielégítik a (16.20) kvadratikus relációkat, ezért az utóbbiak a $\sum_m c_{m,jk}c_{ml} = 0$ homogén lineáris egyenlet-rendszerre redukálódnak a semleges elemekre nézve.

Majdnem mindegyik semleges elemről be fogjuk látni, hogy a generátorok megfelelő választásával nullává tehetők. Kezdjük a (20.1), (20.4), (20.8) részalgebrával!

Az előző fejezet A. pontjában már láttuk, hogy az a_{ij}-k választhatók nullának. Ezzel rögzítettük a $\mathbf{J}$-t. A $\mathbf{P}$ alkalmas választásával a h_{ij}-ket lehet eliminálni. Induljunk ki a

$$\{\{J_j, J_k\}, P_l\} + \{\{P_l, J_j\}, J_k\} + \{\{J_k, P_l\}, J_j\} = 0$$

Jacobi-identitásból, amely a fentebb mondottaknak megfelelően a (20.8)-ban szereplő semleges elemekre nézve homogén egyenletre redukálódik:

$$\epsilon_{jkm}h_{ml} - \epsilon_{ljm}h_{km} - \epsilon_{klm}h_{jm} = 0.$$

Itt és a továbbiakban a kétszer előforduló indexekre összegzés értendő az index értelmezési tartományában.

Szorozzuk végig ezt az egyenletet ϵ_{jks}-sel:

$$2h_{sl} - (\delta_{mk}\delta_{ls} - \delta_{ms}\delta_{lk})h_{km} - (\delta_{ls}\delta_{mj} - \delta_{lj}\delta_{ms})h_{jm} = 0,$$

amely az egyszerű

$$h_{sl} + h_{ls} = \delta_{ls}h_{mm}. \tag{20.10}$$

egyenletre redukálódik. Az l, s indexpárban spúrozva a $2h_{mm} = 3h_{mm}$ egyenlőségre jutunk, amelyből $h_{mm} = 0$. Ezt (20.10)-be visszahelyettesítve definiáljuk c_k-t:

$$h_{sl} = -h_{ls} = \epsilon_{slk}c_k.$$

Ha végül P_k-t a $(P_k - c_k)$ különbséggel helyettesítve új impulzust vezetünk be, a (20.8) jobboldaláról eliminájuk a semleges elemet (a többi $\mathbf{P}$-t tartalmazó Poisson-zárójel relációt pedig változatlanul hagyjuk).

A d_{ij}-k a

$$\{\{P_i, P_j\}, J_k\} + \{\{J_k, P_i\}, P_j\} + \{\{P_j, J_k\}, P_i\} = \epsilon_{kim}d_{mj} + \epsilon_{jkm}d_{mi} = 0$$

következtében nullák. Mivel d_{mj} antiszimmetrikus, legyen $d_{mj} = \epsilon_{mjl} d_l$:

$$(\epsilon_{kim}\epsilon_{mjl} + \epsilon_{jkm}\epsilon_{mil})d_l = 0,$$
$$(\delta_{kj}\delta_{il} - \delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{ji}\delta_{kl} - \delta_{jl}\delta_{ki})d_l = 0,$$
$$\delta_{kj}d_i = \delta_{ki}d_j.$$

A k,i-ben spúrozva $d_j = 3d_j, \to d_j = 0, \to d_{ij} = 0$. Ezzel igazoltuk, hogy a (20.1), (20.4), (20.8) részalgebrában a semleges elemek nullának vehetők. Mivel a (20.1), (20.2), (20.3) ugyanilyen struktúrájú, ezért **G** alkalmas választásával b_{ij} és c_{ij} is nullává tehető.

Könnyen belátható, hogy az f_i, az e_i és az l_i rendre nullák a

$$\{\{J_i, J_j\}, H\} + \{\{H, J_i\}, J_j\} + \{\{J_j, H\}, J_i\} = 0,$$
$$\{\{J_i, P_j\}, H\} + \{\{H, J_i\}, P_j\} + \{\{P_j, H\}, J_i\} = 0,$$
$$\{\{J_i, G_j\}, H\} + \{\{H, J_i\}, G_j\} + \{\{G_j, H\}, J_i\} = 0$$

Jacobi-azonosságok következtében.

A g_{ij}-kkel kell még foglalkoznunk. Mint mindjárt látni fogjuk, ebből a kilenc mennyiségből csak hat tűnik el.

Parametráljuk ezeket a koefficienseket így:

$$g_{ij} = M\delta_{ij} + \epsilon_{ijk}M_k + M_{ij}, \qquad M_{ij} = M_{ji}, \quad M_{ii} = 0.$$

A g_{ij}-k között a

$$\{\{J_k, G_i\}, P_j\} + \{\{P_j, J_k\}, G_i\} + \{\{G_i, P_j\}, J_k\} = 0 \tag{20.11}$$

Jacobi-azonosság következtében fennállnak az

$$\epsilon_{kim}g_{mj} - \epsilon_{jkm}g_{im} = 0$$

összefüggések, vagyis

$$\epsilon_{kim}(\cancel{M\delta_{mj}} + \epsilon_{mjl}M_l + M_{mj} - \epsilon_{jkm}(\cancel{M\delta_{im}} + \epsilon_{iml}M_l + M_{im}) = 0,$$

$$\delta_{kj}M_i - \delta_{ki}M_j = \epsilon_{ikm}M_{mj} - \epsilon_{jkm}M_{mi}.$$

Adott k-nál a baloldal antiszimmetrikus, a jobboldal pedig szimmetrikus ij-ben, ezért külön-külön nullák. A $\delta_{kj}M_i = \delta_{ki}M_j$ egyenlőséget kj-ben spúrozva $3M_i = M_i, \to M_i = 0$.

Nézzük most az

$$\epsilon_{ikm}M_{mj} - \epsilon_{jkm}M_{mi} = 0$$

feltételt először azokban az esetekben, amikor $i = k \neq j$. Azt találjuk, hogy az M_{ij} nemdiagonális elemei nullák. Amikor pedig mindhárom index különböző, az $M_{11} = M_{22} = M_{33}$ egyenlőségre jutunk. Ezek összege azonban nulla, ezért külön-külön is nullák. Így végül azt találjuk, hogy

$$g_{ij} = M\delta_{ij} \longrightarrow \{G_i, P_j\} = M \cdot \delta_{ij}. \tag{20.12}$$

Be lehet-e látni, hogy M is nulla? Ehhez olyan Jacobi-azonosságokat kell megvizsgálni, amelyekben a belső Poisson-zárójel kiszámítása után $\{G_i, P_j\}$ marad vissza. A (20.11) ilyen volt, és ilyen még a

$$\{\{G_i, G_j\}, H\} + \{\{H, G_i\}, G_j\} + \{\{G_j, H\}, G_i\} = 0,$$

amely $g_{ij} = g_{ji}$-re vezet, tehát nem követeli meg M eltűnését.

Ezzel megkaptuk a kociklusok standard alakját. Végtelen sok inekvivalens kociklus van, amelyek M értékében különböznek egymástól.

B) Kanonikus reprezentáció tömegpont-rendszer fázisterén.

$$\left.\begin{aligned} H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i} + V, \qquad \mathbf{J} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i, \qquad \mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i, \\ \mathbf{G} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{x}_i, \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i. \end{aligned}\right\} \tag{20.13}$$

Direktben ellenőrizhető, hogy szabad mozgásnál ($V = 0$) a (20.1)-(20.9) Poisson-zárójel relációk teljesülnek, a V kölcsönhatásra azonban a következő feltételeket róják:

$$\{\mathbf{P}, V\} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} = 0 \tag{20.14}$$

$$\{\mathbf{G}, V\} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial V}{\partial \mathbf{p}_i} = 0 \tag{20.15}$$

$$\{\mathbf{J}, V\} = 0. \tag{20.16}$$

A (20.14) azt követeli meg, hogy V csak az $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ koordináta-különbségektől függjön, vagyis legyen *transzláció-invariáns.* A (20.15) szerint V csak az $(m_j \mathbf{p}_i - m_i \mathbf{p}_j)$ különbségeket tartalmazhatja (eszerint nincs általában megtiltva, hogy sebességfüggő legyen). Végül (20.16) a 11. fejezet E. pont szerint azt fejezi ki, hogy V a koordinátáknak és az impulzusoknak csak a forgásinvariáns kombinációitól függ, például $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$-től, vagy általánosabban $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l)$-től, $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot (m_k \mathbf{p}_l - m_l \mathbf{p}_k)$-tól, stb.

C) A tömegközéppont.

A tömegközéppont és a belső mozgás a $\mathcal{G}$ minden realizációjában szétválasztható egymástól. Ez ugyanis közvetlenül a Poisson-zárójel relációknak a következménye ($M \neq 0$-nál).

Direkt számolással igazolható, hogy a

$$C_1 = P^2 - 2MH$$

kifejezés Casimir-invariáns. A h belső energiát a

$$H = \frac{P^2}{2M} + h$$

képlet definiálja. Eszerint $h = -C_1/2M$, ezért a h belső energia minden $\mathcal{G}$-beli transzformációval szemben változatlan. A $\mathbf{P}$ — mint mindig, — a teljes impulzus, ezért M a rendszer teljes tömege. Ennek alapján $\mathbf{P}$-t *tömegközépponti impulzusnak* is hívják.

A tömegközéppont koordinátája

$$\mathbf{X} = \frac{1}{M}\mathbf{G},$$

ugyanis (20.12) következtében

$$\{X_i, P_j\} = \delta_{ij}.$$

A tömegközéppont impulzusmomentuma

$$\mathbf{I} = (\mathbf{X} \times \mathbf{P}),$$

ezért a belső mozgás impulzusmomentuma

$$\mathbf{j} = \mathbf{J} - \mathbf{I}.$$

A $\mathbf{j}$ a $\mathbf{P}$, $\mathbf{G}$, H generátorokkal zérus Poisson-zárójelet ad, a forgatásokkal szemben azonban vektorként viselkedik:

$$\{J_i, j_k\} = \epsilon_{ikl} j_l.$$

A $\mathbf{j}^2$ Casimir-invariáns.

Összefoglalva: A tömegközépponti mozgás szeparálhatósága azt jelenti, hogy a H, a $\mathbf{J}$ és a $\mathbf{G}$ felírható

$$H = \frac{P^2}{2M} + h, \qquad \mathbf{J} = (\mathbf{X} \times \mathbf{P}) + \mathbf{j}, \qquad \mathbf{G} = M\mathbf{X}$$

alakban ($\mathbf{P}$ változatlan). Továbbá a tíz

$$\frac{P^2}{2M}, \qquad (\mathbf{X} \times \mathbf{P}), \qquad M\mathbf{X}, \qquad \mathbf{P}$$

izomorf egyetlen tömegpont generátoraival ($\{X_i, P_j\} = \delta_{ij}$). *Ezeknek a generátoroknak a szempontjából* h semleges elem, csupán egy konstans additív járulék az energiához (belső energia). A $\mathbf{j}$-nek pedig csak az iránya változik a rendszer elforgatásakor, egyébként mozgásállandó (belső impulzusmomentum). A tulajdonságoknak ez a komplexuma fejezi ki, hogy a tömegközéppont mozgása $\mathcal{G}$ minden realizálásában szeparálható. A $\mathcal{P}$-ben ilyen lehetőség nincs.

Megjegyzés: A tíz $\mathbf{I}, \mathbf{P}, \mathbf{G}, H$ szintén kielégíti a Galilei-csoport összes Poisson-zárójel relációját (tehát *ábrázolja* ezt a csoportot), mégsem generálja a tömegpontrendszer kanonikus *realizációját*. Ennek az az oka, hogy $\mathbf{I}$ nem forgatást generál, hanem egy másik $SO(3)$-t. Ha ugyanis $\mathbf{r}$ valamelyik tömegpont helykoordinátája (x_1, x_2, x_3) Descartes-komponensekkel, akkor

$$\{x_i, I_j\} = \epsilon_{jkl} \{x_i, X_k P_l\} = \epsilon_{jkl} \frac{1}{M} \{x_i, G_k P_l\} = \epsilon_{jkl} \frac{1}{M} G_k \{x_i, P_l\} =$$
$$= \epsilon_{jkl} \frac{1}{M} G_k \delta_{il} = \epsilon_{ijk} X_k \neq \epsilon_{ijk} x_k.$$

21. A Poincaré-csoport kanonikus realizálása.

A) A $W^{(i)}$ generátorok megválasztása.

Az előző fejezetben alkalmazott eljárással belátható, hogy $\mathcal{P}$-ben az összes kociklus zérussal kohomológ, ezért a realizálandó Poisson-zárójel relációk a következők (az indexek Descartes-komponensek):

$$\{J_\alpha, J_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_k \tag{21.1}$$
$$\{G_\alpha, G_\beta\} = -\epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_k \tag{21.2}$$
$$\{J_\alpha, G_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} G_k \tag{21.3}$$
$$\{P_\alpha, P_\beta\} = 0 \tag{21.4}$$
$$\{P_\alpha, H\} = 0 \tag{21.5}$$
$$\{J_\beta, H\} = 0 \tag{21.6}$$
$$\{G_\alpha, P_\beta\} = H \delta_{\alpha\beta} \tag{21.7}$$
$$\{J_\alpha, P_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} P_\gamma \tag{21.8}$$
$$\{G_\beta, H\} = P_\beta. \tag{21.9}$$

A $\mathcal{G}$-től ez csak (21.2)-ben és (21.7)-ben tér el.

A kanonikus reprezentáció tömegpont-rendszerre a következő:

$$\left.\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m_i^2 c^2} + V, \\ \mathbf{J} &= \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i), \\ \mathbf{P} &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i, \\ \mathbf{G} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m_i^2 c^2} + \mathbf{U}, \end{aligned}\right\} \tag{21.10}$$

ahol az indexek tömegpontokat jelölnek.

Ha ezeket a generátorokat összehasonlítjuk a Galilei-csoport (20.13)-ben felírt megfelelő generátoraival láthatjuk, hogy a két **G**, valamint a két H dimenzióban különbözik egymástól. Ennek az az oka, hogy a nemrelativisztikus és a relativisztikus kinematikában a buszthoz és az időbeli transzlációhoz eltérő paramétereket rendelünk. A generátorok és a paraméterek közötti viszony a következő dimenzió-egyenlőségek alapján állapítható meg:

$$[G_{\mathcal{G}} \cdot \delta v] = \left[G_{\mathcal{P}} \cdot \frac{\delta v}{c}\right], \qquad [H_{\mathcal{G}} \cdot \delta t] = [H_{\mathcal{P}} \cdot \delta x_0] = [H_{\mathcal{P}} \cdot \delta(ct)]\,. \tag{21.11}$$

A H Hamilton-függvényben a meghatározatlanul hagyott V kölcsönhatási energia megjelenése egyáltalán nem váratlan (már a $\mathcal{G}$-ben is ott volt), de mi szükség van a **G**-ben egy hasonló jellegű **U** tagra? Egy ilyen tag szükségességét legegyszerűbben az 1+1 dimenziós példán demonstrálhatjuk két kölcsönható tömegpontra ($N = 2$). Az 1+1 modellben a három térbeli irányt egyetlen $x_1 \equiv x$-re redukáljuk. Ezt az egyszerűsítést szívesen alkalmazzák a kvantumtérelmélet nehéz problémáinak a vizsgálatára, mert 1+1 dimenzióban egzakt választ is lehet adni olyan kérdésekre, amelyek a valóságos 3+1 dimenzióban még közelítő módszerekkel is nehezen tárgyalhatók. De pont ennek a minőségi különbözőségnek a következtében az 1+1 dimenzióban kapható megoldások ritkán relevánsak a reális feladatok szempontjából. A következő néhány sorban megmutatjuk, hogy 1+1 dimenzióban a nemzérus V szükségképpen azzal jár, hogy **U** se lehet nulla. Ebből ugyan szigorúan véve nem következik, hogy ez a konklúzió 3+1 téridőben is igaz, de mivel 3+1 téridőre történő áttérésnél a feladatok általában bonyolultabbá, nehezebbé válnak, nem logikus azt várni, hogy az adott esetben egyszerűsödnének[29].

Az 1+1 dimenziós Poincaré-csoportban ($\mathcal{P}_2$) a (21.1)-(21.9) Poisson-zárójel relációk a következő háromra redukálódnak:

$$\{P, H\} = 0 \tag{21.12}$$

$$\{G, P\} = H \tag{21.13}$$

$$\{G, H\} = P. \tag{21.14}$$

A P és a G az x-irányú transzláció és buszt generátora. $N = 2$-re ezek a következők[30]:

$$P = p_1 + p_2 \equiv P^{(0)}$$

$$G = G^{(0)} + U, \qquad G^{(0)} = x_1\sqrt{p_1^2 + m_1^2c^2} + x_2\sqrt{p_2^2 + m_2^2c^2}$$

$$H = H^{(0)} + V, \qquad H^{(0)} = \sqrt{p_1^2 + m_1^2c^2} + \sqrt{p_2^2 + m_2^2c^2}.$$

[29] Alább a C. pontban azonban látni fogjuk, hogy 3+1 dimenzióban ez a probléma valójában tárgytalanná válik.

[30] Az alábbi képletekben az 1 és 2 alulindex természetesen a tömegpontra utal.

A (21.12)-ből

$$\left\{P^{(0)}, V\right\} = 0 \to V = V(p_1, p_2, x), \quad x = x_1 - x_2.$$

A (21.13)-ből

$$\left\{U, P^{(0)}\right\} = V \to V = (\partial_1 + \partial_2)U \to U = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)V(p_1, p_2, x).$$

Már innen sejthető, hogy ha van V, akkor az U sem lehet nulla. De a (21.14)-t még ki kell elégíteni. Ebből

$$\left\{G^{(0)}, V\right\} + \left\{U, H^{(0)}\right\} + \{U, V\} = 0. \tag{21.15}$$

Tegyük fel, hogy V nem függ az impulzusoktól: $V = V(x)$. Akkor

$$U = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)V(x). \tag{21.16}$$

Számítsuk ki (21.15) egyes tagjait:

$$\{U, V\} = 0$$

$$\left\{G^0, V\right\} = -\left(\frac{x_1 p_1}{\sqrt{p_1^2 + m_1^2 c^2}} - \frac{x_2 p_2}{\sqrt{p_2^2 + m_2^2 c^2}}\right) V'(x)$$

$$\left\{U, H^{(0)}\right\} = \frac{1}{2}V\left\{(x_1 + x_2), H^{(0)}\right\} + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\left\{V, H^{(0)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}V\left(\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + m_1^2 c^2}} + \frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + m_2^2 c^2}}\right) + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)V'(x)\left(\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 - m_1^2 c^2}} + \frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 + m_2^2 c^2}}\right).$$

Ha ezeket (21.15)-be írjuk és a kapott képletet rendezzük, akkor a

$$\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 - m_1^2 c^2}}\left(-V' \cdot x_1 + \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)V'\right) +$$

$$+ \frac{p_2}{\sqrt{p_2^2 - m_2^2 c^2}}\left(V' \cdot x_2 + \frac{1}{2}V - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)V'\right) = 0$$

egyenletre jutunk, amelyben mindkét zárójeles kifejezés ugyanaz. Ezt zérussal egyenlítve a

$$V = xV' \tag{21.17}$$

differenciálegyenletet kapjuk V-re. Mivel V csak az $|x|$ abszolút értéktől függhet, a megoldás

$$V = \alpha|x| = \alpha|x_1 - x_2|,$$

ahol α tetszőleges konstans. Valóban, a $\theta(x)$ ugrásfüggvény felhasználásával $x\delta(x) = 0$ következtében

$$V = \alpha x \left(\theta(x) - \theta(-x)\right)$$

$$V' = \alpha \left[\theta(x) - \theta(-x) + 2x\delta(x)\right] = \frac{1}{x} V.$$

Végül (21.16) alapján

$$U = \frac{\alpha}{2} \left| x_1^2 - x_2^2 \right| .$$

Ezzel beláttuk, hogy ha 1+1 dimenzióban van valamilyen nemzérus V kölcsönhatás, akkor az U szükségképpen megjelenik a G generátorban. Az 1+1 dimenziós feladat igazi jelentősége azonban a reális 3+1 dimenziós probléma megoldásának az *értelmezése* kapcsán válik majd világossá.

B) A Currie-feltétel.

Az előző fejezet legvégén már utaltunk rá, hogy különbséget kell tennünk egy absztrakt Lie-csoport ábrázolása és realizálása között. A mátrixok *ábrázolják* a csoportot, mert azon kívül, hogy pontosan le kell képezniük a csoportstruktúrát, semmilyen más lényeges követelménynek nem kell eleget tenniük. A kanonikus transzformációkra történő leképezés azonban praktikusan mindig *realizálást* jelent, mert a tömegpontok Descartes-koordinátáinak meghatározott fizikai jelentése van, és a leképezésnek összhangban kell lennie az ebből származó kritériumokkal is.

A tíz generátor közül kilencnek, a **P**, a **J** és a **G** komponenseinek van meghatározott geometriai jelentése. A 11. fejezetben láttuk, hogy **J** a fizikai rendszer *elforgatását* generálja, és ezt a tulajdonságát a (11.7)-ben felírt

$$\left\{ J_\alpha, x_\beta^{(i)} \right\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma^{(i)} \tag{21.18}$$

képlet fejezi ki. A **J** vektorfüggvénynek ezért a (21.1), (21.3), (21.6), (21.8) generátor-relációkon kívül még a (21.18) *realizációs kritériumnak* is eleget kell tennie.

A **P** a transzláció generátora, ezért ki kell elégítenie a (11.16) mintájára felírt

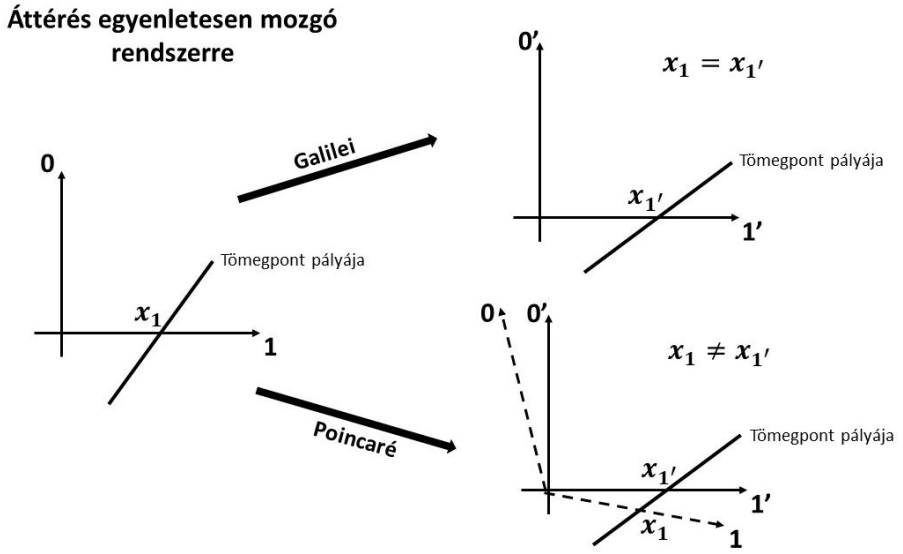
$$\delta x_\alpha^{(i)} = -\left\{ \delta\mathbf{a} \cdot \mathbf{P}, x_\alpha^{(i)} \right\} = \delta a_\alpha$$

feltételt. Ez nyilván akkor teljesül, ha **P** a generátor-relációkon kívül a

$$\left\{ x_\alpha^{(i)}, P_\beta \right\} = \delta_{\alpha\beta} \tag{21.19}$$

realizációs feltételt is kielégíti.

A G_i buszt-generátorok realizációs kritériumait kell még felírnunk. Ebben a 21.1 ábrára támaszkodhatunk.



21.1 ábra

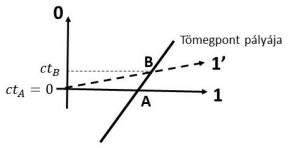
A fizikai jelentése szerint a buszt operáció a fizikai rendszernek mint egésznek a sebességét változtatja meg a koordináták változatlanul hagyása mellett, ezért azt várjuk, hogy a **G** realizációs feltétele

$$\left\{x_\alpha^{(i)}, G_\beta\right\} = 0. \tag{21.20}$$

A Galilei-csoportra a (20.13)-ben felírt $G_\alpha = \sum_i m_i x_\alpha^{(i)}$ eleget is tesz ennek a követelménynek. A relativitáselméletben azonban a buszt operációnak figyelembe kell vennie, hogy a relativitáselméletben a koordinátaidő is transzformálódik. Ez természetesen a passzív megfogalmazásban látszik jól, amikor ahelyett, hogy a fizikai rendszernek kölcsönöznénk valamilyen sebességet, ellenkező irányú sebességgel mozgó inerciarendszerre térünk át. A 21.1 ábra a Minkowski-diagram segítségével ebben a felfogásban ábrázolja a busztot és jól mutatja, hogy ennél a műveletnél a koordináta nem marad változatlan, ezért $\mathcal{P}$-ben a (21.20) jobboldalán nem állhat nulla. Meg kell keresnünk azt a dinamikai mennyiséget, amely $\mathcal{P}$-ben ezt a nullát helyettesíti.

Mindenekelőtt meg kell indokolnunk, hogy a három ábrán a tömegpont pályája miért egyenes vonal. A lényeges pont az, hogy a számítást a két koordinátarendszer δv relatív sebességének abban a *legalacsonyabb* rendjében kell elvégezni, amelyben az x_1 és az $x_{1'}$ különbsége már nem válik zérussá úgy, mint a newtoni fizikában. Az alább következő számítás igazolja, hogy ez a δv-ben lineáris pontosság, és azt is, hogy ilyen pontosság mellett elég a tömegpontok pályáját a $t = 0$-beli érintőjükkel közelíteni.

A jobboldali ábrán a tömegpont (egyenes vonallal közelített) trajektóriája a $\mathcal{K}$ 1-tengelyét az A pontban, a $\mathcal{K}$' 1'-tengelyét pedig a B pontban metszi. A két pont koordináta-különbsége $\mathcal{K}$-ban t_B-ben lineáris pontossággal[31]



$$\delta x_\alpha = \dot{x}_\alpha(0) \cdot t_B \equiv \dot{x}_\alpha \cdot t_B. \tag{21.21}$$

A következő feladat tehát a t_B kifejezése δv-ben lineáris pontossággal.

Első lépésként meghatározzuk az 1' tengely egyenletét $\mathcal{K}$-ban. A Lorentz-transzformáció szerint

$$t' = \frac{t - \dfrac{\delta v}{c^2} x_1}{\sqrt{1 - (\delta v/c)^2}} \approx t - \frac{\delta v}{c^2} x_1.$$

Az 1' tengely $t' = 0$ egyenlete $\mathcal{K}$-ban tehát a kívánt pontossággal

$$t = \frac{\delta v}{c^2} x_1.$$

Ennek alapján a t_B-t a

$$t_B = \frac{\delta v}{c^2} x_1(t_B)$$

egyenletből kell meghatározni. A δv-ben lineáris pontossággal azonban a jobboldalon $x_1(t_B)$-t $x_1(0)$-val kell helyettesíteni, ezért

$$t_B = \frac{\delta v}{c^2} x_1(0) \equiv \frac{\delta v}{c^2} x_1.$$

Ezt (21.21)-be visszahelyettesítve (21.11) figyelembe vételével kapjuk a newtoni fizika $\delta x_\alpha = 0$ képletét helyettesítő relativisztikus

$$\delta x_\alpha = \dot{x}_\alpha \cdot \frac{\delta v}{c^2} x_1 = \frac{dx_\alpha}{d(ct)} \cdot \frac{\delta v}{c} x_1 = x_1 \cdot \{x_\alpha, H\} \frac{\delta v}{c}$$

összefüggést. A $\mathbf{G}$ buszt-generátorral kifejezve ugyanez:

$$\delta x_\alpha = -\frac{\delta v}{c} \cdot \{G_1, x_\alpha\}.$$

A δx_α két kifejezését egyenlítve kapjuk az

$$\{x_\alpha, G_\beta\} = x_\beta \{x_\alpha, H\} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{21.22}$$

Currie-feltételt (vagy *világvonal-feltételt*), amely a harmadik szükséges feltétele annak, hogy a Poincaré-csoportnak a (21.10) függvények által generált kanonikus ábrázolása *realizálás* legyen, vagyis összeférjen azzal, hogy a tömegpontok trajektóriái a koordinátarendszer választásától független világvonalak.

[31] Figyeljünk rá, hogy a relativitáselméletben elfogadott konvenció szerint az időt a függőleges tengely mutatja.

C) A *No Interaction Theorem*[32].

A *Review of Modern Physics* idézett cikkében a szerzők megmutatják, hogy ha egy két tömegpontból álló rendszer $\mathbf{P}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{G}$, H generátorai kielégítik mind a (21.1)-(21.9) Poisson-zárójel-relációkat, mind pedig a (21.18), (21.19), (21.22) realizálási feltételeket, akkor a két tömegpont szabad mozgást végez, mert ezek a feltételek minden kölcsönhatást kizárnak közöttük. Ezt fejezi ki a tétel általánosan használt elnevezése: *No Interaction Theorem.*

A tétel bizonyítása három egymásra épülő lépésből áll:

1. Ha $\mathbf{P}$ eleget tesz a $\{P_\alpha, P_\beta\} = 0$ generátor relációnak, *és* az $\left\{x_\alpha^{(i)}, P_\beta\right\} = \delta_{\alpha\beta}$ realizálási feltételnek, akkor

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)}. \tag{21.23}$$

2. Ha továbbá $\mathbf{J}$ eleget tesz a $\{J_\alpha, P_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} P_\gamma$, valamint a $\{J_\alpha, J_\beta\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma$ generátor-relációknak *és* a $\left\{J_\alpha, x_\beta^{(i)}\right\} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma^{(i)}$ realizációs feltételnek, akkor

$$\mathbf{J} = \left(\mathbf{x}^{(1)} \times \mathbf{p}^{(1)}\right) + \left(\mathbf{x}^{(2)} \times \mathbf{p}^{(2)}\right). \tag{21.24}$$

   Ez a két állítás $\mathcal{G}$-ben és $\mathcal{P}$-ben egyaránt érvényes.

3. Ha a maradék generátor-relációk is teljesülnek, és teljesül az

$$\{x_\alpha, G_\beta\} = x_\beta \{x_\alpha, H\}$$

   Currie-feltétel is, akkor a tömegpontok nem hatnak kölcsön egymással, mert

$$\ddot{x}_\alpha^{(i)} = \left\{\left\{x_\alpha^{(i)}, H\right\}, H\right\} = 0,$$

vagyis mindkét tömegpont egyenletes egyenesvonalú mozgást végez.

Az első két állítás bizonyítása a dinamikai mértéktranszformáción (4. fejezet B. pont) alapul és nagyon tanulságos. Az érvelést az első állítás példáján mutatom be.

Tegyük fel, hogy a $\mathbf{P}$ generátor a négy $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, $\mathbf{p}^{(1)}$, $\mathbf{p}^{(2)}$ vektorváltozó tetszőleges függvénye. Célszerű leválasztani belőle a két impulzus összegét:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)} + \mathbf{F},$$

ahol $\mathbf{F}$ függhet mind a tizenkét változótól. Ha azonban az $\left\{x_\alpha^{(i)}, P_\beta\right\} = \delta_{\alpha\beta}$ realizálási feltétel teljesül, akkor nem függhet az impulzusoktól, ezért

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}\right).$$

[32]D.G.Currie, T.F.Jordan, and E.C.G.Sudarshan *Relativistic Invariance and Hamiltonian Theories of Interacting Particles* Rev. Mod. Phys. **35**, 359-375, (1963)

Megmutatjuk, hogy van olyan

$$\mathbf{p}^{(1)'} = \mathbf{p}^{(1)} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(1)}}, \qquad \mathbf{p}^{(2)'} = \mathbf{p}^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(2)}}$$

dinamikai mértéktranszformáció, amelyre

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(1)}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(2)}} = \mathbf{F},$$

és ennek következtében

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}^{(1)'} + \mathbf{p}^{(2)'}.$$

Mivel a vesszős és a vesszőtlen impulzusok dinamikailag tökéletesen egyenértékűek egymással (a pontosabb magyarázatért ld. a 10. fejezetet), ezért $\mathbf{P}$-t jogunk van eleve (21.23) alakban felvenni.

Az igazoláshoz célszerű áttérni az

$$\mathbf{x}^{(+)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)}, \qquad \mathbf{x}^{(-)} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}$$

változókra és az f mértékfüggvényt az $\mathbf{x}^{(\pm)}$ változók függvényében keresni. Ekkor (5.8) szerint

$$\mathbf{p}^{(1)'} = \mathbf{p}^{(1)} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(1)}} = \mathbf{p}^{(1)} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(+)}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(-)}},$$

$$\mathbf{p}^{(2)'} = \mathbf{p}^{(2)} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(2)}} = \mathbf{p}^{(1)} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(+)}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(-)}}.$$

Az f-t tehát a

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}^{(+)}} = \frac{1}{2}\mathbf{F}$$

feltételből kell megválasztani.

Ennek az egyenletnek az integrálhatósági feltétele

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_\beta^{(+)}} - \frac{\partial F_\beta}{\partial x_\alpha^{(+)}} = 0. \tag{21.25}$$

Ez valóban teljesül. Ha ugyanis a $\mathbf{P} = \mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{p}^{(2)} + \mathbf{F}$ képletet behelyettesítjük a $\{P_\alpha, P_\beta\} = 0$ generátor-relációba, rövid átalakítás után pont erre az integrálhatósági feltételre jutunk. A (21.25) azt fejezi ki, hogy az $\mathbf{x}^{(+)} = \left(x_1^{(+)}, x_2^{(+)}, x_3^{(+)}\right)$ koordináták terében az $\mathbf{F}$ vektormező rotációja nulla.

A $\mathbf{P} = \mathbf{p}^{(1)'} + \mathbf{p}^{(2)'}$ követelményt biztosító mértékfüggvény eszerint a következő:

$$f\left(\mathbf{x}^{(+)}, \mathbf{x}^{(-)}\right) = \frac{1}{2}\int^{\mathbf{x}^{(+)}} \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(+)'}, \mathbf{x}^{(-)}\right) \cdot d\mathbf{x}^{(+)'}$$

tetszőlegesen rögzített alsó határral. A Stokes-tétel alapján az integrál értéke független a kezdő- és végpontot összekötő integrációs kontúr megválasztásától.

A második lépés gondolatmenete hasonló, csak sokkal nehezebb a megfelelő mértékfüggvény megtalálása. A harmadik lépés *ad hoc* matematikai átalakítások sorozata. A második és a harmadik lépés között még azt is megmutatják, hogy $\mathcal{G}$-ben a $\{x_\alpha, G_\beta\} = 0$ realizálási feltétel nem akadályozza meg a kölcsönhatást a tömegpontok között.

A tétel állítása egyáltalán nem váratlan. A tömegpont-rendszerek hamiltoni tárgyalása ugyanis távolhatáson alapul, mert bármely két tetszőlegesen távoli tömegpont között ható erő attól függ, hogy a két objektum hol tartózkodik (és esetleg mekkora a sebessége) *ugyanabban a t pillanatban.* A relativitáselmélet szerint azonban két tömegpont világvonalán különböző inerciarendszerekben különböző pontpárok egyidejűek, amelyekben a tömegpontok távolsága és sebessége más és más. Ennek következtében a Hamilton-egyenleteket különböző inerciarendszerekben különböző világvonalak elégítik ki *kivéve*, ha a kölcsönhatás közöttük nulla. A *No Interaction Theorem* pontosan ezt fejezi ki a Currie-feltételnek köszönhetően, amely az egyidejűség relativitásának egyenes következménye.

Ez az érvelés azonban 1+1 dimenzióban ugyanúgy érvényes, mint 3+1 dimenzióban. Hogyan juthattunk az A. pontban mégis arra a következtetésre, hogy 1+1 dimenzióban a relativisztikus esetben is lehetséges kölcsönhatás?

Ennek kettős oka van. Először is nem használtuk még ki a Currie-feltételt. Ezt könnyen pótolhatjuk, és arra a következtetésre jutunk, hogy a $V(p_1, p_2, x)$ potenciál, amelyről *feltettük*, hogy nem függ az impulzusoktól, a $\{x, G\} = x\{x, H\}$ Currie-feltétel következtében valóban független tőlük, ezért érvényes az a következtetésünk, hogy $V = \alpha|x| = \alpha|x_1 - x_2|$.

A másik ok ennek a potenciálnak a speciális alakja, amely azt fejezi ki, hogy a két tömegpont *a távolságuktól függetlenül* ugyanazzal az erővel vonzza vagy taszítja egymást. Három térbeli dimenzióban az erő nagyságának a függetlensége a tömegpontok közötti távolságtól nem lenne elég ahhoz, hogy a két világvonal bármely pontpárja között ugyanolyan erő hasson, mert az erő iránya is változhatna. Egyetlen térbeli dimenzióban azonban ilyen lehetőség nincs, ezért létezhet olyan potenciál, amely összefér az egyidejűség relativitásával.

Az azért persze kétségkívül érdekes tény, hogy a realizációs kritériumokkal kiegészített Hamilton-dinamika automatikusan elvezet ahhoz a következtetéshez, hogy önmaga nem alkalmas kölcsönható pontrendszerek relativisztikus tárgyalására. A *bizonyítás* azonban csak két tömegpontra lett elvégezve és nem elég „megvilágosító" ahhoz, hogy elmondhassuk, bizonyára általánosítható tetszőleges részecskeszámra.

Maga a tételben kimondott *állítás* azonban bizonyára igaz tetszőleges tömegpont rendszerre, hiszen az egyidejűség relativitásának a következménye. Ez az oka annak, hogy a relativisztikus kvantumelmélet Heisenberg-Dirac féle megfogalmazása valójában nem a tömegpontrendszerek, hanem a *mezők* Lagrange-elméletén alapul.

A gondolatmenet kiindulópontja mindkét esetben a hatáselv. A 2. fejezetben láttuk, hogy ennek az elvnek a matematikai megfogalmazása tömegpontrendsze-

rekre

$$\delta \int dt\, L(q, \dot{q}, t) = 0,$$

mezőkre pedig

$$\delta \int dt d^3x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, \dot{\varphi}) = 0.$$

Ha a tömegpontok között van kölcsönhatás, akkor az egyidejűség relativitása miatt az első integrál a különböző inerciarendszerekben a tömegpontok *különböző* világvonalain stacionér, ami nyilván nem fér össze az inerciarendszerek egyenértékűségével. Ez a *No Interaction Theorem* tartalma.

A mezőkre a hatáselvben szereplő integrálás a téridőre terjed ki[33], és ha $\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi, \dot{\varphi})$ Lorentz-invariáns, akkor az integrál értéke független az inerciarendszer megválasztásától, mert Lorentz-transzformációnál a téridő dtd^3x térfogateleme se változik (mint könnyű ellenőrizni, a Lorentz-transzformáció Jacobi-determinánsa 1-gyel egyenlő). Ennek a térelméletnek a Heisenberg-Dirac kvantálása olyan kölcsönható *részecskeelméletre* vezet, amely már összhangban van a speciális relativitáselmélet követelményeivel, és kétségkívül a 20. századi elméleti fizika egyik csúcsteljesítménye.

Függelék: A Lorentz-transzformáció származtatása a sebességösszeadás törvényéből.

A 16. fejezet A) pontjának a végén a relativitáselméletben betöltött fontos szerepe miatt mutattuk be a

$$f(a, b) \equiv a \cdot b = \frac{a + b}{1 + ab}, \qquad |a|, |b| \leq 1 \tag{A}$$

egyparaméteres kommutatív Lie-csoportot. Nyilván $e = 0$, $a^{-1} = -a$, és az asszociativitás is teljesül, mert

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = \frac{a + b + c + abc}{1 + ab + ac + bc}.$$

Ha a csoportelemeken *sebesség/c*-t értünk, akkor a csoportművelet a relativisztikus sebességösszeadás képlete. Ez az interpretáció azonban csak akkor megengedett, ha az egyenletes sebesség $\Delta x/\Delta t$ definíciója és az (A) sebességösszeadási törvény összhangban van egymással. A következőkben azt tisztázzuk, mit értünk az adott esetben „összhangon" , és hogy ez a fogalom hogyan vezet el a Lorentz-transzformációhoz.

[33]Csaknem minden releváns feladatban — pl. a hatáskeresztmetszetek számításánál, — az időbeli integrálást ki kell terjesztenia teljes $-\infty < t < +\infty$ tartományra. Az időbeli korrelációra vonatkozó feladatok képeznek kivételt, amikor azonban mindig van természetes módon kitüntetett koordinátarendszer: Az időpontokat rögzítő detektorok nyugalmi rendszere.

Ahhoz, hogy az $M(a), M(b), M(c), \ldots$ mátrixok *reprezentálják* az (A) Lie-csoportot, természetesen teljesülnie kell a

$$M(a)M(b) = M(a \cdot b) = M\left((a+b)/(1+ab)\right). \tag{B}$$

relációnak. De ezeknek a mátrixoknak ugyanakkor *hatniuk is kell* a $\Delta x \equiv \xi$-t és a $\Delta(ct) \equiv \eta$-t tartalmazó oszlopvektorra ahhoz, hogy kapcsolatba lehessen hozni őket a sebességgel[34]:

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = M(a) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}. \tag{C}$$

A mátrixreprezentációt az a követelmény kapcsolja össze a sebességgel, hogy a ξ/η *hányados* a sebességösszeadás (A) képlete szerint transzformálódjon, vagyis teljesüljön a

$$\frac{\xi'}{\eta'} = \frac{a + \dfrac{\xi}{\eta}}{1 + a\dfrac{\xi}{\eta}} = \frac{\xi + a\eta}{a\xi + \eta} \tag{D}$$

összefüggés is.

Az $M(a)$ mátrixnak ezért

$$M(a) = \Phi(a) \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \tag{E}$$

alakúnak kell lennie. Mivel a Lie-csoport $e = 0$ egységelemét az egységmátrix reprezentálja, ezért $\Phi(0)$-nak 1-gyel kell egyenlőnek lennie.

Az (E) alapján (B) a következő alakban írható:

$$\Phi(a)\Phi(b) \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix} = \Phi\left((a+b)/(1+ab)\right) \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a+b}{1+ab} \\ \dfrac{a+b}{1+ab} & 1 \end{pmatrix}. \tag{F}$$

Mivel azonban

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab & a+b \\ a+b & 1+ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab & 0 \\ 0 & 1+ab \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a+b}{1+ab} \\ \dfrac{a+b}{1+ab} & 1 \end{pmatrix},$$

ezért az ismeretlen Φ-re a

$$\Phi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right) = (1+ab)\Phi(a)\Phi(b) \tag{G}$$

függvényegyenletet kapjuk.

[34] Az előadásban a reprezentációra ilyenkor a *realizálás* elnevezést is használtuk.

Ezt könnyű megoldani. Legyen $b = -a$, akkor mivel $\Phi(0) = 1$

$$\left(1 - a^2\right) \Phi(a)\Phi(-a) = 1, \tag{H}$$

amelynek megoldása a $\Phi(0) = 1$ feltétel figyelembe vételével

$$\Phi(a) = +\frac{e^{\kappa(a)}}{\sqrt{1 - a^2}}, \tag{I}$$

ahol $\kappa(a)$ az a páratlan függvénye. Ez a megoldás $\kappa(a) = 0$-nál elégíti ki (G)-t.

A keresett $M(a)$ mátrix tehát

$$M(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} & \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 - a^2}} \end{pmatrix}. \tag{J}$$

Ez a mátrix a számlálóbeli a-k előjelében különbözik a Lorentz-transzformáció szokásos alakjától, ami az (A) Lie-csoport interpretációjának a következménye.

Ha a b csoportelemen a $\mathcal{K}$ origójának a fénysebesség egységben mért sebességét értjük egy rögzített $\mathcal{K}_0$-hoz képest, az a-n a $\mathcal{K}$' sebességét $\mathcal{K}$-hoz képest, akkor a $\mathcal{K}$' sebessége $\mathcal{K}_0$-hoz képest $(a + b)/(1 + ab)$-vel egyenlő. *Eseményekről* ebben a definícióban nincs szó.

A Lorentz-transzformáció viszont az események téridő koordinátáinak az átszámítására szolgál két különböző mozgásállapotú koordinátarendszer között. Amikor a $\mathcal{K}$' origója pozitív irányban mozog $\mathcal{K}$-hoz képest, egy adott esemény x' koordinátája egyre csökken az x-hez képest. Ez az oka a jelzett előjelkülönbségnek.