

A GP-B kísérlet elvi alapjai

Hraskó Péter

1. A forgásmentesség fogalma.

Az általános relativitáselmélet művelői között egyetértés van abban, hogy a forgásmentességet görbült téridőben *is* a forgó próbatetek (kisméretű gömbszimmetrikus giroszkópok) spinjének az iránya határozza meg¹. Eszerint egy űrhajó (lokális vonatkoztatási rendszer) forgásmentességének *fizikai kritériuma* az, hogy az űrhajóhoz rögzített (ideális, gömbszimmetrikus) giroszkópok tengelyei mutassanak folyamatosan az űrhajó falának ugyanarra a pontjára. Ez a definíció megengedi, hogy egy szabadon mozgó űrhajó foroghasson, és azt is, hogy egy bekapcsolt rakétával mozgó (gyorsuló) űrhajó forgásmentes legyen.

A forgásmentesség *matematikai kritériumának* megfogalmazásához tekintsünk egy \mathcal{G} geodetikusan szabadon gravitáló űrhajót, amely a kritériumunk alapján forgásmentes (a gyorsuló űrhajók forgásmentességével a 4. fejezetben foglalkozunk). A súlyos és a tehetetlen tömeg egyenlősége (a gyenge ekvivalencia elv) következtében az űrhajónk lokális inerciarendszer abban az értelemben, hogy az űrhajóban magukra hagyott nyugvó testek nyugalomban maradnak (súlytalanság). Az erős ekvivalencia-elv szerint azonban az űrhajónak minden fizikai jelenség szempontjából inerciarendszernek kell lennie, amelyben a speciális relativitáselmélet érvényes, így a giroszkópok tengelyének meg kell őrizniük az irányukat hozzá képest. A geodetikus hipotézis azonban ezt már nem biztosítja, mert a geodetikus pálya összefér a mozgó objektum forgásával. Ezért külön meg kell vizsgálni, hogy a pszeudoriemann téridő matematikai struktúrája lehetővé tesz-e forgásmentes geodetikus mozgást, és ha igen, hogyan lehet ezt általánosan kovariáns módon megfogalmazni.

A forgásmentesség matematikai kritériumának a megfogalmazása négy lépésben történik:

- (1) Meg kell adni az erős ekvivalencia-elv teljesülésének matematikai kritériumát.
- (2) Be kell látni, hogy a pszeudoriemann-tér geodetikusaiban ez a feltétel kielégíthető.
- (3) Fel kell írni azt az egyenletet, amely az űrhajók *orientációját* meghatározza abból a követelményből kiindulva, hogy az űrhajó legyen lokális inerciarendszer.
- (4) Fel kell írni a giroszkóp spinjének a helyzetét meghatározó egyenlet kovariáns alakját.

(1) Legyen a \mathcal{G} geodetikus egyenlete $x^i = x^i(\tau)$. Ha az ekvivalencia-elv igaz, akkor az űrhajó által elfoglalt téridő tartomány lefedhető Minkowski-koordinátákkal, amelyben $g_{ij} = \eta_{ij}$ és $\Gamma_{jk}^i = 0^2$. Ebben a "csőben" azonban a téridő általában görbült, ezért ilyen lefedés nem létezik. *Lokálisan* azonban létezhet, ha ezek a feltételek legalább a \mathcal{G} -n teljesíthetők.

Az ekvivalencia-elv teljesíthetőségének matematikai kritériumát tehát abban a követelményben foglalhatjuk össze, hogy *minden időszerű \mathcal{G} -hez legyen található olyan koordinátarendszer, amely \mathcal{G} -n eleget tesz a*

$$g_{IJ}(\mathcal{G}) = \eta_{IJ}, \quad \Gamma_{JK}^I(\mathcal{G}) = 0 \quad (1.1)$$

feltételeknek és a \mathcal{G} -n a koordinátáidő \mathcal{G} sajátidejével azonos. Ezt a koordinátarendszert (ha létezik) *Fermi-koordinátarendszernek* hívjuk³.

¹A próbatest fogalmába beleértjük, hogy nem hat rá sem erő, sem forgatónyomaték. Ez az oka annak a furcsaságnak, hogy míg a bolygókat a pályájuk szempontjából elég nagy pontossággal lehet próbatestnek tekinteni, addig egy űrhajó nem próbatest, mivel a hajtóművek és a különböző kozmikus hatások (pl. a napszél) jelentős erőt és forgatónyomatékot gyakorolnak rá. A gömbszimmetria azt jelenti, hogy a próbatest tömegének nem lehetnek a monopólusnál magasabb nyomatékai. A Föld pl. a pályája szempontjából jó közelítéssel próbatest, a spinje szempontjából azonban nem, mert az egyenlítői kidudorodása miatt van kvadrupólnyomatéka. Ez a nyomaték vezet a földtengely nutációjára és a 25700 év periódusú luniszoláris precesszióra, amelynek következtében nem tekinthetjük úgy, hogy önmagával párhuzamosan (forgásmentesen) mozog.

²Az űrhajósok például megismételhetik W. Kauffman kísérletét az elektronnyalábok elhajlásáról elektrosztatikus térben, amely igazolja a $p = mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ relativisztikus képletet. Az eredeti és az űrhajóban végzett kísérletet egyaránt olyan Minkowski-koordinátarendszerben írják le, amelyben a kísérleti berendezés nyugszik, és a koordinátáidő a nyugvó órák sajátidejével egyezik meg. A kérdés az, hogy ezt jogosan teszik-e.

³A görög index az 1, 2, 3, a latin index a 0, 1, 2, 3 értékeket veszi fel. A Fermi-koordinátarendszert azzal különböztetjük meg, hogy nagybetűkkel indexeljük.

A Fermi-koordinátarendszer origójának a világvonalát \mathcal{G} -vel azonosítjuk, ezért az (1.1) feltételeknek Fermi-koordinátarendszer origójában kell teljesülniük. A Fermi-koordinátaidőnek azért kell megegyeznie \mathcal{G} sajátidejével, mert az űrhajósok órája ezt az időt mutatja, és a kísérleteikben az idő mérésére a saját óráikat használják⁴.

(2) Tankönyvi tétel, hogy ha (1.1)-ben a tetszőleges időszerű geodetikust tetszőleges ponttal helyettesítjük, akkor a feltétel a koordinátarendszer alkalmas megválasztásával mindig teljesíthető. A pszeudoriemann geometriában már ez az (1.1)-nél gyengébb tétel is bizonyítást igényel, és méginkább így van ez, ha nem pontról, hanem egy egész világvonalról van szó.

Belátható⁵, hogy az idézett tétel (1.1)-ben megfogalmazott általánosítása is igaz, ezért egy nem túl nagy űrhajó valóban lehet inerciarendszer, amelyben érvényes a speciális relativitáselmélet⁶. Ahhoz, hogy tényleg az legyen, nyugodnia kell a Fermi-koordinátarendszerben.

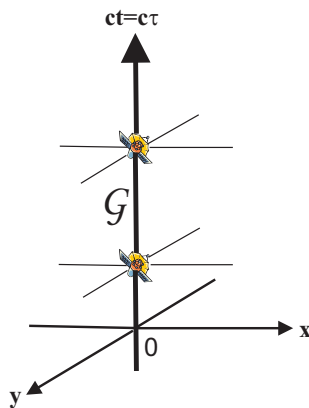
(3) A Fermi-koordinátarendszer koordinátabázisát \mathcal{G} -n jelöljük $\mathbf{e}_{(I)}(\tau)$ -val⁷. A bázis időszerű eleme a \mathcal{G} négyessebességével arányos: $\mathbf{e}_{(O)}(\tau) = \mathbf{V}(\tau)/c$ (a Fermi-koordinátabázis \mathcal{G} -n *vonaloorientált*). A vonaloorientált-ságban fejeződik ki matematikailag, hogy a \mathcal{G} -n a t Fermi-koordinátaidő azonos a \mathcal{G} sajátidejével, mert ekkor $V^O/c = \frac{dt}{d\tau} = e_{(O)}^O = 1$.

A $\mathbf{e}_{(\Lambda)}(\tau)$ térszerű elemeket csak egy pontban (mondjuk $\tau = 0$ -nál) lehet önkényesen megadni. A Fermi-koordinátarendszer létezésének a bizonyítása során ugyanis kiderül, hogy ezek a báziselemek a \mathcal{G} -n eleget tesznek a *párhuzamos elterjesztés*

$$\frac{D e_{(\Lambda)}^i}{d\tau} = \frac{d e_{(\Lambda)}^i}{d\tau} + \Gamma_{jk}^i V^j e_{(\Lambda)}^k = 0 \quad \left(V^i = \frac{dx^i}{d\tau} \right) \quad (1.2)$$

egyenletének (az abszolút deriváltjuk nulla). Ez az egyenlet őrzi a bázis vonaloorientáltságát, mert \mathcal{G} -n $\frac{D\mathbf{V}}{d\tau} = 0$.

A \mathcal{G} -n mozgó űrhajó akkor lokális inerciarendszer, ha az orientációját az $\mathbf{e}_{(\Lambda)}(\tau)$ bázis határozza meg. Az 1. ábra az űrhajó helyzetét mutatja a Fermi-koordinátarendszerben két különböző időpontban. A metrikus tenzor csak az időtengelyen egyenlő pontosan η_{ij} -vel, de az időtengely elegendően kis környezetében η_{ij} -nek tekinthető.



1. ábra

(4) Írjuk fel végül azt az egyenletet, amelyet a giroszkóp tengelyének az iránya (a giroszkóp spinje) elégít ki.

A giroszkóp spinje egy \vec{U} hármasektor, amely Fermi-koordinátarendszerben időben állandó, vagyis az $\mathbf{e}_{(\Lambda)}(\tau)$ báziselemek τ -tól (a Fermi-koordinátarendszer koordinátaidejétől) független koefficiensekkel képzett

⁴Az ekvivalencia-elv szerint például az űrhajóban a fénysebesség izotróp. Az űrhajósok ezt a *sebesség = út/idő* képlet alapján ellenőrizhetik, amelyben az utat is, az időt is a saját mérőeszközeikkel állapítják meg.

⁵A bizonyítást *Relativitáselmélet* könyvemben (Typotex, 2002) az 5.1 fejezetben lehet megtalálni. A továbbiakban erre a könyvre *Relkőnyv*ként fogok hivatkozni.

⁶Az árapályerők nagysága alapján dönthető el, hogy egy adott feladat szempontjából mekkora űrhajó tekinthető inerciarendszernek.

⁷Az előadásban a Fermi-koordinátarendszerre magára ezen a bázison túlmenően nem lesz szükségünk. Részletes definícióját a *Relkőnyv* 5.1 fejezetben lehet megtalálni.

lineárkombinációja. Az \vec{U} -t kiegészíthetjük \mathbf{U} négyesvektorral azzal a feltétellel, hogy az időszerű komponense legyen nulla, azaz teljesüljön az $\mathbf{U}(\tau) \cdot \mathbf{V}(\tau) = 0$ kovariáns feltétel.

A párhuzamos elterjesztés egyenlete lineáris, ezért (1.2) következtében az \mathbf{U} komponensei is kielégítik ugyanezt a

$$\frac{DU^i}{d\tau} = \frac{dU^i}{d\tau} + \Gamma_{jk}^i V^j U^k = 0. \quad (1.3)$$

egyenletet, amely a giroszkóp forgásmentes geodetikus mozgásának általánosan kovariáns egyenlete.

2. Forgásmentes keringés a newtoni fizika szerint.

Tekintsünk egy űrhajót, amely szabadon körpályán kering a Föld körül. Eközben foroghat⁸, vagy lehet forgásmentes. Hogyan különböztetjük meg ezt a két esetet egymástól "vizuálisan"?

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a Föld nem forog (a földi laboratóriumokban nyugvó giroszkópok folyamatosan a laboratórium falának ugyanarra a pontjára mutatnak) és tekintsünk el a Föld Nap körüli keringésétől (a középpont gyorsulásától) is. Az így értett "idealizált Föld" inerciarendszer, ezért a hozzá rögzített \mathcal{K} koordinátarendszerben felírt Newton-egyenletekbe nem kell inerciaerőt beírni. Mivel azonban a newtoni fizika szerint a gravitáció valódi erő, az űrhajó mozgását leíró Newton-egyenlet jobboldalán szerepelni fog a tömegvonzást reprezentáló erő.

Az űrhajóhoz rögzített \mathcal{K}' koordinátarendszer általában forog \mathcal{K} -hoz képest valamilyen w szögsebességgel. Ezért hat benne Coriolis-erő, amely éppen olyan forgatónyomatékokat gyakorol az űrhajóbeli giroszkópokra, amely a \mathcal{K} -hoz viszonyított orientációjukat tartja meg változatlanul⁹. Nyilvánvaló, hogy a forgásmentesség fizikai kritériuma alapján, amelyet az előző fejezet első bekezdésében foglalmaztunk meg, az űrhajó akkor mozog forgásmentesen, ha $w = 0$. Az űrhajó azonban ekkor sem inerciarendszer, mert az origójának $a = v^2/r$ nagyságú centripetális gyorsulása van, amelyet a \mathcal{K}' -hez rögzített koordinátákban felírt Newton-egyenletben az $ma = mv^2/r$ radiálisan kifelé mutató inerciaerő reprezentál. (Ez nem centrifugális erő, mert \mathcal{K}' forgásmentes.)

Az "idealizált Földről" figyelve az űrhajót könnyen megállapíthatjuk, hogy forog-e vagy sem, mivel a forgást — mint éppen láttuk, — a Földhöz (a Földhöz rögzített \mathcal{K} -hoz) kell viszonyítani. Tegyük fel, hogy az űrhajó elnyújtott szivar alakú objektum. Ha a Földről a keringési síkba eső pontban figyeljük az egymás utáni áthaladásait és azt tapasztaljuk, hogy a kiterjedése minden alkalommal ugyanaz, akkor a keringése forgásmentes. Ha pedig forog, akkor a kiterjedésének a változása alapján kiszámíthatjuk a w forgási szögsebességét. Ebben a látószögön alapuló eljárásban lényegében az űrhajó hossz tengelye és a megfigyelési pontra állított merőleges közötti szöget határozzuk meg.

Annak ellenére, hogy a leírt newtoni szituáció nagyon egyszerű, az általános relativitáselmélet szerinti tárgyalás előkészítése érdekében tovább kell részleteznünk. Ha a Föld körül polárkoordinátákat képzelünk el, amelynek lokális koordinátabázisa a keringési síkban az $\mathbf{e}_{(r)}$ radiálisan kifelé mutató, és az $\mathbf{e}_{(\varphi)}$ keringési irányba mutató elemekből áll, akkor azt látjuk, hogy az űrhajó valamilyen szögsebességgel forog a pályasíkban a lokális koordinátabázishoz képest. Amikor az űrhajó forgásmentesen kering, vagy nem forog túl gyorsan, akkor ez a szögsebesség negatív, és ezért $-\Omega$ -val jelöljük. A keringés szögsebességét, amelyet ω -val jelölünk mindig pozitívnak tekintjük, vagyis a keringés irányát választjuk pozitív irányynak.

Könnyen belátható, hogy az űrhajó forgásának w szögsebessége a

$$w = (-\Omega) + \omega = \omega - \Omega \quad (2.1)$$

különbséggel egyenlő. Valóban, a lokális koordinátabázishoz viszonyított forgás szögsebessége definíció szerint $-\Omega$, a lokális koordinátabázis maga pedig "az űrhajó alatt" ω szögsebességgel forog pozitív irányban. A w ennek a két forgásnak az eredője. Forgásmentes keringésnél ez a két járulék kompenzálja egymást: Az űrhajó éppen olyan gyorsan forog visszafele a lokális koordinátabázishoz képest, mint amilyen szögsebességgel forog "alatta" ez a bázis pozitív irányban a Földhöz rögzített Descartes-koordinátarendszerhez viszonyítva, amely — a polárkoordinátákkal ellentétben — reguláris az origóban¹⁰.

⁸A továbbiakban (egészen a 6. fejezetig) a forgástengelynek a pályasíkba eső komponense semmilyen szerepet sem játszik, ezért feltesszük, hogy ez a komponens nulla, és a forgás a pályasíkban történik.

⁹Az 1. Függelékben igazoljuk, hogy a giroszkópokra ható forgatónyomatékok a giroszkóp részecskéire ható Coriolis-erő hozza létre.

¹⁰A Hold mindig ugyanazt az oldalát mutatja a Föld felé. Ez azt jelenti, hogy a lokális koordinátabázishoz viszonyítva az orientációja állandó ($\Omega = 0$), és így $w = \omega$, vagyis a tengely körüli forgás szögsebessége nagyságban és irányban megegyezik a keringés szögsebességével.

3. Forgásmentes keringés az általános relativitáselmélet szerint.

Az általános relativitáselméletben ugyanezt a fizikai problémát teljesen másképpen kezeljük.

A newtoni fizikában meg kell engednünk globális inerciarendszer létezését a Nap körül, mert csak egy ilyen rendszerben írhatjuk fel a bolygók mozgásegyenletét inerciaerők nélkül. Az általános relativitáselmélet szerint csak lokális inerciarendszerek léteznek, amelyeket a geodetikus pályán forgásmentesen mozgó űrhajók realizálnak. A bolygópályák meghatározásához az Einstein-egyenletek megoldására és a geodetikus egyenletre van szükség, inerciarendszer kijelölésének a gondolata fel sem merülhet. Ugyanez a helyzet az "idealizált Föld" és a körülötte keringő szatellitok esetében.

A forgásmentességet fizikai szempontból azonban mindkét esetben ugyanúgy értjük, és az 1. fejezetben már láttuk, hogy az általános relativitáselméletben hogyan lehet a forgásmentes mozgást megkeresni: Az űrhajó orientációját jellemző bármely vektornak ki kell elégítenie a párhuzamos elterjesztés egyenletét, amely a vektor parallel transzportját írja le a pálya mentén.

A számítás körpálya esetén nagyon egyszerű, ezért nem is részletezem¹¹. Schwarzschild koordinátákban a \mathcal{G} pálya r -sugarú geodetikus, amelyen a keringés frekvenciája a Newton-elmélet és az általános relativitáselmélet szerint egyformán¹²

$$\omega = \sqrt{\frac{MG}{r^3}} = c\sqrt{\frac{r_g}{2r^3}}, \quad r_g = \frac{2MG}{c^2}. \quad (3.1)$$

Az (1.3) egyenlet megoldásából pedig Ω -ra az

$$\Omega = \omega\sqrt{1 - \frac{3r_g}{2r}} \quad (3.2)$$

eredményt kapjuk. Az (1.3) egyenletek ismeretlenjei ugyanis a lokális koordinátabázisra vetett komponensek, ezért a megoldásból a lokális koordinátabázishoz viszonyított forgás szögsebességét — az Ω -t — lehet meghatározni (ezért kellett ezt a mennyiséget bevezetni).

Ez a megoldás a *forgásmentes* keringésre vonatkozik, a (2.1) alapján a w -re mégis nullától különböző eredményt szolgáltat:

$$w = \omega - \Omega = \omega \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3r_g}{2r}} \right) > 0. \quad (3.3)$$

Eszerint ha az előző fejezetben leírt módon vizuálisan megfigyeljük egy (az 1. fejezet definíciója értelmében) forgásmentesen keringő űrhajó orientációját, azt kell tapasztalnunk, hogy ez az orientáció folyamatosan változik, az űrhajó w szögsebességgel precesszál pozitív irányban. Ez a jelenség a *geodetikus precesszió* (A. D. Fokker 1920). A newtoni fizika szerint $w = 0$, geodetikus precesszió ekkor nem létezik.

Ennek a precesszióknak azért van fizikai jelentése, mert a viszonyítás alapjául szolgáló koordináta-bázis $\mathbf{e}_{(r)}$ elemét operatív módon (magára a koordináta-rendszerre történő hivatkozás nélkül) is meg lehet adni a centrális égitest helyzete alapján (kitüntetett irány). Egy általános geodetikus mozgáshoz kitüntetett irány hiányában általában nem rendelhető geodetikus precesszió.

Az általános relativitáselmélet eddigi tesztjei a téregyenletre és a geodetikus hipotézisre voltak érzékenyek. A geodetikus precesszió az elmélet egy további elemére, a párhuzamos elterjesztés egyenletére is érzékeny, de ha teljesen fel akarjuk mérni a precesszió megfigyelésének a jelentőségét, nem elég csupán ebből a technikai szempontból összehasonlítani az eddigi megfigyelésekkel.

Vegyük például a Merkúr perihéliumának anomális precesszióját. A XIX. közepe óta tudták a csillagászok, hogy a Merkúr perihéliuma a Newton-elmélet alapján számítottnál 40 szögmásodperc/évszázad szögsebességgel gyorsabban precesszál. Einstein az elméletének legelső alkalmazásaként mutatta meg, hogy a téregyenletéből pontosan ez az érték jön ki. Az egyezés jelentőségét nehéz lenne túlbecsülni, de ez az eredmény önmagában semmit sem árul el arról, hogy Einstein elmélete teljesen új alapokra helyezte a fizikai világmépünket. Nyitva maradt ugyanis az a lehetőség, hogy az anomália a newtoni elméleten belül is megmagyarázható, csak valamilyen tényezőt még nem vettek figyelembe.

Ez annyira reális lehetőség volt, hogy — legalább részben — be is következett. R. H. Dicke és H. M. Goldenberg 1966-ban meghatározta a Nap egyenlítői kidudorodását és arra a következtetésre jutott, hogy az

¹¹Ld. a *Relkőnyv* 7.5 fejezetét.

¹²Ennek az egybeesésnek azonban nincs invariáns geometriai értelme, mert a newtoni fizikában r az űrhajó távolsága a centrumtól, az általános relativitáselméletben pedig radiális koordináta, amely átskálázható.

észlelt belapultság a precesszió newtoni értékét 3,4 szögmásodperc/évszázaddal megnövelheti, ami, ha igaz lenne, jelentősen lerontaná az általános relativitáselméletből kapható számérték egyezését a tapasztalattal.

A geodetikus precesszió esetében azonban minőségileg új jelenséggel állunk szemben. Képzeljük el, hogy több szonda is kering (az 1. fejezet definíciója értelmében) *forgásmentesen* az "idealizált Föld" körül. Ha a vázolt vizuális megfigyeléssel legalább kvalitatíve igazolni lehet, hogy ezek különböző szögsebességgel *forognak*, akkor az előző fejezet szerint ez a tény alapjaiban rendíti meg a newtoni elméletet.

4. A forgásmentesen gyorsuló mozgás.

Mozogjon most az űrhajó egy \mathcal{L} világvonalon, amely nem geodetikus, mert a négyesgyorsulása nem nulla:

$$\mathbf{A} \stackrel{def}{=} \frac{D\mathbf{V}}{d\tau} \neq 0.$$

Az (1.1) követelmény ebben az esetben nem teljesíthető. Ez a matematikai tény szintén összhangban van az ekvivalencia-elvvel, amely szerint a gyorsuló vonatkoztatási rendszerek *nem* lokális inerciarendszerek. A forgásmentességhez azonban (a vonalorientáltság fenntartása mellett) elég az (1.1)-nél gyengébb

$$g_{IJ}(\mathcal{L}) = \eta_{IJ}, \quad \Gamma_{O\Sigma}^{\Lambda}(\mathcal{L}) = 0 \quad (4.1)$$

feltétel teljesítése is¹³, mert a $\Gamma_{O\Sigma}^{\Lambda}$ típusú konnexiós koefficiensek azok, amelyek parallel transzportnál a pszeudoortogonális bázis forgását, a geodetikus egyenletben pedig a Coriolis-erőt írják le¹⁴. Ez utóbbi szempont azért fontos, mert a giroszkóp tengelyének a forgását a Coriolis-erő okozza (1. Függelék).

Adjuk meg megint $\tau = 0$ -ban a Fermi-koordináta-rendszer térszerű $\mathbf{e}_{(\Lambda)}(0)$ bázisvektorait. Belátható¹⁵, hogy a forgásmentesség módosított követelménye is egyértelműen meghatározza az $\mathbf{e}_{(\Lambda)}(\tau)$ báziselemeket az \mathcal{L} mentén, amelyek most a *Fermi-Walker elterjesztés*

$$\frac{{}^*D\mathbf{e}_{(\Lambda)}}{d\tau} \stackrel{def}{=} \frac{D\mathbf{e}_{(\Lambda)}}{d\tau} - \frac{1}{c^2} [(\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{(\Lambda)})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_{(\Lambda)})\mathbf{V}] = 0.$$

egyenletét elégítik ki¹⁶ (a Fermi-Walker deriváltjuk nulla). A giroszkópok spinjének \mathbf{U} négyesvektora ugyanezt az egyenletet elégíti ki:

$$\frac{{}^*D\mathbf{U}}{d\tau} = \frac{D\mathbf{U}}{d\tau} - \frac{1}{c^2} [(\mathbf{V} \cdot \mathbf{U})\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{U})\mathbf{V}] = 0. \quad (4.2)$$

$\mathbf{A} = 0$ -nál (4.2) a párhuzamos elterjesztés egyenletébe megy át, és szintén őrzi a lokális bázis vonalorientáltságát, mert $\frac{{}^*D\mathbf{V}}{d\tau} = 0$.

A Fermi-Walker elterjesztés egyenletének ismeretében megválaszolhatjuk azt a kérdést, hogy hogyan precesszálnak a földfelszínen nyugvó giroszkópok. A koordinátaidőben mért és a lokális koordinátabázishoz viszonyított szögsebességre az

$$\Omega = \omega \frac{1 - \frac{3}{2} \frac{r_g}{r}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r} - \left(\frac{r\omega}{c}\right)^2}} \quad (4.3)$$

képletet kapjuk¹⁷, amelyben ω a Föld forgásából származó szögsebesség abban a pontban, amelyben a giroszkóp nyugszik¹⁸. A precesszió a forgástengelyre merőleges síkban történik. A képletben r -t és ω -t egymástól függetlenül lehet megadni. Amikor azonban a giroszkóp geodetikus körpályán kering, a (3.1) következtében visszakapjuk belőle (3.2)-t.

¹³A (4.1) a forgásmentesség szükséges és elégséges feltétele. Az (1.1) elégséges feltétel volt.

¹⁴Ld. a *Relkőnyv* 5.1/1 feladatát.

¹⁵Ld. a *Relkőnyv* 5.2 fejezetét.

¹⁶A 2. Függelékben megmutatjuk, hogy (4.2) ekvivalens a forgó próbatestek spinjének az irányát meghatározó Papapetrou-egyenlettel.

¹⁷A képlet levezetését ld. a jelen előadás angolnyelvű változatának (*Theoretical Aspects of the GP-B Experiment*) 3. függelékében itt a honlapomon.

¹⁸Az egyszerűség kedvéért a földtengely precessziójától eltekintünk, csak a tengely körüli forgást vesszük figyelembe.

A precesszió szögsebességét megint a $w = \omega - \Omega$ képlet szolgáltatja. Amikor azonban a földfelszínen nyugvó giroszkóp precesszióját figyeljük, nem w -t, hanem magát Ω -t érzékeljük (a newtoni esetben $2\pi/\text{nap}$ szögsebességű negatív irányú forgást látunk). Mivel továbbá a precesszió megfigyelésekor ott állunk a giroszkóp mellett, a szögsebességet nem koordinátaidőben, hanem sajátidőben mérjük. A giroszkóp sajátideje és koordinátaideje közötti kapcsolatot a

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{(1 - r_g/r)c^2 dt^2 - r^2 d\varphi^2} = dt \cdot \sqrt{1 - r_g/r - r^2 \omega^2 / c^2} \quad (4.4)$$

képlet határozza meg, ezért a sajátidőben mért szögsebesség a következő:

$$\Omega_* = \Omega \frac{dt}{d\tau} = \omega \frac{1 - \frac{3}{2} \frac{r_g}{r}}{1 - \frac{r_g}{r} - \left(\frac{r\omega}{c}\right)^2}. \quad (4.5)$$

A földfelszínen $r_g/r = 1.5 \cdot 10^{-9}$, az Egyenlítőn pedig $(r/r_g) : (r\omega/c)^2 = 633$, ezért a nevező harmadik tagja elhagyható, r_g/r -ben pedig elég a lineáris közelítésre korlátozódni. Így végül $\Omega_* \approx \omega \left(1 - \frac{r_g}{2r}\right)$. Ha egy ilyen mérést technikailag végre lehetne hajtani, a Fermi-Walker elterjesztés egyenletét is ellenőriznénk vele.

Ha (4.3)-ban $r_g = 0$ -t helyettesítünk, az

$$\Omega = \omega \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.6)$$

képletre jutunk ($v = r\omega$), amelynek csak akkor van fizikai értelme, ha a körmozgás sík téridőben történik. Némi fantáziával úgy képzelhetjük, hogy a giroszkópunk a hidrogénatom planetáris modelljében keringő elektron. L. H. Thomas 1926-ban pontosan erre az esetre vezette le először a (4.6) képletet és megmutatta, hogy a Bohr-modellben a képlet által leírt *Thomas-precesszió* hatással van a finomszerkezetre (a Dirac-egyenlet erről a felhasadásról automatikusan számot ad). A Thomas-precesszió

$$w = \omega - \Omega = \omega \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

szögsebessége negatív irányú¹⁹.

5. A geodetikus precesszió az űrhajósok nézőpontjából.

Az Ω az űrhajó forgási szögsebessége a lokális koordinátabázishoz képest. Az $\mathbf{e}_{(r)}$ báziselem negatívja azonban a pálya minden pontjában a centrális égitest irányába mutat, ezért Ω a centrális égitesthez viszonyított szögsebességként is felfogható. Ebből következik, hogy az űrhajósok Ω szögsebességgel látnák maguk körül keringeni a centrális égitestet, *ha* az óráik a t Schwarzschild koordinátaidőt mutatnák. Mivel azonban valójában a τ sajátidőt (a Fermi-koordinátarendszer koordinátaidejét) mutatják, ezért az általuk észlelt szögsebesség a (4.5)-ben felírt Ω_* -gal egyenlő. Ha ide behelyettesítjük a keringés (3.1) szögsebességét, a váratlan

$$\Omega_* = \omega$$

egyenlőségre jutunk amely a következőt jelenti:

¹⁹A Thomas-precesszió általános képletének a felírásához csak azt kell figyelembe venni, hogy a szögsebesség vektor pillanatnyi értéke $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{v^2} \left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)$ -vel egyenlő:

$$\mathbf{w} = (1 - \gamma) \frac{1}{v^2} \left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = -\frac{\gamma}{1 + \gamma} \frac{1}{c^2} \left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{d\tau}\right) \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

A precesszió fizikai jelentését a legvilágosabban talán akkor érthetjük meg, ha George Gamow *Csodaországába* képzeljük magunkat, ahol a fénysebesség köztudottan kicsi. Ha Mr. Tompkins történetesen repülőgépvezető, ebben az országban nem hagyatkozhat giroszkópra, mert a giroszkóp a repülőgép irányváltoztatásai közben a Thomas-precesszió következtében szintén elfordul ellenkező irányba. Ha pl. a giroszkóp helyzete alapján 30 fokban fordult balra, akkor az eredeti irányhoz képest csak mondjuk 25 foknyit fordult el, mert fordulás közben a giroszkóp a Thomas-precesszió következtében 5 fokot tért ki jobbra.

A (pozitív irányú) geodetikus precesszió arra vezet, hogy t koordinátaidőben mérve a centrális égitest lassabban kering az úrhajó körül, mint az úrhajó a centrális égitest körül. A sajátidő korrekció azonban ezt a különbséget *éppen kompenzálja*²⁰.

Az $\Omega_* = \omega$ egyenlőség a koordinátarendszer választásától független, mert megfigyeléssel ellenőrizhető. Legegyen a határozottság kedvéért a centrális égitest most a Nap, ekörül kering az úrhajó (a bolygók hatásától és a Nap tengely körüli forgásától eltekintünk). Az Ω_* nyilvánvalóan független a koordinátarendszer megválasztásától, mert azzal a sajátidővel egyenlő, amely alatt a Nap 2π radiánt mozdul el az úrhajó körül. Az ω a t Schwarzschild koordinátaidőben mért szögsebesség, de ez a koordinátaidő egyenlő a végtelen távoli megfigyelő sajátidejével. Állítsunk gondolatban merőlegest az úrhajó pályasíkjának középpontjára, és képzeljünk el egy monitor-úrhajót, amely ezen az egyenesen a középponttól tetszőlegesen messze nyugszik (ezt a hajtómű nagyon gyenge működtetésével lehet biztosítani a centrummal szembe mutató irányban). A monitorról elvben meg lehet figyelni, milyen Δt idő alatt tesz meg az úrhajó egy teljes kört, és ebből ki lehet számítani ω -t. Ezután már csak egy őrtelefon-hívás szükséges annak eldöntéséhez, hogy egyenlő-e ω Ω_* -al.

A gondolatmenetünk alapján az $\Omega_* = \omega$ egyenlőség csupán véletlenül teljesül, de határozottan az az ember érzése, hogy léteznie kell egy olyan szerencsésen megválasztott nézőpontnak, amelyből nézve az egyenlőség szükségszerűen igaz. Ezt a nézőpontot azonban nem sikerült megtalálnom.

A (4.5) számlálójának és nevezőjének véletlen [?] egybeesése szabad keringéskor egy másik említésre méltó következménnyel is jár: A geodetikus precesszió w szögsebessége sohasem éri el a keringés ω szögsebességét, vagyis nem fordulhat elő, hogy az úrhajó mindig ugyanazt az oldalát mutassa a centrális égitest felé ($\Omega = 0$ nem következhet be).

Tegyük fel, hogy az úrhajó egy fekete lyuk körül kering. A (3.3) szerint a $w = \omega$ egyenlőség az $r = 3r_g/2$ sugarú pályához tartozik, de — mint jól ismert, — ez a pálya fényszerű, csak fény keringhet rajta. Nem tudom, van-e mélyebb (geometriai) oka annak, hogy ez ugyanannál a sugárnál következik be, amelynél az úrhajónak a centrális égitesthez viszonyított forgása megszűnne.

A szemlélet azt sugallja, hogy ebben a határesetben az úrhajósok számára a Napnak meg kellene állnia, de pont az ellenkezője történik: A szögsebessége r csökkenésével folyamatosan nő. Az $\Omega_* = \omega$ egyenlőség és a (3.1) következtében Ω_* a várakozással ellentétben egyre nagyobbá válik és az $r \rightarrow 3r_g/2$ limeszben $\sqrt{\frac{8}{27}} \cdot \frac{c}{r_g}$ -hez tart.

6. A geodetikus precesszió a Kerr-metrikában.

Forgó csillag körül a geodetikus precesszió képletében megjelenik egy olyan járulékos is, amely arányos a csillag J impulzusmomentumával. Ezt a járulékosot nevezik *drag*-nek, míg a *geodetikus precesszió* elnevezést fenntartják az impulzusmomentumtól független, a pályamozgásból eredő járulékos megjelölésére. Ez nem túl szerencsés gyakorlat, mert a folyamat egészét is geodetikus precessziónak hívják, és csak a kontextusból derül ki, hogy a folyamat egészére, vagy a pályamozgásból eredő komponensre gondolnak.

A GP-B kísérletben, amelyről később lesz részletesebben szó, a Föld a centrális égitest. A drag ekkor két nagyságrenddel lassúbb, mint a geodetikus precesszió, ezért csak azt a komponensét kell figyelembe venni, amely a geodetikus precesszió tengelyére merőleges tengely körül történik.

A drag-precesszió tengelyéről úgy nyerhetünk legegyszerűbben képet, hogy a pályamozgást kikapcsoljuk, vagyis a Kerr-metrikában *nyugvó* úrhajó precesszióját vizsgáljuk²¹, ami "vegytisztá drag".

A nyugvó úrhajó pályája nem geodetikus, ezért a számítást (4.2) alapján kell elvégezni. Az eredményt az 1. ábra foglalja össze, amelyen a nyílak iránya a drag forgástengelyét mutatja, nagyságuk pedig a drag

$$\Omega_{drag} = \frac{ar_g c}{2r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}$$

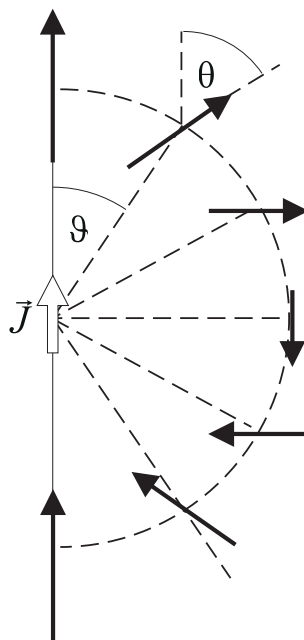
szögsebességével arányos ($J = Mca$). A "drag" elnevezés arra utal, hogy a csillag forgása "magával ragadja" az 1. fejezet definíciója értelmében forgásmentes lokális vonatkoztatási rendszereket. Mint látjuk, a "magával

²⁰Ugyanígy kompenzáció következik be a Kerr-metrikában is az ekvatoriális síkban fekvő körpályákon (ld. a *Relkőnyv* 7.8/2 feladatát).

Felmerül a kérdés, hogy az Ω_* (a centrális égitest szögsebessége a Fermi-koordinátarendszerben) és az ω ($= V^\varphi/V^t$) akkor is egyenlő-e egymással, amikor a pálya nem kör. Belátható, hogy az egyenlőség a nem kör alakú pályákon általában nem áll fenn.

²¹Ld. a *Relkőnyv* 7.8/3 feladatát.

ragadás" metafora csak a forgástengely mentén találó, az ekvatoriális síkban a forgásmentes űrhajók a csillag forgásával ellentétes értelemben precesszálnak²².



2. ábra

A GP-B kísérlet űrhajója poláris körpályán haladt. A 2. ábra ezért felfogható úgy, hogy a nyilak a drag tengelyét mutatják a pálya különböző pontjaiban. A nyilak a pályasíkokban fekszenek, ezért a drag során az űrhajóban nyugvó giroszkópok tengelye *kimozdul* a pályasíkból. A geodetikus precesszió viszont, amelynek számításánál eltekinthetünk a Föld forgásától, a pályasíkra merőleges tengely körül (a pályasíkban) történik. Ez a körülmény teszi lehetővé a kísérletben a drag elkülönítését a geodetikus precessziótól.

7. A geodetikus precesszió a csillagos éghoz képest.

A GP-B kísérletben a Föld körül keringő űrhajó precesszióját, mint láttuk, elvben a Földről is észlelhetjük, de ezen a módon nem érhetünk el olyan pontosságot, amely a rendkívül lassú precesszió szögsebességének a méréséhez szükséges. A szükséges pontosság csak csillagászati módszerekkel biztosítható, amikor a precessziót valamilyen *referencia csillag* irányához viszonyítva vizsgáljuk.

Ez a módszer természetesen csak akkor alkalmazható, ha eleve biztosak vagyunk benne, hogy a referencia csillag iránya állandó azokhoz az irányokhoz képest, amelyekhez egyébként egy Naprendszeren belüli megfigyelés során viszonyítanánk az űrhajó orientációját.

A csillagok saját mozgásának a kiküszöbölése viszonylag egyszerűen történhet: Egy nagyon távoli kvazárt kell referencia csillagnak választani. Fennmarad azonban a következő elvi probléma. Az 1. fejezetben a forgásmentességre olyan kritériumot fogalmaztunk meg, amelyben nem volt semmiféle utalás a csillagos égre (a Kozmosz egészére). Nem lehetséges-e, hogy azokhoz a lokális vonatkoztatási rendszerekhez képest, amelyek ennek a definíciónak az értelmében forgásmentesek, a csillagos ég valamilyen szögsebességgel forog? Mert ha igen, akkor a referencia csillaghoz viszonyított szögsebességnek nem kell feltétlenül megegyeznie az 1. fejezet definíciója szerint forgásmentes űrhajók geodetikus (és drag) precessziójával.

Az analízis megkönnyítése érdekében különböztessük meg egymástól a forgásmentesség következő két fogalmát:

²²Mint L. Schiff rámutatott, a "magával ragadás" az éterhipotézis alapján lenne igazán találó terminológia. Ha ugyanis feltételezzük, hogy az éter newtoni folyadék, amelynek az égitesthez viszonyított relatív sebessége a felületen nulla, és az éter lenne az, amely "magával ragadja" a forgásmentes űrhajót, akkor a szemlélet alapján is azt várnánk, hogy a precesszió iránya a forgástengelyen egyezzen meg a csillag forgásával, az ekvatoriális síkban pedig legyen ezzel ellentétes.

(1) Egy úrhajó (lokális vonatkoztatási rendszer) akkor forgásmentes *foucault-i értelemben*, ha nem hat benne Coriolis erő, vagyis eleget tesz az 1. fejezetben megfogalmazott forgásmentességi kritériumnak, amellyel eddig dolgoztunk.

(2) Egy úrhajó (lokális vonatkoztatási rendszer) akkor forgásmentes *kopernikuszi értelemben*, ha az orientációja állandó a csillagos éghöz képest.

Ez a két forgásmentesség logikailag teljesen független egymástól, ezért egy lokális vonatkoztatási rendszer foucault-i és kopernikuszi értelemben foroghat különböző szögsebességgel; az is lehetséges, hogy az egyik értelemben forog, a másik értelemben nem.

Egyáltalán nem igaz például, hogy a földrajzi pólusokon a Foucault-inga síkjának, amelyet a Coriolis-erő forgat, *kötelező* pontosan ugyanazzal a szögsebességgel forogni, mint az égboltnak. Tény azonban, hogy Foucault kísérletében az inga síkja (valamilyen pontossággal) tényleg azzal a szögsebességgel forgott, ahogy az égbolt forgása alapján várható volt. De ez az egybeesés nem újabb bizonyítéka annak, hogy a Föld 24 órás periódusidővel forog a csillagos éghöz képest, hanem azt a következtetést lehet belőle levonni, hogy *empirikusan* a forgás két fogalma — úgy látszik — egyenértékű egymással.

A newtoni fizikában, amelyben az inerciarendszerek végtelen kiterjedésűek, ebből az egybeesésből az következik, hogy az a vonatkoztatási rendszer, amely nem forog a csillagos éghöz képest, inerciarendszer, vagyis *az inerciarendszereket* (legalább is a forgás szempontjából) *az állócsillagok jelölik ki*. Ha pedig felidézünk a 2. fejezet megfontolásait, akkor azt a következtetést is levonhatjuk, hogy a foucault-i értelemben (az 1. fejezet definíciója szerint) forgásmentesen keringő úrhajók orientációja állandó a csillagos éghöz képest (az úrhajó kopernikuszi értelemben is forgásmentes).

Az általános relativitáselmélet szerint azonban ez a következtetés téves. A foucault-i értelemben forgásmentesen különböző pályákon keringő úrhajók geodetikus precessziójának a szögsebessége különbözik egymástól, ezért lehetetlen, hogy mindegyik úrhajó orientációja a csillagos éghöz viszonyítva állandó legyen (egyik se forogjon kopernikuszi értelemben).

A feltett kérdéseinkre — nem lehetséges-e, hogy azokhoz a lokális vonatkoztatási rendszerekhez képest, amelyek az 1. fejezet definíciójának az értelmében forgásmentesek, a csillagos ég valamilyen szögsebességgel forog? — a válasz tehát az, hogy lehetséges, és az általános relativitáselmélet szerint pont ez történik. A geodetikus precessziónak ez az aspektusa a fizikai világgépünk alapjait érinti.

De ez a körülmény nem akadályozza meg feltétlenül, hogy a geodetikus precesszió szögsebessége a csillagos éghöz képest is ugyanazzal a w -vel legyen egyenlő, amelyet a forgásmentesség 1. fejezetben adott definíciója alapján a 3. fejezetben határoztunk meg. Az egybeesésnek az a feltétele, hogy abban a koordinátarendszerben, amelyet a 3. fejezetben alkalmaztunk (esetünkben ez a centrális égitesthez tartozó Schwarzschild koordinátarendszer volt) a távoli csillagokból érkező fénysugarak iránya legyen időben állandó. Az ember hajlamos ezt triviálisan igaznak tekinteni, de ez elhamarkodott válasz volna (ld. a 10. fejezetet). *Empirikusan* azonban bizonyosan igaz azzal a pontossággal, amellyel az általános relativitáselmélet alapján a Schwarzschild koordinátákban kiszámított bolygópályák az állócsillagokhoz rögzített gömbi koordinátákban is érvényesnek bizonyulnak. Ez a pontosság pedig elegendő ahhoz, hogy a geodetikus precessziót a csillagos éghöz viszonyítva is meg lehessen mérni²³.

8. A GP-B kísérlet²⁴.

A NASA Gravity Probe B kísérletében²⁵ az űrszonda 642 km magasan poláris körpályán (6. fejezet) keringett. A szivar alakú szonda szimmetriatengelyében elhelyezett optikai teleszkóp az általa vezérelt "attitude control system" segítségével a szimmetriatengelyt folyamatosan a referencia csillag (guide star) irányában tartotta. A

²³Az 1. lábjegyzetben megindokoltuk, hogy a Föld forgástengelye nem mozog önmagával párhuzamosan (forgásmentesen), mert a 25700 év periódusú retrográd irányú luniszoláris precesszió annak következménye, hogy a Föld nem tökéletes gömb. Geodetikus precesszió azonban akkor is lenne, ha tökéletes gömb volna. Ez abban nyilvánulna meg, hogy a tavaszpont direkt irányban körbejárná az Ekliptikát, de bő négy nagyságrenddel hosszabb idő alatt, mint 25700 év. A két precesszió között azonban nem az iránybeli és a nagyságrendi eltérés a legfontosabb különbség, hanem az, hogy a luniszoláris precessziót ki lehetne mutatni földi giroszkóppal (ld. a 4. fejezetet), a geodetikus precessziót azonban nem.

²⁴C. M. Will, Phys. Rev. **D67**, 062003 (2003).

²⁵A szondát több évtizedes előkészítés után 2004 április 20-n bocsátották fel. Az adatgyűjtés (megszakításokkal) 352 napig tartott, a kiértékelés eredményének publikálása 2007 áprilisában várható. Az értékelő munka állása a <http://einstein.stanford.edu/> honlapon követhető figyelemmel.

Az 1976-ban elvégzett GP-A kísérletben egy függőlegesen fellőtt majd visszahullott rakéta segítségével az ikerparadoxon képletét igazolták $70 : 10^6$ relatív pontossággal.

referencia csillag a pályasíkba esett. A fedélzeten elhelyezett négy gömbalakú giroszkóp tengelyeit a kísérlet kezdetén a szimmetriatengellyel párhuzamosan állítják be. Ezek jelölik ki a foucault-i értelemben forgásmentes irányt, ezért az űrhajóhoz képest w szögsebességgel kell precesszálniuk. A feladat a tengelyek mozgásának a meghatározása volt az idő függvényében.

Az általános relativitáselmélet szerint várható szögelfordulás számításánál a Nap és a forgó Föld által létrehozott metrikát vették figyelembe posztnewtoni közelítésben, és az adatgyűjtés 1 éve alatt várható szögelfordulásra a következő értékeket kapták:

- Észak-déli irányú kitérés (geodetic precession proper) 6600 mas²⁶.
- Kelet-nyugati irányú kitérés (drag) 42 mas.

Az általános relativitáselmélet szerint várható elfordulási görbe számításának főbb lépései a következők:

1) A szonda pályájának (a \mathcal{G} geodetikusan) a meghatározása a posztnewtoni metrika és a pályamegfigyelések alapján.

2) A referencia-csillagból érkező fénysugarak lefedik a téridőnek azt a tartományát, amelyben a szonda mozog. A kongruencia érintővektorai egy \mathbf{k} vektormezőt alkotnak ($\mathbf{k}^2 = 0$). Ez a vektormező csak aszimptotikusan, a referencia csillag irányában homogén. A homogenitástól való eltérés (fényelhajlás) szükségessé teszi a vektormező kiszámítását a posztnewtoni metrikában.

3) A giroszkópok \mathbf{U} tengelyiránya ($\mathbf{U}^2 = -1$, $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} = 0$) a \mathcal{G} -n vektormezőt alkot, amelyet a posztnewtoni metrika ismeretében (1.3) segítségével lehet kiszámítani.

4) A kísérletben a szimmetriatengely és a giroszkópok tengelye által bezárt szöget mérik. Az "attitude control system" a szonda szimmetriatengelyét folyamatosan a referencia csillag által kijelölt

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{c}{\mathbf{V} \cdot \mathbf{k}} \mathbf{k} - \frac{1}{c} \mathbf{V} \quad (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{V} = 0, \quad \hat{\mathbf{k}}^2 = -1)$$

irányban tartja, amely a \mathbf{k} vetülete a \mathbf{V} mentén az $(\mathbf{e}_{(X)}, \mathbf{e}_{(Y)}, \mathbf{e}_{(Z)})$ Fermi-bázis által kifeszített hiperfelületre. Fermi koordinátákban $\hat{k}^I = (0, k^X/k^O, k^Y/k^O, k^Z/k^O)$, és a teleszkóp természetesen a $-\hat{\mathbf{k}}$ irányba néz. Úgy is mondhatjuk, hogy a megfigyelésekből a $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{U}$ skalárszorzat időfüggése határozható meg²⁷.

A $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{U}$ mennyiség természetesen tartalmazza a szonda mozgásából származó aberrációt is. Ez sokkal nagyobb effektus, mint a geodetikus precesszió és a drag, de fontos pozitív szerepe van, mert pontosan számítható, és felhasználható a szögelfordulás kalibrálására.

9. A Mach-probléma a newtoni fizikában.

Newton bolygóelméletének a tapasztalati ellenőrzése során természetesnek tekintették, hogy az elméletnek nemcsak ahhoz az inerciarendszerhez viszonyítva kell igaznak bizonyulnia, amelyben a számításokat végezték, hanem az állócsillagokhoz rögzített gömbi koordinátarendszerhez viszonyítva is. A tapasztalat ezt a hallgatólagos feltevést alátámasztotta. Az egyetlen komoly eltérést a Merkúr perihéliumának a mozgásában tapasztalták, amelyet *ad hoc* feltevésekkel próbáltak megmagyarázni. Az általános relativitáselmélet ezt az anomáliát is kiküszöbölte, és megerősítette a csillagászokat abban a hitükben, hogy az elmélet előrejelzései továbbra is igazak, ha az állócsillagokhoz rögzített gömbi koordinátákra vonatkoztatjuk őket. Az alábbiakban *Mach-problémának* fogom nevezni azt a kérdést, hogy miért lehet ezt megtenni.

Ebben a fejezetben a newtoni fizikára korlátozódunk, amelyben a Mach-probléma ekvivalens azzal a kérdéssel, hogy a lokális megfigyelésekkel kiválasztott inerciarendszerek miért nem forognak a csillagos éghez képest. Vagy — a 7. fejezet terminológiájával megfogalmazva — miért azonos egymással a foucault-i és a kopernikuszi értelemben vett forgás.

A kérdést Newton is feltette a híres vödörkísérlete kapcsán: Miért van az, hogy a forgó vödörben az edénnyel együtt forgó víz felszíne éppen akkor válik sík felületté, amikor a vödör nyugszik az állócsillagokhoz képest?

A magyarázatot Newton az *abszolút geometriai tér* fogalmában vélte megtalálni. Jelöljük egy adott időpillanatban a tér egy bizonyos pontját P -vel. A teret akkor nevezzük abszolútnak, ha — legalábbis elvben

²⁶ 1 mas = 1 milliarcsec.

²⁷ Az ellenőrizhetetlen forgatónyomatékok kiátlagolása érdekében a szondát forgásban tartották a szimmetriatengelye körül 1 és 10 közötti fordulat/perc szögsebességgel, de ez a forgás nem érinti a $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{U}$ skalárszorzatot.

— bármely időpontban rá tudunk mutatni *ugyanerre* a P pontra. Úgy is mondhatjuk, hogy az abszolút tér pontjai időben őrzik az azonosságukat. Az anyagi közegek pontjai rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal, ezért az abszolút tér ebből a szempontból "közegszerű", noha más szempontokból — abból például, hogy nem fejt ki közegellenállást, — nem hasonlít az anyagi közegekre.

Ha a tér abszolút, akkor a nyugalom és a mozgás is az: Egy tömegpont akkor nyugszik, ha állandóan a tér ugyanabban a P pontjában marad. Ezt az elvet a forgásra is kiterjeszthetjük: Egy test akkor nem forog, ha az orientációja az abszolút térhez képest változatlan. Ha ezt még kiegészítjük azzal a nagyon természetes hipotézissel, hogy az állócsillagok az abszolút térben nyugszanak, akkor már nem kell csodálkoznunk azon, hogy azok a testek, amelyek lokális kritériumok alapján nem forognak, a csillagos éghez viszonyítva is nyugalomban vannak.

Az abszolút geometriai tér fogalma azonban a maga "közegszerűségével" idegen az újkori fizika számára. Az az ellenvetés is megtehető vele szemben, hogy miért csak a forgásnál működik, az egymáshoz képest egyenes egyenesvonalú mozgások közül miért nem választja ki azt az egyet, amely az abszolút térben nyugszik.

Mach mutatott rá, hogy a tér abszolút vagy relatív felfogása nem a jóízlés, hanem a fizikai elmélet kérdése: Akár tetszik, akár nem, a newtoni fizikában a forgás abszolút. Ha ugyanis gondolat kísérletként a teljesen üres térben veszünk fel egy vonatkoztatási rendszert, amelyben különféle mozgásokat vizsgálunk, az inerciaerők megléte vagy hiánya alapján akkor is eldönthetjük, hogy a vonatkoztatási rendszerünk forog-e vagy sem. Idézzük Machot:

Természetesen gondolhatjuk azt, hogy a Föld forog a tengelye körül, de azt is, hogy a Föld nyugszik, és az állócsillagok keringenek körülötte. Geometriailag ez a két eset tökéletesen ugyanazt jelenti — a Föld és az állócsillagok viszonylagos forgását egymáshoz képest. De ha azt mondjuk, hogy a Föld nyugszik és az állócsillagok forognak körülötte, akkor miből ered a Föld lapultsága, a Foucault-kísérlet és még sok más jelenség, ha a tehetetlenség szokásos törvényéből indulunk ki? Ezt a nehézséget két úton lehet elkerülni. Vagy abszolútnak kell tekintenünk minden mozgást, vagy nem jól értjük a tehetetlenség törvényét. Nekem jobban tetszik ez a második változat. A tehetetlenség törvényének olyan formáját kell megtalálnunk, amely mind az első, mind a második nézőpontból ugyanarra a következtetésre vezet. Ehhez azonban figyelembe kell venni a Világegyetemben mindegyik létező tömegeket.

Ezt a programot nevezik *Mach-elvnek*. Az elképzelés szerint a Mach-elvet kielégítő elméletben a tehetetlenségi erők olyan valódi erők lennének, amelyeket a Világegyetem távoli tömegei fejtenek ki arra a testre, amelynek a mozgását vizsgáljuk. Ilyen elméletet azonban valamennyire is kidolgozott formában mindeddig senki sem javasolt²⁸.

Az általános relativitáselmélet megjelenése után azonnal felvetődött a kérdés, hogy ez az elmélet tartalmazza-e a Mach-elvet. H. Thirring és J. Lense már 1918-ban megmutatta gyenge tér közelítésben, hogy egy ω szögsebességgel forgó gömbhéj középpontjában nyugvó lokális (geodetikus) inerciarendszer Ω drag-szögsebessége $4GM/3c^2R \times \omega$ -val egyenlő, ahol M a gömbhéj tömege, R pedig a sugara. Ha ez a modell jól tükrözné a valóságot, akkor a paraméterek alkalmas választása mellett teljesülhetne az $\Omega = \omega$ egyenlőség, ami éppen azt fejezi ki, hogy az a lokális vonatkoztatási rendszer inerciarendszer, amely *nyugszik* a forgó gömbhéjhez képest, és ezzel magyarázatot nyerne, miért nem forognak az inerciarendszerek a csillagos éghez (a gömbhéjhez) képest. Kozmológiai szempontból azonban a modell egyáltalán nem realiztikus, és a jelentőségét ma már csak az adja, hogy ezen a feladaton ismerték fel először a forgó testek közelében fellépő drag létezését²⁹.

10. A Mach-probléma az általános relativitáselméletben.

A Mach-probléma azonban az általános relativitáselméletben is fennáll, hiszen az elmélet megengedi, hogy a Naprendszert izolált objektumként tárgyaljuk, mégis a számításból kapott bolygópályák érvényesnek bizonyul-

²⁸Mach nemcsak a centrifugális és a Coriolis-erőről képzelte, hogy visszavezethetők a Világegyetemben létező tömegek kölcsönhatására, hanem a tehetetlenségi erőről általában. Most azonban a forgásra korlátozódunk.

²⁹A relativisztikus kozmológiáról szóló 1917-s alapvető munkájában Einstein arra az álláspontra jutott, hogy egy ilyen elméletben a Mach-elv abban juthat kifejezésre, hogy a G gravitációs állandót ki lehet fejezni a Világegyetemben található tömeg és a Világegyetemre jellemző méreten keresztül. Dimenziós alapon egy ilyen reláció $G = konst \times c^2 R/M$ alakú. Einstein azért gondolta, hogy a Világegyetemet R sugarú gömbnek kell lennie, hogy létezen karakterisztikus méret. De ahhoz, hogy a téregyenletnek legyen statikus gömb megoldása, ugyanebben a cikkben rákényszerült a kozmológiai állandó bevezetésére, amely meghatározza R -t ($R = 1/\sqrt{\Lambda}$), ezért bármelyiket tekinthetjük karakterisztikus méretnek. Mai ismereteink szerint csak a kozmológiai állandó töltheti be ezt a szerepet.

nak az állócsillagokhoz rögzített gömbi koordinátarendszerben is, amelyre pedig a számításokban egyáltalán nincs utalás. Ezt a tapasztalati ténytet, amelyet a GP-B kísérletben alaposan kihasználnak, még akkor sem lehet magyarázat nélkül hagyni, ha egyébként nem kételkedünk benne.

A Mach-problémában a magányos csillag — a Nap — körüli téridő és a kozmológiai megoldás közötti kapcsolatról van szó. 1946-ban Einstein és Straus az alábbi módon tette fel a kérdést³⁰: Helyezzük a kozmológiai koordinátarendszer origóját a Nap középpontjába és képzeljük el egy kétdimenziós gömböt az origó körül, amely nyugszik a kozmológiai koordinátarendszerben (vagyis a gömb mérete a kozmológiai skálával arányosan nő). Az időt is figyelembe véve a gömb által kijelölt Σ háromdimenziós hiperfelület azt a téridő-csövet határolja, amelynek szimmetriatengelye a Nap világvonala. Összilleszthető-e a Nap tömege által meghatározott téridő-csőön belüli Schwarzschild-megoldás a külső kozmológiai megoldással?

Einstein és Straus a Σ környezetében gyenge tér közelítésben hasonlították össze egymással a két megoldást és azt találta, hogy az illesztés lehetséges. Hangsúlyozták, hogy az illesztés lehetőségéből következően a Világegyetem tágulása nem gyakorol hatást a Naprendszeren belüli jelenségekre. Később Schükingnek sikerült a Σ -n pontosan illeszteni egymáshoz a két megoldást³¹. Ez egyáltalán nem volt egyszerű feladat, mert a Robertson-Walker koordinátákról *görbületes koordinátákra* kellett áttérni, amelyben a kozmológiai megoldás szög része $r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2)$ alakú, a Schwarzschild-megoldásban pedig alkalmasan át kellett skálázni a koordinátáidőt. Schüking a képleteiből azt a következtetést vonta le, hogy az illesztés csak akkor lehetséges, ha az égitest tömege egyenlő azzal a kozmológiai tömeggel, amelyet eltávolítottunk, amikor a Nap körüli gömböt kivágjuk a kozmológiai megoldás tartományából.

Az Einstein-Strauss probléma pozitív megoldása arra utal, hogy ezen az úton megoldást találhatunk a Mach-problémára, de csak akkor, *ha az illesztés lehetőségét Kerr-téridőre is igazoljuk*. Ezt a lehetőséget azonban már a Schwarzschild esetben is nehéz demonstrálni³², a Kerr-esetben pedig teljesen valószínűtlennek látszik.

Magával az Einstein-Strauss kérdésfeltevéssel kapcsolatban is lehetnek kétségeink. Ha olyan univerzum-modellt képzelünk el, amelyben az anyag kizárólag magányos csillagok (esetleg izolált galaxisok) formájában van jelen, akkor a kozmológiai megoldás, amihez illesztünk, nem az Univerzum valóságos metrikája, és nem biztos, hogy az illesztésnek van fizikai értelme.

1.Függelék: A giroszkópra ható forgatónyomaték.

Egy ω szögsebességgel forgó vonatkoztatási rendszerben egy izolált giroszkópra ható forgatónyomaték a giroszkóp részecskéire ható $-2m(\omega \times \mathbf{v})$ Coriolis-erő forgatónyomatékainak az eredője:

$$\mathbf{K} = -2 \sum m_i (\mathbf{r}_i \times (\omega \times \mathbf{v}_i)) = 2 \sum m_i (\mathbf{r}_i \cdot \omega) \mathbf{v}_i. \quad (\text{A})$$

Az i a giroszkóp részecskéit indexeli, erre történik az összegzés. Ha a giroszkóp szögsebessége $\mathbf{\Omega}$, akkor

$$\mathbf{v}_i = (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_i) \perp \mathbf{r}_i. \quad (\text{B})$$

Írjuk ezt (A)-ba:

$$\mathbf{K} = 2(\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V}), \quad (\text{C})$$

amelyben

$$\mathbf{V} = \sum m (\mathbf{r}_i \cdot \omega) \mathbf{r}_i.$$

A giroszkóphoz rögzített $OXYZ$ főtehetetlenségi rendszerben

$$V_\alpha = \sum_\beta \left(\sum m_i r_{i\alpha} r_{i\beta} \right) \omega_\beta \quad (\alpha, \beta = x, y, z).$$

A tehetetlenségi tenzor

$$I_{\alpha\beta} = \sum m r_i^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} - \sum m_i r_{i\alpha} r_{i\beta} \quad (\text{D})$$

³⁰A. Einstein és E. Straus, Rev. Mod. Phys. **17**, 120 (1945) és **18**, 148 (1946). Ezekre a cikkekre Vasúth Mátyás hívta fel a figyelmemet.

³¹E. Schüking Z. Phys. **137**, 595 (1954). A dolgozatban azonban csak magának a metrikus tenzornak az illesztése történik meg, a Σ -ra merőleges derivált illesztéséről nem esik szó.

A kozmológiai állandót Schüking nem veszi figyelembe, de később a megoldását általánosították $\Lambda \neq 0$ -ra (R. Balbinot el al, Phys. Rev. **D38**, 2415 (1988)).

³²Schüking cikkét olvasva elég megdöbbentő élmény látni, ahogy a koordinátatranszformációk végén a Schwarzschild-megoldás $1 - 2m/r$ elemei előbukkannak a kozmológiai megoldásban.

definíciója alapján

$$V_\alpha = \sum_\beta \left(\sum m_i r_i^2 \cdot \delta_{\alpha\beta} - I_{\alpha\beta} \right) \omega_\beta. \quad (\text{E})$$

A tehetetlenségi tenzor diagonális I_x, I_y, I_z főtehetetlenségi nyomatékokkal, ezért a (D) diagonális összegét véve a

$$\sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$$

egyenlőségre jutunk, amelyet (E)-be írunk:

$$V_x = \frac{1}{2}(I_y + I_z - I_x)\omega_x, \quad V_y = \frac{1}{2}(I_z + I_x - I_y)\omega_y, \quad V_z = \frac{1}{2}(I_x + I_y - I_z)\omega_z.$$

Gömbszimmetrikus giroszkópnál $I_x = I_y = I_z = I$, ezért $\mathbf{V} = \frac{1}{2}I\boldsymbol{\omega}$. Ha ezt (C)-be írjuk és figyelembe vesszük, hogy a giroszkóp impulzuszórája $\mathbf{J} = I\boldsymbol{\Omega}$ -val egyenlő, akkor a giroszkóp mozgásegyenletére a

$$\dot{\mathbf{J}} = \mathbf{K} = (\mathbf{J} \times \boldsymbol{\omega})$$

jól ismert képletet kapjuk. A témánk szempontjából ez az egyenlet úgy interpretálandó, hogy ha egy gömbszimmetrikus giroszkóp izolált (nem hat rá valódi forgatónyomaték) és a tengelye $\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel precesszál, akkor az a vonatkoztatási rendszer, amelyhez képest ezt a precessziót észleljük, $-\boldsymbol{\omega}$ szögsebességgel forog (vagyis nem inerciarendszer).

2.Függelék: A Papapetrou-egyenlet.

Írjuk (4.2)-t a következő alakban:

$$\frac{{}^*DU^i}{d\tau} = \frac{dU^i}{d\tau} + {}^*\Gamma_{kj}^i V^k U^j = 0,$$

ahol

$${}^*\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{kj}^i - \frac{1}{c^2}(g_{kj}A^i - A_j\delta_k^i). \quad (\text{A})$$

A spint leírhatjuk akár egy U^i négyesvektor, akár egy S^{ij} antiszimmetrikus tenzor segítségével, amelyek eleget tesznek a $V_i U^i = V_i S^{ij} = 0$ mellékfeltételnek, és a következő kapcsolatban vannak egymással:

$$S^{ij} = \frac{1}{c}\varepsilon^{ijkl}V_k U_l, \quad U_i = -\frac{1}{c}\varepsilon_{ijkl}V^j S^{kl}.$$

A Papapetrou-egyenletet legtömörebben a

$$\frac{{}^*DS^{ij}}{d\tau} = 0$$

alakban lehet felírni. Mivel a Fermi-Walker deriválás — *deriválás*, ezért a kifejtett alak a következő:

$$\frac{dS^{ij}}{d\tau} + {}^*\Gamma_{kl}^i V^k S^{lj} + {}^*\Gamma_{kl}^j V^k S^{il} = 0.$$

A ${}^*\Gamma_{jk}^i$ együtthatók általában nem szimmetrikusak az alsó indexpárban. Helyettesítsük be (A)-t:

$$\frac{DS^{ij}}{d\tau} + \frac{1}{c^2}V^i A_l S^{lj} - \frac{1}{c^2}V^j A_l S^{li} = 0.$$

A gyorsulásokat az

$$A_i S^{ij} = \frac{DV_i}{d\tau} S^{ij} = -V_i \frac{DS^{ij}}{d\tau} = V_i \frac{DS^{ji}}{d\tau}$$

átalakítással eliminálva a

$$\frac{DS^{ij}}{d\tau} + \frac{1}{c^2}V^i V_k \frac{DS^{jk}}{d\tau} - \frac{1}{c^2}V^j V_k \frac{DS^{ik}}{dt} = 0 \quad (\text{B})$$

Papapetrou-egyenletre jutunk³³.

Az U^i és az S^{jk} kapcsolata olyan, hogy ha az egyik Fermi-Walker deriváltja zérus, akkor a másiké is eltűnik, ezért (4.2) valóban a Papapetrou-egyenlet vektoros alakja. Érdekes, hogy a (B) alakban nincs Fermi-Walker derivált és az \mathbf{A} gyorsulás sem szerepel. Ennek ellenére az egyenlet gyorsuló mozgás esetében is a forgó próbatest forgásmentes mozgását írja le.

³³A. Papapetrou, Proc. Roy. Soc. **A209**, 248 (1951).