A Lorentz-inga

Hraskó Péter
PTE Elméleti Fizika Tanszék

1.Lorentz kérdése az I.Solvay-konferencia résztvevőihez

1863-ban a 25 éves *Ernst Solvay* belga vegyész kidolgozta az ipari szódagyártás technológiáját és hatalmas vagyonra tett szert. De nem csak a szóda érdekelte. Lorentz szerint „Belgiumnak ez a legnemeslelkűbb állampolgára mélyen meg volt róla győződve, hogy a természet és a társadalom törvényszerűségeinek alaposabb megismerése az emberiség boldogulását segíti elő". Solvay jelentős összegeket áldozott a tudományra. Többek között pszichológiai, szociológiai, kémiai intézeteket alapított. 1911-ben *W. H. Nernst* javaslatára Brüsszelben összehívta az I. Nemzetközi Solvay-konferenciát, amelyen a kor legnevesebb 22 fizikusa (közöttük *H. Poincaré, M. Planck, W. Wien, A. Sommerfeld, E. Rutherford, A. Einstein*) vett részt, és a további Solvay-kongresszusok szervezését 1 millió frank alaptőkével létrehozott Nemzetközi Fizikai Intézetre bízta.

1911 arra az időszakra esett, amikor a fizika mélységes — de mint később kiderült, rendkívül termékeny — válságban volt. Lorentz, a konferencia elnöke, bevezetőjében azt mondta, hogy „ma messze vagyunk a szellemi kielégültségnek attól az állapotától, amelyet a fizikai elmélet húsz, vagy akár csak tíz évvel ezelőtt nyújtani tudott. Nem szabadulhatunk attól a gondolattól, hogy zsákutcába kerültünk: a régi elméletek egyre kevésbé képesek eloszlatni a homályt, amely minden oldalról körülvesz." Majd így folytatta: „Planck esszéje az energiakvantumokról »valóságos fénysugár« ebben a ködben, és most az a feladat, hogy olyan mechanikát dolgozzunk ki, amelyből Planck felfedezése következményként adódik." Mint jól tudjuk, Planck úgy tudta megmagyarázni a fekete sugárzás spektrumát, ha feltételezte, hogy a harmonikus lineáris oszcillátor energiája csak a $h\nu = \hbar\omega$ kvantum egész számú többszöröse lehet[1].

A lineáris harmonikus oszcillátor egyik legegyszerűbb példája a matematikai inga. Lorentznek ez szöget ütött a fejébe és a következő kérdéssel fordult a konferencia résztvevőihez: A matematikai inga körfrekvenciája $\omega = \sqrt{g/l}$. Planck szerint az energia csak $\hbar\omega$ egész számú többszöröse lehet, vagyis $E = n\hbar\omega$-val egyenlő $n = 0, 1, 2...$ mellett. Mármost ha az inga fonalát a két újjunkkal összecsippentve az inga hosszát folyamatosan csökkentjük, akkor az ω körfrekvencia folyamatosan nő. Hogyan képzelhető el, hogy eközben az energiája állandóan $\hbar\omega$ egész számú többszöröse marad?

Einstein, aki ismerte *P. Ehrenfest* idevágó munkáit, kapásból válaszolt Lorentz kérdésére: a mechanika törvényei szerint a hossz *lassú* növelésével vagy csökkentésével az energia úgy változik, hogy az E/ω hányados közben állandó

[1] Planck a Kirchhoff-tételnek abból a következményéből indult ki, hogy a hőmérsékleti sugárzás spektruma független az üreg falának anyagi minőségétől, ezért — legegyszerűbb lehetőségként — a falat minden frekvencián egy-egy elektromosan töltött harmonikus oszcillátorral helyettesítette.

maradjon; a folyamat során tehát Planck képlete folyamatosan érvényes lesz ugyanazzal az n értékkel. Lorentz ezekkel a szavakkal nyugtázta Einstein magyarázatát: „Ez a rendkívül meglepő eredmény megoldja az általam felvetett problémát. Általában is az energia-kvantumok hipotézise érdekes kérdésekhez vezet minden olyan esetben, amikor a frekvencia önkényesen változtatható."

A konferencia jegyzőkönyve szerint senki sem vetette fel, mi van akkor, ha ω-t gyorsan változtatjuk: mindenkit lenyűgözött az a tény, hogy a klasszikus mechanika a lassú változás esetében ilyen csodálatos harmóniában van az energiakvantum hipotézissel.

Mai ismereteink fényében Einstein válasza a kvantummechanika ma is érvényes fontos tételének első megfogalmazása: amikor egy fizikai rendszer határozott kvantumállapotban van és közben lassan változtatjuk egy vagy több paraméterét, a rendszer folyamatosan megmarad az ugyanazokkal a kvantumszámokkal jellemzett állapotában. Ha a paraméterek az eredeti értékükre állnak vissza, a rendszer is visszakerül eredeti állapotába: a körfolyamat során nincs munkavégzés.

Amikor azonban a változás gyors, a rendszer közben gerjed. Ha például eredetileg alapállapotban volt, akkor hiába állítjuk vissza a paraméterek korábbi értékét, bizonyos valószínűséggel gerjesztett állapotban marad vissza.

2.Az E/ω állandóságának igazolása

Az E/ω állandóságának igazolásához azt kell megmutatnunk, hogy ennek az aránynak az időderiváltja nullával egyenlő. Az olyan mechanikai rendszerek esetében, amelyek E energiája a K kinetikus és az U potenciális energia összegével egyenlő, és csak U tartalmazza a változó paramétert, az E időderiváltja az

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} \tag{1}$$

képlet alapján számítható ki. A baloldalon teljes derivált áll, mert számításba kell venni minden okot — a koordináták és a sebességek megváltozását csakúgy, mint a külső körülményekét — ami az energia értékét megváltoztathatja. A teljes időderiváltat a szokásoknak megfelelően gyakran fogjuk ponttal jelölni. A jobboldalon a parciális időderivált jelzi, hogy itt csak az *explicit időfüggés* (vagyis a körülmények időbeli változása) veendő figyelembe. Az (1) magában foglalja az energia-megmaradás tételét, amely azt mondja ki, hogy amikor a körülmények időben állandók, a rendszer energiája nem változik.

Egy szabadsági fok esetében, amikor $E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x)$, az (1) igazolása különösen egyszerű:

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{x}\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial t} = \left(m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x}\right)\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t},$$

mert $m\ddot{x} = F = -\frac{\partial U}{\partial x}$.

Lineáris harmonikus oszcillátorra $U = \frac{D}{2}x^2$, ezért

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\dot{D}x^2, \tag{2}$$

ahol D a direkciós „állandó”, amely most függ az időtől. Ha ez a függés olyan lassú, hogy a rezgés T periódusa alatt a D megváltozása elhanyagolhatóam kicsi, akkor a (2) egyenletet a t időpont körül átlagolhatjuk az éppen aktuális $T(t)$ periódusidőre. Az x^2 ezalatt egy teljes periódust változik, és a négyzetének az átlaga a mozgás t-beli $A(t)$ amplitúdójának felével egyenlő: $\overline{x^2} = A/2$. Az átlagolás után ezért (2) a

$$\frac{d\bar{E}(t)}{dt} = \frac{1}{4}\dot{D}(t)A^2(t) \tag{3}$$

képletbe megy át, amelyben $\bar{E}(t)$ az energia átlaga a t pillanat körüli egy periódusnyi időintervallumra. Mikor a D változása olyan lassú, hogy egy periódus alatt eltekinthetünk tőle, $\bar{E}(t)$ ugyanúgy függ $A(t)$-től, mint amikor a D konstans: $\bar{E}(t) = \frac{D(t)}{2}A(t)^2$.

Mivel $D = m\omega^2$, ezért konstans m-nél a körfrekvencia is lassan függ az időtől, és így $\dot{D} = 2m\omega\cdot\dot{\omega}$, valamint $A^2 = \frac{2\bar{E}}{D} = \frac{2\bar{E}}{m\omega^2}$. Ezt a két képletet (3)-ba írva az $\dot{\bar{E}} = \bar{E}\dot{\omega}/\omega$ összefüggésre jutunk, amely az $\bar{E}/\omega$ arány időbeli állandóságát kifejező

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{E}}{\omega}\right) = 0$$

képlettel ekvivalens. Az $I = \bar{E}/\omega$ arányt Ehrenfest — Einstein javaslatára — *adiabatikus invariánsnak* nevezte el. Ezt a terminológiát (és az I jelölést) használjuk általában a dinamikai mennyiségekből képzett olyan kifejezésekre, amelyek a rendszer paramétereinek *lassú* változtatásakor megtartják állandó értéküket.

A matematikai ingára áttérve azt látjuk, hogy az inga

$$E = \frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mgr\phi^2 \tag{4}$$

lengési energiájának mindkét tagja függ az inga r hosszától, amely a feladat lassan változó paramétere, és így

$$\frac{dE}{dt} = (mr^2\ddot{\phi} + mgr\phi)\dot{\phi} + mr\dot{r}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mg\dot{r}\phi^2.$$

A mozgásegyenlet most $\dot{L} = K$, ahol $L = mr^2\dot{\phi}$ a perdület (impulzusnyomaték), $K = -mgr\sin\phi \approx -mgr\phi$ pedig a forgatónyomaték. A $\dot{\phi}$-t szorzó zárójelre a mozgásegyenletből most nem nullát, hanem az

$$mr^2\ddot{\phi} + mgr\phi = -2mr\dot{r}\dot{\phi}$$

képletet kapjuk. Ennek következtében

$$\frac{dE}{dt} = -mr\dot{r}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}mg\dot{r}\phi^2. \tag{5}$$

A gondolatmenet további része ugyanolyan, mint a lineáris harmonikus oszcillátoré. Ha a lengés amplitudója Φ, akkor az energiája $E = \frac{1}{2}mgr\Phi^2$. Az egy periódusra történő átlagolás eredménye pedig

$$\overline{\phi^2} = \frac{1}{2}\Phi^2 = \frac{\bar{E}}{mgr} \qquad \text{és} \qquad \overline{\dot{\phi}^2} = \frac{\omega^2}{2}\Phi^2 = \frac{\bar{E}}{mr^2}, \tag{6}$$

mert, mint tudjuk,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}. \tag{7}$$

Ha mindezt behelyettesítjük az átlagolt (5) formulába, az $\dot{\bar{E}} = -\frac{\bar{E}\dot{r}}{2r}$képletre jutunk, amely $\frac{d(\bar{E}\sqrt{r})}{dt} = 0$ alakba írható át és az $\bar{E}\sqrt{r}$ szorzat adiabatikus invarianciáját fejezi ki. A (7) alapján az $\bar{E}\sqrt{r}$ adiabatikus állandósága azonban egyenértékű az $\bar{E}/\omega$ hányados adiabatikus invarianciájával. Ezt kellett igazolnunk.

3.Az adiabatikus invariáns és az energiamegmaradás

Képzeljünk el egy fonálingát, amely a mennyezetről lóg le, és a szál egy lyukon keresztül felmegy a padlásra, ahol egy ember tartja. Tegyük fel, hogy az ember elkezdi nagyon lassan felfele húzni (vagy lefele engedni) az ingát. Mekkora ΔW munkát végez, miközben az inga fonálhossza r_1-ről r_2-re változik?

Amikor az inga hossza r-ről $(r+dr)$-re változik, az ember által végzett munka

$$dW = -F_k \cdot dr \tag{8}$$

-rel egyenlő. Az F_k a kötélerő nagysága, pozitív szám. Mivel az inga lengésben van, a kötélerőhöz az $mg\cos\phi$ súlyerőn kívül az $mr\dot{\phi}^2$ centrifugális erő is járulékot ad:

$$F_k = mr\dot{\phi}^2 + mg\cos\phi \approx mg + mr\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}mg\phi^2. \tag{9}$$

A feltevés szerint az ember olyan lassan húzza (vagy engedi) a kötelet, hogy teljesül az adiabatikusság feltétele: Az inga egy lengési periódusa alatt a kötélhossz változása elhanyagolhatóan kicsi. A kötélerő egy periódusra történő átlagolását (9) alapján könnyen elvégezhetjük, mert a jobboldalon fellépő átlagokat a (6)-ban már kiszámítottuk. Eszerint

$$\overline{F}_k = mg + \frac{\bar{E}}{2r}, \tag{10}$$

következésképpen

$$d\overline{W} = -mg \cdot dr - \frac{\bar{E}}{2r} dr. \tag{11}$$

A ΔW kiszámításához ezt a képletet kell integrálni r_1től r_2-ig. A lengés $\bar{E}$ egy periódusra átlagolt energiája azonban függ r-től, ezért az integráláshoz ismernünk kell az $\bar{E}(r)$ függvényt. Adiabatikus esetben az $\bar{E}\sqrt{r}$ szorzat állandósága az integrálást valójában triviálissá teszi. A (11) ekkor ugyanis

$$d\overline{W} = -mg \cdot dr + (\bar{E}\sqrt{r})d(1/\sqrt{r})$$

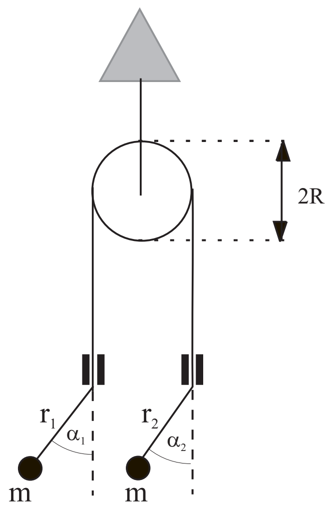
alakban írható, amelynek az integrálja

$$\Delta W = -mg(r_2 - r_1) + \bar{E}\sqrt{r} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{r_2}} - \frac{1}{\sqrt{r_1}} \right).$$

A $\bar{E}\sqrt{r}$ a folyamat során nem változik, ezért helyettesíthetjük akár $\bar{E}_2\sqrt{r_2}$-vel, akár $\bar{E}_1\sqrt{r_1}$-gyel. Amikor $1/\sqrt{r_2}$-vel szorzódik az első, amikor pedig $1/\sqrt{r_1}$-gyel, a második lehetőséget választjuk. Így

$$\Delta W = -mg(r_2 - r_1) + (E_2 - E_1).$$

Ez a képlet biztosan korrekt, mert az energiamegmaradást fejezi ki az ingából és a kötelet húzó emberből álló rendszerre a Föld nehézségi erőterében. Ezzel demonstráltuk, hogy a matematikai ingánál $E\sqrt{r}$ adiabatikus invarianciája összhangban van ezzel a tétellel.



1. ábra. A csigainga

4.A csigainga[2]

A csigainga olyan állócsiga, amelynek kötélvégei fonálingává vannak kiképezve (1. ábra). Ez egy három szabadsági fokú rendszer, amelynek a helyzetét a két inga α_1, α_2 kitérése, valamint a csiga φ elfordulási szöge jellemzi. Ez utóbbi helyett azonban célszerűbb a

$$\xi = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \tag{12}$$

változó használata, amellyel r_1, r_2 így fejezhető ki:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0(1+\xi) \\ r_2 &= r_0(1-\xi). \end{aligned} \tag{13}$$

Az r_0 az r_1 és az r_2 félösszege, amely állandó érték. A φ és a ξ között a $\varphi = \frac{r_0}{R}\xi$ képlet adja meg a kapcsolatot, amely a nyilvánvaló $dr_1 = -dr_2 = R \cdot d\varphi$ következménye. A rendszer nem integrálható, egyetlen mozgásintegrálja az energia, ezért arra kell számítanunk, hogy a mozgása kaotikus. Csak annyit lehet róla mondani, hogy a nyugalmi állapota közömbös egyensúlyi helyzet: a legkisebb lökésre a kötél leszalad a csigáról.

Tegyük fel azonban, hogy bizonyos kezdőfeltételekhez tartozó mozgás során a csiga forgása olyan lassú (a $\dot{\xi}$ olyan kicsi), az ingák lengése pedig olyan gyors, hogy az r_1, r_2 fonálhosszak változása adiabatikusnak tekinthető. Ebben az esetben a ξ *ingadozni fog* egy minimális és maximális érték között. Ez abból következik, hogy az $I = \bar{E}\sqrt{r}$ adiabatikus invariáns állandósága miatt (6) következtében a centrifugális erő annál kisebb, minél hosszabb a szál:

$$mr\overline{\dot{\phi}^2} = \frac{\bar{E}}{r} = \frac{I}{r^{3/2}}.$$

Amikor pl. r_1 nő, akkor az 1. ingára ható centrifugális erő csökken, a 2. ingára ható pedig nő, és ez a tendencia a csiga forgásirányának a megfordulásához vezethet. Ebben az esetben az ingák lengése stabilizálja a rendszert.

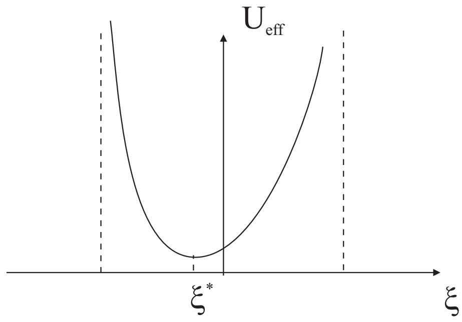
Amikor az adiabatikusság teljesül, a rendszer integrálhatóvá válik. Ez az energia-képlet alapján látható be. A csigainga energiája három tagot tartalmaz: A két inga lengésének, valamint az ingadozásnak az energiáját (a potenciális energiával nem kell törődnünk, mert konstans: $mg(r_1 + r_2) = 2mgr_0$):

$$E_1 = \frac{1}{2}mr_1^2\dot{\alpha}_1^2 + \frac{1}{2}mgr_1\alpha_1^2 \qquad (\alpha_1 \ll 1) \tag{14}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}mr_1^2\dot{\alpha}_2^2 + \frac{1}{2}mgr_1\alpha_2^2 \qquad (\alpha_2 \ll 1) \tag{15}$$

$$K_\xi = \frac{1}{2}m\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}_2^2 + \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2 = L \cdot mr_0^2\dot{\xi}^2, \tag{16}$$

[2] A csigainga részletes matematikai elmélete a *Kettős adiabatikus inga* című dolgozatomban található meg a honlapomon (hrasko.com/peter). Korábban ezt az érdekes objektumot tudomásom szerint még nem tanulmányozták.



2. ábra. Az ingadozás effektív potenciálja

ahol Θ a csiga tehetetlenségi nyomatéka, és

$$L = \frac{m + \Theta/2R^2}{m}. \tag{17}$$

Adiabatikus közelítésben azonban

$$E_1 = \frac{I_1}{\sqrt{r_1}} = \frac{I_1/\sqrt{r_0}}{\sqrt{1+\xi}} \equiv \frac{I_1'}{\sqrt{1+\xi}}, \qquad E_2 = \frac{I_2}{\sqrt{r_1}} = \frac{I_2/\sqrt{r_0}}{\sqrt{1-\xi}} \equiv \frac{I_2'}{\sqrt{1+\xi}}. \tag{18}$$

Ezekben a képletekben az I_1', I_2' mennyiségek konstansok, amelyeket a kezdőfeltételek határoznak meg. A rendszer energiájára ebben a közelítésben tehát az $E = K_\xi + U_{eff}(\xi)$ képletet nyerjük, amely egy 1-szabadsági fokú objektum mozgását írja le az

$$U_{eff}(\xi) = \frac{I_1'}{\sqrt{1+\xi}} + \frac{I_2'}{\sqrt{1-\xi}} \tag{19}$$

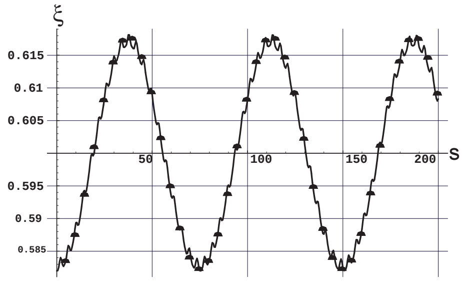
effektív potenciálban (2. ábra).

Az ilyen típusú feladatok mindig megoldhatók. A függőleges tengely E pontján keresztül párhuzamost rajzolunk a vízszintes tengellyel. Ez a ξ_{min} és a ξ_{max} pontokban metszi az $U_{eff}(\xi)$ görbét. Ennek következtében az adott E energián az ingadozás a $\xi_{min} \leq \xi \leq \xi_{max}$ tartományban fog történni. Az ingadozás periódusidejének a felét úgy számíthatjuk ki, hogy az $E = L \cdot mr_0^2 \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + U_{eff}$ képletet megoldjuk dt-re és integráljuk az ingadozás tartományára:

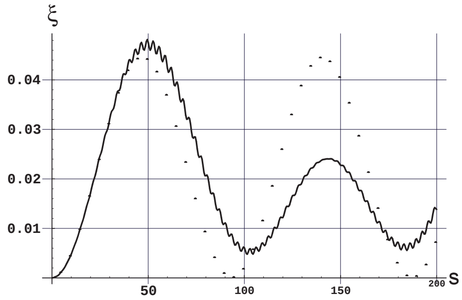
$$T = 2L \cdot mr_0^2 \int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \frac{d\xi}{\sqrt{E - U_{eff}(\xi)}}. \tag{20}$$

Mint látjuk, az ingadozás annál „lomhább”, minél nagyobb az L paraméter, amelyet emiatt a rendszer *lomhaságának* nevezhetünk. Az adiabatikus közelítés annál jobb, minél lassúbb az ingadozás, vagyis minél nagyobb az L.

A lengések körfrekvenciája az ingadozás következtében folyamatosan nő és csökken valamilyen konstans ω_1 és ω_2 érték körül. Ezeket az értékeket is a kezdőfeltételek határozzák meg. Az adiabatikussághoz az kell, hogy ezek legyenek sokkal nagyobbak, mint az ingadozás $\Omega = 2\pi/T$ körfrekvenciája.



3. ábra. A ξ ingadozása ($\omega_2/\omega_1 \approx 2$)

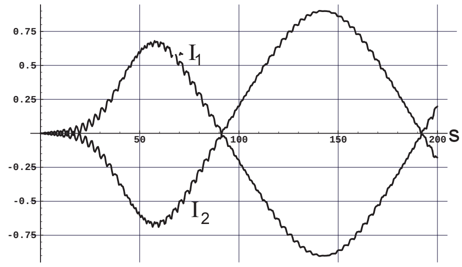


4. ábra. A ξ ingadozása ($\omega_2/\omega_1 \approx 1$)

Amikor az adiabatikusság feltételei teljesülnek, az inga valóban periódikus ingadozásokat végez a (20) által meghatározott periódusidővel. A 3. ábrán[3] a folytonos görbe a pontos mozgásegyenlet alapján történő számítás eredménye, amelyre szorosan illeszkednek az adiabatikus közelítés pontjai. A vízszintes tengelyen $s = \omega_0 t$ a dimenziótlanított idő ($\omega_0 = \sqrt{g/r_0}$). Mint látható, az ingadozás tényleg periódikus és a periódus megegyezik a (20)-ból számítható értékkel. A görbe csipkézettsége az ingák lengésének a következménye. Az adiabatikus közelítés ezt kisímítja. Azt várnánk, hogy az ingadozás szigorú periodikussága, amely egy közelítő eljárásnak, az adiabatikus approximációnak a következménye, az idő előrehaladtával fokozatosan elromlik, de a pontos mozgásegyenletek numerikus megoldásában ennek semmi jele.

Választhatók azonban olyan kezdőfeltételek, amelyeknél szintén elvárható volna az adiabatikusság teljesülése, a pontos mozgásegyenletek megoldása mégsem periodikus. Ilyen esetre vonatkozik a 4. ábra, amelyen szintén a folytonos görbe a pontos megoldás, a pontok pedig az adiabatikus közelítés. A magyarázat valószínűleg az ω_2/ω_1 arányban keresendő. A 4. ábra esetében ez az arány 1-gyel egyenlő és ez azt sugallja, hogy *rezonáns kölcsönhatás* léphet fel a két inga között, amely elrontja az ingák I_1, I_2 adiabatikus invariánsainak az időbeli állandóságát. A részletesebb analízis azt bizonyítja, hogy ebben az esetben az ingadozásnak megfelelő időskálán lassú „lebegés” jön létre a két invariáns között (ld. az 5. ábrát, amelyek dimenziótlanított invariánsokra vonatkoznak).

[3]Ezt és a következő grafikonokat a 2. lábjegyzetben idézett dolgozatomból vettem át.



5. ábra. Az adiabatikus invariánsok lebegése ($\omega_2/\omega_1 \approx 1$)

Amikor $\omega_2/\omega_1 = 2$ az ingák kölcsönhatása — úgy látszik, — nem vezet az adiabatikus invariánsok szisztematikus változásához.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy az inga mozgása, az előzetes várakozással ellentétben, nem mindig kaotikus, mert adott paraméterek mellett a kezdőfeltételek bizonyos tartományában a két adiabatikus invariáns két új mozgásállandó szerepét tölti be az energia mellett. Noha ezek bizonyos értelemben csak közelítően mozgásállandók, ezt a funkciójukat a várhatónál sokkal sikeresebben teljesítik. Érdekes lenne meghatározni ennek a tartománynak a határait a fázistérben.