

# A kettős adiabatikus inga

Hraskó Péter

## 1. Bevezetés.

Egynél nagyobb szabadsági fokú rendszereknél a szabadsági fokok egyik csoportjához tartozó energia potenciális energia szerepét játszhatja a szabadsági fokok másik csoportjára nézve. A legismertebb példa a centrál-szimmetrikus kéttestprobléma, amelynek  $E$  energiája az

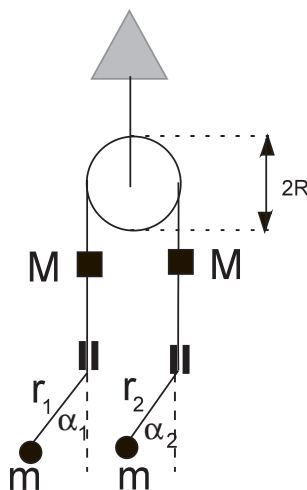
$$E = \underbrace{\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2}_{K_r} + \underbrace{\frac{1}{2}\mu r^2\dot{\varphi}^2}_{K_\varphi} + U(r)$$

alakban írható, amelyben  $K_r$  és  $K_\varphi$  a radiális és az azimutális mozgás kinetikus energiája. Az  $L = \mu r^2\dot{\varphi}$  impulzusmomentum megmaradása miatt azonban  $K_\varphi$ -t az  $r$  értéke egyértelműen meghatározza:

$$K_\varphi = \frac{L^2}{2\mu r^2} \equiv U_{cf}(r).$$

Eszerint az azimutális mozgás energiája — amely tisztán kinetikus energia, — a radiális mozgásban a potenciális energia szerepét játssza (centrifugális energia). Enélkül a konverzió nélkül a probléma nem lenne integrálható.

Ez a konkrét feladat természetesen megoldható anélkül is, hogy a konverzió tényét felismernénk és explicit megfogalmazzunk. A dolog ott kezd igazán érdekessé válni, ahol ez az átalakulás nem megy "magától", és az egyébként nem-integrálható problémánál az átértelmezést megpróbáljuk valamilyen indoklással kierőszakolni. Erre a legismertebb példa a kétatomos molekulák Born-Oppenheimer modellje. Az energia ebben az esetben is három tag összege:  $K + U(r)$  a relatív mozgás kinetikus és potenciális energiája csak a relatív mozgás dinamikai változóitól függ, míg az elektronok  $E_e$  energiája ezeken kívül az elektronok koordinátáit is tartalmazza. *Ha azonban feltesszük, hogy az elektronok végig alapállapotban vannak, amelynek  $E_g$  energiája már csak a molekulák relatív koordinátájának a függvénye, akkor ezzel a feltevéssel az elektronok teljes energiáját a molekulák között ható potenciális energiává alakítottuk át.* A következő fejezetekben bemutatunk egy klasszikus mechanikai eszközt (1. ábra), amely a Born-Oppenheimer modell meglehetősen pontos analogója.



1. ábra. A kettős inga.

## 2.A kettős adiabatikus inga.

A rajzon ábrázolt ingának három szabadsági foka van: az  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  kitérések, valamint a  $\xi$  paraméter ( $-1 < \xi < 1$ ), amelyet az

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0(1 + \xi) \\ r_2 &= r_0(1 - \xi) \end{aligned}$$

egyenletek definiálnak.

Ha  $\xi$ -t konstansnak tartjuk, két független ingánk van, amelyek  $\alpha_i \ll 1$  esetén

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \xi}} \\ \omega_2 &= \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \xi}} \end{aligned}$$

körfrekvenciájú *lengéseket* végeznek ( $\omega_0 = \sqrt{g/r_0}$ ).

Mi történik, ha  $\xi$ -t "elengedjük"?

A lengések következtében az ingákon lógó tömegekre centrifugális erő hat, amely a súlyhoz hozzáadódva általában megbontja a nyugvó inga instabil egyensúlyi helyzetét, és  $\xi$  változni kezd. A centrifugális erőt azonban — a súlyerővel ellentétben, — az inga hossza (a  $\xi$  értéke) nem határozza meg: ez az erő *általában* nem származtatható  $\xi$ -től függő potenciálból, és ennek következtében a feladat bizonyára nem is integrálható.

Amikor azonban a  $\xi$  változási sebessége lassú a lengésekhez képest (*adiabatikus*), és a kitérések kicsik ( $|\alpha_i| \ll 1$ , matematikai inga), az ingák

$$E_i = \frac{1}{2}m(r_i^2\dot{\alpha}_i^2 + gr_i\alpha_i^2)$$

energiájának és körfrekvenciájának hányadosa *adiabatikus invariáns*:

$$I_1 = \frac{E_1}{\omega_1} = \text{inv.} \quad I_2 = \frac{E_2}{\omega_2} = \text{inv.}$$

Később (4.fejezet) majd foglalkozunk ennek a hipotézisnek a megalapozásával a kettős inga esetére. Most elégedjünk meg egy meglehetősen felszínes "igazolással"<sup>1</sup> az egyedi matematikai ingára.

Induljunk ki a lineáris harmonikus oszcillátor  $\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$  Lagrange-függvényéből. Tegyük fel, hogy  $\omega$  megadott módon változik. Ez a változás legyen adiabatikus, a  $T$  periódusiő alatti megváltozás legyen sokkal kisebb, mint a  $t$ -pillanatbeli  $\omega$ :

$$\frac{\dot{\omega}T}{\omega} = \frac{2\pi\dot{\omega}}{\omega^2} \ll 1.$$

Hogyan változik közben az  $E$  energia? Mint ismeretes,

$$\dot{E} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \dot{\omega} = m\omega x^2 \cdot \dot{\omega}.$$

Az adiabatikusság miatt a mozgás harmonikus rezgés lassan változó paraméterekkel:

$$x = A(t) \cdot \sin[\omega(t) \cdot t + \delta(t)],$$

ahonnan

$$\dot{E} = m\omega A^2 \cdot \sin^2(\omega t + \delta) \cdot \dot{\omega}.$$

Mivel  $E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2$ , ez a képlet

$$\dot{E} = E \cdot \frac{\dot{\omega}}{\omega} \cdot 2 \sin^2(\omega t + \delta) \tag{1}$$

<sup>1</sup>Ez azonban nagyon effektív gondolatmenet, mert valahányszor alkalmazható, mindig a korrekt eredményre vezet.

alakban is írható. Átlagoljuk mindkét oldalt a  $(t, t + T)$  intervallumra:

$$\dot{\bar{E}} = \bar{E} \frac{\dot{\omega}}{\omega}, \quad (2)$$

amelyből következik, hogy  $\bar{E}/\omega$  időben állandó.

A kíméletlen átlagolás finomítható (1.Függelék), de a lényeg már ebből a gondolatmenetből is látszik: az adiabatikus invariáns olyan mozgás állandó, amely a gyors mozgásra történő átlagképzés lehetőségének köszönheti a létét.

Az adiabatikus invariancia felhasználható arra, hogy a lengések  $E_i$  energiáját a  $\xi$ -mozgás potenciális energiájává konvertáljuk. A teljes energia az  $E_1$ , az  $E_2$ , valamint a  $\xi$ -mozgás

$$K_\xi = \frac{m + M}{2} (\dot{r}_1^2 + \dot{r}_2^2) + \frac{1}{2} \Theta \dot{\varphi}^2$$

kinetikus energiájának az összege ( $\Theta$  és  $\varphi$  a csiga tehetetlenségi nyomatéka és elfordulása), amely a  $\xi$ -n keresztül is kifejezhető:

$$K_\xi = L \cdot m r_0^2 \dot{\xi}^2, \quad L = \frac{m + M + \Theta/2R^2}{m}. \quad (3)$$

Amikor  $I_1$  és  $I_2$  (közelítően) konstans,  $E_1$  és  $E_2$  kifejezhető az adiabatikus invariánsokon és a  $\xi$ -n keresztül, és a teljes energia az

$$E = K_\xi + U(\xi)$$

alakban írható, amelyben

$$U(\xi) = \omega_0 \left[ \frac{I_1}{\sqrt{1+\xi}} + \frac{I_2}{\sqrt{1-\xi}} \right]. \quad (4)$$

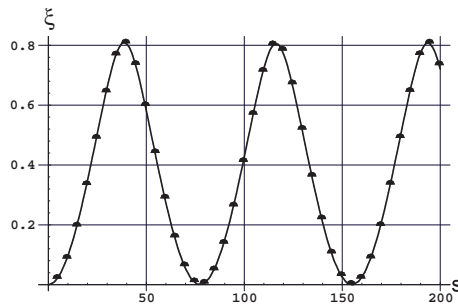
Ez az  $U$  effektív potenciál egy gödör, amelyben a  $\xi$  nemlineáris ingadozásokat végez. A gödör  $I_1 = I_2$ -nél szimmetrikus, az ingadozás ekkor  $\xi = 0$  körül történik. A  $|\xi| \ll 1$  határesetben az ingadozás lineáris rezgés az

$$U \approx \omega_0 \left[ (I_1 + I_2) - \frac{1}{2}(I_1 - I_2)\xi + \frac{3}{8}(I_1 + I_2)\xi^2 \right]$$

potenciálban, amelynek  $\Omega$  körfrekvenciáját az

$$\Omega^2 = \frac{1}{L} \cdot \frac{3\omega_0(I_1 + I_2)}{8mr_0^2} \quad (|\xi| \ll 1) \quad (5)$$

képlet határozza meg (ez a képlet használható az ingadozási frekvencia becslésére). Mint látjuk, a lengések stabilizálják a nyugvó inga közömbös egyensúlyi helyzetét.



2. ábra. Egzakt megoldás és adiabatikus közelítés (1.széria)

A kétatomos molekulával az analógia nyilvánvaló: az ingadozás a molekulák relatív mozgásának, a lengés az elektronok "belső" mozgásának felel meg.

Az  $I_1$  és az  $I_2$  csak akkor invariáns, ha  $\omega_1$  és  $\omega_2$  változása kellően lassú. Amikor a körfrekvenciát (direkciós konstansot) "kívülről" változtatjuk megadott módon, a lassúság könnyen biztosítható. Feladatunkban azonban

a rendszer maga határozza meg az  $\omega_1$  és az  $\omega_2$  változási sebességét, és ez a sebesség csak bizonyos paraméterek mellett (és bizonyos kezdőfeltétel-tartományban) lesz lassú. A megfelelő kritérium nyilván

$$\omega_1, \omega_2 \gg \Omega.$$

Nagyságrendileg  $\omega_1, \omega_2 \approx \omega_0$ , az  $\Omega$  pedig (5) alapján becsülhető, ezért az adiabatikus közelítés (a lengési energia konvertálása potenciállá) akkor érvényes, ha

$$L \gg \frac{3(I_1 + I_2)}{8mr_0^2\omega_0}.$$

Az  $L$  *lomhaság* tehát az adiabatikusság érvényességét jelző paraméter. Minél nagyobb az  $L$ , annál lassúbb a  $\xi$  változása, annál pontosabban helyettesíthető a lengések energiája az ingadozás  $U(\xi)$  potenciális energiájával. A numerikus számítás azt mutatja, hogy a közelítés már  $L = 100$  mellett igen jó (2. ábra).

### 3. Az effektív potenciál nemlineáris lengésnél.

A kettős inga (4) effektív potenciálját az egyedi ingára vonatkozó összefüggés

$$E = \omega I = \frac{\omega_0 I}{\sqrt{1 \pm \xi}} \quad (6)$$

jobb oldala határozza meg, de ez a képlet csak lineáris lengésekre érvényes. Ebben a részben ennek a képletnek az általánosításával foglalkozunk nemlineáris (nagy amplitúdójú) lengésekre és forgásra (átfordulásokra)<sup>2</sup>.

Az adiabatikus invariáns

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq$$

képletéből indulunk ki, amely az általános esetben is érvényes. Az ingára specializálva ez a képlet a következő:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p_\alpha d\alpha = konst \cdot r\sqrt{E} \int_{-\alpha_m}^{\alpha_m} d\alpha \sqrt{1 - 2\frac{mgr}{E} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

amelyben

$$\alpha_m = \begin{cases} 2 \cdot \arcsin \sqrt{\frac{E}{2mgr}} & E < 2mgr \quad (\text{lengés}) \\ \pi & E > 2mgr \quad (\text{forgás}) \end{cases}$$

és — a határozottság kedvéért —  $r = r_0(1 + \xi)$ . Ahhoz, hogy az effektív potenciált leolvashassuk, ezt az egyenletet kell megoldanunk  $E$ -re, ami nem egészen egyszerű feladat.

Vezessük be az

$$\varepsilon = \frac{E}{mgr_0} \quad x = 2\frac{1 + \xi}{\varepsilon}$$

dimenziótlan paramétereket, és az  $I$  helyett dolgozzunk  $A$ -val, amely az előbbi konstansszorososa. Képletünk a következő alakot ölti:

$$A = \varepsilon^{3/2} \cdot h(x) \quad (7)$$

$$h(x) = x \cdot \int_{-\alpha_m(x)}^{\alpha_m(x)} d\alpha \cdot \sqrt{1 - x \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (8)$$

<sup>2</sup>Fonáljánál a kis sebességű forgás természetesen nem realizálható.

Az egyedi ingára vonatkozó effektív potenciál  $\varepsilon = f(\xi, A)$  képletét parametrikus formában tudjuk felírni (paraméter  $x$ ):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \left[ \frac{A}{h(x)} \right]^{2/3} \\ \xi &= \frac{x}{2} \cdot \varepsilon - 1 = \frac{x}{2} \cdot \left[ \frac{A}{h(x)} \right]^{2/3} - 1. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Ha ezt a függvényt ismerjük, a *kettős* inga adiabatikus potenciálját az

$$U = f(\xi, A) + f(-\xi, A)$$

képlet alapján kaphatjuk meg.

Az  $A$  és az  $I$  kapcsolatának megállapítására számítsuk ki  $f$ -t kis amplitúdójú lengésre. Ekkor  $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ , és  $\alpha_m \approx 2/\sqrt{x}$ . Ha  $\alpha$  helyett bevezetjük a  $\beta = \alpha/\alpha_m$  integrációs változót, akkor

$$h(x) = \sqrt{2x} \int_{-1}^1 d\beta \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = \pi \sqrt{\frac{x}{2}} = \pi \sqrt{\frac{1 + \xi}{\varepsilon}}.$$

Ezt (7)-be írva és rendezve az

$$\varepsilon = \frac{A}{\pi \sqrt{1 + \xi}} \equiv f(\xi, A)$$

képletre jutunk, amely  $A = \frac{\omega_0 \pi}{mgr_0} I$  azonosítás mellett megegyezik (6)-al.

Általános esetben azonban az effektív potenciál csak numerikusan vizsgálható, ha előzetesen felderítjük a  $h(x)$  függvény különleges pontjait. A diszkusszió eredménye a következő:

$$x \rightarrow 0\text{-nál } h(x) \sim \pi x.$$

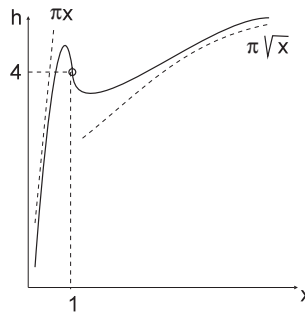
$$x \rightarrow \infty\text{-nél } h(x) \sim \pi \sqrt{x}.$$

$$h(1) = 4 \quad h'(1) = -\infty.$$

$$h(x_{max} \approx 0.95) \approx 4.03 \quad (\text{maximum})$$

$$h(x_{min} \approx 1.05) \approx 3.95 \quad (\text{minimum})$$

A  $h(x)$  szabadkézi rajzát a 3. ábrán láthatjuk.



3. ábra. A  $h(x)$  görbe.

Áttérünk az  $f(\xi, A)$  vizsgálatára. Mindenekelőtt észrevesszük, hogy ez a kétváltozós függvény visszavezethető egy  $\bar{f}(\bar{\xi})$  egyváltozós függvényre a következő módon: Legyen (9)-ben

$$\left. \begin{aligned} \xi &= A^{2/3} \bar{\xi} - 1 \\ \varepsilon &= A^{2/3} \bar{\varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ezt kapjuk:

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= \frac{x}{2[h(x)]^{2/3}} \\ \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{[h(x)]^{2/3}},\end{aligned}$$

amely az  $\bar{\varepsilon} = \bar{f}(\bar{\xi})$  függvény parametrikus alakja.

A (10) inverze

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= \frac{1}{A^{2/3}}(\xi + 1) \\ \varepsilon &= \frac{\varepsilon}{A^{2/3}}.\end{aligned}$$

Ha ezt az  $\bar{\varepsilon} = \bar{f}(\bar{\xi})$ -be írjuk, az

$$\varepsilon = A^{2/3} \cdot \bar{f}[A^{-2/3}(\xi + 1)] \equiv f(\xi, A)$$

egyenletre jutunk, amely  $f(\xi, A)$ -t visszavezeti  $\bar{f}(\bar{\xi})$ -re.

Az  $\bar{f}(\bar{\xi})$  függvény diszkussziója a következő eredményt adja:

$$\bar{\xi} \rightarrow 0\text{-nál } \bar{f}(\bar{\xi}) \sim \frac{1}{(2\pi\bar{\xi})^2}.$$

$$\bar{\xi} \rightarrow \infty\text{-nél } \bar{f}(\bar{\xi}) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{2\bar{\xi}}}.$$

$$x = x_{max}\text{-nál } \bar{f}(\bar{\xi} \approx 0.19) \approx 0.395 \quad (\text{antiscusp, } h' = \mp\infty).$$

$$x = x_{min}\text{-nél } \bar{f}(\bar{\xi} \approx 0.21) \approx 0.4 \quad (\text{cusp, } h' = \pm\infty).$$

Az  $x = 1$ -nek megfelelő  $\bar{\xi} \approx 0.2$ -ben  $\bar{f}(\bar{\xi})$  reguláris.

Az  $\bar{f}(\bar{\xi})$  szabadkézi rajzát a 4.ábrán a folytonos vonal mutatja. Szaggatott vonallal a lineáris közelítéshez tartozó függvényt ábrázoltuk. Ehhez tart  $\bar{f}(\bar{\xi}) \bar{\xi} \rightarrow \infty$ -nél.

A numerikus kiértékelés mutatja, hogy a nemlinearitás *kvalitatíve* nem változtatja meg a (6) effektív potenciál menetét. Csak a  $\bar{\xi} = 0.2$  pont közvetlen környezete az, ahol a pontos potenciálnak szingularitásai vannak. Ez azonban a lengés és a forgás közötti átmenet tartománya, amelyben adiabatikus közelítésről semmiképpen sem lehet szó (a periódusidő itt nagyon nagy, az átmeneti pontban végtelen). Az adiabatikusság szempontjából számbajöhető kezdőfeltételeknél azonban a mozgás kvalitatív képét feltehetően nem rontjuk el, ha a pontos effektív potenciált a lineáris lengések potenciáljával közelítjük. A (lengések szempontjából) lineáris közelítésben végzett számításokat ezért akkor is elfogadhatjuk, ha az  $\alpha$  változási tartománya a  $(\sim -1, \sim 1)$  intervallum<sup>3</sup>.

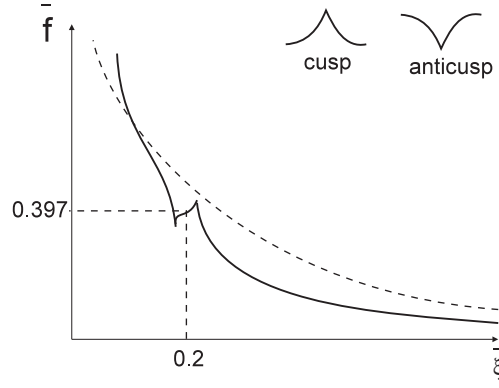
#### 4. Az adiabatikus közelítés megalapozása.

Az egyedi inga adiabatikus invariánsának vizsgálatánál lényeges, hogy a kontrollparaméter (esetünkben az  $\omega$ -t meghatározó fonálhossz) változása lassú és *síma*: még kis amplitúdóval sincs benne gyors,  $\sim \omega_0$  körfrekvenciájú oszcilláció. Ezen feltétel mellett igazolható (ld. az 1.Függelék), hogy az  $\dot{\omega}$  nagyságrendjét jellemző  $\epsilon$ -ban lineáris pontossággal az átlagenergia is síma függvény és arányos  $\omega$ -val.

A kettős inga két ingájára ezeknek a feltételeknek a teljesülése egyáltalán nem nyilvánvaló. Tekintsük pl.  $\xi$ -t az 1. inga kontrollparaméterének. Még ha  $\xi$  változása lassú is ( $\epsilon$  rendű), az már egyáltalán nem várható el, hogy símán változzon, és  $\epsilon$  rendben ne tartalmazzon  $\omega_2$  körüli körfrekvenciával rezgő komponens.

Ha egy (nem szigorúan nyugvó) inga paraméterét a lengési frekvenciával moduláljuk, *parametrikus rezonancia* lép fel: kis amplitúdójú perturbáció is jelentős gerjesztésre képes. A paraméter adiabatikus változásával szemben parametrikus rezonanciánál a lengési energia úgy nő, hogy közben a körfrekvencia változatlan marad, vagyis a hatás az adiabatikus invariáns növekedésében jelentkezik. Mivel a kettős inga energiakészlete véges, a parametrikus rezonancia kifejezést csak képletesen használhatjuk, hiszen közben a 2.ingánál ellenkező irányú

<sup>3</sup> Az *ingadozásoknál* azonban nem korlátozódunk a lineáris közelítésre.



4. ábra. Az  $\bar{f}(\bar{\xi})$  görbe.

folyamat (energiacsökkenés) megy végbe, és csak akkor lehet eldönteni, melyik inga gerjeszti a másikat, amikor energiakülönbségük jelentős.

Az ingák energiacserejét tehát két tényező szabályozza: a centrifugális erők különbsége, valamint a parametrikus rezonanciának nevezhető kölcsönhatás. Az effektív hatás bevezetésénél hallgatólagosan feltételeztük, hogy csak az első számít. A jelen fejezet ennek a feltevésnek az indoklását tartalmazza. A megalapozás abból áll, hogy megmutatjuk: az effektív potenciál módszere egy szisztematikus közelítő eljárás (az ún. *aszimptotikus perturbációszámítás*) első közelítése, ezért kívánságra javítható és a pontossága becsülhető.

Az aszimptotikus perturbációszámítás lényege a következő: Tegyük fel, hogy a probléma dinamikai változói lassú és gyors változókra oszthatók, amelyeket az  $x$  és az  $y$  sokkomponensű mennyiségekbe tömörítünk. A felosztás azon alapul, hogy a feladat tartalmaz egy  $\epsilon$  kis paramétert, amelynek nullához tartásakor  $\dot{x}$  is zérushoz tart, vagyis a mozgásegyenletek a következő standard alakra hozhatók:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \epsilon \cdot X(x, y, \epsilon) \\ \dot{y} &= \omega(x) + \epsilon \cdot Y(x, y, \epsilon), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ahol az  $X$  és az  $Y$  az  $y$ -ban  $2\pi$ -periódusúak és  $\epsilon = 0$ -nál  $O(1)$ -k. Szisztematikus eljárás adható új  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  lassú és gyors változók bevezetésére úgy, hogy  $\bar{x}$  egyre pontosabban közelítse az  $x$ -nek a gyors változók periódusidejére átlagolt értékét és a rá vonatkozó mozgásegyenlet ne tartalmazzon gyors változót:

$$\dot{\bar{x}} = \epsilon A_1(\bar{x}) + \epsilon^2 A_2(\bar{x}) + \dots + \epsilon^n A_n(\bar{x}). \quad (12)$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása a  $t \sim 1/\epsilon$  tartományban  $\epsilon^n$  pontossággal közelíti meg az  $x$  pontos átlagos változását.

Speciálisan az első közelítést az egyenletek átlagolásával kapjuk, vagyis

$$A_1(\bar{x}) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} X(\bar{x}, y, 0) dy_1 \dots dy_k$$

(a  $k$  a gyors változók száma).

Megmutatjuk, hogy a kettős inga mozgásegyenletei (11) alakra hozhatók, és a (12) első közelítése az effektív potenciál módszerrel azonos.

Az

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} r_0^2 (1 + \xi)^2 \dot{\alpha}_1^2 + \frac{m}{2} r_0^2 (1 - \xi)^2 \dot{\alpha}_2^2 + L \cdot m r_0^2 \dot{\xi}^2 - \frac{1}{2} m g r_0 [(1 + \xi) \alpha_1^2 + (1 - \xi) \alpha_2^2]$$

Lagrange-függvényből indulunk ki, és áttérünk a

$$\mathcal{H} = E_1 + E_2 + K_\xi = \frac{p_1^2}{2m r_0^2 (1 + \xi)^2} + \frac{1}{2} m g r_0 (1 + \xi) \alpha_1^2 + \frac{p_2^2}{2m r_0^2 (1 - \xi)^2} + \frac{1}{2} m g r_0 (1 - \xi) \alpha_2^2 + \frac{p_\xi^2}{4L m r_0^2}$$

Hamilton-függvényre, amelyben

$$p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_1} = m r_0^2 (1 + \xi)^2 \dot{\alpha}_1$$

$$\begin{aligned}
p_2 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\alpha}_2} = mr_0^2(1 - \xi)^2 \dot{\alpha}_2 \\
p_\xi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} = 2Lmr_0^2 \dot{\xi}.
\end{aligned}$$

A  $p_1, \alpha_1$  és a  $p_2, \alpha_2$  párok mindegyike gyors, de gyors változásukat valójában egy-egy gyors *szögváltozó*, a fázispontok  $w_1, w_2$  polárkoordinátája határozza meg. A szögváltozókhöz konjugált impulzusok az  $I_1, I_2$  *hatásváltozók*, amelyek az izolált ingák mozgásállandói, és azonosak korábbi adiabatikus invariánsainkkal. A kettős ingánál ezek nyilvánvalóan lassú változók, ezért a standard alakra hozást célszerű a  $p_i, \alpha_i \rightarrow I_i, w_i$  változócserevel kezdeni. Egyedi ingákra ennek a kanonikus transzformációnak a generátorfüggvénye jól ismert:

$$\Phi = \bar{S}_0(\alpha, I) = \int p(\alpha, I) d\alpha$$

az u.n. rövidített hatás. A generátorfüggvény a régi koordinátáknak ( $q$ ) és az új impulzusoknak ( $P$ ) a függvénye, és a kanonikus transzformáció implicit képletei a

$$p_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} \quad (13)$$

szabály alapján kaphatók meg belőle.

A kettős ingánál gondoskodnunk kell a  $\xi, p_\xi$  változó párról is. Logikus megkövetelni, hogy  $\xi$  maradjon kanonikus koordináta, de az áttekinthetőség érdekében célszerű az új változók között új betűvel —  $x$ -el — jelölni. A (13) egyenletek között szerepelnie kell tehát az  $x = \xi$  egyenletnek, ami megköveteli, hogy a  $\Phi$ -ben az  $x$ -hez konjugált impulzus csak egy  $\xi p$  tagban forduljon elő. A  $\xi$  azonban automatikusan jelen lesz a  $p_i, \alpha_i$  változók transzformációját generáló  $\bar{S}_0$ -akban, és ezt a tényt a  $p_\xi$  (13)-ból történő számításánál figyelembe kell venni.

Mindent összevéve a generátorfüggvény a

$$\Phi = S_0(\alpha_1, I_1; \xi) + S_0(\alpha_2, I_2; -\xi) + \xi \cdot p$$

kifejezés lesz, amelyben

$$S_0(\alpha, I; \xi) = \bar{S}_0(\alpha, I; r_0(1 + \xi)).$$

A  $\bar{S}_0$  argumentumai között, a pontosvessző után feltüntetjük az inga hosszát is. Az egyedi ingánál ennek nincs szerepe, de most a  $\Phi$  ezen a változón keresztül is függ  $\xi$ -től.

A  $\mathcal{H}$  első két tagját — az  $E_i$ -ket, — könnyű kifejezni az új változókon keresztül, mert ez ugyanúgy történik, mint az egyedi ingánál. Eszerint

$$E_1 = \frac{\omega_0 I_1}{\sqrt{1+x}} \quad E_2 = \frac{\omega_0 I_1}{\sqrt{1-x}}.$$

A  $K_\xi$  átírása okoz egyedül gondot. Ehhez a  $p_\xi$  új változóban felírt alakjára van szükség. A (13)-ból erre a változóra a

$$p_\xi = P + \frac{\partial S_0(\alpha_1, I_1; \xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial S_0(\alpha_2, I_2; -\xi)}{\partial \xi} \quad (14)$$

kifejezésünk van, amely azonban — még ha ki is számoljuk, — tartalmazza az  $\alpha_i$  régi kordinátákat, amelyeket még ki kell fejezni az új változókon keresztül. A Landau-Lifsic Mechanika 50.§ feladatában azonban egy sokkal egyszerűbb indirekt módszert alkalmaz. Célszerű ezt az utat követni.

Induljunk ki az egyedi matematikai ingára érvényes

$$\alpha = \sqrt{\frac{I}{mg^{1/2}r^{3/2}}} \cdot \sin w \quad p_\alpha = \sqrt{mg^{1/2}r^{3/2}I} \cdot \cos w \quad (15)$$

képletekből, amelyekben  $w = \omega t$ . Ezek alapján

$$\bar{S}_0(\alpha, I; r) = \int p_\alpha d\alpha = \sqrt{mg^{1/2}r^{3/2}I} \cdot \int \cos w \cdot \left( \frac{\partial \alpha}{\partial w} \right)_{I,r} \cdot dw = I \int \cos^2 w \cdot dw.$$



A (14) jobboldalának kiértékeléséhez a

$$\frac{\partial \bar{S}_0(\alpha, I; r)}{\partial r} = I \cdot \cos^2 w \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{\alpha, I} \quad (16)$$

parciális deriváltakra van szükség, amelynek utolsó tényezőjét (15) első egyenletének  $r$ -szerinti deriválásával kaphatjuk meg:

$$0 = \sqrt{\frac{I}{mg}} \left[ -\frac{3}{4} \cdot \frac{\sin w}{r^{7/4}} + \frac{\cos w}{r^{3/4}} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{\alpha, I} \right],$$

ahonnan

$$\left( \frac{\partial w}{\partial r} \right)_{\alpha, I} = \frac{3}{4r} \tan w.$$

Ezt (16)-ba írva látjuk, hogy

$$\frac{\partial \bar{S}_0(\alpha, I; r)}{\partial r} = \frac{3I}{8r} \sin 2w,$$

ahonnan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{S}_0(\alpha_1, I_1; \xi)}{\partial \xi} &= r_0 \left[ \frac{\partial \bar{S}_0(\alpha_1, I_1; r)}{\partial r} \right]_{r=r_0(1+\xi)} = \frac{3I_1}{8} \cdot \frac{\sin w_1}{1+\xi} \\ \frac{\partial \bar{S}_0(\alpha_2, I_2; -\xi)}{\partial \xi} &= -r_0 \left[ \frac{\partial \bar{S}_0(\alpha_2, I_2; r)}{\partial r} \right]_{r=r_0(1-\xi)} = -\frac{3I_2}{8} \cdot \frac{\sin w_2}{1-\xi}. \end{aligned}$$

Mivel  $\xi = x$ , a (14) alapján azt találjuk, hogy

$$p_\xi = p + \frac{3}{8} \left( \frac{I_1 \cdot \sin 2w_1}{1+x} - \frac{I_2 \cdot \sin 2w_2}{1-x} \right).$$

Az új változókon keresztül kifejezett Hamilton-függvény tehát a következő:

$$\mathcal{H} = \frac{\omega_0 I_1}{\sqrt{1+x}} + \frac{\omega_0 I_2}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{4L \cdot mr_0^2} \cdot \left[ p + \frac{3}{8} \left( \frac{I_1 \cdot \sin 2w_1}{1+x} - \frac{I_2 \cdot \sin 2w_2}{1-x} \right) \right]^2.$$

A mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2Lmr_0^2} \cdot \left[ p + \frac{3}{8} \left( \frac{I_1 \cdot \sin 2w_1}{1+x} - \frac{I_2 \cdot \sin 2w_2}{1-x} \right) \right] \\ \dot{p} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega_0 I_1}{1+x^{3/2}} - \frac{\omega_0 I_2}{1-x^{3/2}} \right] + \frac{3}{16Lmr_0^2} \left[ p + \frac{3}{8} \left( \frac{I_1 \cdot \sin 2w_1}{1+x} - \frac{I_2 \cdot \sin 2w_2}{1-x} \right) \right] \cdot \left[ \frac{I_1 \cdot \sin 2w_1}{(1+x)^2} + \frac{I_2 \cdot \sin 2w_2}{(1-x)^2} \right] \\ \dot{I}_1 &= -\frac{3}{8Lmr_0^2} \left[ p + \frac{3}{8} \left( \frac{I_1 \cdot \sin 2w_1}{1+x} - \frac{I_2 \cdot \sin 2w_2}{1-x} \right) \right] \cdot \frac{I_1 \cdot \cos 2w_1}{1+x} \\ \dot{I}_2 &= \frac{3}{8Lmr_0^2} \left[ p + \frac{3}{8} \left( \frac{I_1 \cdot \sin 2w_1}{1+x} - \frac{I_2 \cdot \sin 2w_2}{1-x} \right) \right] \cdot \frac{I_2 \cdot \cos 2w_2}{1-x} \\ \dot{w}_1 &= \frac{\omega_0}{\sqrt{1+x}} + \frac{3}{16Lmr_0^2} \left[ p + \frac{3}{8} \left( \frac{I_1 \cdot \sin 2w_1}{1+x} - \frac{I_2 \cdot \sin 2w_2}{1-x} \right) \right] \cdot \frac{\sin 2w_1}{1+x} \\ \dot{w}_2 &= \frac{\omega_0}{\sqrt{1-x}} - \frac{3}{16Lmr_0^2} \left[ p + \frac{3}{8} \left( \frac{I_1 \cdot \sin 2w_1}{1+x} - \frac{I_2 \cdot \sin 2w_2}{1-x} \right) \right] \cdot \frac{\sin 2w_2}{1-x} \end{aligned}$$

Ezeknek az egyenleteknek előnyös tulajdonsága, hogy Hamilton-függvényből származtathatók és (a  $p$  kivételével) az adiabatikus közelítés változóira vonatkoznak, amelyek természetes módon oszthatók fel lassúakra és gyorsakra. Hátrányuk viszont, hogy a jobboldalak bonyolultak (a  $p_\xi$ -t kifejező hosszú zárójel mindenütt ismétlődik), és ez tetemesen lassítja a numerikus integrálást. Ezenkívül az egyenletek struktúrája nem a (11)-nek

megfelelő standard alak. A fizikai kép alapján ugyanis *csak* a szögváltozók gyorsak, ezért az összes többi egyenlet jobboldalának arányosnak kell lennie a kis paraméterrel (pl.  $1/L$ -el), és ez nincs így.

Ezeket a hátrányokat alkalmas változó transzformációval kell kiküszöbölni. A  $p$  helyett nyilván célszerű visszahozni  $p_\xi$ -t, és a transzformációt fel kell használni dimenziólanításra, valamint a standard  $x, y$  jelölések bevezetésére a lassú és a gyors változókra. A független változót is dimenziótlantjuk:  $s = \omega_0 t$  lesz a dimenziótlán "idő".

Némi próbálgatás után a következő transzformációnál állapodhatunk meg:

$$I_1 = 2mr_0^2\omega_0 \frac{x_1}{(1+x_3)^{3/2}} \quad (17)$$

$$I_2 = 2mr_0^2\omega_0 \frac{x_2}{(1-x_3)^{3/2}} \quad (18)$$

$$x = x_3$$

$$w_1 = \frac{1}{2}y_1$$

$$w_2 = \frac{1}{2}y_2$$

(19)

Az  $x_4$  változót úgy választjuk meg, hogy a deriváltja a kis paraméterrel legyen arányos, és egyébként lényegében egyezzen meg  $p_\xi$ -vel:

$$x_4 = \frac{1}{2mr_0^2\omega_0\sqrt{L}} \left[ p + \frac{3}{8} \left( \frac{I_1 \cdot \sin 2w_1}{1+x} - \frac{I_2 \cdot \sin 2w_2}{1-x} \right) \right],$$

ahonnan

$$p = mr_0^2\omega_0 \left\{ 2\sqrt{L} \cdot x_4 - \frac{3}{4} \left[ \frac{x_1 \cdot \sin y_1}{(1+x)^{5/2}} - \frac{x_2 \cdot \sin y_2}{(1-x)^{5/2}} \right] \right\}.$$

Ez a transzformáció nem kanonikus (az új változók nem oszthatók fel konjugált párokra), ezért ha  $\mathcal{H}$ -ba helyettesítjük őket, megkapjuk az energiát, de ez nem lesz egyben Hamilton-függvény is. Az új egyenleteket ezért közvetlenül a régi egyenletek átírása útján lehet csak meghatározni. Ezt kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{ds} &= \frac{3}{2\sqrt{L}} \frac{x_1 x_4}{1+x_3} \left( 1 - \frac{1}{2} \cos y_1 \right) \\ \frac{dx_2}{ds} &= -\frac{3}{2\sqrt{L}} \frac{x_2 x_4}{1-x_3} \left( 1 + \frac{1}{2} \cos y_2 \right) \\ \frac{dx_3}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{L}} x_4 \\ \frac{dx_4}{ds} &= \frac{1}{2\sqrt{L}} \left\{ \frac{x_1}{(1+x_3)^3} - \frac{x_2}{(1-x_3)^3} + \frac{3}{2} \left[ \frac{x_1 \cos y_1}{(1+x_3)^3} - \frac{x_2 \cos y_2}{(1-x_3)^3} \right] \right\} \\ \frac{dy_1}{ds} &= \frac{2}{\sqrt{1+x_3}} + \frac{3}{4\sqrt{L}} \frac{x_4 \sin y_1}{1+x_3} \\ \frac{dy_2}{ds} &= \frac{2}{\sqrt{1-x_3}} - \frac{3}{4\sqrt{L}} \frac{x_4 \sin y_1}{1-x_3} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Ezek az egyenletek standard alakúak és meghatározzák a kis paraméter korrekt alakját:  $\epsilon = 1/\sqrt{L}$  (nem  $1/L$ ). Az egyenletek jobboldala jelentősen egyszerűsödött, ez bő nagyságrenddel gyorsítja a numerikus integrálást és tetemesen csökkenti a hibáját<sup>4</sup>.

<sup>4</sup>A numerikus integrálás pontossága az

$$E = mr_0^2\omega_0^2 \left[ \frac{2x_1}{(1+x_3)^2} + \frac{2x_2}{(1-x_3)^2} + x_4^2 \right]$$

energiaintegrál monitorozása, valamint olyan ideális kezdőfeltételekhez tartozó megoldások alapján becsülhető, amelyek pontosan ismertek. A standard egyenletekkel végzett számítások eszerint legalább a harmadik jegyig bezárólag pontosak.

Az aszimptotikus perturbáció számítás első ( $\epsilon^1$  rendű) közelítését az egyenletek  $y_i$ -re történő átlagolásával kapjuk:

$$\frac{d\bar{x}_1}{ds} = \frac{3}{2\sqrt{L}} \frac{\bar{x}_1\bar{x}_4}{1+\bar{x}_3} \quad (21)$$

$$\frac{d\bar{x}_2}{ds} = -\frac{3}{2\sqrt{L}} \frac{\bar{x}_2\bar{x}_4}{1-\bar{x}_3} \quad (22)$$

$$\frac{d\bar{x}_3}{ds} = \frac{1}{\sqrt{L}}\bar{x}_4 \quad (23)$$

$$\frac{d\bar{x}_4}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{L}} \left[ \frac{\bar{x}_1}{(1+x_3)^3} - \frac{\bar{x}_2}{(1-x_3)^3} \right]. \quad (24)$$

$$(25)$$

Ez az egyenletrendszer integrálható. A (23)-t deriválva

$$\frac{d^2\bar{x}_3}{ds^2} = \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{d\bar{x}_4}{ds} = \frac{1}{2L} \left[ \frac{\bar{x}_1}{(1+x_3)^3} - \frac{\bar{x}_2}{(1-x_3)^3} \right]. \quad (26)$$

Másrészt a (21), (22) a (23) segítségével így írható:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_1}{ds} &= \frac{3}{2} \frac{\bar{x}_1}{1+\bar{x}_3} \frac{d\bar{x}_3}{ds} \\ \frac{d\bar{x}_2}{ds} &= -\frac{3}{2} \frac{\bar{x}_2}{1-\bar{x}_3} \frac{d\bar{x}_3}{ds}, \end{aligned}$$

ahonnan

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= C_1 \cdot (1+\bar{x}_3)^{3/2} \\ \bar{x}_2 &= C_2 \cdot (1-\bar{x}_3)^{3/2}, \end{aligned}$$

ahol  $C_i$  az  $\bar{x}_i$  értéke  $\bar{x}_3 = 0$ -nál, azaz (17), (18) szerint

$$C_i = \frac{I_i}{2mr_0^2\omega_0} \quad (i = 1, 2).$$

Ezt a megoldást (26)-ba helyettesíthetjük:

$$\frac{d^2\bar{x}_3}{ds^2} = \frac{1}{2L} \left[ \frac{\bar{C}_1}{(1+x_3)^{3/2}} - \frac{\bar{C}_2}{(1-x_3)^{3/2}} \right] = -\frac{d}{d\bar{x}_3} \left[ \frac{1}{L} \left( \frac{C_1}{\sqrt{1+\bar{x}_3}} + \frac{C_2}{\sqrt{1-\bar{x}_3}} \right) \right],$$

vagy a  $t$ -változóra visszatérve

$$\frac{d^2\bar{x}_3}{dt^2} = -\frac{d}{d\bar{x}_3} \left[ \frac{\omega_0^2}{L} \left( \frac{C_1}{\sqrt{1+\bar{x}_3}} + \frac{C_2}{\sqrt{1-\bar{x}_3}} \right) \right].$$

Vegyük most figyelembe, hogy ( $\epsilon$ -ban lineáris pontossággal)  $\bar{x}_3 = \xi$ , és (3) szerint a  $\xi$ -mozgáshoz tartozó tömeg  $2Lmr_0^2$ . Ha az egyenletet ezzel megszorozva az erőre térünk át, akkor a jobboldalon a

$$2mr_0^2\omega_0^2 \left( \frac{C_1}{\sqrt{1+\xi}} + \frac{C_2}{\sqrt{1-\xi}} \right) = \omega_0 \left( \frac{I_1}{\sqrt{1+\xi}} + \frac{I_2}{\sqrt{1-\xi}} \right)$$

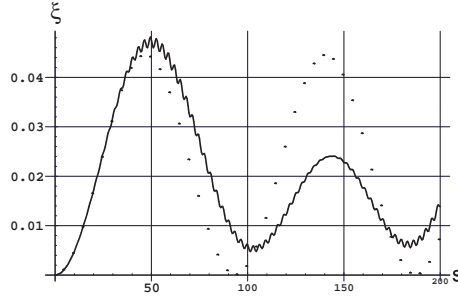
potenciál negatív deriváltja fog állni, és ez a potenciál azonos (4)-el.

Ezzel igazoltuk, hogy az adiabatikus invariancián alapuló tárgyalás egy szisztematikus közelítő eljárás első lépése. A  $\sim \omega_0$  körfrekvenciájú, gyorsan változó  $\sin y_i$ -vel,  $\cos y_i$ -vel arányos tagok ehhez a közelítéshez még

nem adnak járulékot. Ebben az első közelítésben tehát a fejezet bevezetőjében diszkutált parametrikus rezonanciaszerű folyamatok még nem jutnak szóhoz.

### 5.A mozgás kvalitatív képe.

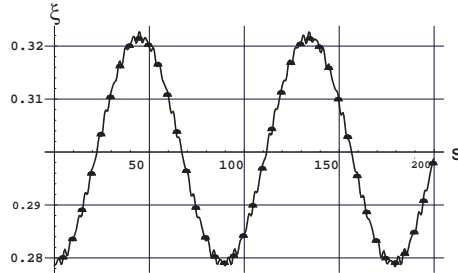
Az aszimptotikus perturbációszámítás garantálja, hogy az első rend  $\epsilon^1$  rendű közelítés az  $s \sim 1/\epsilon$  időre. Ha  $\epsilon$  csökken, ez az idő tetszőlegesen növelhető, de nagyságrendileg semmiképpen sem haladhatja meg az ingadozások periódusidejét: a (30) szerint ugyanis  $\Omega \approx \omega_0/\sqrt{L} = \epsilon\omega_0$ , vagyis az  $s$  függvényében az ingadozás körfrekvenciája éppen  $\epsilon$ , periódusideje pedig  $\sim 1/\epsilon$ .



5. ábra. Egzakt megoldás és adiabatikus közelítés (2.széria)

A mozgásegyenletek numerikus integrálása azonban arra mutat, hogy — a kezdőfeltételektől függően, — az adiabatikus közelítés esetenként  $1/\epsilon$ -nél sokkal hosszabb (esetleg végtelen hosszú) ideig érvényes. Ez a helyzet a 2.ábra megoldásában, ahol az  $\epsilon = 0.1$ -nek megfelelően az adiabatikus megoldás periódusidejében 10%-nyi hiba megengedett lenne, de ennek nyomát se látjuk. Másrészt, az 5.ábrán az adiabatikus közelítés valóban csak  $s \sim 1/\epsilon$  ideig érvényes.

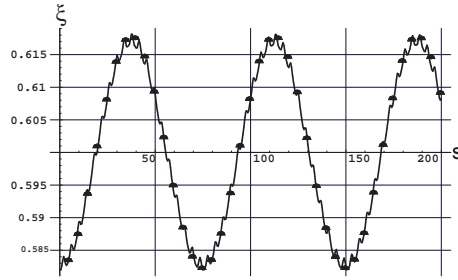
Az  $1/\epsilon$ -nél hosszabb idejű érvényesség természetesen nem mond ellent annak, hogy az aszimptotikus perturbációszámítás csak ennyi időre képes garantálni a megoldás érvényességét, hiszen a tételnek a legkedvezőtlenebb eseteket is fel kell ölelnie. De felmerül a kérdés, vajon mi lehet a magyarázata annak, hogy bizonyos esetekben már az első rend is (az adiabatikus közelítés) fantasztikusan jó eredményt ad.



6. ábra. Egzakt megoldás és adiabatikus közelítés (4.széria)

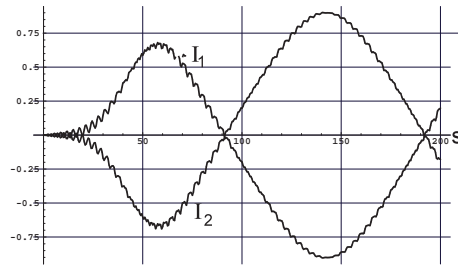
Első látásra azt gondolná az ember, hogy a 2. és az 5.ábra görbéinek különbözősége az ingadozások amplitúdójával (mértékével) függ össze: a  $\xi$  a 2.ábrán 0.8, az 5.ábrán mindössze 0.05 szélességű intervallumban változik. A 6. és a 7.ábra tanúsága szerint azonban ez nem elégséges magyarázat. Ez utóbbi ábrákon  $\xi$  ugyancsak szűk (0.04, ill. 0.03 szélességű) intervallumban változik, az adiabatikus közelítés jósága szempontjából mégis a 2.ábrához hasonlítanak. Az 5.ábrától viszont lényegesen különböznek abban, hogy milyen  $\xi^*$  érték körül történik az ingadozás: az 5.ábrán  $\xi^* \approx 0$ , míg a 6. és a 7.ábrán  $\xi^* = 0.3$  ill. 0.6.

Kisamplitúdójú ingadozásoknál az  $\omega_1/\omega_2$  arányt a  $\xi^*$  értéke praktikusán meghatározza.  $\xi^* = 0$ -nál ez az arány 1. Ez a körülmény arra utal, hogy az ingák lengésében fellépő rezonancia okozhatja az 5.ábra anomális viselkedését. Ez az észrevétel a következő képet sugallja. Az ingadozásért a centrifugális erő átlaga felelős. Ennek az erőnek a fluktuáló része általában kinullázódik a fázisok szabálytalanságai miatt. Kivétel az  $\omega_1 \approx \omega_2$  rezonáns tartomány, amelyben — a fluktuáló erő szempontjából, — az ingák közel azonos frekvenciájú csatolt

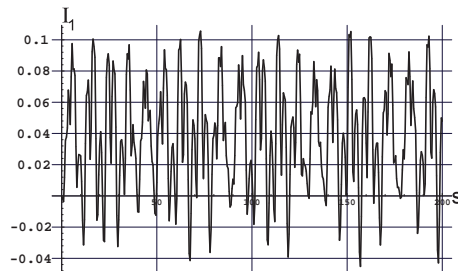


7. ábra. Egzakt megoldás és adiabatikus közelítés (5.széria)

oszillátoroknak tekinthetők, és *lebegésszerű* szabályos energiacsere alakul ki közöttük<sup>5</sup>. A mozgás képét az ingadozás és a lebegés együttesen formálja.



8. ábra. Az  $I_1$  és az  $I_2$  eltérése a kezdeti értéktől (2.széria)



9. ábra. Az  $I_1$  eltérése a kezdeti értéktől (4.széria)

Ahhoz, hogy ezt a felfogást alátámaszthassuk, az energiában valahogy szét kell választanunk az ingadozással és a lebegéssel összefüggő részt. A 4.fejezet elején már szó volt róla, hogy azt az energiacsereét, amely *nem* az ingadozással kapcsolatos, az adiabatikus invariánsok változása kíséri. A 8.ábra mutatja, hogy  $\xi^* \approx 0$ -nál az adiabatikus invariánsok valóban szabályosan "lebegnek", míg a 9.ábra szerint ez a típusú energiacsere gyors oszcillációkat mutat (az ábrákon az

$$\frac{I_1}{mr_0^2\omega_0} = \frac{2x_1}{(1+x_3)^{3/2}} \quad \frac{I_2}{mr_0^2\omega_0} = \frac{2x_2}{(1-x_3)^{3/2}}$$

dimenziótlán invariánsokat tüntettük fel 100-szoros nagyításban).

Érdekes, hogy a  $\xi \approx 0$ -rezonanciának is van analogonja a Born-Oppenheimer modellben: amikor a molekulát alkotó két atom azonos, az elektronállapotok közel elfajult dublettek, és nem lehet feltenni, hogy az elektronállapot határozottan a dublett valamelyik állapota: a relatív mozgás átmenetet indukál a dubletten belül ("lebegés").

<sup>5</sup> A magasabbrendű rezonanciák, mivel nem vezetnek alacsony frekvenciájú lebegésre, úgy látszik nem játszanak lényeges szerepet. A  $\xi^* = 0.6$ -nál  $\omega_2/\omega_1 = 2$ , az ingadozás mégsem anomális.

Köszönetemet fejezem ki *Dr Korpa Csabának* a diszkusszióért és a numerikus számításokban adott tanácsaiért.

### 1.Függelék. Az átlagolás pontosítása.

A (2)-beli  $\bar{E}$  átlag természetének pontosabb megértése érdekében válasszunk le gondolatban  $\dot{\omega}$ -ról egy  $\epsilon$  kis paramétert, vagyis  $\omega$  változási sebessége legyen  $\epsilon$ -rendű. Az  $\dot{E}$  vezető rendje szintén  $\epsilon$ , de természetesen tartalmazni fog  $\epsilon^2, \epsilon^3, \dots$  járulékokat is.

Korlátozódjunk az  $\epsilon^1$  járulékra. Ennek számításánál az (1)-ben csak az  $\epsilon$  rendű tagokat kell megtartani, tehát a jobboldalon  $E$ -t, valamint az  $(\omega t + \delta)$  fázisban szereplő mennyiségeket nulladrendűnek (konstansnak) kell tekinteni.

Integráljuk (1) mindkét oldalát a  $(t, t + \tau)$  intervallumra, ahol  $0 < \tau \leq T$  ( $T = T(t)$ ):

$$\frac{E(t + \tau) - E(t)}{\tau} = E \frac{\dot{\omega}}{\omega} + E \frac{\dot{\omega}}{\omega} \cdot \frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau} \cdot \sin[\omega(2t + \tau) + 2\delta]. \quad (27)$$

A baloldal

$$\bar{E}(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} E(t') dt' \quad (28)$$

$t$ -szerinti deriváltja, a jobboldalon pedig (a nulladrendű)  $E$ -t helyettesíthetjük  $\bar{E}$ -vel:

$$\frac{\dot{\bar{E}}}{\bar{E}} = \frac{\dot{\omega}}{\omega} + \frac{\dot{\omega}}{\omega} \cdot \frac{\sin \omega \tau}{\omega \tau} \cdot \sin[\omega(2t + \tau) + 2\delta]. \quad (29)$$

A jobboldal a  $t$  ismert függvénye, ezért  $\bar{E}(t)$  integrálással elvben meghatározható. Mint látható, hiába síma függvény az  $\dot{\omega}/\omega$  arány, a jobboldal második tagján keresztül  $\bar{E}(t)$   $2\omega$  frekvenciájú "lökötést" is tartalmaz. Abban az speciális esetben azonban, amikor  $\tau = T$ ,  $\sin \omega \tau = 0$  és  $\bar{E}$  — a vizsgált  $\epsilon^1$  rendben, — ugyanolyan síma függvénye lesz  $t$ -nek, mint  $\omega$ . Ebben az esetben érvényes az  $\dot{\bar{E}}/\bar{E} = \dot{\omega}/\omega$  egyenlőség, amely az  $\bar{E}/\omega$  invarianciáját (állandóságát) fejezi ki.

Milyen értelemben állandó az adiabatikus invariáns?

Belátható, hogy a *nemlineáris* oszcillátor  $I \sim \oint p dq$  adiabatikus invariánsa (amelynek  $E/\omega$  speciális esete) *tetszőleges rendben* invariáns. Ez azt jelenti, hogy a kontrollparaméter rögzített mértékű megváltozása mellett minden  $n$  egészhez található olyan  $M_n$  és  $\epsilon_n$  pozitív konstans, hogy  $\epsilon < \epsilon_n$ -nél  $|\Delta I| < \epsilon^n M_n$ .

Ebből *nem* következik, hogy véges kis  $\epsilon$ -nál  $\Delta I$  nulla. Ehhez az kellene, hogy mind  $\epsilon_n$  mind  $M_n$   $n$ -től független legyen. Amikor azonban  $n$ -től független  $\epsilon_n$ -t választunk, akkor  $n$  növekedésével  $M_n$  úgy nő, hogy  $\Delta I$  nem válik zérussá. Ha pedig  $M_n$ -t választjuk  $n$ -től függetlennek, akkor  $n$ -el együtt  $\epsilon_n$  csökkenése akadályozza meg  $\Delta I$  eltűnését: Minden adott  $\epsilon$ -ra lesz olyan  $\bar{n}$ , hogy  $\epsilon > \epsilon_n$ , ha  $n > \bar{n}$ . Adott  $n$ -nél azonban (és ez az  $n$  lehet tetszőleges)  $\Delta I$  annál kisebb, minél kisebb az  $\epsilon$ , azaz minél lassabban következik be a kontrollparaméter adott megváltozása.

### 2.Függelék. Az inga paramétereinek megválasztása.

Talán nem lenne érdektelen demonstrációs célból elkészíteni egy kettős ingát. Ez a függelék ehhez kíván segítséget nyújtani.

A (20) mozgásegyenletek az inga paramétereitől csak az  $L$  lomhaságon keresztül függnek, ez a tény mutatja a kettős inga magasfokú skálaszimmetriáját. A súrlódás azonban ezt elrontja, ezért nem mindegy, hogy adott  $L$ -nél milyen fonálhosszat és tömeget választunk.

A paraméterválasztás alapkövetelménye az, hogy az ingadozás  $\Omega$  körfrekvenciája legyen sokkal kisebb a lengések  $\sim \omega_0$  körfrekvenciájánál, és a súrlódás hatása néhány ingadozási periódus alatt legyen elhanyagolható.

A kiinduló képlet az (5), amely  $\xi = x_3 \ll 1$ -nél érvényes:

$$\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{L} \cdot \frac{2(I_1 + I_2)}{2mr_0^2\omega_0} \approx \frac{1}{L} \cdot \frac{3}{4}(x_1 + x_2). \quad (30)$$

Az  $x_1$ ,  $x_2$  értékét az korlátozza, hogy  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  nem lehet túl nagy. A (15) szerint ugyanis

$$|\alpha_i| \leq \sqrt{\frac{I_i}{mg^{1/2}r_0^{3/2}}} = \sqrt{\frac{I_i}{mr_0^2\omega_0}} \approx \sqrt{2x_i} \quad (i = 1, 2).$$

Mint a 3.fejezetben jeleztük, egyenleteink ugyan csak lineáris lengésre érvényesek, kvalitatíve  $|\alpha_i| \sim 1$ -ig jók. Ezért nagyságrendileg  $x_1 \approx x_2 \approx 1$  és  $\alpha_{max} \approx 1$ .

Az  $\Omega/\omega_0$  arányt tehát lényegében  $L$  határozza meg, amelyet — mivel  $\epsilon = 1/\sqrt{L}$ , — a lehető legnagyobb kell venni.  $\epsilon = 0.01$  lenne a kívánatos érték, de az ehhez szükséges  $L = 10^4$  valószínűleg nem valósítható meg, ezért elégedjünk meg  $\epsilon = 0.1$ -el és  $L = 100$ -al<sup>6</sup>. Legyen mondjuk  $r_0 = 0.25$  m. Akkor  $\omega_0 = 6.26$  s<sup>-1</sup>, amelyhez  $\tau_0 = 1$  s periódusidő tartozik.  $L = 100$  mellett ekkor  $\Omega \approx 0.1\omega_0$ ,  $T \approx 10$  s.

Az  $m$  tömeget nem választhatjuk túl nagyra, mert akkor az  $(M + \Theta/2R)$  megvalósíthatatlanul nagy lesz. Másrészt a csigára ható forgatónyomaték  $\frac{R}{r_0}|U'(\xi)|$  arányos  $mg$ -vel. A súrlódásnak ehhez képest kell kicsinek lennie, ezért  $m$ -t túl kicsinek se lehet választani.

### 3.Függelék. A numerikus számításnál használt kezdeti értékek.

Series	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y_1$	$y_2$
1	0.5	0.1	0.	0.	0.	0.
2	0.31	0.29	0.	0.	0.	0.
4	0.642831	0.107617	0.278677	0.	0.	0.
5	1.20787	0.0205086	0.581973	0.	0.	0.

Mindegyik szériában  $\epsilon = 0.1$ .

---

<sup>6</sup> A mellékelt ingadozás-görbék ehhez az  $L$ -hez tartoznak.