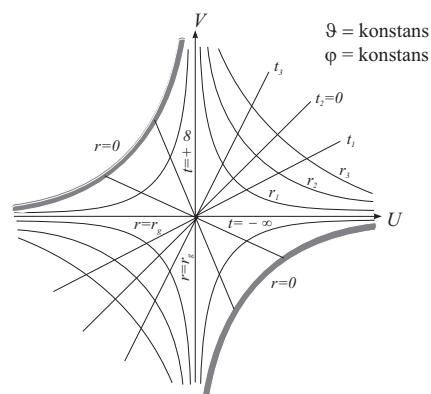


Általános relativitáselmélet és kozmológia

Hraskó Péter

A Budapesti Műszaki Egyetemen tartott előadások jegyzete



Tartalomjegyzék

1. A speciális relativitáselmélet alappoztulátuma	3
2. A téridő	5
3. A sajátidő	8
4. A súlyos és a tehetetlen tömeg	10
5. A gravitáció geometrizálása	11
6. A nemmetrikus sokaság. Tenzorok	14
7. A nemmetrikus sokaság. A Lie-derivált	18
8. A Riemann-geometria	22
9. Példa: A 2D gömb	24
10. A kovariáns derivált	27
11. A geodetikus egyenlet	31
12. Példa: A 2D gömb (folytatás)	33
13. A görbület	35
14. A Riemann-tenzor tulajdonságai	39
15. Példa: A 2D pszeudogömb	42
16. Az általános relativitáselmélet térídeje	45
17. A Nap körüli közelítő metrika a geodetikus hipotézis alapján	49
18. Az ikerparadoxon a Föld gravitációs terében	51
19. A szabadon mozgó tömegpont	52
20. A tömegpontok energiája a közelítő metrikában	55
21. A fénysugarak a téridőben	56
22. A fényelhajlás a közelítő metrikában	58
23. A gravitációs vöröseltolódás	61
24. Elektrodinamika a relativitáselméletben	67
25. Az energia-impulzus tenzor	71

TARTALOMJEGYZÉK	2
26. Az Einstein-egyenlet	75
27. A centrálszimmetrikus statikus téridő	80
28. A Schwarzschild-megoldás	82
29. A fényelhajlás a Schwarzschild-metrikában	84
30. A Schwarzschild-téridő forgó koordinátarendszerben	86
31. A körmozgás a Schwarzschild-téridőben	87
32. A geodetikus precesszió	90
33. A perihélium vándorlás	92
34. Az impulzusmomentum hatása a téridőre	93
35. A Schwarzschild-szingularitás természete	95
36. A pontszerű csillag térídeje	99
37. Geodetikusok a pontszerű csillag térídejében	103
38. A relativisztikus kozmológia alapfeltevései	107
39. A standard modell	109
40. A kozmológiai vöröseltolódás	110
41. A Fridman-egyenletek	116
42. A Fridman-egyenlet megoldása	119
43. A Fridman-univerzum	123
44. A horizont-probléma	125

Bevezetés

Az általános relativitáselmélet a gravitáció elmélete, amely a múlt század második évtizedében lépett Newton általános tömegvonzási elmélete helyébe. A kurzus célja ennek az elméletnek az ismertetése.

A speciális relativitáselméletet Einstein 1905-ben hozta létre. Ez egy olyan "operációs rendszer", amely alatt a fizika egésze működik — a gravitáció kivételével. Az általános relativitáselmélet ennek az "operációs rendszernek" olyan általánosítása, amely feltehetően már az egész fizikát működtetni tudja. Mivel ez az elmélet a speciális relativitáselmélet *általánosítása*, ezért a tárgyalását a speciális relativitáselmélettel kell kezdeni. Felteszem azonban, hogy ezzel az elmélettel már mindenki találkozott, ezért csak az általánosítás szempontjából legfontosabb pontokat fogjuk felidézni¹

A következő előkészítő lépés az általános relativitáselmélet matematikai apparátusának az áttekintése lesz, amely a differenciálgeometriába tartozik és az alkalmazási területe nagyon széles. Kifejezetten szép matematikai elméletről van szó, amelyben nem hosszadalmas számításokkal, hanem a fogalmi struktúra tisztázásával kell majd elsősorban foglalkoznunk. Ezzel a matematikai elmélettel *önmagáért* is érdemes megismerkedni.

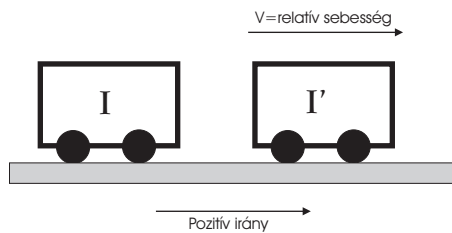
Csak ezután kerülhet sor az általános relativitáselméletnek, mint *fizikai elméletnek* a tárgyalására. Az elmélet alap gondolatát azonban, amely a *gravitáció geometrizálása*, még a matematikai elmélet előtt ismertetni fogom azért, hogy világos legyen, miért éppen a differenciálgeometria az a matematika, amire szükségünk lesz.

1. A speciális relativitáselmélet alapposztulátuma

Az alapposztulátum: *A fénysebesség független a fényforrás sebességétől és minden inerciarendszerben minden irányban ugyanakkora.*

Az alapposztulátum kimondásakor feltételezzük, hogy mint minden sebességet, a fénysebességet is a "sebesség = út/idő" definíció alapján határozzuk meg. A mérés technikai megvalósítása sokféle lehet. Az oda-vissza úton történő mérés technikailag egyszerűbb, ezt alkalmazta a XIX. században Fizeau a szaggatásos, Foucault a forgótükros módszerben. Az egyirányú mérés is lehetséges, de technikailag nehezebb megvalósítani.

Az alapposztulátum azt állítja, hogy ha egy nyugvó és egy egyenes egyenesvonalú mozgást végző vasúti kocsiban (ez két inerciarendszer) elvégezzük bármelyik fénysebesség-mérést, a fénysebességre ugyanazt a $c = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s számértéket kapjuk.



1.ábra

Ha a fénysebesség *a fényforráshoz* képest lenne mindig ugyanakkora (*ballisztikus elmélet*), akkor ebben nem lenne semmi meglepő. Ebben az esetben ugyanaz lenne a helyzet, mint a pisztollyal (ez a fényforrás analogonja) és a kilőtt pisztolygolyóval (ez a fény megfelelője): A golyó sebessége ahhoz a vasúti kocsinhoz képest, amelyben a pisztoly nyugszik, mindig ugyanakkora.

Ebből az analógiából azonban az is következik, hogy ebben az esetben a fénysebességnek függenie kellene a fényforrás sebességétől, a mozgó tükörről visszavert fény sebességének pedig függenie kellene a tükör se-

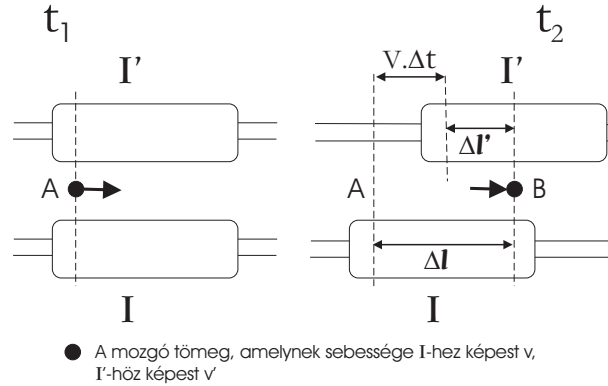
¹A speciális relativitáselméletéről ld. még az *Idő és relativitás* című előadásaimat a honlapomon (peter.hrasko.com).

bességétől. Azonban a kísérletek és a csillagászati megfigyelések (pl. a kettős csillagoknál) ezt egyértelműen cáfolják.

A fény hullámtermészete alapján is az várható, hogy a fénysebesség — a hangsebességhez hasonlóan — ne a fényforráshoz, hanem ahhoz a közeghez (az éterhez) viszonyítva legyen állandó, amelyben terjed. De akkor viszont azt nem lehet érteni, miért ugyanolyan nagyságú a közeghez képest különböző sebességgel mozgó vasúti kocsikban (inerciarendszerekben). Ha ugyanis a fénysebesség az \mathcal{I} vasúti kocsiban pozitív irányban c , akkor az \mathcal{I}' -ben, amely az előbbihez képest V sebességgel mozog ugyanabban az irányban, $(c - V)$ -vel kellene egyenlőnek lennie (a sebességösszeadás törvénye).

Évtizedeken keresztül vitatták, hogyan lehetne összeegyeztetni a fénysebesség állandóságát az éterhipotézissel. Ez a vita ma is tanulságos, de elsősorban történeti érdekességű, mert a megoldást Einstein a speciális relativitáselméletben az éterhipotézis keretein kívül találta meg. A továbbiakban csak ezzel az elmélettel foglalkozunk.

Einstein arra gyanakodott, hogy talán a sebességösszeadás törvényével van valami baj és részletesen megvizsgálta, vajon tényleg univerzális érvényességű-e ez a törvény.



2.ábra

Egy egyenesen sebességgel mozgó test Δt idő alatt az \mathcal{I} és az \mathcal{I}' inerciarendszerhez képest különböző hosszú utat tesz meg (ld. a 2.ábrát, amely most felülnézetben mutatja a párhuzamos sínen mozgó vasúti kocsikat a t_1 és a későbbi t_2 pillanatban):

$$\Delta l' = \Delta l - V \cdot \Delta t \quad (1.1)$$

(amikor $V \cdot \Delta t > \Delta l$, akkor $\Delta l'$ negatív és a megtett út valójában $|\Delta l'|$ -vel egyenlő). Mivel

$$v' = \frac{\Delta l'}{\Delta t} \quad v = \frac{\Delta l}{\Delta t} \quad (1.2)$$

az ((1.1))-ből valóban az következik, hogy $v' = v - V$.

A Δl és a $\Delta l'$ távolságot természetesen az \mathcal{I} , ill. az \mathcal{I}' inerciarendszerben nyugvó távolságmérő eszközök segítségével határozzuk meg, és az időtartamokat is az \mathcal{I} -ben és az \mathcal{I}' -ben nyugvó órákról olvassuk le. Miért vagyunk benne olyan biztosak, hogy noha az \mathcal{I} -ben és az \mathcal{I}' -ben nyugvó méterrudak a megtett útra különböző értéket adnak, az ugyanott nyugvó órák az út megtételéhez szükséges időre mindig ugyanazt az értéket szolgáltatják? Háttha nem így van és valójában $\Delta t' \neq \Delta t$. Ekkor (1.2) helyett a

$$v' = \frac{\Delta l'}{\Delta t'} \quad v = \frac{\Delta l}{\Delta t} \quad (1.3)$$

érvényes és nem lehet eleve kizárni, hogy történetesen a fény esetében ez a két arány megegyezzen egymással.

Ha valóban ez a helyzet, akkor (1.1) helyett is ki kell találni valami újat, hiszen pl. már azt sem tudhatjuk, hogy a jobboldalon Δt vagy $\Delta t'$ áll-e (vagy valami egészen más).

Einstein megmutatta, hogy (1.1) egy általánosabb formula olyan speciális esete, amely csak végtelen fénysebességnél lenne pontosan érvényes. Amikor a fénysebesség a véges c , az általános formula a *Lorentz-transzformáció*:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - V/c^2 \cdot \Delta l}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad (1.4)$$

$$\Delta l' = \frac{\Delta l - V \cdot \Delta t}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (1.5)$$

A Δl és a $\Delta l'$ itt ugyanazt jelenti, mint korábban, a Δt és a $\Delta t'$ pedig az az idő, amely alatt a tömeg az A pontból a B -be jutott el az \mathcal{I} -ben, ill. az \mathcal{I}' -ben nyugvó órák mutatóállása alapján. A Δl , Δt és a $\Delta l'$, $\Delta t'$ párok közül egyik sem "valódibb" a másiknál. Tökéletesen egyenértékűek egymással, mert \mathcal{I} és \mathcal{I}' két egyenértékű inerciarendszer.

Figyeljük meg a transzformáció két fontos tulajdonságát:

1) Amikor $V \ll c$, a korábbi

$$\Delta t' = \Delta t \quad \Delta l' = \Delta l - V \cdot \Delta t$$

képleteket kapjuk vissza.

2) A sebességösszeadás törvényére a

$$v' = \frac{\Delta l'}{\Delta t'} = \frac{\Delta l - V \cdot \Delta t}{\Delta t - V/c^2 \cdot \Delta l} = \frac{v - V}{1 - Vv/c^2}$$

képletet kapjuk, amely $vV \ll c^2$ -nél a newtoni $v' = v - V$ sebességösszeadási törvényre, $v = c$ esetében pedig a várt $v' = c$ képletre vezet.

A részletesebb analízis azt mutatja, hogy amikor egy testet valamilyen módon (rakétaként, vagy elektromos térben, ha töltött) gyorsítunk, sohasem érhetjük el a fénysebességet (a fénysebesség határsebesség).

2. A téridő

Eddig nem esett szó koordinátákról. Nem volt rájuk szükség, mert az alappozitulum megfigyelésekre és laboratóriumi mérések várható eredményére vonatkozik, ezekhez pedig nem kell koordinátarendszer. A méréseket és megfigyeléseket mindig valamilyen *vonatkoztatási rendszerben* (\mathcal{V}) végezzük el, ami létező objektum (az eddigi példákban vasúti kocsí volt). Az *inerciarendszer* (\mathcal{I}) olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben a megfigyelések szerint nem lépnek fel inerciaerők.

Koordinátarendszerre (\mathcal{K}) az elméleti analízisben van szükség. A koordinátarendszert azonban — a vonatkoztatási rendszerrel ellentétben — sohasem realizáljuk, csak *elképzeljük*: Gondoljunk csak a bolygómozgás tárgyalására a newtoni mechanikában. Amikor azonban egy konkrét vonatkoztatási rendszerben történő kísérletet analizálunk, rendszerint olyan koordinátarendszert kell *elképzelnünk*, amelyben a szóbanforgó vonatkoztatási rendszer állandó koordinátákkal rendelkezik (a koordinátarendszert a választott vonatkoztatási rendszerhez *rögzítjük*: $\mathcal{V} \longleftrightarrow \mathcal{K}$, $\mathcal{V}' \longleftrightarrow \mathcal{K}'$ vagy $\mathcal{I} \longleftrightarrow \mathcal{K}$, $\mathcal{I}' \longleftrightarrow \mathcal{K}'$).

Ha mondjuk a vonatkoztatási rendszerünk egy vasúti kocsí, akkor *gondolatban* rögzíthetünk hozzá Descartes-koordinátákat például úgy, hogy az origót a kocsí középpontjába helyezzük (de ez persze nem kötelező, a 2. ábra elrendezésében célszerű a \mathcal{K} és a \mathcal{K}' origóját az AB egyenesre helyezni), az x -tengelyt párhuzamosnak

választjuk a sínnel, a z -tengelyt pedig függőlegesen felfelé irányítjuk. Ez elegendő ahhoz, hogy egy mozgó test által adott idő alatt megtett Δl utat számszerűsítsük:

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}. \quad (2.1)$$

A Δt mozgási idő számszerűsítéséhez még az is szükséges, hogy a vasúti kocsit *gondolatban* sűrűn kitöltsük ideális órákkal és azt, hogy a mozgó test mikor tartózkodik egy adott pontban, annak az órának a mutatóállása alapján állapítsuk meg, amelyik ugyanabban a pontban van. Ha csak egy "központi" óránk lenne, akkor ennek az időpontnak a megállapításához jelek továbbítására lenne szükség, ami azért nem engedhető meg, mert a jelterjedés törvényszerűségei csak az analízis végén válnak egyértelművé.

Ezzel rögzítettünk egy *téridő koordinátarendszert*, amely minden pontszerű és pillanatszerű eseményhez hozzárendel három térkoordinátát és egy időpontot. Ez utóbbit nevezzük *koordinátaidőnek*.

A koordinátarendszer önkényes gondolati konstrukció. A Descartes-koordináták helyett elgondolhatnánk tetszőleges görbevonallú koordinátarendszert is és csak azért választottuk éppen a Descartes-rendszert, mert két pont távolságát ebben a koordinátarendszerben lehet legegyszerűbben (a (2.1) képlet segítségével) kifejezni a pontok koordinátáin keresztül.

Az eddigi előírással azonban a koordinátaidőt még nem rögzítettük egyértelműen, ugyanis az órák feltételezett ideális voltából csak az következik, hogy *azonos ritmusban* járnak, de ettől még különféle módokon lehetnek egymáshoz képest *szinkronizálva*.

A szinkronizáció megválasztását ugyanúgy a célszerűség diktálja, mint a Descartes-rendszerét. A legjobb az, ha az alappozitulátumból indulunk ki. Ezt azért tehetjük meg nyugodtan, mert mint láttuk, az alappozitulátum tapasztalati ellenőrzése maga nem tételez fel koordinátarendszert, ezért nem áll fenn a *circulus vitiosus* (körben forgó hibás okoskodás) veszélye. Az alappozitulátum szerint a fénysebesség minden inerciarendszerben minden irányban c , és inerciarendszerekben a koordinátaidőt mutató órákat ennek alapján szinkronizálhatjuk össze a legegyszerűbben egymással (Einstein-féle szinkronizáció). Ha így járunk el, akkor a nagyon egyszerű

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = c^2 \Delta t^2$$

képlet kapcsolja össze egymással a fény által megtett távolságot az út megtételéhez szükséges idővel.

A szétszórt órák *egyikének* az időpontját azonban még mindig tetszőlegesen választhatjuk. Állapodjunk meg abban, hogy ha az \mathcal{I} inerciarendszer V sebességgel mozog a \mathcal{K} és a \mathcal{K}' közös x -tengelyének pozitív irányában, akkor a \mathcal{K} és a \mathcal{K}' origójában nyugvó két óra nulla koordinátaidőt mutasson, amikor a koordinátarendszerek éppen fedik egymást.

Az így választott koordinátarendszerben (*Minkowski-koordináták*) az alappozitulátumot nagyon egyszerűen lehet matematikailag megfogalmazni. Tegyük fel, hogy abban a pillanatban, amikor \mathcal{K} és \mathcal{K}' origója éppen fedik egymást (azaz $t = t' = 0$ -ban) az origóból fényjelet bocsátunk ki, amelyet valahol észlelünk. Az észlelés helye és időpontja \mathcal{K} -hoz viszonyítva legyen x, y, z, t , \mathcal{K}' -hez viszonyítva pedig x', y', z', t' . Azt a tényt, hogy a fénysebesség mindkét koordinátarendszerhez viszonyítva ugyanaz a c , az

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \iff x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (2.2)$$

reláció fejezi ki, amelyben \iff egymásból következést jelent.

Ebből a képletből kiindulva lehet levezetni a Lorentz-transzformációt, amely egy adott esemény vesszős Minkowski-koordinátáit fejezi ki ugyanazon esemény vesszőtlen Minkowski-koordinátáin keresztül. A (2.2) következtében ennek a transzformációnak összhangban kell lennie a

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = F \cdot (c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2)$$

képlettel. Az F függvény, amely természetesen nem lehet nulla, függhet a képletben szereplő összes változótól. Einstein azonban megmutatta, hogy ha a tér és az idő *homogén* (az üres térben nincs kitüntetett pont és időpont), akkor a keresett transzformációnak lineárisnak kell lennie, ez $F = 1$ -re vezet, és így a transzformációnak

az erősebb

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (2.3)$$

relációt kell teljesítenie.

A (2.3) analóg az

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (2.4)$$

relációval, amely azt fejezi ki, hogy a vesszős és a vesszőtlen koordinátájú pont origótól mért távolsága egyenlő és így a koordinátarendszer origó körüli *elforgatását* (rotációját) írja le. Ha pl. az elforgatás az xy -síkban (a z -tengely körül) történik, akkor innen

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Hasonlóan, (2.3) a koordinátarendszer *pszeudorotációját* definiálja, amelyben egy esemény origótól mért $c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$ "relativisztikus távolságnégyzete" állandó. Amikor a pszeudorotáció nem érinti az időt, pl. az xy síkban történik, akkor a $t' = t$ -vel kiegészített (2.5) írja le. Az xt síkbeli pszeudorotáció képlete azonban az előjelkülönbség miatt a következő:

$$\left. \begin{aligned} ct' &= ct \operatorname{ch} \alpha - x \operatorname{sh} \alpha \\ x' &= -ct \operatorname{sh} \alpha + x \operatorname{ch} \alpha \\ y' &= y; \quad z' = z. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Az α *sebességparamétert* a \mathcal{K}' \mathcal{K} -hoz viszonyított V sebessége határozza meg. A \mathcal{K}' origójában ugyanis minden pillanatban $x' = 0$, és ha ezt (2.6) 2. egyenletébe beírjuk, a \mathcal{K}' origójának \mathcal{K} -hoz viszonyított pályájára az $x = \operatorname{tgh} \alpha \cdot ct$ egyenletet nyerjük, amelyből leolvasható, hogy $V/c = \operatorname{tgh} \alpha$. Így $\alpha = \operatorname{Arth} V/c$, ahonnan

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \quad \operatorname{sh} \alpha = \frac{V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Ezt (2.6)-ba helyettesítve kapjuk a Lorentz-transzformáció egyedi eseményekre érvényes képleteit².

Látjuk, hogy a 3D euklidészi geometriai tér és a speciális relativitáselmélet térideje között párhuzam fedezhető fel. Az alapvető közös vonás az, hogy mindkettő *metrikus sokaság*.

A "sokaság" terminus azt fejezi ki, hogy az euklidészi tér és a téridő pontjai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők valós számhármásoknak ill. számnégyeseknek: az előbbi háromdimenziós, az utóbbi négydimenziós sokaság³. A megfeleltetés végtelen sok különböző módon megtehető, minden megfeleltetés egy-egy lehetséges koordinátarendszer. Újból hangsúlyozzuk, hogy a koordinátarendszert csak elképzeljük, a valóságban sohasem realizáljuk (nem is lehetne).

A "metrikus" jelző arra utal, hogy a sokaság bármely két pontja meghatározott "távolságnégyzetre" van egymástól, amely mérés útján elvben meghatározható és ezért független a koordinátarendszertől (*invariáns*). A távolságnégyzet képlete a geometriai tér esetében Descartes-koordinátákban, a téridő esetében Minkowski-koordinátákban a legegyszerűbb:

$$\Delta l^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \quad (2.7)$$

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (2.8)$$

²A (1.4) és a (1.5) a Lorentz-transzformáció eseménypárra felírt formája.

³Ennek a megfeleltetésnek a lehetősége egyáltalán nem nyilvánvaló és csak azért fogadjuk el, mert a megfeleltetésre épülő fizikai elméleteket a tapasztalat igazolja.

(infinitezimális intervallumokra $\Delta \rightarrow d$). A (2.7) a 3D *euklidészi* térre vonatkozik, amelyben az "euklidészi" jelző arra utal, hogy Δl^2 pozitív definit (a jobboldalon csupa plusz áll). A (2.8)-ban nem ez a helyzet, ezért a téridő *pseudoeuklidészi* sokaság.

Ezeknek az egyenleteknek van egy fontos, tagadás formájában megfogalmazható jelentése is. A (2.7) nem csak azt jelenti, hogy a jobboldali összeg invariáns, hanem azt is, hogy a tagok külön-külön *nem* invariánsak és ezért nincs is geometriai jelentésük: Két pont csak a Δl^2 -t határozza meg, a koordinátakülönbségeket azonban külön-külön nem. A (2.8)-cal hasonló a helyzet: Két adott esemény között van meghatározott Δs^2 , de időkülönbség és térbeli távolság külön-külön nem rendelhető hozzájuk. Ez alapvető eltérés a newtoni felgogástól, amely szerint két esemény mindig határozott időkülönbséggel egymástól határozott távolságban történik.

A Δs^2 előjelétől függően egy adott eseménypár vagy *időszerű* ($\Delta s^2 > 0$), vagy *fényszerű* ($\Delta s^2 = 0$), vagy *térszerű* ($\Delta s^2 < 0$). Egy mozgó tömegponton egymás után bekövetkező két esemény (vagyis a téridőbeli pálya két tetszőleges pontja) mindig időszerű egymáshoz képest. Ez a c határsebesség jellegéből következik.

A téridő pontjait az összes *elképzelt* esemény alkotja, nem csupán a valóságosan bekövetkező események. Hasonlóan, a geometriai tér elemei azok a pontok, amelyekben *lehetnek* tárgyak, nem pedig csak a valóságos tárgyak által elfoglalt pontok.

3. A sajátidő

A koordinátaidőt semmilyen óra sem mutatja, mert a koordinátaidő a többi koordinátaéhoz hasonlóan olyan matematikai fogalom, amelyet csak elképzelünk. A valóságos órák által mutatott idő az adott óra *sajátideje*, amit τ -val szokás jelölni (a továbbiakban valóságos órán mindig az ideális pontszerű óra határesetét fogjuk érteni). A sajátidőnek ebben a definíciójában nincs utalás semmiféle koordinátarendszerre, ezért egy óra pályájának két adott pontja között eltelt sajátidő minden koordinátarendszerben ugyanannyi: A sajátidő *invariáns*.

Ha "leteszünk" egy órát egy \mathcal{I} inerciarendszerben (vasúti kocsiban), a sajátidejének a ritmusa meg fog egyezni a Minkowski-féle koordinátaidő ritmusával (Minkowski-koordinátákban a koordinátaidőt a nyugvó órák mutatják), de általában nem pont a koordinátaidőt fogja mutatni, mert nincs megfelelően szinkronizálva. Az \mathcal{I} -ben *mozgó* órák azonban a koordinátaidőnél lassabban járnak. Hányszor lassabban?

A pontszerű óra pályáját \mathcal{K} -ban az

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t)$$

képletekkel írhatjuk le, amelyben t természetesen a koordinátaidő. A $\vec{v}(t)$ pillanatnyi sebesség nagyságát a

$$v^2 = \left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2$$

képlettel számíthatjuk ki (a függvények olyanok, hogy $v^2 < c^2$).

Képzeljük el azt az \mathcal{I}' inerciarendszert, amely a t pillanatbeli $\vec{v}(t)$ sebességgel mozog *egyenletesen* \mathcal{I} -hez képest. Az óra a $(t, t+dt)$ -ben az \mathcal{I}' -ben nyugszik (*pillanatnyi nyugalmi rendszer*), így ezalatt a sajátidejének a megnövekedése az \mathcal{I}' koordinátaidejének, t' -nek a megváltozásával egyenlő: $d\tau = dt'$. A szóbanforgó szakaszon az óra \mathcal{K}' -beli elmozdulása nulla ($dx' = dy' = dz' = 0$), ezért

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt'^2 = c^2 dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2.$$

De a jobboldalon álló kifejezés az infinitezimális relativisztikus távolságnégyzet, amelynek értéke \mathcal{K}' -ben és \mathcal{K} -ban ugyanannyi:

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (3.1)$$

Ha ezt az előző képletbe beírjuk, a jobboldalon kiemeljük $c^2 dt^2$ -t és négyzetgyököt vonunk, a

$$d\tau = dt\sqrt{1 - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/c^2} = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

képletre jutunk. A pályájának azon infinitezimális szakaszán tehát, amelyen a sebessége v -vel egyenlő, az órán

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (3.2)$$

-szer kevesebb idő telik el, mint amennyi a koordinátaidő megváltozása (*idődilatáció*). Ez a válasz a "hányszor lassabban?" kérdésre.

Ez a képlet közvetlenül nem ellenőrizhető, mert a koordinátaidőt semmi sem mutatja, de vannak ellenőrizhető következményei. Tegyük fel például, hogy két óra egy közös pontból indul és később újra találkozik egymással. Az indulás előtt hozzuk a mutatóikat azonos állásba (szinkronizáljuk őket). Ugyanazt az időt fogják-e mutatni a találkozásuk pillanatában?

Legyen az órák pályája a \mathcal{K} inerciarendszerben

$$x = f_i(t), \quad y = g_i(t), \quad z = h_i(t) \quad (i = 1, 2).$$

Az indulás történjen a $t = t_a$, a találkozás pedig a $t = t_b$ koordinátaidőben ($f_1(t_a) = f_2(t_a), \dots$ stb). Az órákon ezalatt

$$\Delta\tau_i = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{df_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dg_i}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dh_i}{dt} \right)^2 \right]} dt \quad (3.3)$$

sajátidő telik el. Mivel általában $\Delta\tau_1 \neq \Delta\tau_2$, a találkozás pillanatában és azután az órák nem ugyanazt az időt fogják mutatni (*óraparadoxon* vagy *ikerparadoxon*).

Ha speciálisan az 1. óra végig nyugszik \mathcal{K} -ban, akkor

$$\Delta\tau_1 = t_b - t_a \quad \Delta\tau_2 < (t_b - t_a) = \Delta\tau_1,$$

tehát azon az órán telik el a hosszabb idő, amelyik nem gyorsult.

Ez a gondolatmenet jól szemlélteti a sajátidő és a koordinátaidő viszonyát. A sajátidők azok, amiket meg lehet mérni, de a mérés várható eredményét csak a koordinátaidő (és a helykoordináták) igénybevételével lehet kiszámítani.

Az általános relativitáselméletben a (3.2) összefüggést majd lényegesen általánosítani kell, mert az ideális órák járásának a ritmusát a gravitáció is jelentősen befolyásolja (ld. a 18. fejezetet). Az óraparadoxon létezését a Global Positioning System működésében figyelembe kell venni.

A relativisztikus időfelfogás fontos eleme, hogy két különböző helyen történő esemény egyidejűségének nincs fizikai értelme, mert — mint az előző fejezet végén utaltunk rá, — két eseményhez nem rendelhető a koordinátarendszer választásától független koordinátaidő különbség: Ha \mathcal{K} -ban $\Delta t = 0$, akkor $\Delta x \neq 0$ következtében minden egyéb \mathcal{K}' -ben $\Delta t' \neq 0$. Mivel \mathcal{K} és \mathcal{K}' tökéletesen ekvivalens, mindkét állítás egyformán korrekt.

Az egyidejűség kritériuma a sajátidő segítségével sem fogalmazható meg. Azt gondolhatnánk, hogy az előbb tárgyalt esetben a mozgó órákon azok az eseménypárok, amelyekben a két óra ugyanazt az időpontot mutatja, egyidejűek egymással. De ez nem elfogadható értelmezés, mert akkor az az esemény, amikor találkoznak egymással, nem lenne önmagával egyidejű. Márpedig az egyidejűség fogalmába beletartozik, hogy minden esemény egyidejű önmagával.

4. A súlyos és a tehetetlen tömeg

Az $m\vec{a} = \vec{F}$ egyenlet baloldalán álló tömeg és az $\vec{F}_G = GmM/r^2$ gravitációs erőben szereplő tömeg fizikai jelentése gyökeresen különböző, szinte ellentéte egymásnak. A gyorsulást szorzó tömeg azt mutatja meg, mennyire áll ellent egy adott test a különféle típusú erők (a gravitációt is beleértve) gyorsító hatásának (*tehetetlen tömeg*, a továbbiakban ezt fogjuk m -el jelölni). A gravitációs erőben szereplő tömeg pedig azt fejezi ki, milyen mértékben veti alá magát egy adott test a gravitációs erő gyorsító hatásának (*súlyos tömeg*, alább m^* -gal jelöljük).

Egy test tehetetlen tömegét pl. úgy lehet meghatározni, hogy forgó korongon rögzített körülmények között összehasonlítjuk, mekkora centrifugális erő hat rá és a nemzetközi kilogramm-prototípusra. A lényeg az, hogy egy ilyen mérésben a gravitációnak nincs szerepe, ezért a tehetetlen tömeg értékét kaphatjuk meg belőle (centrifugális erő helyett végezhetnénk ütközési kísérletet is).

A súlyos tömeg meghatározásában éppen ellenkezőleg, csak a súlyerőnek lehet szerepe. Ezért pl. egy test súlyos tömege akkor egyenlő a nemzetközi kilogramm-prototípus súlyos tömegével, ha egy adott rugós mérlegen adott helyen azonos megnyúlást hoznak létre.

Ezekből a meghatározásokból nyilvánvaló, hogy a prototípus tehetetlen és súlyos tömege egyaránt 1 kilogramm. Sőt, ha ugyanabból az anyagból, amelyből a prototípus áll, készítünk egy másik testet, annak is egyenlő lesz a tehetetlen és a súlyos tömege (csak általában nem lesz éppen 1 kilogramm). Egy másik anyagi minőségű test súlyos és tehetetlen tömegének azonban már nem kell egyenlőnek lennie.

A tapasztalat szerint azonban az m^*/m arány a testek anyagi minőségétől függetlenül 1-gyel egyenlő. A kísérletek ezt nagy pontossággal igazolják (Eötvös Loránd torziós-inga kísérlete és modern változatai), de csak az általános relativitáselmélet ad rá magyarázatot.

Miben nyilvánulna meg, ha a súlyos és a tehetetlen tömeg nem lenne egyenlő?

1) A földfelszínen a szabadesés egyenletét

$$m\ddot{z} = m * \frac{GM^*}{R^2} = -m^*g$$

alakban kellene használnunk, ezért az

$$|\ddot{z}| = \frac{m^*}{m}g \quad (g \approx 9.81 \text{ m/s}^2)$$

gravitációs gyorsulás nem lenne minden objektumra ugyanakkora (a g a kilogramm-prototípus anyagából készült testek gyorsulása).

2) A matematikai inga körfrekvenciáját az

$$\omega = \sqrt{\frac{m^*g}{ml}}$$

képlet írná le, ezért a periódusidő függne attól, milyen anyagi minőségű testet akasztunk az adott hosszúságú inga végére (Eötvös előtt ezt a módszert használták az m^*/m arány mérésére).

3) Sérülhetne Kepler harmadik törvénye. Az R -sugarú körpályán keringő bolygó keringési frekvenciáját a gravitációs és a centripetális erő egyenlőségéből határozhatjuk meg. Ha a súlyos és a tehetetlen tömeg különbözhet egymástól, ezt az egyenlőséget az

$$mR\omega^2 = \frac{Gm^*M^*}{R^2} \quad (4.1)$$

képlet fejezi ki (M^* a Nap súlyos tömege), amelyből

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{m^*}{m} \frac{M^* G}{4\pi^2}.$$

Ha m^*/m függ a bolygó összetételétől, akkor az R^3/T^2 aránynak nem kell minden bolygóra ugyanakkorának lennie.

4) A szabadon keringő űrhajóban nem lenne súlytalanság. A körpályán keringő űrhajó keringési frekvenciáját (4.1) határozza meg, amelyben m és m^* az űrhajó tehetetlen és súlyos tömege:

$$\omega = \sqrt{\frac{m^*}{m} \frac{GM^*}{R^3}}.$$

Helyezzünk el egy (kis) m' tehetetlen tömegű próbatestet az űrhajó középpontjában a "levegőben". Ez csak akkor fog lebegve helyben maradni (vagyis csak akkor tapasztalunk súlytalanságot), ha a saját

$$\omega' = \sqrt{\frac{m'^*}{m'} \frac{GM^*}{R^3}}$$

keringési frekvenciája megegyezik az űrhajóéval. Ennek feltétele

$$\frac{m'^*}{m'} = \frac{m^*}{m}, \quad (4.2)$$

ami azt fejezi ki, hogy a súlyos és a tehetetlen tömeg aránya legyen minden testre ugyanakkora. Megjegyezzük, hogy a (4.2) egyenlőség csak akkor áll fenn pontosan, amikor az m' tömeg a centrumtól az űrhajó tömegközéppontja által meghatározott R távolságban van. Az ennél távolabb elhelyezett testre a centrumhoz viszonyítva taszító, a közelebb elhelyezkedőre vonzó gravitációs erő hat (*árapály erő*). Az árapály erő az űrhajó méretének a csökkenésével nullához tart, és az űrhajóban lejátszódó fizikai jelenségek szempontjából többnyire elhanyagolható.

5. A gravitáció geometrizálása

Az előző fejezetben tárgyalt példák azon a tényen alapulnak, hogy a Φ gravitációs potenciálban mozgó test

$$m\ddot{\vec{r}} = -m^*\nabla\Phi \quad (5.1)$$

mozgásegyenletéből $m^*/m = 1$ esetén a mozgó test tömege kiesik. A kísérletekből azonban nem derül ki, hogy az $m^* = m$ egyenlőség pontosan vagy csak nagy pontossággal, közelítően igaz. Einstein abból a feltételezésből indult ki, hogy az egyenlőség egzakt, ezért a gravitációs mozgás (5.1) egyenletéből a tömeg mindig kiesik:

$$\ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla}\Phi = 0. \quad (5.2)$$

Amikor a tömegvonzáson kívül valamilyen más \vec{F} erő is hat, akkor a mozgásegyenlet

$$m(\ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla}\Phi) = \vec{F} \quad (5.3)$$

alakú és a tömeg nem esik ki belőle.

Az (5.2)-vel kapcsolatban Einstein arra figyelt fel, hogy még egy olyan esetet ismerünk, amikor a mozgó test tömege kiesik az egyenletből: A szabad mozgás $\ddot{\vec{r}} = 0$ egyenletét. Ebben a mozgó testnek egyetlen paramétere

sem fordul elő, ezért a megoldása *egy tisztán geometriai objektum, az egyenes* (a térben és a téridőben egyaránt). A mozgó tömeg paramétere (5.2)-ben sem fordul elő, ezért ennek az egyenletnek a megoldásai is lehetnek tisztán geometriai objektumok: Einstein feltételezése szerint egy olyan téridő "egyenesei", amely *gömbült*.

A gömbült sokaságok egyeneseit *geodetikusként* hívják. Két adott pontot összekötő vonalak közül az a geodetikus, amely a legrövidebb. A gömb felületén pl. a geodetikusként a főkörök. Azt a hipotézist, amely szerint a tisztán gravitációs mozgás a gömbült téridő geodetikusain történik, *geodetikus hipotézisnek* hívjuk.

Ezt a mozgást is tekinthetjük gyorsulásmentesnek, ha gyorsuláson, amelyet ebben az esetben \vec{A} -val fogunk jelölni, az (5.2) baloldalát értjük:

$$\vec{A} = \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla}\Phi. \quad (5.4)$$

A gondolatmenetnek ebben a stádiumában ez a felfogás mesterkéltnek tűnhet, de látni fogjuk, hogy a matematikailag részletesen kidolgozott elmélet szerint tényleg majdnem pontosan ezt a mennyiséget kell gyorsulásnak tekinteni.

Az (5.2)-t tehát írhatjuk a tömörebb $\vec{A} = 0$ alakban is, az (5.3)-t pedig, amely a tömegvonzáson kívül más erő is figyelembe vesz

$$m\vec{A} = \vec{F} \quad (5.5)$$

alakban. Az egyenleteknek ez a formája pasztikusán fejezi ki az alapgondolatot: A tömegvonzás nem valamilyen erő hatásának, hanem a téridő görbültségének a következménye.

Az általános relativitáselmélet ennek az új fogalmi keretnek a részletesen kidolgozott formája, amely a következő két fő elemet tartalmazza:

1) A matematikából átveszi azokat az eljárásokat, amelyek segítségével a téridő görbültségét jellemző adatok felhasználásával felírhatjuk az \vec{A} gyorsulás képletét (a sebességvektor időderiváltjának az általánosított alakját) és az $\vec{A} = 0$ egyenletből (*geodetikus egyenlet*) meghatározhatjuk magukat a geodetikusokat. Kiderül, hogy (5.2) nagyon jó közelítése a pontos képletnek.

2) Felállítja azt az egyenletet (*Einstein-egyenlet*), amely meghatározza a téridő görbületét a nagy tömegek körül és megadja ennek az egyenletnek a Nap körül érvényes pontos megoldását (*Schwarzschild-megoldás*).

* * *

Az általános relativitáselmélet természetesen nem csak a bolygómozgást, hanem a szabadesést is az új fogalmak alapján tárgyalja. Szabadesésnél az (5.4) szerint $A_z = \ddot{z} + g$ és ekkor $A_z = 0$: A szabadon eső test gyorsulása a Föld tömege által begömbített téridőhöz képest nulla (a pálya geodetikus). A földfelszínhez viszonyított gyorsulás azonban különbözik nullától: $\ddot{z} = -g$.

Amikor a test a talajon nyugszik, a földfelszínhez viszonyított gyorsulása nulla ($\ddot{z} = 0$), ezért a téridőhöz viszonyított gyorsulása $A_z = +g$. Ezt a gyorsulást a talaj által (vagy az izmaink által, ha mi tartjuk a testet) a testre ható erő okozza, amely definíció szerint az $\vec{F}^{(S)}$ súlyerő negatívja: $F_z = -F_z^{(S)}$. Az (5.5) ekkor tehát a jól ismert $F_z^{(S)} = -mg$ összefüggésre vezet.

* * *

A gravitáció geometriai felfogása új megvilágításba helyezi az inerciarendszerek státusát a fizikában.

Az inerciarendszer olyan vonatkoztatási rendszer, amelyben érvényes a tehetetlenség törvénye: Amikor nem hatnak valódi erők, a testek megtartják egyenletes egyenesvonalú mozgásukat vagy a nyugalom állapotát. Ez annyit jelent, hogy ha a Newton-egyenleteket inerciarendszerhez rögzített koordinátarendszerben írjuk fel, akkor a jobboldalon csak a valódi erőket kell figyelembe venni. És megfordítva: Ha a jobboldalra csak a valódi erőket írjuk be, ezzel automatikusan feltételezzük, hogy a koordinátarendszerünk inerciarendszerhez van rögzítve.

Newton gravitáció elméletében a Kepler-törvényeket az

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}$$

egyenletből vezetjük le. Mivel a newtoni felfogás szerint a gravitáció valódi erő (azonosítható a forrása), a tárgyalás csak inerciarendszerben érvényes. Ebben az elméletben tehát hallgatólagosan feltételezzük, hogy értelmes dolog legalább Naprendszer méretű ("globális") inerciarendszereket feltételezni, ami egyáltalán nem természetes feltevés, ha figyelembe vesszük, hogy inerciarendszeren (vonatkoztatási rendszeren általában) azt az objektumot értjük, amelyben a mozgást megfigyeljük. Az általános relativitáselmélet tárgyalásmódja ebből a szempontból sokkal realiztikusabb, mert — mint látni fogjuk, — ebben az elméletben a bolygómozgás tárgyalásához elég lesz koordinátarendszert választani, vonatkoztatási rendszer kijelölésének a kérdése fel sem merül.

Kisméretű ("lokális") inerciarendszerek azonban az általános relativitáselmélet szerint is léteznek. Ilyen pl. a kikapcsolt hajtóművel forgásmentesen keringő űrhajó. Mivel az általános relativitáselméletben az $m^* = m$ egyenlőség pontosan teljesül, az előző fejezet gondolatmenete alapján az ilyen űrhajóban súlytalanság van. Láttuk, hogy a newtoni elmélet szerint a súlytalanságnak az az oka, hogy a gravitációs erő és a centripetális erő egyenlőségét kifejező egyenletből a tömeg kiesik. Ha a centrális égitest helyett az űrhajóhoz vuszonyítva írjuk le a jelenséget, akkor azt kell mondanunk, hogy a centrális égitest gravitációs vonzását az űrhajó centripetális gyorsulásából származó tehetetlenségi erő egyenlíti ki. Az általános relativitáselmélet nézőpontjából azonban logikusabb az a felfogás, hogy a szabadon forgásmentesen gravitáló űrhajókban azért maradnak a tárgyak a "levegőben", ha odatesszük őket, mert az űrhajó *inerciarendszer* (*ekvivalencia elv*⁴). Ez a felfogás nincs ellentétben azzal, amit az inerciarendszerekről eddig is tudtunk. Egy ilyen űrhajó ugyanis a geodetikus hipotézis szerint geodetikusan mozog, a gyorsulása ezért nulla ($\vec{A} = 0$), és eddig is úgy tudtuk, hogy azok a vonatkoztatási rendszerek inerciarendszerek, amelyek nem gyorsulnak. Ebből a nézőpontból természetesen nincs semmiféle erőkiegyenlítés sem, mert gravitációs erő nem létezik, inerciarendszerben pedig nem lép fel tehetetlenségi erő.

Einstein arra az álláspontra helyezkedett, hogy az általános relativitáselmélet lokális inerciarendszerei pontosan abban az értelemben inerciarendszerek, ahogy azt a speciális relativitáselméletben értjük: Minden fizikai jelenség szempontjából egyenértékűek egymással. Úgy is mondhatjuk, hogy tulajdonképpen *ezek az inerciarendszerek* azok, amelyekről a speciális relativitáselmélet szól. Így pl. a relativitáselmélet alappozitívumának a szabadon forgásmentesen gravitáló űrhajókban kell pontosan teljesülnie: Akármilyen pályán mozogjon is egy ilyen űrhajó, ha bármelyik standard fénysebesség mérést elvégeznénk benne azt tapasztalnánk, hogy a fénysebesség minden irányban pontosan c . A relativitáselmélet ennél többet nem is állít *általában* a fénysebességről: A fény terjedését az égitestek között éppen úgy külön kell kiszámítani minden konkrét esetben, mint a bolygók mozgását a Nap körül.

Az ekvivalencia-elv egyik váratlan következménye, hogy a fénynek el kell hajolnia a gravitáció hatása alatt. Ha az ekvivalencia-elv igaz, akkor egy szabadon eső lift (*Einstein lift*) lokális inerciarendszer, amelyben a fény egyenes vonalban terjed. Tekintsünk egy olyan fénysugarat, amely a liftben vízszintesen (az esésre merőleges irányban) terjed. Annak következtében, hogy a lift a földfelszínhez képest gyorsul, a földön nyugvó megfigyelőhöz viszonyítva a fénysugár elhajlik lefelé. Ez az elhajlás a lift g gyorsulásának a következménye, ezért ugyanaz okozza, ami a gyorsulást: a Föld gravitációs hatása⁵.

A lokális inerciarendszerekben, amelyek prototípusa a tehetetlenségi mozgást végző űrhajó, érvényben marad az előző fejezetnek az a megállapítása, hogy a méretek növelésével egyre észrevehetőbbé válik az árapályerő

⁴Ez az elnevezés, amely az általános relativitáselmélet kidolgozásának nagyon korai szakaszában keletkezett, a súlyerő és a tehetetlenségi erő "ekvivalenciájára" utal abból kiindulva, hogy mindkettő az $m\vec{A}$ tagból származik.

⁵Ezt a következtetést Einstein már 1907-ben, az általános relativitáselmélettel foglalkozó legelső cikkében levonta, de csak nyolc évvel később, az elmélet teljes kidolgozása után tudta kiszámítani a Nap mellett elhaladó fénysugár elhajlási szögét. A fényelhajlást a megfigyelések ma már százalékos pontossággal igazolják.

hatása. Egy elegendően nagyméretű űrhajóban a tömegközépponttól távol a tárgyak már nem maradnak egy helyben lebegve, mert az árapályerő elmozdítja őket az űrhajó falaihoz képest. Az általános relativitáselmélet képletei alapján ki lehet számítani, hogy egy adott méretű űrhajó milyen pontossággal tekinthető inerciarendszernek.

6. A nemmetrikus sokaság. Tenzorok

A 3D euklidészi tér metrikus sokaság, mert bármely két pontja között jól meghatározott távolság van. Láttuk, hogy a speciális relativitáselmélet szerint a pontszerű és pillanatszerű események 4D sokasága szintén metrikus, mert bármely két eseményhez jól meghatározott négyestávolság négyzet tartozik. Adott mennyiségű egykomponensű gáz egyensúlyi állapotait a gáz két adata egyértelműen meghatározza, ezért ezek az állapotok 2D sokaságot alkotnak, amely azonban nem metrikus: Két egyensúlyi állapot közötti "távolságnak" nincs fizikai értelme.

Az általános relativitáselmélet térideje is metrikus, mert a speciális relativitáselmélet téridejének görbült változata. Célszerű azonban a görbült metrikus sokaságok matematikai elméletének ismertetését a nemmetrikus sokaságok⁶ tárgyalásával kezdeni. Második lépésként vizsgáljuk majd meg, milyen új tulajdonságokra tesz szert a sokaság, ha "metrikus struktúra is van rajta".

Az n -dimenziós sokaság pontjai kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők szám n -eseknek. Végtelen sok ilyen megfeleltetés lehetséges, mindegyik felfogható egy-egy koordinátarendszerként a sokaságon.

A sokaságon lehetnek *görbék*⁷, amelyeket minden koordinátarendszerben parametrikus formában a legcélszerűbb megadni:

$$x^i = x^i(\lambda) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (6.1)$$

A baloldalon az x^i koordináta, a jobboldalon $x^i(\lambda)$ a λ paraméter valamilyen függvénye. Ha a $\lambda = \lambda(\mu)$ monoton függvény segítségével λ -ról új μ paraméterre térünk át, az

$$x^i = x^i(\lambda(\mu)) \equiv \bar{x}^i(\mu)$$

görbe ugyanazokból a pontokból fog állni, mint a (6.1) görbe, matematikai szempontból mégis — mint mindjárt látni fogjuk — célszerű a két görbét különbözőnek tekinteni egymástól.

Új koordinátarendszerre az

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad (i' = 1, 2, \dots, n) \quad (6.2)$$

típusú képlettel térhetünk át, amelyben a baloldalon $x^{i'}$ megint koordináta, a jobboldalon $x^{i'}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ n -változós függvény. Az új koordinátákban ugyanannak a (6.1) görbének az egyenlete

$$x^{i'} = x^{i'}(\lambda). \quad (6.3)$$

A jobboldal az

$$x^{i'}(x^1(\lambda), \dots, x^n(\lambda)) \quad (6.4)$$

összetett függvény rövidített jelölése.

Ebben a néhány sorban az x^i kettő, az $x^{i'}$ három különböző funkcióban lép fel, de ha az argumentumokat mindig részletesen kiírjuk, ez nem zűrzavart, hanem kifejezett előnyt jelent. Amikor az argumentumok kiírása nélkül is világos, melyik jelentésről van szó, az argumentumokat a rövideg kedvéért célszerű elhagyni.

⁶Az elfogadott név a "differenciálható sokaság", de ennek az elnevezésnek a megmagyarázásához olyan részletekre kellene kitérnünk, amelyekre a továbbiakban nem lesz szükségünk, ezért megmaradunk a címbe elnevezésnél.

⁷A "görbe" terminus ebben az összefüggésben egyszerűen "vonalat" jelent, mert mint látni fogjuk, az "egyenesség" és a "görbeség" metrikus sajátosság.

Tekintsük a (6.1) görbe két közeli, λ és $\lambda + d\lambda$ paraméterű pontját, amelyekre $dx^i = x^i(\lambda + d\lambda) - x^i(\lambda)$. A görbe λ paraméterű pontjában az *érintővektor* $V^i(\lambda)$ komponenseit a

$$\frac{dx^1}{V^1} = \frac{dx^2}{V^2} = \dots = \frac{dx^n}{V^n}$$

egyenlőségek definiálják. A törtek közös értéke nyilván arányos $d\lambda$ -val. Ha — legegyszerűbb választásként — egyenlőnek vesszük őket $d\lambda$ -val, akkor az érintővektorra a

$$V^i(\lambda) = \frac{dx^i}{d\lambda} \left(\equiv \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda} \right) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (6.5)$$

képletet kapjuk. Hogyan változnak meg ezek a komponensek, amikor új paraméterre, vagy új koordinátarendszerre térünk át?

Mivel $\frac{d}{d\mu} = \frac{d\lambda}{d\mu} \cdot \frac{d}{d\lambda}$, a μ paraméterre történő áttérésnél a (6.5) komponensek $\frac{d\lambda}{d\mu}$ -vel szorzódnak⁸:

$$\bar{V}^i = \frac{d\bar{x}^i}{d\mu} = \frac{d\lambda}{d\mu} \frac{dx^i}{d\lambda} = \frac{d\lambda}{d\mu} V^i.$$

Az érintővektor *iránya* tehát nem változik meg, mert az összes komponens ugyanazzal a számmal szorzódik, de az érintővektor mégsem marad ugyanaz. Ezért célszerű a különböző módon parametrált görbéket különböző görbéknek tekinteni.

Ha a (6.2) segítségével vesszős koordinátákra térünk át, akkor az érintővektor (6.5) komponensei a

$$V^{i'} = \frac{dx^{i'}}{d\lambda} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \cdot \frac{dx^j}{d\lambda} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} V^j \quad (6.6)$$

szabály szerint változnak meg. Itt és a továbbiakban a kétszer előforduló j -re összegzés értendő. A képletben az argumentumokat nem tüntettük fel, de a geometriai jelentés alapján könnyen rekonstruálhatók. A bal- és a jobboldal egyaránt λ -függvény, a $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$ -ben $x^{i'}$ -n a (6.2) függvényt kell érteni (másképpen nem lehetne a deriválást elvégezni) és a deriválás elvégzése után az x^j -ket $x^j(\lambda)$ -val kell helyettesíteni.

Kontravariáns vektornak az olyan U^i szám n -est nevezzük, amely $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$ koordinátatranszformációnál úgy transzformálódik, mint az érintővektor:

$$U^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} U^j. \quad (6.7)$$

Mivel az $U^{i'}$ -ket a vesszős koordinátákon keresztül kell kifejezni, a jobboldalon a vesszőtlen koordinátákban ismert U^j -kben és a parciális deriváltban a vesszőtlen koordinátákat (6.2) inverze segítségével ki kell fejezni a vesszősökön keresztül. A $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}$ kétindexes n -változós függvények a *transzformációs együtthatók*. A koordináták maguk nem vektorkomponensek (mert $x^{i'} \neq \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \cdot x^j$), a koordinátadifferenciálok azonban azok:

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} dx^j. \quad (6.8)$$

⁸Amikor pl. $\lambda = 2\mu$, akkor minden komponens a kétszeresére nő, ami azt fejezi ki, hogy a μ egységnyi megnövelésekor kétszerannyit mozdulunk előre a görbén, mint a λ egységnyi megnövelésekor. Azt azonban nem mondhatjuk, hogy a vektor hossza nőtt kétszeresére, mert a vektorok hossza (normája) metrikus sajátosság.

Milyen bázisra vonatkoznak egy kontravariáns vektor komponensei? Az nyilvánvaló, hogy maguknak a bázisvektoroknak a komponensei a következők: $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, 0, 0, \dots, 1)$, vagyis az i -ik bázisvektor j -ik komponense

$$e_{(i)}^j = \delta_i^j, \quad (6.9)$$

ahol δ_i^j a Kronecker-szimbólum. A kérdés azonban az, hogy ezek milyen görbéknek az érintővektorai.

A válasz az, hogy az i -ik bázisvektor az i -ik koordinátavonal érintővektora, ha a koordinátavonalat magával az i -ik koordinátával parametrljük ($\lambda = x^i$). Ennél a parametrlásnál ugyanis az i -ik koordinátavonal egyenlete

$$x^j(\lambda) = \begin{cases} \lambda & \text{ha } j = i \\ c^j & \text{if } j \neq i, \end{cases}$$

ahol c^j az i -edikől különböző koordináták konstans értéke a kiválasztott x^i koordinátavonalon. Ha (6.5) szerint kiszámítjuk ennek a görbének az érintővektorát, valóban (6.9)-t kapjuk.

A sokaság minden pontjában a koordinátavonalak így definiált érintővektorai képezik a *lokális koordinátabázist*. Ez a bázis feszíti ki a ponthoz tartozó *érintőteret*. Ebben a pontban minden vektor ennek a lineáris térnek az eleme.

Az olyan egykomponensű mennyiségeket, amelyeknek az értéke független a koordinátarendszer megválasztásától, *skalároknak* nevezzük. Ha egy skalár eloszlását \mathcal{K} -ban az $f(x^1, \dots, x^n)$ függvény írja le, akkor a \mathcal{K} -höz viszonyított eloszlását az

$$f'(x') = f(x) \quad (6.10)$$

egyenlet határozza meg, amelyben a jobboldalon a vesszőtlen változókat ugyancsak ki kell fejezni a vesszősőkön keresztül a (6.2) inverze segítségével (erre a helyettesítésre a további hasonló esetekben már nem fogjuk külön felhívni a figyelmet).

Egy skalárfüggvény $\frac{\partial f}{\partial x^i} \equiv \partial_i f$ parciális deriváltja új koordinátákra történő áttérésnél így transzformálódik:

$$\frac{\partial f'(x')}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial f(x)}{\partial x^j}.$$

Azokat az U_i n -komponensű mennyiségeket, amelyek ennek a szabálynak megfelelően transzformálódnak, *kovariáns vektoroknak* nevezzük:

$$U_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} U_j. \quad (6.11)$$

A *tenzorok* felső (kontravariáns) és alsó (kovariáns) indexeket tartalmazó sokkomponensű mennyiségek, amelyek úgy transzformálódnak, mint a megfelelő típusú vektorok direkt szorzatai. Pl.

$$T^{i' j'}_{.. k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m} \frac{\partial x^p}{\partial x^{k'}} T^{lm}_{.. p}. \quad (6.12)$$

A vektorok elsőrendű, a skalárok nulladrendű tenzorok.

Kontrakciónak egy kontravariáns és egy kovariáns index egybeejtését értjük az egybeejtett indexekre történő összegzéssel együtt. Pl. $T^{i j}_{.. k}$ -nak a 2. és a 3. indexre történő kontrakciója $\sum_{j=1}^n T^{i j}_{.. j} \equiv T^{i j}_{.. j}$ -vel egyenlő.

A kontrakció művelete a kontrahált indexpárt skalárrá teszi, ezért pl. $T^{i j}_{.. j}$ kontravariáns vektor. A (6.12) alapján ugyanis

$$T^{i' j'}_{.. j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m} \frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}} T^{lm}_{.. p} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} T^{lm}_{.. m},$$

mert az összetett függvények deriválási szabálya következtében

$$\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m} \frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}} = \delta_m^p. \quad (6.13)$$

Egy V^i kontravariáns és egy U_i kovariáns vektorból kontrakcióval a $V^i U_i$ skalár képezhető.

Egy tenzor egy kiválasztott kovariáns vagy kontravariáns indexpárban akkor *szimmetrikus* (*antiszimmetrikus*), ha a két index felcserélésekor változatlan marad (előjelet vált). A tenzor akkor *teljesen szimmetrikus* (*antiszimmetrikus*), ha az összes index azonos típusú és a szimmetria (antiszimmetria) minden indexpárra teljesül. Ha a szimmetria (antiszimmetria) egy koordinátarendszerben igaz, akkor minden koordinátarendszerben igaz: Az (anti)szimmetria koordinátafüggetlen tulajdonság, vagyis arra a fizikai mennyiségre jellemző, amelyet a tenzor reprezentál.

Minden kétindexes kovariáns és kontravariáns tenzor felbontható egy szimmetrikus és egy antiszimmetrikus tenzor összegére. Kovariáns tenzorra pl.

$$T_{ij} = T_{(ij)} + T_{[ij]}, \quad T_{(ij)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}), \quad T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}). \quad (6.14)$$

Egy tenzor komponenseit csak egy koordinátarendszerben lehet önkényesen megadni, az összes többiben a tenzor transzformációs szabálya alapján kell ebből kiszámítani. Csak nagyon kivételes esetekben fordulhat elő, hogy a tenzor komponensei minden koordinátarendszerben ugyanazok maradnak, mint amiket megadtunk. Az ilyen tulajdonságú tenzorokat *invariáns tenzoroknak* hívjuk.

Nemmetrikus sokaságon az egyetlen invariáns tenzor az I_j^i *egységtenzor*, amelynek komponensei minden koordinátarendszerben a Kronecker-szimbólummal egyenlők:

$$I_j^i = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j. \end{cases} \quad (6.15)$$

Ez így látható be: Ha \mathcal{K} -ban $I_l^k = \delta_l^k$, akkor \mathcal{K}' -ben

$$I_{j'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} \delta_l^k = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j'}} = \delta_{j'}^{i'}$$

valóban.

* * *

Miért olyan fontos mennyiségek a tenzorok? Azért, mert a tulajdonságaik alkalmassá teszik őket fizikai objektumok reprezentálására. A következő két tulajdonságról van szó:

1) Ha egy tenzor valamelyik koordinátarendszerben különbözik nullától (ezen azt értjük, hogy legalább az egyik komponense nem nulla), akkor egyik koordinátarendszerben sem nulla. Vagy megfordítva: Ha az egyik koordinátarendszerben nulla, akkor mindegyikben az (a transzformációs törvény *homogén*). A fizikai objektumok függetlenek attól, hogy milyen koordinátarendszert gondolunk el, ezért csak olyan matematikai mennyiségekkel reprezentálhatók, amelyeket nem lehet koordinátaválasztással lenullázni vagy nullából létrehozni.

2) Egy fizikai objektum komponenseit egy adott koordinátarendszerben a koordinátarendszer és az objektum relatív helyzete határozza meg. Ebből következik, hogy ha a \mathcal{K} koordinátarendszerről egy másik \mathcal{K}' koordinátarendszerre térünk át, akkor a \mathcal{K} -beli komponensek nem függhetnek attól, hogy egy vagy több lépésben történt-e az átmenet (*kompozíciós tulajdonság*).

A tenzorok transzformációs szabálya rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Egy kontravariáns vektornál pl.

$$V^{i'} = \begin{cases} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} V^j & (\text{ha } \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'), \\ \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^j} V^j & (\text{ha } \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'' \longrightarrow \mathcal{K}') \end{cases}$$

Azért kapjuk mindkét esetben ugyanazokat a $V^{i'}$ komponenseket, mert az összetett függvények deriválási szabálya alapján a (6.13)-nál általánosabb

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{k''}} \frac{\partial x^{k''}}{\partial x^j} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} \quad (6.16)$$

reláció is igaz.

A kompozíciós tulajdonság jelentését röviden így foglalhatjuk össze: *A tenzorkomponensek értéke éppen azért változik meg, amikor egyik koordinátarendszerről egy másikra térünk át, mert az objektumok, amiket reprezentálnak, eközben semmit sem változnak.*

A tenzorok egy további fontos tulajdonságát példán illusztráljuk:

Tegyük fel, hogy az $U^i = X^{ij} B_j^k V^l$ relációról tudjuk, hogy minden koordinátarendszerben igaz, és az U^i , B_j^k , V^l mennyiségek az indexeik helyzetének megfelelő tenzorok. Akkor X^{ij} is az indexei helyzetének megfelelő tenzor.

7. A nemmetrikus sokaság. A Lie-derivált

Skalármezőből parciális deriválással kovariáns vektormezőt kapunk. A nullánál magasabb rendű tenzormezők parciális deriválása azonban nem eredményez tenzormezőt. Pl.

$$\frac{\partial V^{i'}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} V^l \right) = \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} \frac{\partial V^l}{\partial x^k} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^l} V^l. \quad (7.1)$$

A jobboldal 1. tagja alapján a $\frac{\partial V^i}{\partial x^j}$ lehetne T_j^i típusú tenzormező, a 2. tag miatt azonban nem az (a 2. tag csak akkor nulla, ha a $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ koordinátatranszformáció lineáris). Miért van az, hogy a V^i parciális deriváltja nem tenzor?

A parciális deriváltat a

$$dV^i(x) \equiv V^i(x + dx) - V^i(x) \stackrel{def}{=} \frac{\partial V^i}{\partial x^j} dx^j \quad (7.2)$$

reláció definiálja. Ha a parciális derivált T_j^i típusú tenzor volna, akkor a $dV^i = T_j^i dx^j$ következtében dV^i -nek kontravariáns vektornak kellene lennie. De nem az, mert a $V^i(x + dx)$ és a $V^i(x)$ vektorkomponensek két különböző bázisra vonatkoznak: Az egyik az $(x + dx)$ -belire, a másik az x -belire. Vektorjellegű differenciált akkor kapunk, ha a $V^i(x + dx)$ -ből a $V^i(x)$ -nek az $(x + dx)$ pontba alkalmasan *transzportált* alakját vonjuk le.

Tegyük fel, hogy a $V^i(x)$ mezőn kívül adva van még egy $W^i(x)$ kontravariáns vektormező is. Legjobb, ha ezt egy "fuvalatnak" (hirtelen széllökésnek) képzeljük el, amely a sokaság minden pontját egy másik közeli pontba mozdítja el⁹ az

$$x^i \longrightarrow \tilde{x}^i \equiv x^i + dx^i = x^i + W^i(x) d\varepsilon, \quad (7.3)$$

⁹Ez nem koordinátatranszformáció, hanem *ponttranszformáció*, amely az adott koordinátarendszerben helyezi át a pontokat.

képlet szerint (*Lie-transzport*), ahol $d\varepsilon$ infinitezimálisan kis konstans. A fuvallat a görbéket is magával sodorja, az $x^i = x^i(\lambda)$ görbe λ paraméterű pontját (7.3) szerint az

$$x^i = x^i(\lambda) + W^i[x(\lambda)]d\varepsilon$$

koordinátájú pontba transzportálja. Ez az elsodort görbe parametrikus egyenlete. A λ paraméterű pontban az érintővektor eredetileg $V^i(\lambda) = \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda}$ volt, a "fuvallat" ezt a

$$\tilde{V}^i(\lambda) = \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda} + \frac{\partial W^i}{\partial x^j} \frac{dx^j(\lambda)}{d\lambda} d\varepsilon = V^i(\lambda) + \frac{\partial W^i}{\partial x^j} V^j(\lambda) d\varepsilon$$

érintővektorba viszi át. Az érintővektor azonban a kontravariáns vektor prototípusa, ezért megállapíthatjuk, hogy a $W^i(x)$ "fuvallat" egy *tetszőleges* $V^i(x)$ vektormezőt a

$$\tilde{V}^i(x) = V^i(x) + \frac{\partial W^i(x)}{\partial x^j} V^j(x) d\varepsilon \quad (7.4)$$

vektormezővé változtatja át. A \sim jelzi, hogy $\tilde{V}^i(x)$ az elsodort vektormező $\tilde{x}^i = x^i + dx^i = x^i + W^i(x)d\varepsilon$ pontbeli értéke, az x argumentum pedig azt mutatja meg, hogy melyik pontból került ide ez a vektormennyiség.

Mivel $V^i(x + dx)$ és $\tilde{V}^i(x)$ egyformán az $(x + dx)$ pontban van, ezért a

$$\mathcal{D}V^i(x) \equiv V^i(x + dx) - \tilde{V}^i(x) \quad (7.5)$$

Lie-differenciál kontravariáns vektor. Az elmozdulásban lineáris pontossággal

$$V^i(x + dx) = V^i(x) + \frac{\partial V^i(x)}{\partial x^j} dx^j = V^i(x) + \frac{\partial V^i(x)}{\partial x^j} W^j(x) d\varepsilon.$$

Ha ezt és (7.4)-t (7.5)-be írjuk, a Lie-differenciálra a

$$\mathcal{D}V^i = \left[W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} - V^j \frac{\partial W^i}{\partial x^j} \right] d\varepsilon \quad (7.6)$$

képletre jutunk.

A V^i kontravariáns vektormező W -szerinti $\mathcal{L}_W V^i$ *Lie-deriváltját* a (7.2) mintájára a $\mathcal{D}V^i \stackrel{def}{=} \mathcal{L}_W V^i \cdot d\varepsilon$ képlettel definiáljuk. A (7.6) szerint innen

$$\mathcal{L}_W V^i = W^j \frac{\partial V^i}{\partial x^j} - V^j \frac{\partial W^i}{\partial x^j}. \quad (7.7)$$

A (7.7) Lie-derivált két okból különbözik zérustól: A $V^i(x)$ komponensek helyfüggése miatt (1. tag) és a komponensek egymás közötti lineárkombinálódása miatt (2. tag). A skalármezőknek csak egy komponense van, ezért a W "fuvallat" egyszerűen áthelyezi az x -beli értéküket az $\tilde{x} = x + dx$ pontba: $\tilde{f}(x) = f(x)$. A \sim jelzi, hogy $\tilde{f}(x)$ az elsodort skalármező $\tilde{x} = x + dx$ pontbeli értéke, az x argumentum pedig azt mutatja meg, hogy melyik pontból került ide ez a skalármenyiség. Így lineáris pontossággal

$$\mathcal{D}f(x) \equiv f(x + dx) - \tilde{f}(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \stackrel{(7.3)}{=} W^i \frac{\partial f}{\partial x^i} d\varepsilon \stackrel{def}{=} \mathcal{L}_W f \cdot \varepsilon.$$

Az f skalármező Lie-deriváltja tehát az

$$\mathcal{L}_W f = W^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (7.8)$$

mező, amelyről nyilvánvaló, hogy skalár, mert a W^i kontravariáns és a $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ kovariáns vektormező kontrakciója.

Két kontravariáns vektormező szorzatának Lie-deriváltjára érvényes a *Leibniz-szabály*, azaz

$$\mathcal{L}_W(U^i V^j) = (\mathcal{L}_W U^i) V^j + U^i (\mathcal{L}_W V^j). \quad (7.9)$$

Ez abból következik, hogy a szabály már a Lie-differenciálra igaz:

$$\mathcal{D}(U^i V^j) = (\mathcal{D}U^i) V^j + U^i (\mathcal{D}V^j). \quad (7.10)$$

Igazolás: A $\mathcal{D}U^i$ és a $\mathcal{D}V^j$ arányosak $d\varepsilon$ -nal, ezért $d\varepsilon$ -ban lineáris pontossággal

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(U^i V^j) &= U^i(x+dx) V^j(x+dx) - \tilde{U}^i(x) \tilde{V}^j(x) = \\ &= (\tilde{U}^i + \mathcal{D}U^i) \cdot (\tilde{V}^j + \mathcal{D}V^j) - \tilde{U}^i(x) \tilde{V}^j(x) = (\mathcal{D}U^i) \tilde{V}^j + \tilde{U}^i (\mathcal{D}V^j) = (\mathcal{D}U^i) V^j + U^i (\mathcal{D}V^j). \end{aligned}$$

Ez éppen a (7.10) reláció.

A Leibniz-szabály érvényességét két skalár, vagy egy skalár és egy vektor szorzatára pontosan ugyanígy lehet igazolni. Nyilván feltehetjük, hogy bármilyen két tenzormező szorzatára érvényes, és felhasználhatjuk az U_i kovariáns vektormező Lie-deriválási szabályának a megtalálására. A $\mathcal{L}_W(V^i U_i)$ mennyiséget ugyanis két módon is kifejezhetjük. Egyrészt abból, hogy a kontrakció skalár, a (7.8) alapján a $W^j \frac{\partial(V^i U_i)}{\partial x^j}$ -vel egyenlő. Másrészt a Leibniz-szabály felhasználásával az $(\mathcal{L}_W V^i) U_i + V^i (\mathcal{L}_W U_i)$ összegként is előállíthatjuk. A két alak egyenlítéséből

$$V^i \left[\mathcal{L}_W U_i - \left(W^j \frac{\partial U_i}{\partial x^j} + U_j \frac{\partial W^j}{\partial x^i} \right) \right] = 0,$$

ahonnan V^i önkényessége következtében kapjuk a kovariáns vektormező Lie-deriválási szabályát:

$$\mathcal{L}_W U_i = W^j \frac{\partial U_i}{\partial x^j} + U_j \frac{\partial W^j}{\partial x^i}. \quad (7.11)$$

Most már könnyen fel lehet írni egy tetszőleges tenzormező Lie-deriváltját. Például a $T_{\cdot\cdot k}^{ij}$ mező Lie-deriváltjának a képlete azonos a $V^i U^j Z_k$ szorzat-mezőével, amit a Leibniz-szabály alapján állapíthatunk meg:

$$\mathcal{L}_W T_{\cdot\cdot k}^{ij} = W^l \frac{\partial T_{\cdot\cdot k}^{ij}}{\partial x^l} - T_{\cdot\cdot k}^{lj} \frac{\partial W^i}{\partial x^l} - T_{\cdot\cdot k}^{il} \frac{\partial W^j}{\partial x^l} + T_{\cdot\cdot l}^{ij} \frac{\partial W^l}{\partial x^k}. \quad (7.12)$$

Gyakran előfordul, hogy a koordináta-rendszert meg tudjuk választani úgy, hogy a W^i minden x -ben essen egybe a lokális koordinátabázis valamelyik (mondjuk m -ik) elemével: $W^i \stackrel{*}{=} e_{(m)}^i$. A csillag az egyenlőségjelen arra emlékeztet, hogy ez a reláció kizárólag a választott \mathcal{K} koordináta-rendszerben érvényes. Ebben az esetben $e_{(m)}^i = \delta_m^i$ következtében

$$\mathcal{L}_{e_{(m)}} T_{\cdot\cdot k}^{ij} \stackrel{*}{=} \frac{\partial T_{\cdot\cdot k}^{ij}}{\partial x^m}. \quad (7.13)$$

* * *

A célunk az volt, hogy a $V^i(x)$ parciális deriváltjának olyan változatát keressük meg, amely valamilyen *tenzor*. A kontravariáns vektormező Lie-deriváltját pl. a $\mathcal{D}V^i \stackrel{def}{=} \mathcal{L}_W V^i \cdot d\varepsilon$ képlettel definiáltuk. A jobboldalon a $d\varepsilon$ skalár (szám), ezért $\mathcal{L}_W V^i$ bizonyosan kontravariáns vektormező lesz, ha a Lie-differenciál az, aminek viszont az a feltétele, hogy a Lie-transzportált \tilde{V}^i valóban *vektor* legyen az \tilde{x} koordinátájú pontban. Ez

utóbbiban azonban nem lehetünk százszázalékig bizonyosak, ezért megnyugtató lesz, ha direktben igazoljuk, hogy $\mathcal{L}_W V^i$ valóban kontravariáns vektormező.

A (7.7) definícióból ránézésre nem következik, hogy vektort határoz meg, mivel parciális deriváltak szerepelnek benne, amelyek nem tenzoriális mennyiségek. A kontravariáns vektor

$$\mathcal{L}_W V^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} \mathcal{L}_W V^m$$

transzformációs törvénye azonban mégis teljesül, amint azt a következő két sor mutatja:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W V^{i'} &= W^{j'} \frac{\partial V^{i'}}{\partial x^{j'}} - (V \longleftrightarrow W) = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^k} W^k \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} V^m \right) - (V \longleftrightarrow W) \stackrel{(6.16)}{=} \\ &\stackrel{(6.16)}{=} W^l \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} V^m \right) - (V \longleftrightarrow W) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} \left(W^l \frac{\partial V^m}{\partial x^l} - (V \longleftrightarrow W) \right) = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} \mathcal{L}_W V^m. \end{aligned}$$

Az $\mathcal{L}_W V^i$ tehát tényleg kontravariáns vektormező és ennek az az oka, hogy a *Lie-differenciál definíciójában nincs hivatkozás a koordinátarendszerre*: Vond ki a vektormező értékéből a kiválasztott pontban azt a vektort, amit a "fuvallat" ebbe a pontba sodort. Akármilyen koordinátarendszert válasszunk is, a különbség komponensei csak attól fognak függeni, hogy milyen helyzetű a V vektormező és a W "fuvallat" *egymáshoz képest*. Ezért kell a különbségnek új koordinátarendszerre történő áttérésnél tenzormennyiségként transzformálódnia.

A közönséges differenciált szemben nem lehet a koordinátarendszerre való hivatkozás nélkül megfogalmazni: Vond ki a vektormező értékéből a kiválasztott $x + dx$ -koordinátájú pontban azt a vektormezőt, ami az x koordinátájú pontban van. Ezt a különbséget a V vektormező és az önkényesen választott koordinátarendszer együttesen határozza meg, ezért nem kötelező, hogy tenzormennyiségként transzformálódjon.

Az \mathcal{L}_W Lie-deriválás a differenciál-geometria egyik legfontosabb művelete. A geometriai jelentése: deriválás a W^i vektormező mentén. A művelet alkalmas a tenzorok szimmetriájának a kifejezésére: Amikor $\mathcal{L}_W T = 0$, akkor a W^i "fuvallat" által elsodort T mező változatlan marad, ezért W^i a T^i mező szimmetriája.

* * *

Noha a parciális deriválás általában nem tenzorképző művelet, vannak a parciális deriváltaknak olyan nevezetes kombinációi, amelyek tenzorok.

1) A $T_{ij} = \partial_j U_i - \partial_i U_j$ mennyiség kétszer kovariáns tenzor (a $\frac{\partial}{\partial x^i}$ helyett a továbbiakban gyakran fogjuk használni a ∂_i jelölést is).

Igazolás:

$$\begin{aligned} T_{i'j'} &= \frac{\partial U_{i'}}{\partial x^{j'}} - \frac{\partial U_{j'}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} U_l \right) - (i' \longleftrightarrow j') = \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \frac{\partial U_l}{\partial x^k} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^k \partial x^{i'}} U_l - (i' \longleftrightarrow j') = \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \left(\frac{\partial U_l}{\partial x^k} - \frac{\partial U_k}{\partial x^l} \right) = \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} T_{lk}. \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy az összetett függvény differenciálási szabálya alapján

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^k \partial x^{i'}} = \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}}.$$

2) Legyen $B_{ij} = -B_{ji}$ antiszimmetrikus másodrendű kovariáns tenzor és

$$A_{ijk} = \partial_i B_{jk} + \partial_j B_{ki} + \partial_k B_{ij} \equiv \partial_i B_{jk} + cikl.$$

Az A_{ijk} teljesen antiszimmetrikus, mert bármely két indexének felcserélésekor előjelet vált (ezért ha két indexe megegyezik, akkor nulla). Belátjuk, hogy háromindexes kovariáns tenzor.

Igazolás:

$$\begin{aligned} A_{i'j'k'} &= \partial_{i'} B_{j'k'} + \text{cikl.} = \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} B_{mn} \right) + \text{cikl.} = \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} \partial_l B_{mn} + \\ &+ \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} \right) B_{mn} + \text{cikl.} = \frac{\partial x^l}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} A_{lmn} + \left[\frac{\partial}{\partial x^{i'}} \left(\frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} \right) + \text{cikl.} \right] B_{mn}. \end{aligned}$$

Ha a [] zárójelben a szorzatok deriválását elvégezzük, hattagú kifejezést kapunk, amely szimmetrikus az $m \leftrightarrow n$ indexcserével szemben. Mivel B_{mn} antiszimmetrikus, az egész kifejezés zérus, és A_{ijk} valóban tenzorként transzformálódik.

8. A Riemann-geometria

A metrikus sokaság abban különbözik a nemmetrikustól, hogy bármely két pontja között¹⁰ meghatározott távolság van, amely a pontokat összekötő legrövidebb vonal (a geodetikusan) hosszával egyenlő. A távolságot a g_{ij} metrikus tenzor (mező) határozza meg, amelynek segítségével két egymáshoz infinitezimálisan közeli $(x^i, x^i + dx^i)$ koordinátájú pont távolságnégyzetét a

$$dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (g_{ij} = g_{ji}) \quad (8.1)$$

kvadratikus forma határozza meg, amely a jól ismert $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ képlet általánosítása. A távolság a koordinátarendszertől független tulajdonság, ezért dl^2 -nek invariánsnak kell lennie. Ebből következik, hogy — mivel dx^i kontravariáns vektor, — g_{ij} -nek kovariáns tenzornak kell lennie, amelyről feltehetjük, hogy szimmetrikus.

Természetes követelmény, hogy dl^2 tetszőleges dx^i -k mellett pozitív legyen. Ha ez teljesül (a g_{ij} mátrix minden x -ben pozitív definit), akkor a sokaságot felfedezőjéről *Riemann-térnek* (vagy *Riemann-sokaságnak*), a sokaság belső geometriáját pedig *Riemann-geometriának* hívjuk¹¹.

Az $x^i = x^i(\lambda)$ görbén a $\lambda = \lambda_1$ és $\lambda = \lambda_2$ paraméterű pontok által határolt szakasz ívhosszát az

$$l = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dl = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{g_{ij}(x) \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda}} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \sqrt{g_{ij}(x) V^i(\lambda) V^j(\lambda)} \quad (8.2)$$

képlet segítségével számíthatjuk ki.

A metrika a metrikus sokaság *belső* tulajdonsága. Ezen azt értjük, hogy a $g_{ij}(x)$ tenzormezőt elvben tetszőleges pontossággal meg lehet határozni a sokaságon belül végzett mérések segítségével. Ennek az eljárásnak az *elvi* sémáját a 2D "laposlények" világának a példáján lehet a legvilágosabban összefoglalni:

1) A világ "bekoordinátázása" tetszőleges koordinátákkal. Ez annyit jelent, hogy minél több objektum koordinátáját előírjuk *tetszőleges módon*.

2) Az objektumokat összekötő utak $x^i(\lambda)$ függvényeit önkényesen (de a folytonosságot betartva) megadjuk.

3) Az objektum-párokat összekötő útszakaszok hosszát minél pontosabban kimérjük.

4) A $g_{ij}(x)$ komponenseket megválasztjuk úgy, hogy ezeket a hosszúságadatokat a (8.2) képlet a lehető leghosszabbban reprodukálja.

¹⁰Valójában ez így túl erős állítás, de minden pontnak van olyan véges környezete, amelyre igaz.

¹¹A relativitáselmélet téridejében a ds^2 (a dl^2 megfelelője) indefinit, ezért a téridő pszeudoriemann-sokaság. Látni fogjuk, hogy a Riemann-geometria fogalmait és képleteit nagyon egyszerű lesz átvinni a téridőre.

Ezzel az eljárással elvben tetszőleges pontossággal meg lehet határozni a metrikus tenzort a világnak abban a tartományában, amelyre a mérések kiterjednek.

A *gyakorlatban* ennyire részletes mérésekre általában nincs lehetőség, viszont rendelkezésre állnak addicionális információk.

A földi térképészet viszonylag pontosan követi a vázolt sémát, de az a körülmény, hogy háromdimenziósak lévén kitekintésünk van az égboltra, lehetővé teszi a csillagászati információk igénybevételét. Azt például, hogy a Föld egy gömb, a holdfogyatkozásoknál a Föld árnyékának az alakjából lehet kikövetkeztetni, a 2D gömb metrikája pedig tisztán elméleti úton meghatározható (ld. a következő fejezetet).

A görbült téridő esetében a metrika elsődleges forrása elméleti (az Einstein-egyenlet megoldása), és a Naprendszer tartományában a bolygópályák és a fénysugarak azok a geodetikusok, amelyeknek a bemérésével az elmélet jóslata igazolható vagy cáfolható. "Kitekintésre" éppúgy nincs lehetőség, mint a "laposlények" esetében.

Vegyük észre, hogy a newtoni gravitáció-elméletben sincs másképpen. Egyszerűen elfogadjuk, hogy a bolygórendszer által elfoglalt térben fel *lehetne* venni Descartes koordinátákat (vagy belőlük származtatható gömbi koordinátákat). Ezt a feltevést utólag az igazolja, hogy az ezen alapuló számítások nagy pontossággal a megfigyelt bolygópályákra vezetnek.

Az euklidészi-tér a Riemann-tér speciális esete. Euklidészi sokaságon található olyan koordinátarendszer (Descartes-koordináták), amelyben $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$, azaz

$$dl^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2. \quad (8.3)$$

Speciálisan két dimenzióban a síklap rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Görbült kétdimenziós felületen azonban nem vehető fel olyan koordinátarendszer, amelyen $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$. Erre az észrevételre alapozzuk a "görbülség" fogalmát tetszőleges dimenzióban: Egy n -dimenziós Riemann-tér akkor görbült, ha *nem vehető fel* rajta olyan koordinátarendszer, amelyben (8.3) minden pontban igaz.

A metrikus tenzor léte lehetővé teszi, hogy minden V^i kontravariáns vektorhoz kontrakció segítségével egyértelműen hozzárendeljünk egy kovariáns vektort, amit célszerű ugyanazzal a betűvel jelölni: $V_i = g_{ij}V^j$. A hozzárendelés valójában kölcsönösen egyértelmű, mert $V^i = g^{ij}V_j$. A g^{ij} mátrix minden koordinátarendszerben a g_{ij} inverze:

$$g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i. \quad (8.4)$$

Mivel δ_k^i az egységtenzor komponense, a g_{ij} pedig kovariáns tenzor, (8.4) csak akkor lehet igaz minden koordinátarendszerben, ha g^{ij} minkét indexben kontravariáns szimmetrikus tenzor.

Tekinthetjük úgy, hogy U^i és U_i ugyanaz az \mathbf{U} vektor kontravariáns és kovariáns komponensekkel megadva¹². A *fizikai jelentés* szempontjából azonban nem mindegy, milyen típusú komponenssel dolgozunk: A fizikai jelentés meghatározott index-típushoz társul.

Nemmetrikus sokaságon csak akkor lehet kontrakcióval két vektorból skalárt képezni, ha az egyik vektor kovariáns, a másik kontravariáns, ezért nem lehet skalárszorzatot definiálni. Riemann-sokaságon két tetszőleges \mathbf{U} és a \mathbf{V} vektor *skalárszorzatán* az

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{V} \equiv (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}) = g_{ij}U^iV^j \quad (8.5)$$

számot értjük. \mathbf{U} és \mathbf{V} akkor *ortogonális* egymásra, ha a skalárszorzatuk nulla.

Egy vektor *normája* az önmagával képzett skalárszorzat négyzetgyöke: $|\mathbf{U}| = \sqrt{\mathbf{U} \cdot \mathbf{U}}$. Az \mathbf{U} és a \mathbf{V} által bezárt szög koszinusza $(\mathbf{U} \cdot \mathbf{V})/|\mathbf{U}| \cdot |\mathbf{V}|$ -el egyenlő.

A lokális koordinátabázis elemeinek egymás közötti skalárszorzata a metrikus tenzonnal egyenlő:

$$\mathbf{e}_{(i)} \cdot \mathbf{e}_{(j)} = g_{kl} e_{(i)}^k e_{(j)}^l = g_{kl} \delta_i^k \delta_j^l = g_{ij}. \quad (8.6)$$

¹²Ha ki akarjuk hangsúlyozni, hogy a háromdimenziós geometriai tér vektoráról van szó, a félkövér szedés helyett a nyilat használjuk.

Tekintsük az $x^i(\lambda)$ görbét és $V^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$ érintővektorát. A \mathbf{V} hossznégyzete

$$\mathbf{V}^2 = g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = \frac{dl^2}{d\lambda^2}, \quad (8.7)$$

amelyből látszik, hogy az érintővektor akkor egységvektor, ha a görbe paramétere maga az ívhossz. Ha a λ nem az ívhossz (és nem is arányos vele), akkor az érintővektor hossza változik a görbe mentén.

Legyen P a sokaság tetszőleges pontja. Vegyük fel a \mathcal{K}_P koordinátarendszert úgy, hogy a koordináták egyezzenek meg a koordinátavonalak ívhosszával (x^i legyen egyenlő az i -dik koordinátavonal $(0, x^i)$ szakaszának előjeles hosszával) mert ekkor $\mathbf{e}_{(i)}^2(P) = 1$ lesz, és a lokális koordinátabázis elemei P -ben legyenek ortogonálisak egymással. A lokális koordinátabázis ekkor ortonormált P -ben:

$$g_{ij}(P) = \mathbf{e}_{(i)}(P) \cdot \mathbf{e}_{(j)}(P) = \delta_{ij}. \quad (8.8)$$

Az egész sokaságon a metrikus tenzor természetesen nem lehet (8.8) alakú (kivéve, ha a sokaság görbületlen).

A \mathcal{K}_P -t vegyük fel úgy, hogy az origója legyen P -ben és fejtsük Taylor-sorba $g_{ij}(x)$ -t az origó körül:

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_P x^k + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} \right|_P x^k x^l + \dots$$

Belátható, hogy \mathcal{K}_P mindig felvehető úgy, hogy (8.8) mellett még a

$$\left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_P = 0 \quad (\forall i, j, k) \quad (8.9)$$

reláció is teljesüljön (a magasabb parciális deriváltakat azonban már nem lehet nullának választani). Az ilyen koordinátarendszert P -ben *lokálisan Descartes koordinátarendszernek* hívjuk.

9. Példa: A 2D gömb

Fontos példaként határozzuk meg az a sugarú 2D gömb metrikáját. Mivel mi magunk háromdimenziósak vagyunk, a metrikus tenzort az előző fejezetben vázolt tisztán belső eljárásnál egyszerűbben, a háromdimenziós szemlélet alapján is meghatározhatjuk.

Induljunk ki abból, hogy a geometriai terünk euklidészi (görbületlen), felvehető benne Descartes-féle koordinátarendszer, amelyben

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (9.1)$$

Térjünk át polárkoordinátákra az

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi \quad z = r \cos \vartheta \quad (9.2)$$

képletekkel, amelyek differenciáljait (9.1)-be beírva a

$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (9.3)$$

képletre jutunk. Ebből leolvasható a 3D euklidészi tér metrikája polárkoordinátákban:

$$g_{rr} = 1 \quad g_{\vartheta\vartheta} = r^2 \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \vartheta. \quad (9.4)$$

A többi komponens nulla (itt és a továbbiakban a tenzoroknak csak azokat a komponenseit írjuk ki expliciten, amelyek nullától különböznek).

Polárkoordinátákban a lokális koordinátabázis az $\mathbf{e}_{(r)}$, az $\mathbf{e}_{(\vartheta)}$ és az $\mathbf{e}_{(\varphi)}$ elemekből áll, amelyek (8.6) és (9.4) szerint ortogonálisak egymásra, de nincsenek 1-re normálva:

$$\mathbf{e}_{(r)}^2 = 1 \quad \mathbf{e}_{(\vartheta)}^2 = r^2 \quad \mathbf{e}_{(\varphi)}^2 = r^2 \sin^2 \vartheta.$$

A vektoranalízisben ehelyett többnyire a lokális *ortonormált* bázist használják, amelynek elemei a következők:

$$\mathbf{e}_{(R)} = \mathbf{e}_{(r)} \quad \mathbf{e}_{(\Theta)} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_{(\vartheta)} \quad \mathbf{e}_{(\Phi)} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \mathbf{e}_{(\varphi)}. \quad (9.5)$$

Mint látjuk, ennek a bázisnak az elemeit a megfelelő nagybetűvel indexeljük. Mindkét bázis elemeire igaz, hogy érintik a nevükben szereplő koordinátavonalat és a koordináta növekvő értékének irányába mutatnak (tehát pl. $\mathbf{e}_{(\vartheta)}$ és $\mathbf{e}_{(\Theta)}$ "északról délre").

Az a -sugarú gömb egyenlete $r = a$ ($dr = 0$). ezért a 2D gömb ívelemnégyzete és metrikus tenzora a következő:

$$dl^2 = a^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (9.6)$$

$$g_{\vartheta\vartheta} = a^2 \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 \sin^2 \vartheta. \quad (9.7)$$

A ϑ , φ koordinátákat a 2D gömbön gömbi koordinátáknak fogjuk hívni. A lokális koordinátabázis a gömböt *érintő* $\mathbf{e}_{(\vartheta)}$ és $\mathbf{e}_{(\varphi)}$ elemekből áll, ők feszítik ki minden pontban az *érintőteret* (innen származik az érintőtér elnevezés). Helyettük is be lehet vezetni az 1-re normált (nagybetűs) bázist.

* * *

A (9.7) metrika nyilván invariáns a z -tengely körüli elforgatásokra (amikor $\vartheta = konstans$ és $\varphi \rightarrow \varphi + konstans$), de a gömbalak maga *tetszőleges* tengely körüli elforgatásra szimmetrikus. Összhangban van-e ezzel a (9.7) metrika?

Amikor a gömböt valamelyik szimmetriatengelye körül infinitezimális mértékben elforgatjuk, minden pontja elmozdul. Ez az elmozdulás felfogható úgy is, mint egy alkalmasan választott \mathbf{W} vektormező "fuvallatának" a hatása abban az értelemben, ahogy erről a 7. fejezetben volt szó. A (9.7) metrikus tenzor akkor van összhangban a gömbalak szimmetriájával, ha a Lie-deriváltja minden ilyen \mathbf{W} szerint nullával egyenlő: $\mathcal{L}_{\mathbf{W}} g_{ij} = 0$.

Azokat a vektormezőket, amelyek szerint a metrikus tenzor Lie-deriváltja nulla, *Killing-mezőknek* hívjuk és a továbbiakban többnyire \mathbf{K} -val jelöljük.

A háromdimenziós szemléletünk lehetővé teszi, hogy a 2D gömb bármely szimmetriájához tartozó Killing-mező képletét felírjuk. Speciálisan a koordináta tengelyek körüli elforgatásnak megfelelő vektormezők Descartes-koordinátákban a következők:

$$\mathbf{K}_{(x)} = (\vec{i} \times \vec{r}) = (0, -z, y) \quad \mathbf{K}_{(y)} = (\vec{j} \times \vec{r}) = (z, 0, -x) \quad \mathbf{K}_{(z)} = (\vec{k} \times \vec{r}) = (-y, x, 0) \quad (9.8)$$

(\vec{i} , \vec{j} , \vec{k} a tengelyek egységvektorai). Mindhárom vektor merőleges \mathbf{r} -re (mert a skalárszorzatuk az $\mathbf{r} = (x, y, z)$ vektorral nulla), ezért $\mathbf{e}_{(\vartheta)}$ és $\mathbf{e}_{(\varphi)}$ lineáris kombinációi.

Megmutatjuk, hogy az $r = a$ gömbön a (9.8) mezők Killing-mezők, vagyis a (9.7) metrikus tenzor bármelyikük szerint vett Lie-deriváltja zérus. Ez a metrikus tenzor gömbi koordinátákban van felírva, ezért a (9.8) mezőket is gömbi koordinátákba kell átírni ($r = a$ -nál). Ez két lépésben történik:

Először a

$$\begin{aligned} V^R &= \sin \vartheta \cos \varphi V^x + \sin \vartheta \sin \varphi V^y + \cos \vartheta V^z \\ V^\Theta &= \cos \vartheta \cos \varphi V^x + \cos \vartheta \sin \varphi V^y - \sin \vartheta V^z \\ V^\Phi &= -\sin \varphi V^x + \cos \varphi V^y \end{aligned}$$

tankönyvi képletek segítségével áttérünk polárkoordinátákra (ne felejtjük el a vektorkomponensek x, y, z argumentumait (9.2) segítségével polárkoordinátákon keresztül kifejezni!):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{(x)} &= (K_{(x)}^\Theta, K_{(x)}^\Phi) = (-a \sin \varphi, -a \cos \vartheta \cdot \cos \varphi) \\ \mathbf{K}_{(y)} &= (K_{(y)}^\Theta, K_{(y)}^\Phi) = (a \cos \varphi, -a \cos \vartheta \cdot \sin \varphi) \\ \mathbf{K}_{(z)} &= (K_{(z)}^\Theta, K_{(z)}^\Phi) = (0, a \sin \vartheta) \end{aligned}$$

(a $\mathbf{K}_{(i)}^R$ mindenütt nulla), majd pedig a (9.5) és a

$$\mathbf{V} = V^r \mathbf{e}_{(r)} + V^\vartheta \mathbf{e}_{(\vartheta)} + V^\varphi \mathbf{e}_{(\varphi)} = V^R \mathbf{e}_{(R)} + V^\Theta \mathbf{e}_{(\Theta)} + V^\Phi \mathbf{e}_{(\Phi)}$$

képlet segítségével ortonormált bázisról lokális koordinátabázisra:

$$V^r = V^R \quad V^\vartheta = \frac{1}{r} V^\Theta \quad V^\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} V^\Phi \quad (9.9)$$

(a gömbön természetesen $r = a$).

Most már csak türelmes behelyettesítés kérdése, hogy a (9.8) mezők ϑ, φ komponenseit felírhassuk:

$$\mathbf{K}_{(x)} = (-\sin \varphi, -\cos \varphi \operatorname{ctg} \vartheta) \quad \mathbf{K}_{(y)} = (\cos \varphi, -\sin \varphi \operatorname{ctg} \vartheta) \quad \mathbf{K}_{(z)} = (0, 1). \quad (9.10)$$

Ezután az

$$\mathcal{L}_W g_{ij} = W^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{kj} \frac{\partial W^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial W^k}{\partial x^j} \quad (9.11)$$

képlet felhasználásával (amelyben most $x^1, x^2 = \vartheta, \varphi$) könnyen igazolhatjuk, hogy a (9.10) mezők mindegyike Killing-mező. A g_{ij} speciális alakja a számítást nagyon leegyszerűsíti. Így

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W g_{\vartheta\vartheta} &= 2a^2 \frac{\partial W^\vartheta}{\partial \vartheta}, \\ \mathcal{L}_W g_{\varphi\varphi} &= 2a^2 \left[\sin \vartheta \cos \vartheta \cdot W^\vartheta + \sin^2 \vartheta \frac{\partial W^\varphi}{\partial \varphi} \right], \\ \mathcal{L}_W g_{\vartheta\varphi} &= a^2 \left[\sin^2 \vartheta \frac{\partial W^\varphi}{\partial \vartheta} + \frac{\partial W^\vartheta}{\partial \varphi} \right], \end{aligned}$$

és ezek mindhárom mezőre nullával egyenlők.

Speciálisan az, hogy $\mathbf{K}_z = \mathbf{e}_{(\varphi)}$ Killing-vektor, a metrika φ -függetlenségének a következménye (ld. (7.13)-t): *Ha a metrikus tenzor egyik komponense sem függ x^i -től, akkor $\mathbf{e}_{(i)}(x)$ Killing-mező.*

Az utolsó lépés: A (9.11) lineáris \mathbf{W} -ben, ezért a három $\mathbf{K}_{(x)}, \mathbf{K}_{(y)}, \mathbf{K}_{(z)}$ mező tetszőleges lineáris kombinációjára is igaz, hogy Killing-mező. Ebből következik, hogy — a látszat ellenére — a (9.7) metrika összefér a gömbi szimmetriával.

Az eddigi gondolatmenetben a háromdimenziós szemléletünk alapján tudtuk megállapítani, hogy a (9.10) Killing-mezők forgásszimmetriát írnak le. Hogyan jellemeznék ezt a szimmetriát a "laposlények", akiknek csak kétdimenziós szemléletük van, de jó matematikusok? Ez azért fontos kérdés, mert pl. a 3D gömbre vonatkozóan, amellyel a kozmológiában dolgozunk akad, mi ugyanolyan helyzetben vagyunk, mint a laposlények a 2D gömbre vonatkozóan.

A feltett kérdésre úgy válaszolhatunk, hogy a forgásszimmetriát képletekkel is megfogalmazzuk. Ennek érdekében bevezetjük két vektormező *Lie-zárójelét* az

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \stackrel{def}{=} \mathcal{L}_B \mathbf{A} \quad (9.12)$$

definícióval, amely antiszimmetrikus a tényezők felcserélésével szemben. Közvetlen számolással belátható, hogy a három $\mathbf{K}_{(x)}$, $\mathbf{K}_{(y)}$, $\mathbf{K}_{(z)}$ Killing-mező zárt a Lie-zárójellel szemben:

$$(\mathbf{K}_{(x)}, \mathbf{K}_{(y)}) = \mathbf{K}_{(z)} \quad \text{és ciklikus permutációi.} \quad (9.13)$$

Ezek a képletek vektorok egyenlőségét fejezik ki és így bármilyen koordinátarendszerben érvényesek. A legegyszerűbben Descartes-koordinátákban ellenőrizhetők.

A (9.13) struktúra a fizikában és a matematikában mindenütt megjelenik, ahol forgásszimmetriáról van szó. A kvantummechanikában például az impulzummomentum operátorának a komponensei az

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z \quad \text{és ciklikus permutációi}$$

kommutációs relációknak tesznek eleget, amelyekben az $[\hat{A}, \hat{B}]$ kommutátor tölti be a Lie-zárójel szerepét.

A laposlények önállóan eljuthatnak arra a következtetésre, hogy a szimmetria, amit találtak, a (9.13) relációkkal jellemezhető. Az, hogy milyen szót találnak ki rá, az ő dolguk. De arra rájöhetnek, hogy a pont körüli forgatás háromdimenziós általánosításáról van szó.

A laposlényeknek azonban nem elég, ha igazolni tudják, hogy a $\mathbf{K}_{(x)}$, $\mathbf{K}_{(y)}$, $\mathbf{K}_{(z)}$ mezők, amelyeket a kezükbe adunk, Killing-mezők: maguknak kell megtalálni őket. A következő pontban fel fogunk írni egy egyenletet (*Killing-egyenlet*), amelyből a metrika ismeretében meg lehet kapni az összes Killing-mezőt.

10. A kovariáns derivált

A 7. fejezetben láttuk, hogy a parciális deriválást módosítani kell ahhoz, hogy tenzort eredményezzen. Minden ilyen módosítás egy megfelelő transzportálást igényel. Riemann-téren a metrika lehetővé teszi, hogy olyan transzportálást definiáljunk, amely összhangban van a párhuzamos eltolásra vonatkozó intuitív elvárásainkkal.

Legyen az x^i koordinátájú P pont a sokaság tetszőleges pontja, \bar{P} pedig egy közeli pont $\bar{x}^i = x^i + dx^i$ koordinátákkal. Legyen adva P -ben egy tetszőleges $\mathbf{V}(P)$ vektor, amelyet önmagával párhuzamosan át kell helyezni \bar{P} -be. Jelöljük a P -ből áthelyezett \bar{P} -beli vektort $\bar{\mathbf{V}}(P)$ -vel és a *parallel transzportálás* szabályát keressük a

$$\bar{V}^i(P) = V^i(P) - \Gamma_{jk}^i(P) V^k(P) dx^j \quad (10.1)$$

alakban (ez felel meg a (7.4) Lie-transzportnak). A második tagban a V^k tényező biztosítja, hogy kétszer hosszabb vektor parallel transzportáltja is kétszer hosszabb legyen. A Γ_{jk}^i *konnexiós koefficienseket* úgy kell megválasztani, hogy a (10.1) parallel transzportálást írjon le és a belőle származó derivált legyen T_j^i típusú tenzor, amely $\partial_j V^i$ módosítása.

A továbbiakban követhetjük ugyanazt a gondolatmenetet, amely a Lie-transzporttól elvezetett a Lie-deriválthoz. A

$$DV^i(x) = V^i(x + dx) - \bar{V}^i(x) \quad (10.2)$$

különbséget (*kovariáns differenciál*) a $V^i(x + dx)$ sorfejtése és (10.1) segítségével a

$$DV^i(x) = \left(\frac{\partial V^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i V^k \right) \cdot dx^j \quad (10.3)$$

alakban írjuk. A \mathbf{V} vektormező $\nabla_j V^i$ *kovariáns deriváltját* a $df(x) = \partial_j f \cdot dx^j$ mintájára a

$$DV^i = \nabla_j V^i \cdot dx^j$$

képlettel definiáljuk, ezért

$$\nabla_j V^i = \frac{\partial V^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i V^k, \quad (10.4)$$

és ugyanúgy, ahogy a Lie-deriválnál tettük, a (10.4)-t általánosítjuk tenzorokra.

Az $f(x)$ skalármező $\bar{f}(x)$ parallel transzportáltja nyilván megegyezik $f(x)$ -el, ezért

$$\begin{aligned} Df(x) &= f(x + dx) - \bar{f}(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \\ \nabla_i f &= \frac{\partial f}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Tenzormezők szorzatára megint beláthatjuk a Leibniz-szabály érvényességét, és a 7. fejezet gondolatmenetét követve eljuthatunk a

$$\nabla_j V_i = \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ji}^k V_k \quad (10.6)$$

$$\nabla_l T_{\dots k}^{ij} = \frac{\partial T_{\dots k}^{ij}}{\partial x^l} + \Gamma_{lm}^i T_{\dots k}^{mj} + \Gamma_{lm}^j T_{\dots k}^{im} - \Gamma_{lk}^m T_{\dots m}^{ij} \quad (10.7)$$

képletekhez.

Most meg kell választanunk a konnexiókoefficienseket oly módon, hogy a (10.2) képlet valóban azt a műveletet határozza meg, amelyet a "párhuzamos eltolás" elnevezés fejez ki. Először is, a (10.6) alapján a (6.14) jelölés alkalmazásával képezzük a

$$\nabla_j V_i - \nabla_i V_j = \partial_j V_i - \partial_i V_j - 2\Gamma_{[ji]}^k V_k$$

különbséget. A 7. fejezetben láttuk, hogy a $(\partial_j V_i - \partial_i V_j)$ különbség tenzor. A cél az, hogy a kovariáns derivált is tenzor legyen. A képletünk szerint ennek szükséges feltétele, hogy a $\Gamma_{[ij]}^k$ mennyiség az indexeinek megfelelő tenzor legyen. Ezért megköveteljük, hogy a $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{(jk)}^i + \Gamma_{[jk]}^i$ felbontásban $\Gamma_{[jk]}^i$ legyen tenzor.

Annak érdekében, hogy a "párhuzamos eltolásra" vonatkozó intuíciónkat érvényre juttathassuk, most egy időre a kétdimenziós sík és a háromdimenziós euklidészi tér n -dimenziós változatára, az n -dimenziós euklidészi térre korlátozódunk, amely definíció szerint görbületlen és lefedhető Descartes-koordinátákkal (8. fejezet). Nyilvánvaló, hogy ebben a koordinátarendszerben (10.1) csak akkor írja le a V^i párhuzamos eltolását, ha $\Gamma_{jk}^i = 0$. Mivel Descartes-koordinátákban $g_{ij} = \delta_{ij} = konstans$, ezért a

$$\nabla_i g_{jk} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^l g_{lk} - \Gamma_{ik}^l g_{jl}$$

képlet jobb oldala ekkor nulla. A baloldal azonban tenzor, ezért minden koordinátarendszerben igaz, hogy

$$\nabla_k g_{ij} = 0. \quad (10.8)$$

A konnxiós koefficienseknek ezzel a feltétellel kell összhangban lenniük ahhoz, hogy a (10.1) képlet *parallel* transzportálást fejezzen ki, ezért ezeket a koefficienseket a

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^l g_{lk} - \Gamma_{ik}^l g_{jl} = 0 \quad (10.9)$$

egyenletrendszerből kell meghatározni.

A metrikus tenzor szimmetriája miatt ez az egyenletrendszer $n^2(n+1)/2$ egyenletet tartalmaz. A meghatározandó konnxiós koefficiensek száma azonban n^3 -nal egyenlő, ami több, mint az egyenletek száma. Az előbb azonban láttuk, hogy a $\Gamma_{[jk]}^i$ antiszimmetrikus rész tenzor, ezért ha a Descartes-koordinátákban nulla, akkor minden más koordinátarendszerben automatikusan eltűnik. Ennek következtében feltehetjük, hogy *a konnxiós koefficiensek az alsó indexpárban szimmetrikusak*. A konnxiós koefficiensek száma ezzel $n^2(n+1)/2$ -re redukálódik és mind egyértelműen kiszámíthatók (10.9)-ből.

A (10.9) nagyon könnyen megoldható. Az egyenletet még kétszer fel kell írni ciklikusan permutált ijk indexekkel és valamelyik két egyenlet összegéből ki kell vonni a harmadikat. Megoldásként a

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \quad (10.10)$$

Christoffel-szimbólumot kapjuk. A 3D euklidészi térben például Descartes-koordinátákban $g_{ij} = \delta_{ij}$ következtében $\Gamma_{jk}^i = 0$, polárkoordinátákban pedig (9.4) alapján

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -r & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r \sin^2 \vartheta \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} &= -\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta & \Gamma_{r\vartheta}^{\vartheta} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\vartheta\varphi}^{\varphi} &= \text{ctg } \vartheta. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Láttuk, hogy a P ponthoz tartozó lokálisan Descartes-rendszerben teljesül a (8.9) egyenlőség. A (10.10) mutatja, hogy emellett a

$$\Gamma_{jk}^i(P) = 0$$

is igaz. A lokálisan Descartes-rendszer definíciójában (8. fejezet) tehát a metrikus tenzor parciális deriváltjainak az eltűnése P -ben egyenértékű a konnxiós koefficiensek eltűnésével.

Most emlékeztetünk rá, hogy mindaz, amit a konnxiós koefficiensek kiszámításáról eddig mondtunk, euklidészi sokaságra vonatkozott. Azonban nyilvánvaló, hogy a *parallel transzport* fogalmát a legtermészetesebb módon úgy általánosíthatjuk tetszőleges Riemann-sokaságra, hogy itt is megköveteljük a konnxiós koefficiensek szimmetriáját és a (10.8) feltétel teljesülését. Ekkor (10.10) is mindig érvényes lesz (*Riemann-konnexió*). Az általános relativitáselméletben a *parallel transzport*nak ezt a fogalmát használjuk.

A (10.10) egy másik levezetése azon a követelményen alapul, hogy *a parallel transzportálás legyen összhangban a skalárszorzáttal*. Az $\mathbf{U}(P)$ és a $\mathbf{V}(P)$ vektorok skalárszorzata a $g_{ij}(P)U^i(P)V^j(P)$ skalár. Ha ezt, mint skalárt, a \bar{P} -be transzportáljuk, a $\bar{g}_{ij}(P)\bar{U}^i(P)\bar{V}^j(P)$ kifejezést kapjuk, amelyben $\bar{g}_{ij}(P)$ a P -beli metrikus tenzor \bar{P} -be transzportált értéke. A \bar{P} -beli skalárszorzatot azonban úgy is érthetjük, hogy előbb az $\mathbf{U}(P)$ -t és a $\mathbf{V}(P)$ -t \bar{P} -be transzportáljuk és az *ottani* $g_{ij}(\bar{P})$ -vel képezzük a skalárszorzatukat. Megköveteljük, hogy a skalárszorzat két módon értett transzportálása vezessen ugyanarra az eredményre, azaz teljesüljön az

$$\bar{g}_{ij}(P) \cdot \bar{U}^i(P) \cdot \bar{V}^j(P) = g_{ij}(\bar{P}) \cdot \bar{U}^i(P) \cdot \bar{V}^j(P) \quad (\forall \mathbf{U}, \mathbf{V})$$

reláció.

Az U és a V önkényessége miatt ez az reláció a

$$\bar{g}_{ij}(P) = g_{ij}(\bar{P}) \quad (10.12)$$

egyenlőség teljesülését követeli meg, amit

$$Dg_{ij}(P) = g_{ij}(\bar{P}) - \bar{g}_{ij}(P) = 0 \quad (10.13)$$

alakban is írhatunk. A $Dg_{ij} = \nabla_k g_{ij} \cdot dx^k$ definíció alapján ez egyenértékű a (10.8) egyenlettel, ami azt jelenti, hogy g_{ij} kovariáns konstans (kiemelhető a kovariáns deriválás alól). A (10.8)-nak ennél a levezetésénél nem kellett euklidészi sokaságra korlátozódnia.

A (10.10) képletből leolvasható, hogyan transzformálódik a konnexiós koefficiens. Ennek érdekében a képletet vesszős indexekkel írjuk fel, majd az összes vesszős indexet kifejezzük vesszőtleneken keresztül:

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = \frac{1}{2} g^{i'l'} \left(\frac{\partial g_{l'k'}}{\partial x^{j'}} + \dots \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^n} g^{mn} \right) \cdot \left[\frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial x^q}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}} g^{qr} \right) + \dots \right].$$

A []-ben a három derivált mindegyikét a szorzat deriválási szabálya alapján három taggá alakítjuk. A metrikus tenzor deriváltját tartalmazó tagok összege a vesszőtlen Γ -val arányos taggá kombinálódik össze, a maradék hat tagból négy kiejti egymást, kettő pedig egyenlő egymással. Így végül a konnexiós koefficiensek transzformációjára a

$$\Gamma_{j'k'}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} \Gamma_{mn}^l + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^{j'} \partial x^{k'}} \quad (10.14)$$

szabályt kapjuk. A második tag miatt a konnexiós koefficiens nem tenzor, ezért lehet egy pontban koordinátatranszformációval eltüntetni egy szimmetrikus konnexiós koefficiens.

Most már ellenőrizhetjük, hogy a (10.4) valóban olyan tenzor-e, ahogy az indexei mutatják. Ehhez (10.4)-t vesszős indexekkel kell felírni, és a jobboldalon minden vesszős mennyiséget ki kell fejezni vesszőtleneken keresztül. Azt találjuk, hogy (10.4) valóban tenzor.

Ezen ugyanúgy érdemes elgondolkozni, ahogy a Lie-deriválttal kapcsolatban tettük. A (10.4) jobboldalán sem a parciális derivált, sem a konnexiós koefficiens nem tenzor. Mivel értük el, hogy az egész kifejezés mégis tenzor lett? Azzal, hogy a parallel transzportálás szabályát koordinátarendszertől független módon, a (10.8) (vagy a vele ekvivalens (10.12)) megkövetelésével rögzítettük. Ezt a feltételt ugyanis így lehet szavakban megfogalmazni: Ha a metrikus tenzort parallel transzportálással átvisszük egy közeli pontba, akkor a transzportált tenzor ugyanaz, mint amelyik már eredetileg is a szomszédos pontban volt. A koordinátákra itt egyáltalán nincs utalás.

Hasonlítsuk most össze a Lie-deriválást és a kovariáns deriválást a metrikus tenzorra történő hatásuk szempontjából. A metrikus tenzor kovariáns deriváltja "hivatalból" nulla, míg az

$$\mathcal{L}_W g_{ij} = W^l \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} + g_{lj} \frac{\partial W^l}{\partial x^i} + g_{il} \frac{\partial W^l}{\partial x^j}$$

Lie-derivált általában különbözik nullától. A kivétel az, ha W^i Killing-mező. Ezt használjuk fel arra, hogy differenciál egyenletet kapjunk a Killing-mezőkre.

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a Lie-deriválás képleteiben a parciális derivált mindenütt helyettesíthető kovariáns deriválttal: $\partial_i \rightarrow \nabla_i$ (vagyis a Γ_{jk}^i -k mindig kiesnek). Ha ugyanis ezt a helyettesítést meg tesszük, a Lie-derivált jobboldala továbbra is tenzor (tagonként). De ez az új tenzor minden P pontban egyenlő lesz a régivel, mert a P -hez tartozó lokálisan Descartes-koordinátákban $\partial_i = \nabla_i$.

Ha az előző képletben ezt a helyettesítést elvégezzük, és figyelembe vesszük, hogy a metrikus tenzor kovariáns konstans, az

$$\mathcal{L}_W g_{ij} = \nabla_i W_j + \nabla_j W_i \quad (10.15)$$

egyenletre jutunk. A metrikus tenzor Killing-mező szerinti Lie-deriváltja zérus, ezért ezek a mezők kielégítik a

$$\nabla_i K_j + \nabla_j K_i = 0 \quad (10.16)$$

Killing-egyenletet. Megmutatható, hogy n dimenzióban maximálisan $n(n+1)/2$ lineárisan független Killing-mező létezhet. Azok a sokaságok, amelyek rendelkeznek ennyi független Killing-mezővel, *maximálisan szimmetrikusak*. A 9. fejezetre visszalapozva láthatjuk, hogy a 2D gömb maximálisan szimmetrikus, ahogy egyébként elvárható is. Az euklidészi sík is maximálisan szimmetrikus, mert az x, y komponensekben felírt

$$\mathbf{K}_{(1)} = (1, 0) \quad \mathbf{K}_{(2)} = (0, 1) \quad \mathbf{K}_{(3)} = (-y, x) \quad (10.17)$$

mezők lineárisan függetlenek és kielégítik a Killing-egyenletet. A geometriai jelentésük: eltolás az x , ill. az y irányban és forgatás az origó körül.

11. A geodetikus egyenlet

A) A párhuzamos elterjesztés egyenlete.

Az előző fejezetben csak egymáshoz infinitezimálisan közeli pontok közötti parallel transzportról volt szó. Legyen most P_1 és P_2 a sokaság bármely két pontja. Kössük össze őket egy tetszőlegesen választott \mathcal{L} görbével, amelynek egyenlete és érintővektora

$$x^i = x^i(\lambda) \quad V^i(\lambda) = \frac{dx^i(\lambda)}{d\lambda}. \quad (11.1)$$

A P_1 -hez tartozzon a λ_1 paraméter, a P_2 -höz a λ_2 . Adjunk meg egy $\mathbf{U} \equiv \mathbf{U}(\lambda_1)$ vektort P_1 -ben és a görbe mentén transzportáljuk önmagával párhuzamosan P_2 -be. Jelöljük a transzportált vektort $\mathbf{U}(\lambda_2)$ -vel és kérdezzük, hogyan számíthatjuk ki a komponenseit.

A transzportálás infinitezimális lépések sorozatából áll. Ha már eljutottunk a λ paraméterű pontig, akkor a $\lambda + d\lambda$ paraméterű pontban a vektort az $\mathbf{U}(\lambda)$ -val párhuzamosan kell felvenni. Ezt a követelményt az $U^i(\lambda + d\lambda) = \bar{U}^i(\lambda)$ előírás fejezi ki, amelyből a

$$DU^i(\lambda) \equiv U^i(\lambda + d\lambda) - \bar{U}^i(\lambda) = 0 \quad (11.2)$$

feltételre jutunk. Az $\bar{\mathbf{U}}(\lambda)$ — mint eddig mindig — az a $(\lambda + d\lambda)$ -beli vektor, amely az $\mathbf{U}(\lambda)$ vektorból a $dx^j = \frac{dx^j}{d\lambda} d\lambda = V^j(\lambda) \cdot d\lambda$ szakaszon történő parallel transzportálással kapható:

$$\bar{U}^i(\lambda) = U^i(\lambda) - \Gamma_{jk}^i(\lambda) V^j(\lambda) U^k(\lambda) \cdot d\lambda$$

(a továbbiakban többnyire nem fogjuk kiírni a λ argumentumot, ha egy egyenlet minden tagja a λ pontra vonatkozik). Írjuk ezt és az $U^i(\lambda + d\lambda) = U^i(\lambda) + \frac{dU^i(\lambda)}{d\lambda} \cdot d\lambda$ kifejtést (11.2)-be:

$$DU^i \equiv \left[\frac{dU^i}{d\lambda} + \Gamma_{jk}^i V^j U^k \right] d\lambda = 0.$$

Ebből az egyenlőségből kapjuk a *párhuzamos elterjesztés egyenletét*:

$$\frac{DU^i}{d\lambda} \equiv \frac{dU^i}{d\lambda} + \Gamma_{jk}^i V^j U^k = 0. \quad (11.3)$$

Ez egy n -ismeretlenes közönséges *lineáris* differenciálegyenlet rendszer, amelynek a megoldását az $U^i(\lambda_1)$ vektor egyértelműen rögzíti.

Görbületlen sokaságon Descartes-koordinátákban $\Gamma_{jk}^i = 0$, $\frac{dU^i}{d\lambda} = 0$ és a görbe mentén végig $U^i = \text{konstans}$. A párhuzamos transzportálástól pontosan ezt várjuk el.

A $\frac{DU^i}{d\lambda}$ mennyiséget az \mathbf{U} *abszolút deriváltjának* nevezzük az \mathcal{L} mentén. Az abszolút derivált kapcsolata a kovariáns deriválttal a következő:

$$\frac{DU^i}{d\lambda} = \frac{dx^j}{d\lambda} \left(\frac{\partial U^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i U^k \right) = V^j \cdot \nabla_j U^i. \quad (11.4)$$

Ez a képlet akkor alkalmazható, amikor az \mathbf{U} mező nem csak magán a \mathcal{L} görbén, hanem a görbe valamilyen környezetében is értelmezve van.

Kössük össze most ugyanazt a két pontot egy másik görbével és transzportáljuk \mathbf{U} -t P_1 -ből P_2 -be ezen az új görbén. Ugyanazt kapjuk a P_2 -beli vektorra, mint előbb? A (11.3) egyenletből ez egyáltalán nem következik és a párhuzamos transzportálás eredménye különböző utakon általában különböző is lesz. Annak a kérdésnek tehát, hogy "A P_2 -ben melyik vektor párhuzamos a P_1 -beli \mathbf{U} -val?" nincs értelme: *A Riemann-geometriában nem létezik távoli párhuzamosság.*

A parallel transzportálás fogalma azonban biztosítja, hogy két vektor skalárszorzata — és ennek következtében a vektorok normája — a transzportálás során állandó maradjon. A két különböző úton transzportált vektornak ezért csak az *iránya* lehet különböző. Az igazoláshoz azt kell belátni, hogy ha $D\mathbf{A}/d\lambda$ is, $D\mathbf{B}/d\lambda$ is zérus, akkor $\frac{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{d\lambda} = 0$. Skalármennyiségeknél azonban $d/d\lambda = D/d\lambda$, ezért

$$\frac{d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{d\lambda} = \frac{D(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{d\lambda} = \mathbf{A} \cdot \frac{D\mathbf{B}}{d\lambda} + \mathbf{B} \cdot \frac{D\mathbf{A}}{d\lambda} = 0 \quad (11.5)$$

valóban.

A mondottakból következik, hogy ha a vektort *zárt görbén* transzportáljuk ($P_1 \equiv P_2$, $x^i(\lambda_2) = x^i(\lambda_1)$), akkor a körbevitt vektor iránya általában megváltozik az eredeti vektor irányához képest.

B) A geodetikus egyenlet.

Az egyenest leggyakrabban azzal a tulajdonságával definiáljuk, hogy két pont között ez a legrövidebb út. Az egyenes egy másik, ezzel ekvivalens tulajdonsága az, hogy az iránya állandó. Ez utóbbi tulajdonság pontos megfogalmazása a következő: A geodetikus az a görbe, amelynek $(\lambda + d\lambda)$ -beli érintővektora párhuzamos a λ -beli érintővektorával, azaz

$$V^i(\lambda + d\lambda) = \bar{V}^i(\lambda). \quad (11.6)$$

Ez nem más, mint a párhuzamos elterjesztés feltétele, ezért (11.3) alapján

$$\frac{dV^i}{d\lambda} + \Gamma_{jk}^i V^j V^k = 0, \quad (11.7)$$

vagy (11.1) behelyettesítésével

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0. \quad (11.8)$$

Ez a *geodetikus egyenlet*, egy n -ismeretlenes másodrendű közönséges *nemlineáris* differenciálegyenlet rendszer, amelynek megoldásait az $x^i(\lambda_1)$, $\left(\frac{dx^i}{d\lambda}\right)_{\lambda_1}$ mennyiségek egyértelműen meghatározzák.

A származtatás módjából következik, hogy a *geodetikus egyenlet őrzi az érintővektor normáját*.

Megjegyezzük, hogy (11.6) jobboldalát megszorozhattuk volna egy $(1 + b(\lambda)d\lambda)$ kifejezéssel, amelyben $b(\lambda)$ tetszőleges függvény, mert a $(\lambda + d\lambda)$ -beli érintővektor ekkor is párhuzamos a λ -beli érintővektorral, csak a két vektor normája lenne különböző. A (11.8) jobboldalán ekkor nulla helyett a $b(\lambda)\frac{dx^i}{d\lambda}$ kifejezés állna. Az elfogadott terminológia szerint azonban a $b(\lambda) = 0$ választáshoz tartozó (11.8)-t nevezzük geodetikus egyenletnek.

A párhuzamos elterjesztés egyenlete szempontjából a (11.1) görbe parametrálási módjának nincs jelentősége: Ha az egyenlet a λ paraméternél teljesül, akkor is teljesülni fog, ha a $\lambda = \lambda(\mu)$ egyenlettel új μ paraméterre térünk át. A magyarázat az, hogy a μ paraméterrel felírt egyenletet úgy kapjuk meg, hogy (11.3)-t egyszerűen megszorozzuk $\frac{d\lambda}{d\mu}$ -vel.

A geodetikus egyenlettel más a helyzet. Ha (11.8)-t $\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)^2$ -tel megszorozzuk, a második derivált miatt nem lehet az összes $d\lambda$ -val "egyszerűsíteni":

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} = \frac{d\mu}{d\lambda} \frac{d}{d\mu} \left(\frac{d\mu}{d\lambda} \frac{dx^i}{d\mu} \right) = \left(\frac{d\mu}{d\lambda} \right)^2 \frac{d^2 x^i}{d\mu^2} + \frac{d^2 \mu}{d\lambda^2} \frac{dx^i}{d\mu}.$$

A geodetikus egyenlet megoldásait ezért valamilyen meghatározott parametrálásban kapjuk meg (*affin paraméter* vagy *speciális paraméter*)¹³. Az (előjeles) ívhossz bizonyosan affin paraméter. A (8.7) szerint ugyanis az ívhosszhoz, mint paraméterhez tartozó érintővektor normája a görbe mentén állandó (1-el egyenlő) és a geodetikus egyenletről tudjuk, hogy őrzi az érintővektor normáját. Az ívhossz azonban csak akkor egyértelműen rögzített paraméter, ha megadjuk, hogy a görbe melyik pontjánál tekintjük nullának és mekkora a hosszúság egység. Ezeket azonban önkényesen választhatjuk meg, mert a geodetikus egyenlet speciálisan a $\mu = a\lambda + b$ átparametrálásra (a és b tetszőleges állandó) invariáns.

12. Példa: A 2D gömb (folytatás)

A 2D gömbön gömbi koordinátákban az ívelemnégyzetet és a metrikát (9.6) és (9.7) adja meg. A metrikából kapható nemzérus konnxiós koefficiensek a következők:

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} = -\sin \vartheta \cos \vartheta \quad \Gamma_{\vartheta\varphi}^{\varphi} = \text{ctg } \vartheta \quad (12.1)$$

¹³A síkon Descartes-koordinátákban a geodetikus egyenlet

$$\frac{d^2 x}{d\lambda^2} = \frac{d^2 y}{d\lambda^2} = 0.$$

Az $x = a\lambda$, $y = b\lambda$ geodetikusok ezt kielégítik. De ha *ugyanezeket a geodetikusokat* $x = a\lambda^3$, $y = b\lambda^3$ alakban adjuk meg, már nem tesznek eleget a geodetikus egyenletnek. A λ affin paraméter, a $\mu = \lambda^3$ nem az.

(itt és a továbbiakban a szimmetriaokokból megegyező mennyiségek közül csak az egyiket tüntetjük fel). A geodetikus egyenlet könnyen felírható:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vartheta}{d\lambda^2} - \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2\varphi}{d\lambda^2} + 2\operatorname{ctg}\vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{d\lambda} \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} &= 0.\end{aligned}\tag{12.2}$$

A $\vartheta(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$ ismeretlen függvények nagyon bonyolult nemlineáris módon szerepelnek az egyenletben. A gömbi szimmetria azonban, amelyet a metrika alapján tisztán belső eljárással is megállapítottunk, lehetővé teszi az egyenlet megoldását. Akármelyik P pontból akármilyen irányba kiinduló geodetikusról legyen is szó, a szimmetria lehetővé teszi, hogy a koordinátarendszert úgy vegyük fel, hogy a P legyen az "egyenlítőn" ($\vartheta_P = \pi/2$, a φ_P tetszőleges), és a kezdőirány legyen "egyenlítő-irányú": $\left(\frac{d\vartheta}{d\lambda}, \frac{d\varphi}{d\lambda}\right)_P = (0, 1)$ (az 1 helyén állhatna bármilyen szám). A

$$\vartheta = \pi/2, \quad \varphi = \lambda + \varphi_P \quad (0 \leq \lambda < 2\pi)\tag{12.3}$$

főkör (az "egyenlítő") ekkor kielégíti (12.2)-t is, a kezdeti feltételeket is. Abból, hogy ez (12.2) *megoldása* következik, hogy λ -nak affin paraméternek *kell* lennie. Ez igaz is, mert $\lambda = l/a$, ahol l a főkör $(0, \lambda)$ szakaszának ívhossza, az $1/a$ pedig konstans (a a gömb sugara).

Tekintsük most az $\mathbf{e}_{(\varphi)} = (0, 1)$ bázisvektort a $(\vartheta_0, 0)$ koordinátájú pontban és vigyük körbe önmagával párhuzamosan a

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \varphi = \lambda\tag{12.4}$$

szélességi körön. Induláskor a vektor érinti ezt a szélességi kört. Megmutatjuk, hogy a körbevitel során kifordul az érintő irányból.

Ehhez a párhuzamos elterjesztés (11.3) egyenletét kell használnunk, amelyben most

$$V^i = (V^\vartheta, V^\varphi) = \left(\frac{d\vartheta}{d\lambda}, \frac{d\varphi}{d\lambda}\right) = (0, 1),$$

ezért az egyenlet a következő:

$$\begin{aligned}\frac{dU^\vartheta}{d\lambda} - \sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0 \cdot U^\varphi &= 0 \\ \frac{dU^\varphi}{d\lambda} + \operatorname{ctg}\vartheta_0 \cdot U^\vartheta &= 0.\end{aligned}$$

A kezdőfeltétel $\mathbf{U}(0) = \mathbf{e}_{(\varphi)} = (0, 1)$.

Differenciáljuk az első egyenletet λ szerint és $\frac{dU^\varphi}{d\lambda}$ -t helyettesítsük be a másodikból:

$$\frac{d^2U^\vartheta}{d\lambda^2} + \cos^2\vartheta_0 \cdot U^\vartheta = 0.$$

Ennek általános megoldása

$$U^\vartheta(\lambda) = A \cdot \sin(\cos\vartheta_0 \cdot \lambda) + B \cdot \cos(\cos\vartheta_0 \cdot \lambda).$$

Ezt az első egyenletbe írva kiszámítjuk U^φ -t:

$$U^\varphi(\lambda) = \frac{A}{\sin \vartheta_0} \cos(\cos \vartheta_0 \cdot \lambda) - \frac{B}{\sin \vartheta_0} \sin(\cos \vartheta_0 \cdot \lambda).$$

A kezdőfeltételt az $A = \sin \vartheta_0$, $B = 0$ választás elégíti ki, tehát

$$\mathbf{U}(\lambda) = (\sin \vartheta_0 \cdot \sin(\cos \vartheta_0 \cdot \lambda), \cos(\cos \vartheta_0 \cdot \lambda)). \quad (12.5)$$

Az elfordulás $\Delta\beta$ szögét a

$$\cos \Delta\beta = \frac{\mathbf{e}_{(\varphi)} \cdot \mathbf{U}(2\pi)}{|\mathbf{e}_{(\varphi)}| \cdot |\mathbf{U}(2\pi)|}$$

egyenletből lehet meghatározni, amelyből $\Delta\beta = \pm 2\pi \cos \vartheta_0$.

Képzeld meg egy pillanatra, hogy a transzportálás időben történik ($\lambda = \text{idő}$). A transzportált vektor komponensei minden "pillanatban" ahhoz a ponthoz tartozó lokális koordinátabázisra vonatkoznak, amelyben a vektor éppen van. A (12.5) mutatja, hogy a mindenkori bázishoz viszonyítva $U(\lambda)$ forgása negatív irányú (a pozitív irányú forgás az $\mathbf{e}_{(1)} \equiv \mathbf{e}_{(\vartheta)}$ -ból a $\mathbf{e}_{(2)} \equiv \mathbf{e}_{(\varphi)}$ felé történik), ezért $\Delta\beta = -2\pi \cos \vartheta_0$.

A vektor tehát valóban elfordul. A szemlélet azonban azt sugallja, hogy párhuzamos körbevételnél egy szélességi kör mentén az érintővektornak érintő irányúnak kellene maradnia. Az elfordulás szükségességéről úgy győződhetünk meg, hogy a síkon veszünk fel egy görbét és az egyik ponthoz tartozó érintővektort önmagával párhuzamosan elmozgatjuk a görbe mentén. A transzportált vektor nyilván nem marad érintőirányú — hacsak a görbe nem egyenes (geodetikus). A gömbön a szélességi kör nem geodetikus (kivéve, ha $\vartheta_0 = \pi/2$), ezért szükséges, hogy az érintővektor transzportálásánál kimozduljon az érintőirányból.

Ha a síkon is zárt görbét veszünk fel és az egyik pont érintővektorát önmagával párhuzamosan körbevisszük, akkor persze a kiinduló pontba visszatérve újra az eredeti érintővektort kapjuk. Ebben a tekintetben a gömb és a sík között nagy különbség van és ez — mint a következő fejezetben részletesen szó lesz róla — a kontúr által határolt felület *görbülségének* a különbözősége a két esetben.

A $\Delta\beta = -2\pi \cos \vartheta_0$ azonban más okból is paradoxális: Minél kisebb kör mentén ($\vartheta_0 \rightarrow 0$) történik a körbevétel, annál nagyobb a szögelfordulás ($|\Delta\beta| \rightarrow 2\pi$). Ez a paradoxon annak következménye, hogy a $\vartheta = 0$ pont a ϑ, φ gömbi koordináta-rendszer szinguláris pontja. Ha a gömbön olyan \mathcal{K}' koordináta-rendszert veszünk fel, amely ebben a pontban és környezetében reguláris, akkor ebben dolgozva megállapíthatjuk, hogy körbejárásnál az $(\mathbf{e}_{(\vartheta)}, \mathbf{e}_{(\varphi)})$ lokális koordinátabázis pozitív irányban forog és a teljes körbevétel során $+2\pi$ szöggel fordul el. A helyes $\Delta\alpha$ szögelfordulást akkor kapjuk meg, ha a számítást \mathcal{K}' -ben végezzük el, de a $\vartheta_0 \rightarrow 0$ limeszben az eredményt könnyen kitalálhatjuk. Az \mathbf{U} \mathcal{K} -hoz viszonyított szögelfordulásához még hozzá kell adni az $(\mathbf{e}_{(\vartheta)}, \mathbf{e}_{(\varphi)})$ lokális bázis \mathcal{K}' -höz viszonyított szögelfordulását:

$$\Delta\alpha = \Delta\beta + 2\pi = 2\pi(1 - \cos \vartheta_0). \quad (12.6)$$

Ahogy várjuk, $\vartheta_0 \rightarrow 0$ -nál $\Delta\alpha \rightarrow 0$.

13. A görbület

Gauss volt talán az első, aki elgondolkozott azon, hogy a geometriai terünk esetleg nem a sík, hanem a görbe felület háromdimenziós analogonja. Tudta, hogy a kérdésre csak akkor tudunk válaszolni, ha megértjük, hogyan lehet *tisztán belső vizsgálatok alapján* eldönteni a térről, hogy görbült-e vagy sem. Erre a kérdésre neki nem sikerült válaszolnia, de két dimenzió esetére megtalálta a megoldást.

Mindenekelőtt azt vizsgálta meg, hogy a görbülségnek milyen kritériuma az, aminek alapján tisztán belső mérésekkel (mai fogalmaink szerint a metrikus tenzor meghatározása útján) el lehet dönteni, hogy a felület görbült-e vagy sem.

A felület P pontjában, amelyben a görbületet vizsgáljuk, állítsunk merőlegest a felületre. A merőlegesen átfektetett síkok mindegyike egy-egy síkgörbében metszi a felületet. A síkok helyzetét egy φ szög határozza meg ($0 \leq \varphi < \pi$). Jelöljük a φ helyzetű sík által kimetszett görbe P -beli görbületi sugarát $R(\varphi)$ -vel és tegyük fel, hogy $R(\varphi)$ *előjelet vált*, amikor a görbületi középpont a felület egyik oldaláról a másikra kerül át.

Az (előjeles) $1/R(\varphi)$ görbe az $1/R_1$ és az $1/R_2$ szélső érték között változik. Ez a két szélső érték nyilván kapcsolatos a felület görbültségével P -ben, de vajon milyen függvényük fejezi ki ezt a görbültséget? A merev keretre feszülő szappanhártya egyensúlyi feltétele az, hogy az $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ *átlaggörbület* legyen konstans.

Az átlaggörbület azonban nem fejezhető ki csupán belső adatok (a metrikus tenzor és parciális deriváltjai) segítségével. Ezt a henger példája mutatja, amely deformáció nélkül hozható létre a síkból (*görgetett felület*), és ezért a metrikus tenzora ugyanaz, mint a síké. Az átlaggörbület azonban különbözik nullától, mert csak az egyik görbületi sugara végtelen.

Gauss meg tudta mutatni, hogy belső adatokkal az $1/R_1$ -nek és az $1/R_2$ -nek csak a ma *Gauss-görbületnek* nevezett

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} \quad (13.1)$$

szorzatát lehet kifejezni. Ha (mai jelölésekkel) felírjuk azt a képletet, amely a metrikus tenzoron keresztül kifejezi K -t megértjük, miért adta Gauss ennek a tételnek a *Theorema Egregium* (nagyyszerű tétel) elnevezést:

$$\begin{aligned} K(x_1, x_2) = & \frac{1}{2g} \left[2 \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1^2} \right] - \frac{g_{22}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) - \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{g_{12}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} \right) - 2 \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) + \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) \right] - \\ & - \frac{g_{11}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (13.2)$$

ahol x_1 és x_2 a felületi koordináták (tipográfiai okokból használunk alulindexet) és $g(x_1, x_2) \equiv g_{11}g_{22} - g_{12}^2$.

Speciálisan a sugarú gömbre $K = 1/a^2$. Az olyan pontokban pedig, ahol a Gauss-görbület negatív (a két görbületi középpont a felület különböző oldalára esik), nyeregpon van.

Gauss kritériuma tehát a következő: Egy kétdimenziós felület csak ott görbületlen, ahol a Gauss-görbület eltűnik. Így pl. a henger Gauss-görbületa — az átlaggörbületével ellentétben — zérus, mert ehhez elég, ha csak az egyik görbületi sugara végtelen.

Riemann azt ismerte fel, hogy Gauss elmélete azért olyan komplikált, mert nem elég az, ha a görbületet belső méréssel meg lehet határozni: a *definícióját* is tisztán belső nézőpontból kell megadni. Gauss a 2D felület görbületét háromdimenziós eljárással definiálta, ezért nem sikerült neki az eredményeit n -dimenzióra általánosítani.

Riemann új, tisztán belső definíciója az volt, hogy egy n -dimenziós metrikus sokaság akkor görbületlen, ha *felvehető* rajta Descartes-féle koordinátarendszer. Megadott egy négyindexes mennyiséget (ma Riemann-tenzornak nevezzük), amely a metrikus tenzoron és parciális deriváltjain keresztül van kifejezve és megmutatta, hogy ennek eltűnése a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a sokaságot le lehessen fedni Descartes-koordinátákkal.

Később megmutatták, hogy Riemann kritériuma ekvivalens a következővel: A sokaság akkor és csakis akkor görbületlen, ha a vektorok nem változtatják meg az irányukat, amikor a sokaságon bármely zárt görbén önmagukkal párhuzamosan körbeviszük őket. A továbbiakban ezt a kritériumot fogjuk használni.

Kétdimenziós felületen ez a kritérium egybeesik a Gauss-görbületen alapuló feltétellel. Ahhoz, hogy ezt belássuk, térjünk vissza az előző fejezet végére, a (12.6) képlethez. Amikor a kör, amelyen a vektort parallel

transzportáljuk, nagyon kicsi ($\vartheta_0 \rightarrow 0$), az elfordulás szögét a $\Delta\alpha \approx \pi\vartheta_0^2 = \frac{1}{a^2} \cdot \Delta f$ képlet határozza meg, amelyben Δf annak az $a\vartheta_0 \rightarrow 0$ sugarú infinitezimális körnek a területe, amelynek peremén a vektort körbevittük. Az $1/a^2$ azonban az a -sugarú gömb Gauss-görbülete, ezért

$$\Delta\alpha = K \cdot \Delta f. \quad (13.3)$$

Ezt a képletet csak gömbre láttuk be, de minden felületre igaz, hogy amikor egy vektort egy infinitezimális zárt kontúron önmagával párhuzamosan körbeviszünk, az elfordulás szöge a Gauss-görbület és a kontúr által határolt terület szorzatával egyenlő. Ezért ha K nulla, akkor $\Delta\alpha$ is nulla, és megfordítva.

Fogalmazzuk meg most a vektor elfordulásán alapuló kritériumot az n -dimenziós Riemann-tér egy tetszőleges P pontjában.

A P pont legyen az egyik csúcsa annak az infinitezimális négyszögnek, amelynek további csúcsai \bar{P} , $\bar{\bar{P}}$ és Q . A csúcsok koordinátái a következők:

$$\begin{aligned} \bar{P} &\longleftrightarrow x^i + \Delta a^i, & \bar{\bar{P}} &\longleftrightarrow x^i + \Delta a^i + \Delta b^i, \\ P &\longleftrightarrow x^i, & Q &\longleftrightarrow x^i + \Delta b^i. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Legyen $\mathbf{U}(P)$ tetszőlegesen választott vektor P -ben. Vigyük körbe önmagával párhuzamosan a négyszög oldalai mentén a

$$P \xrightarrow{\Delta a} \bar{P} \xrightarrow{\Delta b} \bar{\bar{P}} \xrightarrow{-\Delta a} Q \xrightarrow{-\Delta b} P$$

sorrendben. A P -be visszaérve általában egy megváltozott $\mathbf{U} + \Delta\mathbf{U}$ vektorra jutunk.

A (13.3) alapján várhatjuk, hogy a vektor megváltozása a kontúr által kifeszített felületelem nagyságával lesz arányos, ezért mindenekelőtt foglalkoznunk kell az n -dimenziós sokaságokba ágyazott kétdimenziós felületelemek megadási módjával.

A (13.4) pontok olyan felületelem csúcsai, amelyet a $\Delta\mathbf{a}$, $\Delta\mathbf{b}$ infinitezimális elmozdulás-vektorok határoznak meg. Háromdimenziós euklidészi térünkben például a $\Delta\vec{a}$ és a $\Delta\vec{b}$ által kifeszített paralelogramma területe a $(\Delta\vec{a} \times \Delta\vec{b})$ vektoriális szorzat abszolút értékével egyenlő, a felületelem helyzetét és vetületeinek nagyságát pedig ennek a vektornak a komponensei adják meg.

A felületelemhez azonban csak három dimenzióban lehet egyértelműen irányt rendelni. A $(\Delta\vec{a} \times \Delta\vec{b})$ vektor-szorzat komponensei ugyanis a $\Delta f_{\alpha\beta} = \Delta a_\alpha \Delta b_\beta - \Delta a_\beta \Delta b_\alpha$ mennyiségek, amelyek egy kétindexes antiszimmetrikus tenzor komponensei, de helyettesíthetők vektorral. Descartes koordinátákban a megfeleltetés szabálya a következő:

$$(\Delta\vec{a} \times \Delta\vec{b})_x = \Delta f_{yz} = \Delta a_y \Delta b_z - \Delta a_z \Delta b_y \quad (\text{és } xyz \text{ ciklikus permutációi}).$$

Magasabb dimenzióban azonban a kétindexes antiszimmetrikus tenzorok nem helyettesíthetők vektorokkal¹⁴, ezért az általános esetben a $\Delta\mathbf{a}$, $\Delta\mathbf{b}$ rendezett vektor pár által kifeszített felületelemet a

$$\Delta f^{ij} = \Delta a^i \Delta b^j - \Delta b^i \Delta a^j \quad (13.5)$$

antiszimmetrikus tenzorral kell jellemeznünk.

Az \mathbf{U} megváltozására visszatérve azt várjuk tehát, hogy $\Delta\mathbf{U}$ arányos lesz azzal a felületelemmel, amely körül az \mathbf{U} -t körbeviszük. A párhuzamos elterjesztés (11.3) egyenletéből az is látszik, hogy $\Delta\mathbf{U}$ az \mathbf{U} komponenseivel is arányos. Mindezek alapján az \mathbf{U} megváltozását a

$$\Delta U^i = -\frac{1}{2} R^i{}_{jkl} U^j \Delta f^{kl} \quad (13.6)$$

¹⁴Ez már a komponensek számából is látható. Egy kétindexes antiszimmetrikus tenzor független komponenseinek száma ugyanis $n(n-1)/2$, egy vektoré pedig n . A két szám csak három dimenzióban egyforma.

alakban kell keresnünk (a $-1/2$ tényező természetesen csupán konvenció).

Az $R^i_{.jkl}$ mennyiségek a *Riemann-tenzor* (vagy *görbületi-tenzor*) komponensei. A Riemann-tenzort a konnexiós koefficienseken és parciális deriváltjain keresztül lehet kifejezni. Transzportáljuk először \mathbf{U} -t a $P \xrightarrow{\Delta a} \bar{P} \xrightarrow{\Delta b} \bar{\bar{P}}$ úton $\bar{\bar{P}}$ -be. A transzportálás *második* lépését a

$$\begin{array}{c} \Gamma_{lj}^i(\bar{P}) = \Gamma_{lj}^i(P) + \frac{\partial \Gamma_{lj}^i(P)}{\partial x^k} \Delta a^k \\ \downarrow \\ \bar{\bar{U}}^i(\bar{\bar{P}}) = \bar{U}^i(P) - \Gamma_{lj}^i(\bar{P}) \bar{U}^j(P) \Delta b^l \\ \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ U^i(P) - \Gamma_{kj}^i(P) U^j(P) \Delta a^k = \bar{U}^i(P) \\ \uparrow \\ U^j(P) - \Gamma_{km}^j(P) U^m(P) \Delta a^k = \bar{U}^j(P) \end{array}$$

képletek közül a második sor képlete írja le. Ez utóbbi jobboldalán \bar{P} -beli mennyiségek állnak, amelyeket a többi összefüggés behelyettesítésével fejezhetünk ki P -beli mennyiségeken keresztül. Ha a behelyettesítéseket elvégezzük és az eredményt a Δa és a Δb hatványai szerint rendezzük, akkor kvadratikus pontossággal az

$$\bar{\bar{U}}^i(\bar{\bar{P}}) = U^i - \Gamma_{kj}^i U^j \Delta a^k - \Gamma_{lj}^i U^j \Delta b^l + \left[\Gamma_{lj}^i \Gamma_{km}^j U^m - \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} U^j \right] \Delta a^k \Delta b^l$$

képletre jutunk. A zárójelben az m összegzési indexet j -re cseréljük, mert akkor \mathbf{U} komponensei kiemelhetők:

$$\bar{\bar{U}}^i(\bar{\bar{P}}) = U^i - \Gamma_{kj}^i U^j \Delta a^k - \Gamma_{lj}^i U^j \Delta b^l - \left[\frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m \right] U^j \cdot \Delta a^k \Delta b^l.$$

Ha $\mathbf{U}(P)$ -t a $P \xrightarrow{\Delta b} Q \xrightarrow{\Delta a} \bar{\bar{P}}$ úton transzportáljuk $\bar{\bar{P}}$ -be, ugyanerre a képletre jutunk azzal a különbséggel, hogy Δa és Δb felcserélődik. A keresett $\Delta \mathbf{U}$ -t $\Delta a, \Delta b$ -ben kvadratikus pontossággal a két úton transzportált vektorok különbsége adja¹⁵:

$$\Delta U^i = - \left[\frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m \right] U^j \cdot (\Delta a^k \Delta b^l - \Delta b^k \Delta a^l).$$

A (13.5) alapján ezt a

$$\Delta U^i = - \left[\frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m \right] U^j \cdot \Delta f^{kl}$$

alakban írhatjuk.

Ez a képlet valóban olyan struktúrájú, mint (13.6), mégsem olvashatjuk le belőle a Riemann-tenzort. A Δf^{kl} ugyanis antiszimmetrikus a k, l indexek felcserélésével szemben, a zárójelben lévő kifejezés azonban nem.

¹⁵Ezzel az eljárással természetesen nem a P -beli, hanem a $\bar{\bar{P}}$ -beli $\Delta \mathbf{U}$ -t kapjuk meg. A P -ben érvényes képlet a $\bar{\bar{P}}$ -beli képlettől abban különbözne, hogy a jobboldalon a konnexiós koefficienseknek nem az x^i -beli, hanem az $(x^i - \Delta a^i - \Delta b^i)$ -beli értéke állna. A két Γ különbsége azonban $\Delta \mathbf{a}, \Delta \mathbf{b}$ -vel arányos és harmadrendű járulékot adna $\Delta \mathbf{U}$ -hoz, amit nem szabad figyelembe vennünk.

Ezért ha ez utóbbi lenne a Riemann-tenzor, akkor ΔU^i eltűnése nem vonná maga után a Riemann-tenzor eltűnését, mert a tenzor k, l -ben szimmetrikus része még lehetne zérustól különböző. Ahhoz, hogy a Riemann-tenzor eltűnése a $\Delta \mathbf{U} = 0$ -nak ne csak elégséges, hanem szükséges feltétele is legyen, a zárójelben lévő kifejezés antiszimmetrikus részét kell Riemann-tenzornak tekinteni:

$$R^i{}_{.jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{kj} \quad (13.7)$$

(az antiszimmetrikus rész képzésénél fellépő $1/2$ faktor szerepel (13.6)-ban). Erről a kifejezésről egyáltalán nem látszik, hogy tenzor, mert sem a konnexiós koefficiensek, sem a parciális deriváltak nem transzformálódnak tenzorként. A képlet azonban minden koordináta-rendszerben érvényes és a (13.6) szerint, amelyben U^i vektorkomponens, Δf^{kl} pedig tenzorkomponens, ez csak akkor lehet így, ha $R^i{}_{.jkl}$ egyszer kontravariáns, háromszor kovariáns tenzor.

A sokaság egy tartománya akkor és csakis akkor sík, ha a tartományban $R^i{}_{.jkl} = 0$. A tenzorjelleg következtében az egyenlőség vagy minden koordináta-rendszerben igaz, vagy egyikben sem, ezért a görbültség léte vagy nemléte a sokaság koordináta-rendszerétől független tulajdonsága.

A Riemann-tenzor tisztán kovariáns alakját természetesen az $R_{ijkl} = g_{in} R^n{}_{.jkl}$ képlet definiálja. Megmutatható, hogy

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} \right) + g_{mn} (\Gamma^m_{il} \Gamma^n_{jk} - \Gamma^m_{ik} \Gamma^n_{jl}). \quad (13.8)$$

14. A Riemann-tenzor tulajdonságai

n -dimenziós sokaságon egy négyindexes tenzornak n^4 komponense van, de ha a tenzornak vannak szimmetriái, a független komponensek száma ennél kevesebb.

A Riemann-tenzornak három különböző típusú szimmetriája van, amelyek (13.8)-ból olvashatók le:

$$\begin{aligned} a) R_{ijkl} &= R_{klij} && \text{"szimmetria"} \\ b) R_{ijkl} &= -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{jilk} && \text{"antiszimmetria"} \\ c) R_{ijkl} &+ R_{iklj} + R_{iljk} = 0 && \text{"ciklikusság"} \end{aligned} \quad (14.1)$$

Az $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$ antiszimmetria a Riemann-tenzor definíciójának a következménye. Az $R_{ijkl} = -R_{jikl}$ antiszimmetria abból következik, hogy körbevitelnél a vektorok hossza nem változik.

Valóban, az $(\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U})^2 = \mathbf{U}^2$ egyenlőség legalacsonyabb rendben $\mathbf{U} \cdot \Delta \mathbf{U} = 0$ -t jelent. Ha ide (13.6)-t behelyettesítjük, a

$$g_{mi} U^m \cdot \Delta U^i = -\frac{1}{2} R_{m.jkl} U^m U^j \Delta f^{kl} = 0$$

relációra jutunk, amely tetszőleges \mathbf{U} -nál csak $R_{m.jkl} + R_{j.mkl} = 0$ mellett teljesülhet.

A független komponensek számának meghatározásához vegyük észre, hogy R_{ijkl} -nek három különböző típusú komponense lehet.

Az a -típusú komponensek legyenek azok, amelyekben minden index különböző, mondjuk 1,2,3,4. A szimmetria és az antiszimmetria figyelembevételével három független R_{ijkl} komponens van, amely ezeket az indexet tartalmazza: R_{1234} , R_{1324} és R_{1423} . A ciklikusság miatt ezek közül csak kettő független, ezért n -dimenzióban az a -típusú független komponensek száma az n elemből alkotható negyedosztályú kombinációk számának kétszeresével egyenlő:

$$\nu_a = 2 \times \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}.$$

Ilyen komponensek csak $n \geq 4$ -nél fordulhatnak elő. A ν_a előbbi kifejezése ezt figyelembe veszi, mert $n < 4$ -nél eltűnik.

A b -típusú komponensek azok, amelyek három különböző indexet tartalmaznak, amelyek közül az egyik kétszer fordul elő, például 1,1,2,3. Csak egyetlen ilyen független komponens van, pl. R_{1213} . A b -típusú komponensek száma

$$\nu_b = n \times \binom{n-1}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2},$$

mert a kétszer előforduló index n -féle lehet, a maradék két különböző indexet pedig a többi $(n-1)$ indexből kell kiválasztanunk.

Végül a c -típusú komponensek azok, amelyek csak két különböző indexet tartalmaznak, mondjuk az 1-t és a 2-t. Ilyen független komponens csak egy van, pl. az R_{1212} . A c -típusú komponensek száma nyilván

$$\nu_c = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

A Riemann-tenzor független komponenseinek száma tehát n dimenzióban a következő:

$$C_n = \nu_a + \nu_b + \nu_c = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1). \quad (14.2)$$

Az antiszimetria következtében a Riemann-tenzorból kontrakcióval csak egy másodrendű tenzor képezhető, amelyet *Ricci-tenzornak* neveznek:

$$R_{jl} = R^i{}_{.jil} = \frac{\partial \Gamma^i_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{ij}}{\partial x^l} + \Gamma^i{}_{im} \Gamma^m_{lj} - \Gamma^i{}_{lm} \Gamma^m_{ij}. \quad (14.3)$$

A (14.3)-ból nem nyilvánvaló, de a Ricci-tenzor szimmetrikus:

$$R_{jl} = g^{ik} R_{kjil} = g^{ik} R_{ilkj} = R^k{}_{.lkj} = R_{lj}.$$

További kontrakcióval kapjuk a *Ricci-skalárt*: $R = g^{jl} R_{jl} = R^j{}_j$.

Két dimenzióban a Riemann-tenzornak csak egy független komponense van, amely c -típusú. Milyen kapcsolatban van ez a K Gauss-görbülettel?

Fejezzük ki mindenekelőtt a Riemann-tenzort olyan alakban, amelyben a tenzor komponensei az R Ricci-skalár megadásával rögzíthetők. Az R_{ijkl} nyilván felírható

$$R_{ijkl} = (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \cdot A$$

alakban, mert a jobboldal kielégíti a Riemann-tenzor szimmetriáit és tartalmaz egy szabadon megválasztható $A(x)$ függvényt. Kétszer egymás után kontrahálunk, eközben kihasználjuk, hogy (8.4) szerint $g^j{}_i = \delta^j{}_i$ és ezért a metrikus tenzor kontrakciója a dimenziószámot adja eredményül. Ezt kapjuk:

$$R_{jl} = g_{jl}A \quad R = 2A,$$

amelynek alapján

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})R \quad (n = 2). \quad (14.4)$$

Speciálisan *gömb* esetében R -nek konstansnak kell lennie. Ezt így láthatjuk be: Az R skalárfüggvény, így bármilyen koordináta-rendszer felhasználható a kiszámításához. Ezért akármelyik P pontban akarjuk kiszámítani R -t, a koordináta-rendszert mindig felvehetjük úgy, hogy a P azonos helyzetben legyen a koordináta-rendszerhez

képest (pl. legyen mindig az origóban). Ha ezt tesszük, akkor a gömb pontjainak egyenértékűsége miatt a $g_{ij}(P)$, a $\Gamma_{jk}^i(P)$ és az $R_{ijkl}(P)$ komponensek számértéke minden pont esetében ugyanaz lesz. Ebből akár (14.3), akár (14.4) alapján következik, hogy az R skalár minden pontban ugyanaz a szám.

A 9. és a 12. fejezet képleteinek felhasználásával könnyen kiszámíthatjuk a Riemann-tenzor bármely komponensét, így R -t is, és az $R = 2/a^2$ képletre jutunk: A gömb esetében tehát a Ricci-skalár a Gauss-görcsület kétszerese. Belátható, hogy ez a kapcsolat érvényes bármely kétdimenziós felületre: $K = R/2$. Ennek a képletnek a segítségével könnyen felírhatjuk a (13.2) képletet, amelynek Gauss nevéhez fűződő eredeti levezetése ma is méltán vált ki csodálatot.

Amikor $n > 2$, a Riemann-tenzor előállítható olyan alakban, amely lehetővé teszi, hogy a független komponensek egy részét az R_{ij} komponensek értékének az előírásával adhassuk meg. Ennek érdekében keressük R_{ijkl} -t az

$$R_{ijkl} = A_{ik}g_{jl} - A_{il}g_{jk} + A_{jl}g_{ik} - A_{jk}g_{il} + C_{ijkl} \quad (14.5)$$

alakban, ahol A_{ij} valamilyen szimmetrikus tenzor. Az első négy tag rendelkezik a Riemann-tenzor szimmetriatulajdonságaival (az első és a második tag-pár külön-külön kielégíti a ciklikusságot), ezért C_{ijkl} is ugyanilyen szimmetriájú. Válasszuk meg az A_{ij} mennyiségeket a $C_{.jil}^i = 0$ feltételből. Ha ez teljesül, akkor

$$\begin{aligned} R_{.jil}^i &= R_{jl} = A \cdot g_{jl} + (n-2)A_{jl} \\ R &= 2(n-1)A, \end{aligned}$$

ahol $A = A_{.i}^i$. Ezeket az egyenleteket megoldjuk A_{jl} -re:

$$A_{jl} = \frac{1}{n-2}R_{jl} - \frac{1}{2(n-1)(n-2)}R \cdot g_{jl},$$

és ezt a megoldást visszairjuk (14.5)-be:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} - R_{il}g_{jk} + R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{il}) - \\ &\quad - \frac{1}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})R + C_{ijkl}. \end{aligned} \quad (14.6)$$

Az (14.6) jobboldalán az $\frac{1}{2}n(n+1)$ darab R_{ij} mennyiség önkényesen megadható. $n = 3$ -nál ez hat komponens jelent, ugyanannyit, amennyi a Riemann-tenzor független komponenseinek a száma ($C_3 = 6$), ezért ekkor $C_{ijkl} = 0$. Téridőben a Riemann-tenzor független komponenseinek a száma húsz, és C_{ijkl} , amelyet *Weyl-tenzornak* hívnak, már nem feltétlenül zérus. Látni fogjuk, hogy az Einstein-egyenletek szerint az olyan téridő tartományokban, amelyekben nincs anyag (se részecskék, se sugárzás formájában), a Ricci-tenzor zérus, de a görcsület nem tűnik el, mert a Weyl-tenzor különbözhet zérustól.

A Riemann-tenzor komponensei között minden metrikánál fennáll a

$$\nabla_m R_{.jkl}^i + \nabla_k R_{.jlm}^i + \nabla_l R_{.jmk}^i = 0 \quad (14.7)$$

reláció, amelyet *Bianchi-azonosság*nak neveznek.

Az azonosság geometriai jelentése a következő: Képzeljünk el egy infinitezimális téglatestet, amelynek a lapjain a pozitív orientációt úgy vesszük fel, hogy a lapokra kívülről ránézve a pozitív orientáció egyöntetűen az óramutató járásával azonos (vagy egyöntetűen azzal ellentétes) legyen. A lényeges pont itt az, hogy minden él két szomszédos laphoz tartozik, és amikor a két lapot pozitív irányban kerüljük meg, az élen egyszer az egyik, másszor a másik irányban haladunk végig.

Vegyünk fel P -ben egy \mathbf{U} vektort, amelyet sorban mind a hat lap mentén pozitív irányban önmagával párhuzamosan körbeviszünk. Amikor olyan lap kerül sorra, amelynek P nem csúcsa, a P -ből kiinduló él mentén elvisszük a vektort a lap legközelebbi csúcsába, majd a körbevétel után ugyanezen az élen visszahozzuk P -be.

Nyilvánvaló, hogy a leírt parallel transzportálási sorozat közben mindegyik él mentén a vektort pontosan ugyanannyiszor transzportáljuk az egyik, mint a másik irányban, és ezért az eljárás végén P -ben ugyanazt az \mathbf{U} -t látjuk viszont, amelyikből kiindultunk. Ezt a geometriai tényt fejezi ki a Bianchi-azonosság (a bizonyítást mellőzzük).

A (14.7)-t az i, k indexpárban kontrahálva a

$$\nabla_m R_{jl} - \nabla_l R_{jm} + \nabla_i R_{.jlm}^i = 0$$

azonosságra jutunk, amelyet a j, l indexpárban újra kontrahálva a $g^{jl} \nabla_i R_{.jlm}^i = \nabla^i (g^{jl} R_{ijlm}) = -\nabla^i R_{im}$ átalakítás után kapjuk a

$$\nabla_i G^{ij} = 0 \quad G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R \quad (14.8)$$

kétszer kontrahált Bianchi-azonosságot, amely a G_{ij} Einstein-tenzor divergenciamentességét fejezi ki tetszőleges Riemann-sokaságon (a $\nabla_i U^i$ skalár a $\text{div } \mathbf{U} = \partial_x U^x + \partial_y U^y + \partial_z U^z$ divergencia kovariáns megfelelője). Ez matematikai szempontból éppen olyan azonosság, mint a $g_{ij} - g_{ji} \equiv 0$, csak fontosabb, mert divergenciára vonatkozik, és a divergenciákkal megmaradási tételek fejezhetőek ki. Látni fogjuk, hogy a Bianchi-azonosságnak az energia és az impulzus megmaradásában lesz fontos szerepe.

* * *

Fejezzük ki a g_{ij} , g^{ij} , Γ_{jk}^i , $R_{.jkl}^i$, R_{ijkl} , R_{jl} valamint az R fizikai dimenzióját a koordináták dimenzióin keresztül.

Az x^i dimenzióját jelöljük $[i]$ -vel és induljunk ki abból, hogy az ívelem hosszúság dimenziójú: $[ds^2] = L^2$. Ennek alapján könnyen igazolható, hogy minden geometriai dimenzióban

$$\begin{aligned} [g_{ij}] &= \frac{L^2}{[i][j]}, & [g^{ij}] &= \frac{[i][j]}{L^2}, & [\Gamma_{jk}^i] &= \frac{[i]}{[j][k]} \\ [R_{.jkl}^i] &= \frac{[i]}{[j][k][l]}, & [R_{ijkl}] &= \frac{L^2}{[i][j][k][l]} \\ [R_{jl}] &= \frac{1}{[j][l]}, & [R] &= \frac{1}{L^2}. \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy R dimenziója tetszőleges dimenziójú koordináták mellett minden geometriai dimenzióban egyöntetűen $1/L^2$ -el egyenlő.

15. Példa: A 2D pszeudogömb

A 2D gömb görbültsége olyan egyszerű, hogy nincs értelme külön foglalkozni vele. Vizsgáljuk meg inkább helyette a

$$-x^2 - y^2 + z^2 = a^2 \quad (z > 0) \quad (15.1)$$

felület tulajdonságait. Vezessük be a polárkoordinátákkal analóg \bar{r} , $\bar{\vartheta}$, φ koordinátákat az

$$x = \bar{r} \operatorname{sh} \bar{\vartheta} \cos \varphi \quad y = \bar{r} \operatorname{sh} \bar{\vartheta} \sin \varphi \quad z = \bar{r} \operatorname{ch} \bar{\vartheta} \quad (\bar{\vartheta} \geq 0) \quad (15.2)$$

képletekkel, amelyekben a felület egyenlete $\bar{r} = a$, $\bar{\vartheta}$ és φ pedig felületi koordináták.

A 3D euklidészi térben a (15.1) által leírt felület forgási hiperboloid. Sokkal érdekesebb felületre jutunk azonban, ha azt tételezzük fel, hogy a (15.1) által meghatározott felület nem a 3D euklidészi térbe, hanem a 3D *pszeudoeuklidészi térbe* van beágyazva, amelynek metrikája

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2 \quad \text{azaz} \quad g_{xx} = g_{yy} = -g_{zz} = 1. \quad (15.3)$$

Ez a pszeudoeuklidészi tér csupán matematikai segédeszköz, semmi köze a téridőhöz. A bevezetését az indokolja, hogy — mint mindjárt látni fogjuk, — az ide beágyazott (15.1) felület metrikája pozitív definit, vagyis olyan felület, amely elfogadható világ a "lapolslények" számára, akiket egyáltalán nem érdekel, hogy a világuk mibe van beágyazva.

Ha a (15.2)-ből $\bar{r} = a$ mellett kiszámítjuk a dx , dy , dz differenciálokat és behelyettesítjük őket (15.3)-ba, a

$$dl^2 = a^2(d\bar{\vartheta}^2 + \text{sh}^2 \bar{\vartheta} d\varphi^2) \quad (15.4)$$

ívelemnégyszetre jutunk, amelyből leolvashatjuk a felület metrikus tenzorát:

$$g_{\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}} = a^2 \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 \text{sh}^2 \bar{\vartheta}. \quad (15.5)$$

Az összehasonlítás a (9.6), (9.7) képletekkel mutatja a közeli rokonságot a 2D gömbbel.

Számítsuk ki a felületünk Gauss-görbületét! A $K = R/2$ képlet, valamint a (14.4) alapján $i = k = \bar{\vartheta}$, $j = l = \varphi$ választás mellett

$$K = \frac{R_{\bar{\vartheta}\varphi\bar{\vartheta}\varphi}}{g_{\bar{\vartheta}\bar{\vartheta}}g_{\varphi\varphi}} = \frac{R_{\bar{\vartheta}\varphi\bar{\vartheta}\varphi}}{a^4 \text{sh}^2 \bar{\vartheta}}.$$

A számláló kiszámításához szükség van a konnexiós koefficiensekre, amelyek a következők:

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\bar{\vartheta}} = -\text{sh} \bar{\vartheta} \text{ch} \bar{\vartheta} \quad \Gamma_{\bar{\vartheta}\varphi}^{\varphi} = -\text{cth} \bar{\vartheta}. \quad (15.6)$$

A (13.8) szerint ekkor

$$R_{\bar{\vartheta}\varphi\bar{\vartheta}\varphi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{\varphi\varphi}}{\partial \bar{\vartheta}^2} + g_{\varphi\varphi} (\Gamma_{\bar{\vartheta}\varphi}^{\varphi})^2 = -a^2 \cdot \text{sh}^2 \bar{\vartheta}.$$

Ezt K képletébe behelyettesítve kapjuk a $K = -1/a^2$ végeredményt.¹⁶

A felületünk görbülete tehát éppennygy konstans, mint a gömbé, csak negatív: minden pont nyeregpont. Ez a tulajdonság indokolja a *pszeudogömb* elnevezést.

Az analógia azonban még mélyebb: A pszeudogömb éppúgy maximálisan szimmetrikus felület, mint az euklidészi sík és a gömb, de jobban hasonlít a síkhoz abból a szempontból, hogy a térfogata végtelen¹⁷. Ezt a tulajdonságot emeli ki a felület másik neve: *Bolyai-sík*.

Az xyz koordinátákban a $g_{xx} = g_{yy} = -g_{zz} = 1$ metrika figyelembevételével könnyen igazolhatjuk, hogy a

$$K_{(a)}^i = (0, -z, -y) \quad K_{(b)}^i = (z, 0, x) \quad K_{(c)}^i = (-y, x, 0)$$

mezők kielégítik a Killing-egyenletet. Ahhoz azonban, hogy a Bolyai-sík Killing-mezői legyenek, érinteniük kell a (15.1) felületet, vagyis mindhárom mezőnek ortogonálisnak kell lennie a (15.1) normálisára.

¹⁶Ezt az eredményt meg lehet kapni közvetlenül a gömbre vonatkozó megfelelő képletekből a $z \rightarrow iz$, $a \rightarrow ia$, $\vartheta \rightarrow i\bar{\vartheta}$ helyettesítéssel (i a képzetes egység), mert a képletek a szóbanforgó változók komplex értékeinél is érvényesek.

¹⁷Számunkra a gömbnek és a pszeudogömbnek felszíne van, de a "lapolslények" szempontjából ez térfogatnak számít. Mivel a nézőpontunk elsősorban a lapolslényeké, ezért ilyen esetekben a térfogat szót használjuk

Ha az (x, y, z) és az $(x + dx, y + dy, z + dz)$ pont az $f(x, y, z) = konst$ felületen fekszik, akkor $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0$. A felület \mathbf{n} normálvektora merőleges erre a (dx, dy, dz) elmozdulás-vektorra: $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{x} = 0$. A két képlet összevetéséből kapjuk \mathbf{n} kovariáns komponenseit¹⁸:

$$(n_x, n_y, n_z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (15.7)$$

Esetünkben $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z^2$, így $(n_x, n_y, n_z) = 2 \cdot (-x, -y, +z)$ és ekkor mindhárom $\mathbf{K}_{(\cdot)}$ vektor merőleges \mathbf{n} -re: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}_{(\cdot)} = n_i K_{(\cdot)}^i = 0$.

A pszeudogömb térfogatát ugyanúgy lehet számítani, mint a gömbét. Az ívelemnégyzet a két esetben a következő:

$$dl^2 = \begin{cases} a^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) & 0 \leq \vartheta \leq \pi \text{ a gömbnél,} \\ a^2(d\bar{\vartheta}^2 + \text{sh}^2 \bar{\vartheta} d\varphi^2) & 0 \leq \bar{\vartheta} < \infty \text{ a pszeudogömbnél.} \end{cases} \quad (15.8)$$

A gömb esetében a $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$ sáv térfogata (felszíne) a $\vartheta = konstans$ kör hosszának, $2\pi a \sin \vartheta$ -nak és a sáv $a d\vartheta$ magasságának szorzatával egyenlő. Az egész gömb "térfogatát" (felszínét) ϑ szerinti integrálással kapjuk:

$$V_2 = \int_0^\pi 2\pi a \sin \vartheta \cdot a \cdot d\vartheta = -2\pi a^2 \cos \vartheta \Big|_0^\pi = 4\pi a^2.$$

A pszeudogömb esetében ugyanezzel az eljárással azt találjuk, hogy

$$\bar{V}_2 = \int_0^\infty 2\pi a \text{sh} \bar{\vartheta} \cdot a \cdot d\bar{\vartheta} = \infty.$$

* * *

Eddig azt hittük, hogy a háromdimenziós szemléletünk számára minden kétdimenziós felület hozzáférhető. A Bolyai-sík esetében nem ez a helyzet: Képtelenek vagyunk elképzelni olyan felületet, amelynek ugyanolyan szimmetriái vannak, mint az euklidészi síknak és minden pontja nyeregpont. Ennek az az oka, hogy — mint Hilbert 1900-ban bebizonyította, — *a Bolyai-síkot nem lehet a 3D euklidészi térbe beágyazni.*

Ha a laposlényeknek a geometriai tapasztalat azt sugallja, hogy a világuk maximálisan szimmetrikus, akkor a matematikusaik rá tudnak jönni, hogy a világuk görbülete konstans, és vagy pozitív (gömb), vagy negatív (pszeudogömb), vagy nulla (sík). De ha a világuknak csak elenyészően kis részét népesítik be, akkor nagyon nehéz választaniuk a három lehetőség között, mert a görbület csak elég nagy méretű tartományokban vehető észre.

Elhatározhatják például, hogy megmériük az r sugarú körök $K(r)$ kerületét. Ha kisebbnek találják, mint $2\pi r$, akkor gömbön élnek (mert $r = a\vartheta$ és $K(r) = 2\pi a \sin(r/a) < 2\pi r$), ha nagyobbak, akkor pszeudogömbön (mert $r = a\bar{\vartheta}$ és $K(r) = 2\pi a \text{sh}(r/a) > 2\pi r$), ha pedig pont $2\pi r$ -nek, akkor euklidészi síkon. Ők ezt úgy fejezik ki, hogy az első esetben a világuk zárt, a másodikban (és a harmadikban is) nyitott. De ez nagyon nehéz mérés, mert nagyon nagy köröket kell lemérni és — mivel a világuknak csak nagyon kis tartománya lakható, — nem is tudnak megnyugtatóan dönteni.

Mi is ugyanebben a helyzetben vagyunk a saját Univerzumunkkal.

¹⁸Ebben a gondolatmenetben csak az \mathbf{n} irányának van jelentősége, ezért az \mathbf{n} normájával nem foglalkozunk.

16. Az általános relativitáselmélet térideje

A speciális relativitáselmélet térideje pszeudoeuclidészi sokaság. Minkowski-koordinátákban az ívelemnégyzet a következő

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \equiv \eta_{ij} dx^i dx^j, \quad (16.1)$$

ahol

$$\eta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j = 0, \\ -1 & \text{ha } i = j = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases} \quad (16.2)$$

a *Minkowski-szimbólum* (az η_{00} helyett az $\eta_{tt} = c^2 \eta_{00}$ komponenst is fogjuk használni).

A relativitáselmélet térideje a speciális relativitáselmélet téridejének görbült változata, amelyben

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (16.3)$$

A metrikus tenzor most indefinit, mert ds^2 lehet akármilyen előjelű, sőt nulla is: Az általános relativitáselmélet térideje *pszeudoriemann sokaság*.

A pszeudoriemann téridő geometriája lényegesen különbözik a 4D Riemann-tér geometriájától, de a *formulák szintjén* alig van eltérés közöttük: A δ_{ij} Kronecker-szimbólumot mindenütt az η_{ij} Minkowski-szimbólummal kell helyettesíteni, ahol metrikus tenzor értelemben fordul elő (és a latin idexekre az összegzést a 0,1,2,3 értékekre kell érteni). Így (8.8) jobboldalán a Kronecker-szimbólum helyébe Minkowski-szimbólum kerül. A lokális koordinátabázist ekkor *pszeudoortonormálnak* hívjuk. Az ott megfogalmazott tétel tehát most a következő: A téridő bármely P pontjához választható olyan koordinátarendszer, amelyben

$$g_{ij}(P) = \eta_{ij} \quad \text{és} \quad \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_P = 0 \quad \text{vagy} \quad \Gamma_{jk}^i(P) = 0 \quad (\forall i, j, k) \quad (16.4)$$

(*lokálisan Minkowski-koordináták*). A görbületlenség Riemann-féle kritériuma (13. fejezet) pedig a következő lesz: A téridő akkor görbületlen, ha felvehető rajta Minkowski-féle koordinátarendszer (vagyis olyan koordinátarendszer, amelyben mindenütt $g_{ij} = \eta_{ij}$)

A Riemann és a pszeudoriemann sokaság közötti különbség abszolút, mert a Riemann-sokaság és a téridő a metrikus tenzor g determinánsának előjelében különbözik egymástól, és ez az előjel koordinátatranszformációval nem változtatható meg. Ezt így lehet belátni:

A $g_{i'j'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} g_{kl}$ képletben tekintsünk minden tényezőt mátrixnak: $\hat{g}' = \hat{M} \hat{g} (\hat{M})^T$ ¹⁹. A jobboldali mátrixszorzatban $M_{ik} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}$, a T pedig transzponálást jelent. Ismeretes, hogy mátrixok szorzatának determinánsa egyenlő a determinánsok szorzatával és $M^T = M$, ezért $g' = M^2 g$, amelyből következik, hogy g' és g előjele nem különbözhet egymástól.

A Riemann-sokaságon $g > 0$, mert lokálisan Descartes-koordinátákban $g = 1$ és minden ponthoz található ilyen koordinátarendszer. Hasonlóan, a téridőn $g < 0$, mert lokálisan Minkowski-koordinátákban $g = -1$ és minden ponthoz tartozik ilyen koordinátarendszer.

A g előjelének invarianciája azonban nem zárja ki, hogy a téridő bármely kiválasztott pontjában a metrikus tenzort egy alkalmas koordinátatranszformációval az η_{ij} , egy másik koordinátatranszformációval pedig az $\eta'_{ij} =$

¹⁹Az \hat{A} mátrix determinánsa A .

$-\eta_{ij}$ alakra lehessen hozni, mert a két tenzor determinánása egyenlő egymással. Belátható azonban, hogy ha a metrikus tenzort koordinátatranszformációval egy pontban több különböző diagonális alakra lehet hozni, akkor a pozitív és a negatív elemek számának a különbsége (*szignatúra*) mindegyik diagonális alakban ugyanannyi. Az η_{ij} szignatúrája -2 , az η'_{ij} -é $+2$, ezért csak az egyik diagonális alak lehetséges. Az már konvenció kérdése, melyik lehetőséget választjuk²⁰.

A radikális újdonság a Riemann-geometriához képest az, hogy a téridőben három különböző típusú vektor létezik: időszerű ($\mathbf{V}^2 > 0$), térszerű ($\mathbf{V}^2 < 0$) és fényszerű ($\mathbf{V}^2 = 0$). Az érintővektor típusa szerint a világvonalak (így nevezzük a téridőbeli görbéket) szintén lehetnek időszerűek, térszerűek vagy fényszerűek, és a típus változhat, ahogy haladunk a világvonalon.

A geodetikusokon azonban \mathbf{V}^2 állandó, ezért minden geodetikus határozottan az egyik típushoz tartozik. Mindegyik típus kielégíti a geodetikus egyenletet és a kezdőfeltételként megadott $V^i(\lambda_1) = \left(\frac{dx^i}{d\lambda}\right)_{\lambda_1}$ határozza meg, milyen típusú lesz a megoldás.

* * *

Összefér-e ez a téridő az ekvivalencia-elvvel?

Az ekvivalencia-elv szerint minden szabadon forgásmentesen gravitáló űrhajó egy \mathcal{I} lokális inerciarendszer. A *fizikai jelenségek* nyelvén ez azt jelenti, hogy súlytalanság van, a nyugvó giroszkópok tengelye folyamatosan az űrhajó falának ugyanarra a pontjára mutat, a fénysebesség minden irányban c -vel egyenlő. *Matematikailag* pedig annyit jelent, hogy — mint minden inerciarendszerben — az űrhajóban is felvehetünk Minkowski-koordinátákat, amelyeket a 2. fejezetben írtunk le. Elképzelünk egy XYZ koordinátarendszert, amelynek az origója valahol az űrhajó közepén van és a koordinátarendszerben nyugvó ideális órákat, amelyeket annak alapján szinkronizálunk, hogy a fénysebesség minden irányban c -vel egyenlő. Ebben a koordinátarendszerben természetesen $g_{ij} = \eta_{ij}$.

A téridő azonban, amelyben az űrhajó mozog, általában görbült, ezért nem létezik benne olyan koordinátarendszer, amelyben a $g_{ij} = \eta_{ij}$ egyenlőség *mindenütt* teljesül. Ahhoz azonban, hogy az űrhajó lokális inerciarendszer legyen elegendő, ha ez a reláció az űrhajóban érvényes.

Pontosítsuk ezt a követelményt! Tegyük fel, hogy a $g_{ij} = \eta_{ij}$ egyenlőség pontosan teljesül az XYZ koordinátarendszer origójában és ha g_{ij} -t az origó körül Taylor-sorba fejtjük x, y, z szerint, akkor a Taylor-sorban nem lépnek fel lineáris tagok ($\partial g_{ij}/\partial x^k|_0 = 0$):

$$g_{ij}(x, y, z) = \eta_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^2} \Big|_0 x^2 + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y^2} \Big|_0 y^2 + \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial z^2} \Big|_0 z^2 + 2 \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x \partial y} \Big|_0 xy + 2 \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x \partial z} \Big|_0 xz + 2 \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial y \partial z} \Big|_0 yz \right) + \dots$$

(a g_{ij} argumentumában a t időt mindenütt elhagytuk). Ha ez teljesül, akkor egy kisméretű űrhajóban $g_{ij} \approx \eta_{ij}$. Ez a matematikai kritériuma annak, hogy az űrhajó lokális inerciarendszer legyen²¹.

A téridőben az XYZ koordinátarendszer origója egy \mathcal{G} geodetikusú írt le, amelyet az űrhajó világvonalának fogunk tekinteni. Ez a geodetikus időszerű, vagyis $\mathbf{V}^2 > 0$. Ezt abból állapíthatjuk meg, hogy \mathcal{G} egyenlete a választott koordinátarendszerben

$$t = \lambda, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \tag{16.5}$$

amelynek érintővektora

$$\mathbf{V} = (V^t, V^x, V^y, V^z) = (1, 0, 0, 0).$$

²⁰A Riemann és a pszeudoriemann sokaság abszolút különbözősége ebből a tételből is következik.

²¹A kidolgozott elméletben meghatározható, hogy egy adott jelenség szempontjából egy adott méretű űrhajó milyen pontossággal inerciarendszer.

Így $\mathbf{V}^2 = \eta_{ij}V^iV^j = \eta_{tt} = c^2 > 0$.

A geodetikus hipotézis szerint a szabadon mozgó objektumok geodetikusokon mozognak. Ezt most pontosíthatjuk azzal, hogy a pályának *időszerű geodetikusnak* kell lennie.

Az eddigi gondolatmenet lényegét tömören így foglalhatjuk össze: Ha az ekvivalencia-elv igaz, akkor a téridő minden időszerű \mathcal{G} geodetikusához található olyan koordinátarendszer, amelyben

$$g_{ij}(\mathcal{G}) = \eta_{ij} \quad \text{és} \quad \left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_{\mathcal{G}} = 0 \quad \text{vagy} \quad \Gamma_{jk}^i(\mathcal{G}) = 0 \quad (\forall i, j, k). \quad (16.6)$$

A téridő tehát akkor fér össze az ekvivalencia-elvvel, ha matematikailag igazolható, hogy a pszeudoriemann téridő minden \mathcal{G} időszerű geodetikusához található olyan koordinátarendszer, amelyben (16.6) teljesül.

Megmutatható, hogy ilyen koordinátarendszer tényleg mindig van. A (16.6)-t kielégítő koordinátákat *Fermi-koordinátáknak* hívjuk. Ez a matematikai tétel a (16.4)-ben egyetlen P pontra megfogalmazott tétel általánosítása egy \mathcal{G} geodetikusra.

Az űrhajó mozgását pl. a Nap körül természetesen *nem* a Fermi-koordinátákban, hanem polárkoordinátákban tárgyaljuk, amelynek az origója a Nap középpontjában van. A \mathcal{G} ebben a koordinátarendszerben csavarvonal az x^0 tengely körül. A Fermi-koordinátákat az űrhajósok használják az űrhajón belül végzett fizikai kísérleteik matematikai leírásához.

A párhuzamos elterjesztés (11.3) egyenlete a \mathcal{G} -n történő elterjesztésnél Fermi-koordinátákban a $\Gamma_{jk}^i(\mathcal{G}) = 0$ következtében a $\frac{dU^i}{d\lambda} = 0$ egyenletre redukálódik. Mivel (16.5) szerint $\lambda = t$, ezért a \mathcal{G} -n az elterjesztés a t idő függvényében történik. Ha tehát egy origóbeli vektor XYZ komponensei időben állandók (ez a helyzet pl. a giroszkóp tengelyének az irányával), akkor a \mathcal{G} különböző pontjaihoz tartozó vektorok a párhuzamos elterjesztés értelmében *párhuzamosak egymással* és bármelyik másik koordinátarendszerben is kielégítik a párhuzamos elterjesztés egyenletét (amelyben ez az egyenlet már korántsem redukálódik egyszerű deriválásra a világvonal paramétere szerint).

Ez vonatkozik természetesen az XYZ koordinátarendszer bázisvektoraira is az origóban. Mivel ezek az irányok folyamatosan (minden t -ben) ugyanabban a pontban döfik át az űrhajó falát, ezért az egész űrhajóra is igaz, hogy az orientációja időben a parallel transzportálás szabályának megfelelően változik.

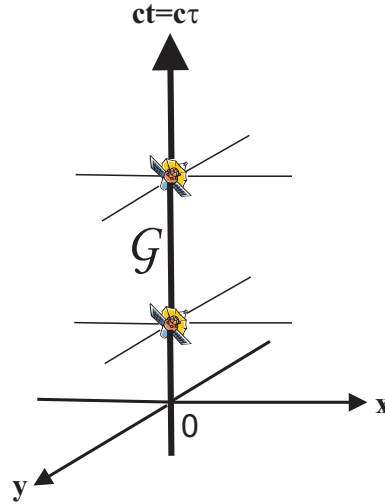
Röviden: *Amikor egy űrhajó forgásmentesen halad a \mathcal{G} geodetikuson (tehát inerciarendszer), akkor a hozzá képest nyugvó irányok kielégítik a párhuzamos elterjesztés egyenletét \mathcal{G} -n.* Ebben áll a párhuzamos elterjesztés egyenletének *fizikai* interpretációja.

Ebben a megállapításban a forgásmentesség azt jelenti, hogy az űrhajóban (az \mathcal{I} lokális inerciarendszerben) nyugvó giroszkópok állandón az űrhajónak ugyanarra a pontjára mutatnak, vagy — más szavakkal — az űrhajóban *nem lép fel* centrifugális és Coriolis erő. Az így értelmezett forgásmentességet *foucault-i értelemben vett forgásmentességnek* nevezzük, mert Foucault nevezetes ingakísérletében a Föld forgását abból állapította meg, hogy a kísérlet vonatkoztatási rendszerében *fellépett* Coriolis erő, amely forgatta az inga pályasíkját. Létezik egy másik, külső értelemben vett forgásmentesség is: Az, ha az űrhajó orientációja állandó a csillagos éghez képest. Ezt *kopernikuszi értelemben vett forgásmentességnek* fogjuk hívni. Amikor csak forgásmentességet mondunk, mindig foucault-i értelemben értjük.

A speciális relativitáselméletben az objektumokhoz (gondolatban vagy valóságosan) rögzített ideális óra által mutatott időt sajátidőnek neveztük és τ -val jelöltük. Ezt a definíciót az általános relativitáselméletben is fenntartjuk. A sajátidő fogalmát a Fermi-koordinátákra alkalmazva megállapíthatjuk, hogy a Fermi-koordinátarendszer t koordinátaideje azonos a \mathcal{G} geodetikus sajátidejével, mert mindkettőt az XYZ Fermi-koordináták origójában nyugvó ideális óra mutatja (vagy mutatná, ha tényleg ott lenne).

A Fermi-koordinátarendszer tengelyeit elképzelhetjük a Descartes-tengelyekhez hasonlóan egymásra merőleges egyenesekként (ld. a 3. ábrát, amelyen természetesen a z -tengelyt már nem tudtuk ábrázolni). A \mathcal{G}

geodetikus maga a ct tengely. A metrikus tenzor csak ezen a tengelyen egyenlő pontosan η_{ij} -vel, de a tengely valamilyen véges kis környezetében jól közelíthető a Minkowski-szimbólummal. A koordinátarendszerben feltüntettük az űrhajó téridőbeli helyzetét két sajátidő-pillanatban.



3.ábra

Az űrhajósok a gyorsuló (nem geodetikuson mozgó) űrhajóban is ugyanúgy rögzítenek koordinátarendszert a kabinjukhoz, mint a szabadon gravitáló űrhajóban. Az origóban a metrikus tenzor most is a Minkowski szimbólummal lesz egyenlő, de a konneciós koeficiensek különbözni fognak zérustól és tehetetlenségi erőkre vezetnek. Az a bizonyítás ugyanis, amellyel be tudjuk látni a Fermi-koordináták létezését, csak geodetikusokra érvényes.

Ebből látszik, mennyire nem triviális az a következtetésünk, hogy a pszeudoriemann téridő összefér az ekvivalencia elvvel. A 2D gömbre vonatkozóan például az itt tárgyalt matematikai tétel azt jelenti, hogy olyan koordinátarendszer létezik, amelyben egy adott főkör mentén $g_{ij} = \delta_{ij}$ és $\Gamma_{jk}^i = 0$, de a főkörrel párhuzamos szélességi körökhöz ilyen tulajdonságú koordinátarendszer nem található. A szemlélet számára egyáltalán nem evidens a két eset közötti különbség.

* * *

Az ekvivalencia-elvnek fontos szerepe van az általános relativitáselmélet fizikai interpretációjában. Akkor használható eredményesen, amikor olyan kérdésre keressük a választ, amely a téridő kis tartományára vonatkozik. Ilyenkor többnyire célszerű a szóbanforgó tartományt egy "véletlenül éppen ott lévő" lokális inerciarendszer belsejének tekinteni és koordinátarendszerként az ehhez tartozó Fermi-koordinátákat választani.

Láttuk például, hogy a speciális relativitáselmélet inerciarendszereiben Minkowski-koordinátákban a sajátidő megváltozását a

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^2$$

képlet határozza meg. Az ekvivalencia-elv alapján ennek a képletnek érvényben kell maradnia az általános relativitáselmélet lokális inerciarendszereiben is Fermi-koordináták használata esetén. Mivel azonban mind ds^2 , mind $d\tau$ invariáns, ezért a

$$c^2 d\tau^2 = ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (16.7)$$

egyenlőség valójában minden koordinátarendszerben érvényes bármely időszerű világvonallal bármely infinitezimális szakaszára.

Az időszerű világvonalakokat leggyakrabban a sajátidővel parametraljuk: $x^i = x^i(\tau)$. Ekkor

$$\mathbf{V}^2 = g_{ij}V^iV^j = g_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau} = \frac{g_{ij}dx^i dx^j}{d\tau^2} = \frac{ds^2}{d\tau^2} = c^2 = \text{konstans}, \quad (16.8)$$

ezért a geodetikus egyenletben független változóként szabad τ -t használni (*a sajátidő affin paraméter*).

17. A Nap körüli közelítő metrika a geodetikus hipotézis alapján

A Nap körüli téridő metrikáját az Einstein-egyenletek alapján fogjuk majd pontosan kiszámítani. Ebben a fejezetben korlátozottabb célt tűzünk ki: Azt kívánjuk megmutatni, hogy a Kepler-pályákat *lehet* geodetikusoknak tekinteni. Másképpen megfogalmazva ugyanezt: Megpróbáljuk "kitalálni" a téridő metrikáját abból a követelményből kiindulva, hogy a bolygópályák legyenek geodetikusok. A gondolatmenet a következő lesz:

1. Először felírjuk a speciális relativitáselmélet sík téridején a geodetikusok egyenleteit — a szabad tömegpontok mozgásegyenleteit, — polárkoordinátákban.
2. Ezekben az egyenletekben elvégezzük azt a módosítást, amely a

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \quad (17.1)$$

gravitációs potenciálban mozgó tömegpont mozgásegyenleteivé változtatja őket.

3. Megkeressük azt a legegyszerűbb metrikus tenzort, amely mellett ezek az egyenletek geodetikus egyenletté válnak.

Polárkoordinátákban a geodetikus egyenletek általános alakja a következő:

$$\begin{aligned} \frac{d^2t}{d\tau^2} + \Gamma_{ij}^t \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2r}{d\tau^2} + \Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2\vartheta}{d\tau^2} + \Gamma_{ij}^\vartheta \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \Gamma_{ij}^\varphi \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} &= 0, \end{aligned} \quad (17.2)$$

amelyekben $x^i = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \vartheta, \varphi)$. Tömegpontok mozgásáról lévén szó paraméterként a sajátidőt használjuk.

A sík téridő metrikája polárkoordinátákban a következő:

$$g_{00} = \frac{1}{c^2}g_{tt} = 1, \quad g_{rr} = -1, \quad g_{\vartheta\vartheta} = -r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2 \vartheta. \quad (17.3)$$

Az ehhez tartozó konnexiós koefficiensek közül azok, amelyek a t indexet tartalmazzák mind nullák, a többi konnexiós koefficiens pedig a (10.11)-ben található meg.

Az (17.2) első egyenletében az összes konnxiós koefficiens zérus, ezért $\frac{dt}{d\tau} = \text{konstans}$. A $d\tau$ és a dt arányossága miatt (17.2) többi egyenletében τ helyettesíthető t -vel:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 - r \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = 0 \quad (17.4)$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} - \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} = 0 \quad (17.5)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + 2 \operatorname{ctg} \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = 0. \quad (17.6)$$

A Φ gravitációs potenciálban mozgó tömegpont (nemrelativisztikus) mozgásegyenletei ezektől az egyenlektől két pontban különböznek.

Először is a t -szerinti deriválás helyett vissza kellene állítani a τ -szerinti deriválást, mert a gravitációs mozgásban — a körmozgás kivételével, — $v \neq \text{konstans}$. A bolygómozgás esetében azonban $v \ll c$, ezért nagy pontossággal $\frac{d\tau}{dt} = 1$ és a geodetikus egyenletekben mégis meg lehet hagyni a t -szerinti deriválást.

Az (17.4) baloldalához továbbá hozzá kell adni a $\frac{d\Phi}{dr}$ tagot. Ez azonban csak akkor van így, ha a súlyos és a tehetetlen tömeg egyenlő. Ellenkező esetben az új tag hozzáadása előtt (17.4)-t be kellene szorozni az m tehetetlen tömeggel és ezután kellene az $m^* \frac{d\Phi}{dr}$ tagot hozzáírni. Az így előálló egyenlet már biztosan nem tisztán geometriai objektumot — geodetikust — írna le.

De első látásra még $m = m^*$ mellett sem kapunk geodetikus egyenletet! Ha ugyanis (17.4)-ben a jelzett átalakítást elvégezzük, a

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 - r \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (17.7)$$

egyenletre jutunk, amelyben az utolsó tag nem a geodetikus egyenletek szerkezetének megfelelő $\Gamma_{ij}^r \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$ alakú, mert hiányzik belőle a két sebesség szorzata. Amikor azonban a τ paramétert t -vel közelítjük, a sebesség t -komponense $\frac{dt}{dt} = 1$ -el egyenlő, ezért a $\frac{d\Phi}{dr}$ tagot tekinthetjük $\Gamma_{tt}^r \left(\frac{dt}{dt} \right)^2 = \Gamma_{tt}^r$ -nek: $\Gamma_{tt}^r = \frac{d\Phi}{dr}$. A metrikus tenzort tehát úgy kell megválasztani, hogy teljesüljön a

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} g^{rr} \left(2 \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) = \frac{d\Phi}{dr} \quad (17.8)$$

reláció.

Logikus feltenni, hogy a statikus Nap körüli téridő geometriája is statikus, ezért $\frac{\partial g_{rt}}{\partial t} = 0$, és így $g^{rr} = -1$ következtében $\frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = 2 \frac{d\Phi}{dr}$, ahonnan $g_{tt} = \text{konstans} + 2\Phi$. A konstansot c^2 -nek kell választani abból a követelményből kiindulva, hogy $r \rightarrow \infty$ -nél g_{ij} menjen át a sík téridő (17.3) metrikus tenzorába. Így végül

$$g_{00} = \frac{1}{c^2} g_{tt} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad (17.9)$$

ahol

$$r_g = \frac{2MG}{c^2} \quad (17.10)$$

az M -tömegű Nap *gravitációs sugara*.

A metrikus tenzor többi komponense ugyanaz, mint (17.3)-ban, ezért az ívelemnégyszet a következő:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 = \\ &= \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \\ &= \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - dl^2. \end{aligned} \quad (17.11)$$

Mint látjuk, közelítő tárgyalásunkban a metrikus tenzort a Φ gravitációs potenciál határozza meg. A newtoni gravitáció elméletben ez a Φ — mint minden potenciál — csak additív konstans erejéig van rögzítve. A g_{00} -ban azonban ilyen szabadság nincs, mert az additív állandót meghatározza az a követelmény, hogy a végtelenben g_{00} tartson 1-hez.

Az (17.11) metrikájú téridő görbült, mert a Riemann-tenzornak vannak zérustól különböző komponensei:

$$R^0_{.r0r} = \frac{r_g}{r^3} \quad R^0_{.\vartheta0\vartheta} = -\frac{r_g}{2r} \quad R^0_{.\varphi0\varphi} = -\frac{r_g \sin^2 \vartheta}{2r}. \quad (17.12)$$

Az (17.11)-ből leolvasható metrikus tenzor determinánsa csak az $r > r_g$ tartományban negatív, ahogy a téridőn lennie kell (16. fejezet), ezért az $r < r_g$ tartományban (17.11) biztosan hibás. Ezen nem lepődhetünk meg, hiszen a bolygók, amelyek pályáiból (17.11)-t kiolvastuk, mind az $r \gg r_g$ tartományban mozognak. A Nap tömegére ugyanis r_g értéke mindössze 2.7 km (a Föld tömegével számolva kb. 1 cm-t kapnánk).

Az r_g kicsisége miatt (17.11) szerint a téridő görbülete a bolygópályák tartományában nagyon kicsi (bár igazából nincs mihez viszonyítani, mert a sík téridőre a Riemann-tenzor komponensei nullák). Ez azért lehetséges, mert a bolygópályák maguk majdnem egyenesek, amikor a téridőben szemléljük őket. Itt ugyanis nem zárt görbék, hanem olyan "csavarvonalak" a t -tengely körül, amelyek menetmagassága (Δ) sokkal nagyobb, mint a sugara (r). A földpálya esetében pl. $\Delta = 1$ év, $r = 7.6$ fényperc, így $\Delta/r \approx 10^{-5}$, ami egy 1 km menetmagasságú, 1 cm sugarú csavarmenetnek felel meg.

Az r_g/r arány közvetlenül összefügg a bolygók sebességével. Egy kör alakú bolygópálya sugarát az mv^2/r centripetális erő és az mMG/r^2 gravitációs erő egyenlősége határozza meg, amelyből

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} \frac{r_g}{r}. \quad (17.13)$$

Ez az egyenlőség nagyságrendileg az ellipszis alakú pályákra is érvényes.

18. Az ikerparadoxon a Föld gravitációs terében

A 3. fejezetben szó volt az ikerparadoxonról és arról, hogy a (3.3)-t az általános relativitáselméletben általánosítani kell. Ezt most meg tesszük.

Indítsunk rakétát a földfelszínről függőlegesen fölfelé és tegyük fel, hogy a rakéta a földön nyugvó óra szerint $\Delta\tau_2$ idő múlva érkezik vissza a starthelyre. A Föld forgásától az egyszerűség kedvéért tekintsünk el. A pálya egyenlete az előző fejezetben használt koordinátarendszerben, amelyet most a Földre vonatkoztatunk, a következő:

$$r = R + h(t), \quad h(t) \geq 0, \quad h(0) = h(T) = 0$$

(R a fűldsugár). A T az utazás alatt eltelt koordinátaidő, amelyet a

$$\Delta\tau_2 = \int_0^T dt \sqrt{1 - \frac{2MG}{c^2 R}}$$

egyenlet alapján lehet $\Delta\tau_2$ -ből kiszámítani.

A rakétán eltelt sajátidőt a (3.3) következő általánosítása fejezi ki:

$$\begin{aligned}\Delta\tau_1 &= \int_0^T d\tau = \frac{1}{c} \int_0^T ds = \frac{1}{c} \int_0^T \sqrt{\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - dr^2} = \\ &= \int_0^T dt \sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = \int_0^T dt \sqrt{1 - \frac{2MG}{c^2(R+h(t))} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dh}{dt}\right)^2}.\end{aligned}$$

A visszaérkezés után a Földön maradó ikertestvér $\Delta\tau = \Delta\tau_2 - \Delta\tau_1$ idővel lesz idősebb, mint az utazó. Az előbbi két képlet alapján

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \frac{1}{c^2} \int_0^T dt \frac{\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 - 2MG \frac{h(t)}{R(R+h(t))}}{\sqrt{1 - \frac{2MG}{c^2 R}} + \sqrt{1 - \frac{2MG}{c^2(R+h(t))} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dh}{dt}\right)^2}} \approx \\ &\approx \frac{1}{c^2} \int_0^T dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 - gR \cdot \frac{h(t)}{R+h(t)} \right],\end{aligned}\tag{18.1}$$

ahol $g = MG/R^2$ a gravitációs gyorsulás a földfelszínen. A $h(t)$ pályától függően $\Delta\tau$ bármilyen előjelű lehet, ezért — a speciális relativitáselmélettel ellentétben — nem bizonyos, hogy a Földön maradó testvér lesz az öregebb.

A (18.1) képlet helyességét a NASA a GP-A (Gravity Probe A) programja $70 : 10^6$ relatív pontossággal igazolta.

Megmutatható, hogy két egymáshoz képest időszerű eseményt összekötő időszerű világvonalak közül a geodetikusan a leghosszabb a sajátidő. A NASA kísérletben a két esemény a rakéta indulása és visszaérkezése volt. Ha a hajtómű csak nagyon rövid ideig működött (vagyis a rakéta csaknem végig geodetikusan mozgott), akkor a rakétán elhelyezett órán telt el hosszabb idő.

19. A szabadon mozgó tömegpont

A szabad tömegpontok időszerű geodetikuskon mozognak, amelyeket a sajátidővel parametralunk. A geodetikusan

$$V^i = \frac{dx^i}{d\tau}\tag{19.1}$$

érintővektora a tömegpont *négyessebessége*. Mint láttuk, $\mathbf{V}^2 = c^2$. Ez ugyanaz a négyessebesség, amelyet a speciális relativitáselméletben vezetnek be. Egy \mathcal{I} lokális inerciarendszerben ugyanis, amely éppen "keresztjezi" a tömegpont pályáját, a geodetikuskon az a rövid szakasza, amely \mathcal{I} -n belülre esik, az ekvivalencia elv alapján egyenes vonal (más szakaszok más lokális inerciarendszerekben egyenesek), és az \mathcal{I} -hez rögzített Minkowski-

koordinátákban $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Ennek megfelelően²²

$$\begin{aligned} V^i &= (V^0, V^x, V^y, V^z) = \frac{dt}{d\tau} \left(\frac{dx^0}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \\ &= \left(c/\sqrt{1 - v^2/c^2}, v_x/\sqrt{1 - v^2/c^2}, v_y/\sqrt{1 - v^2/c^2}, v_z/\sqrt{1 - v^2/c^2} \right). \end{aligned}$$

A speciális relativitáselméletben a *négyesgyorsulást* az $\mathbf{A} = \frac{d\mathbf{V}}{d\tau}$ képlettel definiálják. Ez a mennyiség azonban csak Minkowski-koordinátákban vektor. Az általános relativitáselméletben négyesgyorsuláson logikus az

$$\mathbf{A} = \frac{D\mathbf{V}}{d\tau} \quad A^i = \frac{DV^i}{d\tau} \quad (19.2)$$

abszolút deriváltat érteni. Most is igaz azonban, hogy — az ekvivalencia-elvvel összhangban — lokális inercia-rendszerben a két definíció egybeesik (mert $\Gamma_{jk}^i = 0$).

A négyessebesség és a négyesgyorsulás ortogonális egymásra: $\mathbf{V} \cdot \mathbf{A} = 0$. Ez abból következik, hogy egyrészt $\mathbf{V}^2 = c^2$ következtében $\frac{d\mathbf{V}^2}{d\tau} = 0$, másrészt a Leibniz-szabály alapján $\frac{d\mathbf{V}^2}{d\tau} = 2\mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{d\tau} = 2\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}$.

A szabad tömegpont geodetikusan mozog, ezért \mathbf{V} kielégíti a

$$\frac{DV^i}{d\tau} = \frac{dV^i}{d\tau} + \Gamma_{jk}^i V^j V^k = 0 \quad (19.3)$$

geodetikus egyenletet, amit tömören $\mathbf{A} = 0$ alakban is írhatunk: *A szabadon gravitáló test négyesgyorsulása nulla*. Pontatlanul ugyan, de ezt az elvet az 5. fejezetben már megfogalmaztuk. Az (5.5) pontos alakja pedig $m\mathbf{A} = \mathbf{F}$ (az \mathbf{F} a tömegpontra ható négyeserő).

Kérdés: Mekkora a Föld felszínén nyugvó test négyesgyorsulása?

A 17. fejezet képletei a Föld körüli metrikára is érvényesek, ha M -n a Föld tömegét értjük. A földfelszínen nyugvó test négyessebessége

$$V^i = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}, \frac{d\vartheta}{d\tau}, \frac{d\varphi}{d\tau} \right) \approx (1, 0, 0, 0),$$

ezért $A^i = \frac{DV^i}{d\tau} = \Gamma_{tt}^i$. Csak az $i = r$ komponens különbözik zérustól, amelynek az értéke a földfelszínen

($r = R$) a (17.8) képlet alapján $A^r = \frac{d\Phi}{dr} = \frac{GM}{R^2} = +g$. Az 5. fejezet előzetes megfontolásában ezt némileg homályosan úgy fogalmaztuk meg, hogy a földfelszínen nyugvó test gyorsulása "a téridőhöz képest" $+g$ -vel egyenlő.

Hogyan lehet kiszámítani az $x^i = x^i(\tau)$ geodetikus pálya ismeretében a tömegpont energiáját? Ahhoz, hogy a kérdésre válaszolni tudjunk, a *geodetikus mozgásállandók tétele* szükséges. Ez a tétel azt mondja ki, hogy ha \mathbf{K} Killing-mező, akkor a $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{K})$ skalár értéke a geodetikusan állandó:

$$\frac{d}{d\tau}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{K}) = 0.$$

Igazolás: Legyen \mathbf{W} tetszőleges vektormező. Akkor

$$\frac{d}{d\tau}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}) = \frac{d}{d\tau}(V^i W_i) = \frac{D}{d\tau}(V^i W_i) = \frac{DV^i}{d\tau} W_i + V^i \frac{DW_i}{d\tau},$$

²²Magához a mozgó tömegponthoz tartozó Fermi-koordinátákban természetesen $V^i = (c, 0, 0, 0)$.

ugyanis skalárra való hatásnál $d/dt = D/dt$. Az első tag a geodetikus egyenlet következtében zérus. A második tagban \mathbf{W} abszolút deriváltja áll, amit (11.4) segítségével átalakítunk:

$$\frac{d}{d\tau}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{W}) = V^i V^j \nabla_j W_i = \frac{1}{2} V^i V^j (\nabla_j W_i + \nabla_i W_j) \stackrel{(10.15)}{=} \frac{1}{2} V^i V^j \mathcal{L}_W g_{ij}. \quad (19.4)$$

Amikor $\mathbf{W} = \mathbf{K}$ Killing-vektor, akkor a jobboldal nulla és megkapjuk a bizonyítandó állítást.

Megjegyezzük, hogy a bizonyítás tetszőleges típusú geodetikusra érvényes, ha a deriválás affin paraméter szerint történik.

A mechanikából ismeretes, hogy a mozgásállandók szimmetriákhoz kötődnek (*Noether-tétel*), a Killing-mezők pedig a téridő szimmetriáit jellemzik. Ezt a kapcsolatot kell felhasználnunk a megmaradó mennyiségek azonosítására.

Az energia az a mennyiség, amely akkor marad meg, amikor a körülmények időben állandók (a Lagrange-függvény nem függ explicite az időtől). A téridőben ennek olyan szimmetria felel meg, amelyhez időszerű Killing-mező tartozik. Ilyenkor a koordinátarendszert célszerű úgy választani, hogy ez a Killing-mező legyen a lokális koordinátabázis \mathbf{e}_0 eleme, mert — mint a 7. fejezetben láttuk — a metrikus tenzor ekkor nem függ a koordinátáidőtől:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} = 0 \quad (\forall i, j). \quad (19.5)$$

Az ehhez tartozó megmaradó mennyiség $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{(0)}) = V_0$: A szabadon gravitáló tömegpont E energiája a négyessebesség nulladik *kovariáns* komponensével arányos.

Amikor a test inerciarendszerben nyugszik ($V^i = c\delta_0^i$), az energiája Minkowski-koordinátákban mc^2 -tel egyenlő. Ez a feltétel rögzíti az arányossági tényező értékét mc -nek: $E = mcV_0$. Ez a képlet minden koordinátarendszerben érvényes akkor is, amikor az energia nem marad meg és a mozgás nem geodetikus. Az időszerű Killing-szimmetria ugyanis csak az energia képletének a megtalálásához kellett.

Az mcV_0 képlet a newtoni mechanika $mv^2/2$ kinetikus energia képletének felel meg az általános relativitáselméletben, de — mint látni fogjuk — magában foglalja a nyugalmi energiát és a gravitációs potenciális energiát is.

Megszoktuk, hogy az energia csak additív konstans erejéig van meghatározva, mert mindig energia *változással* van dolgunk. Az általános relativitáselméletben azonban magának az energiának is határozott fizikai jelentése van, ugyanis — mint látni fogjuk — lényegében az energia az, ami a téridő görbületét létrehozza. Ezért az energia nullával egyenlő, amikor nem hoz létre görbületet, és ez kizár bármiféle önkényes additív állandót. Az mcV_0 képlet megfelel ennek a feltételnek.

Teljesen hasonló gondolatmenettel találhatjuk meg az impulzus három komponensének a képletét: A P_α definíció szerint az a fizikai mennyiség, amely akkor marad meg, amikor a metrikus tenzor elemei függetlenek x^α -tól. Azt találjuk, hogy $P_\alpha = mV_\alpha$, és ez a képlet természetesen akkor is érvényes amikor P_α nem megmaradó mennyiség. Ez a példa jól illusztrálja, hogy egy tenzormennyiség fizikai jelentése határozott index-típushoz társul: Noha \mathbf{V} vektor csak egy van, a "sebesség" jelentés kizárólag a kontravariáns komponensre érvényes. A \mathbf{P} esetében viszont az "impulzus" név a kovariáns komponensre utal. A sebesség esetében a mozgáson, az impulzus esetében a megmaradáson van a hangsúly.

A P_i *négyesimpulzus* null-komponensén E/c -t értjük, ezért $P_i = mV_i$, és (16.8) alapján $g^{ij} P_i P_j = m^2 c^2$. A speciális relativitáselméletben Minkowski-koordinátákban ez a következő:

$$P_0^2 - P_x^2 - P_y^2 - P_z^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2.$$

Innen kapjuk meg a newtoni $E = p^2/2m$ képlet speciális relativitáselméletben érvényes $E = c\sqrt{p^2 + m^2 c^2}$

formáját²³.

Egy további fontos megmaradó mennyiség az \vec{L} impulzusmomentum, amelynek L_z komponense akkor marad meg, amikor a körülmények nem változnak a z -tengely körüli elforgatáskor. Válasszuk a \mathcal{K} koordinátarendszert úgy, hogy a koordináták között szerepeljen a φ azimutiszög. Ha a \mathcal{K} -ban a metrikus tenzor egyik komponense sem függ φ -tól, akkor $e_{(\varphi)}$ Killing-mező, amelyhez a V_φ megmaradó mennyiség tartozik. Az L_z tehát arányos V_φ -vel.

Sík téridőben r , φ , z hengerkoordinátákban a metrikus tenzor

$$g_{00} = 1, \quad g_{rr} = -1, \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2, \quad g_{zz} = -1,$$

így $V_\varphi = -r^2 V^\varphi = -r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$. Másrészt $L_z = -mr^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$, ezért $L_z = mV_\varphi$.

20. A tömegpontok energiája a közelítő metrikában

Tekintsünk egy kisméretű objektumot, amely szabadon gravitál az $x^i = x^i(\tau)$ geodetikuson. Az energiáját az

$$E = mcV_0 = mcg_{0j}V^j = mcg_{0j} \frac{dx^j}{d\tau}$$

képlettel számíthatjuk ki (17. fejezet). A geodetikus mozgásállandók tétele alapján ez az energia mozgásállandó, mert a (17.11) metrika nem függ a t koordinátaidőtől.

Esetünkben g_{ij} diagonális és a Naptól távol $g_{00} = (1 + 2\Phi/c^2)$, ezért

$$E = mc \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) \frac{dx^0}{d\tau}. \quad (20.1)$$

A $\frac{dx^0}{d\tau}$ -t ki lehet fejezni a gravitációs potenciálon és a \vec{v} hármasssebesség $\frac{dl}{dt}$ nagyságán keresztül.

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{c} \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00} (dx^0)^2 - dl^2} = \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{g_{00} - \left(\frac{dl}{dx^0} \right)^2} \cdot dx^0 = \frac{1}{c} \sqrt{\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) - \frac{v^2}{c^2}} \cdot dx^0. \end{aligned}$$

Mivel $2\Phi/c^2 = -r_g/r$, a (17.13) szerint $2\Phi/c^2$ és v^2/c^2 a bolygómozgás tartományában azonos nagyságrendű és sokkal kisebb 1-nél, ezért ezekben lineáris pontossággal²⁴

$$d\tau = \frac{1}{c} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] dx^0,$$

és ennek alapján

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{c}{1 + (2\Phi - v^2)/2c^2} = c \left(1 - \frac{2\Phi - v^2}{2c^2} \right). \quad (20.2)$$

²³Megjegyezzük, hogy a Minkowski-metrika előjelkonvenciója következtében az x -tengely mentén pozitív irányban mozgó testre V^x és P^x pozitív, V_x és P_x azonban negatív.

²⁴Az $x \ll 1$ -ben lineáris közelítésben $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$ és $1/(1+x) \approx 1-x$. Az elsőt négyzetreemelésével, a másodikat $(1+x)$ -el törtéző beszorzással ellenőrizzük figyelembe véve, hogy x^2 az x mellett elhagyható. Ezek az $(1+x)^a \approx (1+ax)$ általános képlet speciális esetei. Az \approx helyett a továbbiakban mindenütt egyenlőségjelet írunk.

Ezt beírjuk (20.1)-be és — mint eddig — az r_g/r -ben és v^2/c^2 -ben csak a lineáris tagokat tartjuk meg:

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) \left(1 - \frac{2\Phi - v^2}{2c^2} \right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2} + m\Phi. \quad (20.3)$$

Mint látjuk, közelítő metrikánk szerint a bolygó energiája a newtoni energia és a nyugalmi energia összegével egyenlő. A newtoni fizikában ehhez hozzáadhatnánk egy tetszőleges konstansot, mert a potenciális energia csak additív konstans erejéig van meghatározva. Ezt most nem tehetjük meg, mert Φ a g_{00} része, amihez nem adható hozzá semmi.

21. A fénysugarak a téridőben

A) A geometriai optikai közelítés.

Az általános relativitáselmélet szerint a fénysugarak elhajlanak a Nap körül meggörbült téridőben²⁵. A görbültség azonban a látható fény hullámhosszának megfelelő méretekben egyáltalán nem vehető észre, ezért az általános relativitáselméletben a fény terjedését *geometriai optikai közelítésben* kell tárgyalni.

A geometriai optikai közelítésben a téridő valamilyen tartományára kiterjedő fényhullámot olyan síkhullámnak képzeljük el, amelynek terjedési iránya, frekvenciája, amplitúdója és polarizációja a térben és az időben nagyon lassan változik. Ezt a lassú változást a téridő görbültsége okozza, amely úgy fejt ki a hatását, mintha az euklidészi teret 1-hez közeli, alig észrevehetően változó törésmutatójú közeg töltené ki.

Ilyen feltételek mellett a fényhullámnak a tér minden pontjában minden pillanatban meghatározott $\psi(x)$ fázisa van²⁶ és a fény *fénysugarak* mentén terjed.

A tér adott pontjában (rögzített (x^1, x^2, x^3) -nál) a fázis változási sebessége a *körfrekvencia*:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\omega \quad \text{vagy} \quad \frac{\partial\psi}{\partial x^0} = -\frac{\omega}{c}. \quad (21.1)$$

A mínusz előjel annak a konvenciónak a következménye, hogy a fázist akkor tekintjük növekedőnek, amikor a fénysugár terjedési irányában haladunk, és ennek következtében az idő előrehaladtával egy adott pontba a fénysugár egyre kisebb és kisebb fázisú pontjai kerülnek. A $+\omega/c$ mennyiség a

$$k_i = -\frac{\partial\psi}{\partial x^i} \quad (21.2)$$

(négyes) *hullámvektor* nulladik kovariáns komponense. A három térszerű komponens a λ hullámhosszal kapcsolatos, mert azt határozza meg, hogy milyen gyorsan változik a fázis, amikor adott időpillanatban elmozdulunk a fénysugár mentén.

A \mathbf{k} térszerű komponenseinek és a hullámhossznak a kapcsolatát a lokális inerciarendszerek segítségével rögzíthetjük. Ha ugyanis a hullámtér egy kis kiterjedésű tartományát egy "éppen ott lévő" \mathcal{I} lokális inerciarendszer Fermi-koordinátáira vonatkoztatjuk, akkor $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$. Az \mathcal{I} -ben az ekvivalencia elv alapján a fénysebesség minden irányban c -vel egyenlő, amit a $\nu\lambda = c$, vagyis az $\omega^2/c^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 = 0$ egyenlőség fejez ki. Ez utóbbit

$$k^i k_i = 0 \quad (21.3)$$

²⁵A jelenségről már volt szó az 5. fejezet végén.

²⁶A fázist azért jelöljük ψ -vel, hogy ne lehessen összetéveszteni a φ azimutuszöggel. A geometriai optikában egyébként, ahol a fázis egy speciális skalármező szerepét tölti be, a "fázis" elnevezés helyett szokásosabb az "eikonál" nevet használni.

alakban is írhatjuk, amely már tetszőleges koordináta-rendszerben érvényes (nem csak \mathcal{I} -ben Fermi-koordinátákban). A \mathbf{k} vektor tehát fényyszerű.

B) A fényugarak.

Mivel a $\psi(x)$ mező, a $\mathbf{k}(x)$ is az. Az első skalármező, a második vektormező a téridőnek abban a tartományában, amelyet a fényhullám elfoglal. A fényugarak a $\mathbf{k}(x)$ mező *áramvonalai*: Azok az $x^i = x^i(\xi)$ ²⁷ görbék, amelyek minden pontjukban érintik a \mathbf{k} mezőt, azaz $V^i = \frac{dx^i}{d\xi}$ érintővektoruk a görbe minden pontjában a \mathbf{k} mező irányába mutat. A legcélszerűbb az, ha az $x^i(\xi)$ parametrálását úgy választjuk, hogy az érintővektor legyen *egyenlő* \mathbf{k} -val: $V^i(\xi) = k^i(x)|_{x=x(\xi)}$. A fényugarak egyenlete ekkor a következő:

$$\frac{dx^i}{d\xi} = k^i(x). \quad (21.4)$$

Az általános esetben ez egy nagyon bonyolult nemlineáris egyenletrendszer az $x^i(\xi)$ függvényekre, mert a jobboldalon a $\mathbf{k}(x)$ argumentumában x^i -n az $x^i(\xi)$ függvényeket kell érteni.

Most már könnyen igazolhatjuk, hogy *a fényugarak geodetikusak*, azaz eleget tesznek a

$$\frac{dV^i}{d\xi} + \Gamma_{jl}^i V^j V^l = 0$$

geodetikus egyenletnek. De még a bizonyítás előtt írjuk át ezt az egyenletet egy másik, célszerűbb alakba. Ennek érdekében helyettesítsük a \mathbf{V} -t \mathbf{k} -val. A második tagban ez minden további nélkül megtehető, az első azonban előbb át kell alakítani:

$$\frac{dV^i}{d\xi} = \frac{\partial k^i}{\partial x^l} \frac{dx^l}{d\xi} = \frac{\partial k^i}{\partial x^l} k^l.$$

A geodetikus egyenletet tehát így írhatjuk:

$$k^l \left(\frac{\partial k^i}{\partial x^l} + \Gamma_{jl}^i k^j \right) = 0,$$

azaz

$$k^l \nabla_l k^i = 0. \quad (21.5)$$

Ezt az egyenletet kell igazolnunk.

Vegyük a $k^l k_l = 0$ egyenlőség x^j szerinti parciális deriváltját. Mivel

$$\partial_j(k^l k_l) = \nabla_j(k^l k_l) = (\nabla_j k^l) k_l + k^l (\nabla_j k_l) = 2k^l \nabla_j k_l,$$

ezért

$$k^l \nabla_j k_l = 0. \quad (21.6)$$

Azonban

$$\nabla_j k_l = \frac{\partial k_l}{\partial x^j} - \Gamma_{jl}^m k_m \stackrel{(21.2)}{=} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^j \partial x^l} - \Gamma_{jl}^m k_m \stackrel{(21.2)}{=} \frac{\partial k_j}{\partial x^l} - \Gamma_{lj}^m k_m = \nabla_l k_j.$$

Helyettesítsük ezt (21.6)-ba: $k^l \nabla_l k_j = 0$. Ha ezt az egyenletet g^{ij} -vel megszorozzuk és kihasználhatjuk, hogy g^{ij} átemelhető a ∇_l -n, a bizonyítandó (21.5)-re jutunk.

²⁷A paraméter azért jelöltük ξ -vel a szokásos λ helyett, mert a λ ebben a fejezetben a hullámhossz jele.

A fénysugarak tehát valóban geodetikusok, amelyek fényszerűek, mert \mathbf{k} érintővektoruk (21.3) szerint fényszerű.

Kérdés: Miért nem lehet ezt a következtetést levonni abból, hogy a fény fotonokból áll, a fotonok pedig részecskék, amelyek a geodetikus hipotézis alapján geodetikuson mozognak, és mivel a sebességük c , a pályájuk fényszerű geodetikus?

Azért nem, mert a fotonok nem részecskék, hanem — a kvantumelmélet szerint — "kettős természetű" van: Mindig egészben (részecskéként) keletkeznek és nyelődnek el, de a Maxwell-egyenleteknek megfelelően elektromágneses hullámként terjednek. Amikor tehát a terjedésükről van szó, semmiképpen sem lehet részecskéknek tekinteni őket.

C) A fázisfelületek.

Ha a fényhullám frekvenciája állandó ($\omega = konstans$), akkor nyilván $\psi(x) = \psi_0(x^1, x^2, x^3) - \omega t$. A $t = konstans$ geometriai térben a fázis a $\psi_0 = konstans$ felületeken állandó. Ezeket a felületeket hívjuk *fázisfelületeknek*.

A \mathbf{k} térszerű komponensei a fázisfelületek normálvektorai. Ezt így lehet igazolni: Legyen az (x^1, x^2, x^3) és a hozzá közeli $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2, x^3 + dx^3)$ pont ugyanazon a $\psi_0 = konstans$ fázisfelületen, azaz legyen

$$d\psi_0 = \frac{\partial\psi_0}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial\psi_0}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial\psi_0}{\partial x^3} dx^3 = 0.$$

A (21.2) alapján ezt a képletet $k_1 dx^1 + k_2 dx^2 + k_3 dx^3 = 0$ alakban is írhatjuk. Mivel a (dx^1, dx^2, dx^3) komponensű vektor a választott fázisfelületben van, ez a reláció valóban azt bizonyítja, hogy a \vec{k} hármasektormező a tér minden pontjában ortogonális az adott ponton áthaladó fázisfelületre. A \vec{k} mező áramvonalai a fénysugarak a geometriai térben. Ha adott t -ben egy kiválasztott fénysugarat követünk, akkor mindig a fázisfelületekre merőlegesen haladunk és az egymástól 2π konstansban különböző fázisfelületek között éppen egy hullámhossznyi utat teszünk meg.

22. A fényelhajlás a közelítő metrikában

A Nap körüli tartományban a fényterjedésnek két alapvető sajátossága van: A frekvencia állandósága és a fényelhajlás.

A frekvencia állandósága a tömegpont energiájának megmaradásához hasonlóan annak következménye, hogy a (17.11) metrika független t -től. A geodetikus mozgásállandók tétele alapján ekkor az érintővektor kovariáns null-komponense mozgásállandó. A fénysugarak geodetikusok, érintővektoruk null-komponense pedig $k_0 = \omega/c$, ezért a fénysugarakon a frekvencia valóban állandó.

Fényelhajlás azért következik be, mert a $\lambda = 2\pi/k$ hullámhossz a

$$\mathbf{k}^2 = g^{ij} k_i k_j = g^{00} k_0^2 - k^2 = 0$$

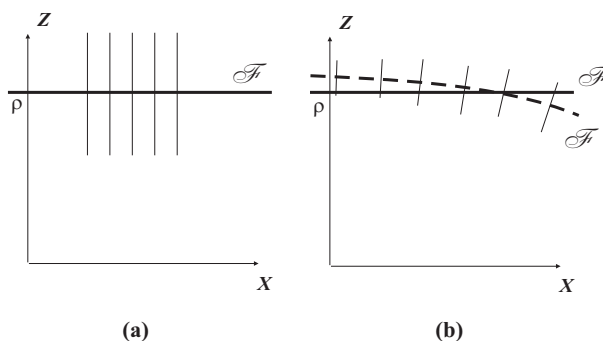
képlet következtében, amelyben $g^{00} = 1/g_{00}$, függ az r koordinátától, és r_g/r -ben lineáris pontossággal

$$k = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \cdot \frac{\omega}{c} = \left(1 + \frac{r_g}{2r}\right) \cdot \frac{\omega}{c} \quad (22.1)$$

(*diszperziós formula*).

Képzeljünk most azt, hogy a téridőnk sík, viszont a fény olyan átlátszó közegben terjed, amelyben a diszperziós formula azonos (22.1)-gyel. A törésmutatót a $k = n \cdot \frac{\omega}{c}$ képlet definiálja, ezért $n(r) = (1 + r_g/2r)$, a

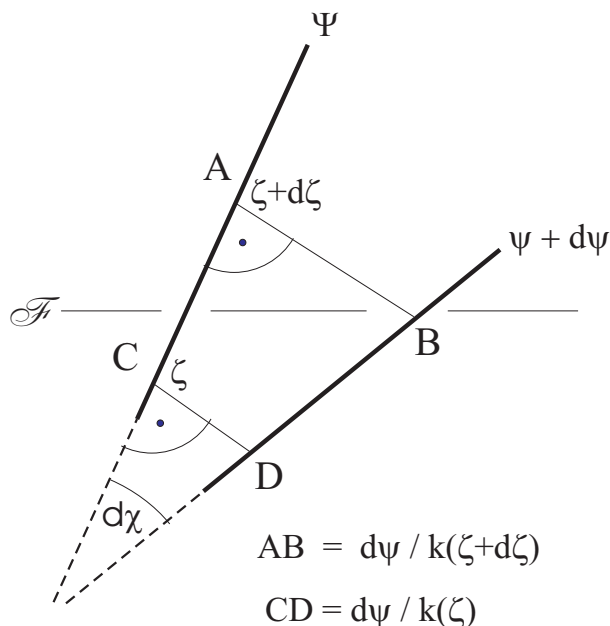
fénysebesség pedig $c'(r) = c/n(r) = c(1 - r_g/2r)$. A fénysugár az optikailag sűrűbb közeg felé hajlik el, ezért a fényelhajlás ebben az ekvivalens optikai feladatban az origó felé történik és ugyanakkora, mint a Nap körüli elhajlás a gravitáció hatása alatt.



4.ábra

A 4a. ábra a zavartalanul terjedő ($n = 1$) sugárzást ábrázolja. A függőleges egyenesek a konstans fázisú síkok metszetei az $y = 0$ síkkal, az \mathcal{F} egyenes a vizsgált fénysugár, amely ρ -ban (*célparaméter*) metszi a z -tengelyt. A fénytörés hatása abban nyilvánul meg, hogy a fázissíkok a fénysugár mentén haladva lassan elfordulnak az óramutató járásával egyirányban: Ezt a 4b. ábrán illusztráljuk az \mathcal{F} fénysugár tartományában, ahol a fázissíkok egyenes szakaszok. A fénysugár is megváltozik, az új \mathcal{F}' fénysugár mindenütt merőleges az elfordult fázissíkokra.

A fényelhajlás szögét jelöljük χ -vel. Ez dimenziótlan szám (radián), ezért az r_g/ρ függvénye, amely a feladat egyetlen dimenziótlan paramétere. A fényelhajlás a Nap közelében elhaladó fénysugarak segítségével mérhető meg, ezért ρ -t a Nap geometriai sugarával vehetjük egyenlőnek: $\rho = 700.000$ kilométer. Mivel $r_g = 3$ km, $r_g/\rho \approx 10^{-5} \ll 1$. Célszerű tehát a χ -t az r_g/ρ szerint hatványsorba fejteni: $\chi = a_0 + a_1(r_g/\rho) + a_2(r_g/\rho)^2 + \dots$. Amikor azonban $r_g = 0$, akkor nincs fényelhajlás, ezért $a_0 = 0$, a lineárisnál magasabb rendű tagok pedig elhanyagolhatók. Így $\chi = a_1 \frac{r_g}{\rho}$ és a feladatunk az a_1 konstans meghatározása.



5.ábra

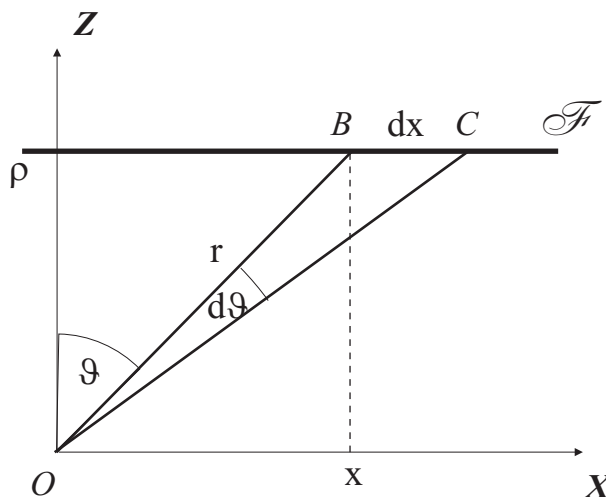
A számítás az 5. ábra alapján végezhető el, amelyen a két infinitezimálisan közeli fázissík-szakasz a ψ és a $\psi + d\psi$ fázishoz tartozik. Az általuk bezárt $d\chi$ szöveget kell mindenekelőtt kiszámítanunk.

A $\Psi = konstans$ egyenesen vezessük be a ζ koordinátát, amely a geometriai távolságot méri egy önkényesen választott kezdőponttól. A CA szakasz hossza legyen $d\zeta$. Akkor

$$\begin{aligned}
 d\chi &= \frac{AB - CD}{d\zeta} = \frac{1}{d\zeta} \left[\frac{d\psi}{2\pi} \lambda(\zeta + d\zeta) - \frac{d\psi}{2\pi} \lambda(\zeta) \right] = \frac{1}{d\zeta} \left[\frac{1}{k(\zeta + d\zeta)} - \frac{1}{k(\zeta)} \right] \cdot d\psi = \\
 &= \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{k(\zeta)} \right) \cdot d\psi = \frac{d}{d\zeta} \left(1 - \frac{r_g}{2r} \right) \cdot \frac{c}{\omega} \cdot d\psi = -\frac{r_g}{2} \cdot \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \frac{c}{\omega} \cdot d\psi.
 \end{aligned}$$

Mint látjuk, a jobboldal arányos r_g -vel, ezért az r_g/ρ -ban lineáris pontosságú számításban az r_g -t szorzó koefficiens nulladrendben, vagyis a \mathcal{F} sugárra vonatkoztatva kell kiszámítani. Ezért ($k \equiv k^x = -k_x$)

$$\frac{c}{\omega} = \frac{1}{k}, \quad \psi = kx, \quad d\psi = k \cdot dx, \quad \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_x = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial z} \Big|_x = -\frac{\cos \vartheta}{r^2}.$$



6.ábra

Ezeket $d\chi$ képletébe írva a

$$d\chi = \frac{r_g \cos \vartheta}{2} \cdot \frac{dx}{r^2}$$

képletet kapjuk. Ha a 6. ábra OBC háromszögére a szinusz-tételt alkalmazzuk, látjuk, hogy

$$\frac{dx}{r} = \frac{\sin d\vartheta}{\sin(90^\circ - \vartheta - d\vartheta)} \approx \frac{d\vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{d\vartheta}{\rho/r}.$$

Ezért végül

$$d\chi = \frac{r_g}{2\rho} \cos \vartheta \cdot d\vartheta,$$

amelynek integrálja a teljes \mathcal{F} mentén a következő:

$$\chi = \frac{r_g}{2\rho} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{r_g}{\rho}. \quad (22.2)$$

Ez a fényelhajlás szögének r_g/ρ legalacsonyabb rendjében számított értéke ($a_1 = 1$), amelynek kiszámításához — mint látjuk, — elegendő az \mathcal{F} elhajlásmentes fénysugár ismerete.

Az általános eljárás a fényelhajlás meghatározására azon alapul, hogy a fénysugarak fényszerű geodetikusak a téridőben. Ebből kiindulva megkapható az \mathcal{F}' görbe $r = r(\vartheta)$ egyenlete, amelyből meghatározható a χ szög. Amikor azonban $r_g/\rho \ll 1$ az itt követett eljárás egyszerűbb, mert nem igényli az $r = r(\vartheta)$ függvény meghatározását.

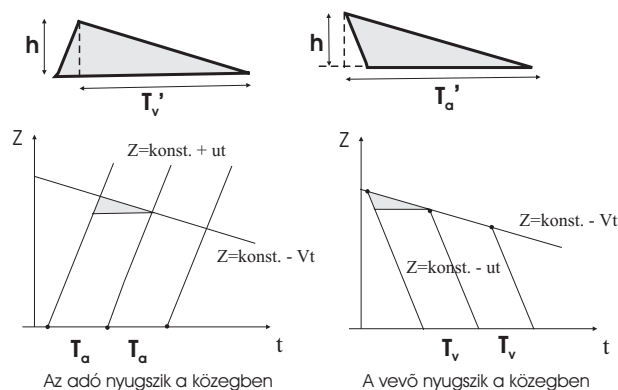
A közelítő metrika szerint tehát a fényelhajlás szöge a Nap körül $r_g/\rho \approx 0.8''$ -el egyenlő. Látni fogjuk, hogy a pontos metrika kétszer nagyobb elhajlási szögre, $a_1 = 2$ -re vezet (29. fejezet).

23. A gravitációs vöröseltolódás

A gravitációs vöröseltolódás a Doppler-effektussal rokon jelenség, ezért a tárgyalását a Doppler-effektussal kezdjük.

A) Az akusztikai Doppler-effektus.

Az akusztikai Doppler-effektusnak két határesetre van: Az egyikben az adó, a másikban a vevő nyugszik ahhoz a közeghez képest, amelyben a hangsebesség minden irányban u -val egyenlő.



7.ábra

A 7. ábrán a baloldalon rajzoltuk fel azt az esetet, amikor az adó nyugszik a közeghez képest: Az adó pályája $z = 0$, a vevőé $z = \text{konst.} - Vt$. Amikor $V > 0$, a vevő közeledik, ellenkező esetben távolodik az adótól. Az ábra a közeledésre vonatkozik.

A hanghullámok konstans fázisú pontjait a $z = \text{konst.} + ut$ egyenesek ábrázolják. Olyan fázispontok pályáját tüntettük fel, amelyek 2π fázisban különböznek egymástól, azaz éppen egy periódussal követik egymást a nyugvó közegben.

Mivel az adó is nyugszik a közeghez képest, ez a periódus az adó hangjelének T_a periódusidejével egyenlő. Az effektus abban áll, hogy a vevő egy másik, T'_v periódusú jelet érzékel. A vessző jelzi azt, hogy a vevő az, ami mozog a közeghez képest.

A T_a és a T'_v kapcsolatát úgy kaphatjuk meg, hogy a besatírozott háromszög h magasságát kifejezzük mind a $z = \text{konst.} - Vt$, mind a $z = ut + \text{konst.}$ függvények segítségével:

$$h = u \cdot (T_a - T'_v), \quad h = V \cdot T'_v.$$

A két kifejezés egyenlítéséből

$$T'_v = \frac{T_a}{1 + V/u} \quad (23.1)$$

$$\nu'_v = \nu_a \cdot (1 + V/u), \quad (23.2)$$

ahol természetesen $\nu = 1/T$ a frekvencia.

A 7. ábra jobboldala arra az esetre vonatkozik, amikor a vevő nyugszik a közegben. Ekkor

$$h = u \cdot (T'_a - T_v), \quad h = V \cdot T'_a,$$

$$T_v = (1 - V/u) \cdot T'_a \quad (23.3)$$

$$\nu_v = \frac{\nu'_a}{1 - V/u}. \quad (23.4)$$

Mint látjuk, mindkét esetben igaz, hogy a közeledés következtében a vevő magasabb frekvenciát érzékel, mint amelyet az adó kibocsát, de a különbség mértéke a két esetben különböző, azaz nem csak a relatív sebességtől függ.

B) A longitudinális optikai Doppler-effektus.

Ez az előbb tárgyalt akusztikai effektus pontos optikai megfelelője. Mivel a fény vákuumban terjed (éter nem létezik), a 7. ábra két rajza most csak abban különbözik egymástól, hogy egyszer az adó, egyszer pedig a vevő nyugalmi rendszerében felvett Minkowski-koordinátákban tárgyaljuk ugyanazt a jelenséget.

A képleteket két okból kell módosítani. Egyrészt u -t c -vel kell helyettesíteni, másrészt pedig figyelembe kell venni, hogy a mozgó vevő, ill. a mozgó adó vonatkoztatási rendszerében az idő ritmusa más, mint nyugvó partnerében, és a mozgó objektum *sajátidejével* egyezik meg.

Amikor pl. az adó nyugszik, a mozgó vevő nem a (23.1) periódusidőt fogja észlelni, hanem annyszor kisebbet, ahányszor lassabban telik a vevő sajátideje az adóénál (vagyis az adó nyugalmi rendszerének koordinátaidejénél). Ezt úgy vehetjük figyelembe, hogy (23.1) jobboldalát megszorozzuk $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ -tel:

$$T'_v = T_a \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + V/c} = T_a \cdot \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \quad (23.5)$$

$$\nu'_v = \nu_a \cdot \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}}. \quad (23.6)$$

A (23.3) képlettel ugyanígy kell eljárni, de ehhez előbb T'_a -re kell megoldani:

$$T'_a = \frac{T_v}{1 - V/c}.$$

A jobboldalt megint $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ -tel szorozzuk, egyszerűsítünk $\sqrt{1 - V/c}$ -vel és a kapott képletet megoldjuk T_v -re:

$$T_v = T'_a \cdot \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}} \quad (23.7)$$

$$\nu_v = \nu'_a \cdot \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}}. \quad (23.8)$$

Mindkét esetben ugyanazt a képletet kaptuk, ezért a vesszőket el is hagyhatjuk: Az optikai esetben a Doppler-effektust egyedül az adó és a vevő relatív sebessége határozza meg. Ez nem is lehet másképpen, hiszen a fényterjedésnek nincs közege (éter nem létezik), és ezért a két eset csupán a koordinátarendszer megválasztásában különbözik egymástól.

A sajátidő korrekciót elvben természetesen az akusztikai effektusnál is figyelembe kell venni, de ez még akkor sem vezetne a két eset egyenértékűségére, ha a korrekció jelentős volna, mert az, hogy a "Doppler-partnerek" közül melyik nyugszik a közeghez képest, nem koordináta-választás kérdése.²⁸

²⁸A (23.6), (23.8) képleteket az akusztikus Doppler-effektustól függetlenül Lorentz-transzformációval is megkaphatjuk annak alapján, hogy az ω/c mennyiség a \mathbf{k} négyesvektor $k_0 = k^0$ komponensével egyenlő (Minkowski koordinátákban). Mivel továbbá

C) A tranzverzális Doppler-effektus.

Az optikában a sajátidő és a koordinátaidő különbözősége miatt olyankor is felléphet frekvenciaeltolódás, amikor az adó és a vevő távolsága állandó. Ez az eset pl. akkor, amikor a vevő körmozgást végez az adó körül. Ezt a jelenséget nevezzük tranzverzális Doppler-effektusnak.

Az akusztikában ilyenkor nincs effektus ($T_v = T_a$), de az optikában figyelembe kell venni, hogy a körmozgást végző vevő lokális vonatkoztatási rendszerében az idő lassabban telik, mint az adó nyugalmi rendszerében, és ennek következtében

$$\begin{aligned} T_v &= T_a \sqrt{1 - V^2/c^2}, \\ \nu_v &= \frac{\nu_a}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (23.9)$$

Ezekben a képletekben a V sebesség az adó nyugalmi rendszerében felvett Minkowski-koordinátákban értendő. A koordinátarendszer azonban önkényesen választható, és a gravitációs vöröseltolódásra gondolva érdemes a jelenséget *forgó Minkowski-koordináta-rendszerben* is letárgyalni, amelyben az adó is és a vevő is nyugszik.

Első lépésként az x, y helyett hengerkoordinátákat vezetünk be, amelyben

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2,$$

és itt térünk át konstans $\Omega = V/r_v$ szögsebességgel forgó koordináta-rendszerre a

$$t = t', \quad r = r', \quad \varphi = \varphi' + \Omega t, \quad z = z' \quad (23.10)$$

képletekkel, amelyekben az ívelemnégyszet a következő²⁹:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{r'^2 \Omega^2}{c^2}\right) dt'^2 - 2r'^2 \Omega dt' \cdot d\varphi' - dr'^2 - r'^2 d\varphi'^2 - dz'^2. \quad (23.11)$$

A továbbiakban a vesszőt elhagyjuk. A metrikus tenzor a következő:

$$g_{tt} = c^2 g_{00} = c^2 \left(1 - \frac{r^2 \Omega^2}{c^2}\right), \quad g_{t\varphi} = -r^2 \Omega, \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2, \quad g_{zz} = -1. \quad (23.12)$$

A (23.12) metrika nem függ t -től, ezért a geodetikus mozgásállandók tétele szerint a fény ν frekvenciája a terjedés során állandó. A kérdés az, hogyan függ össze ez a ν az adó által kibocsátott ν_a és a vevő által észlelt ν_v frekvenciával.

A vevő most nyugszik az adóhoz képest, de ez csupán a koordináta-rendszer speciális választásának a következménye és nem jelentheti azt, hogy ν_v egyenlővé válik ν_a -val. A sajátidők ugyanis továbbra is különböznek egymástól, csak ez most más matematikai formában jelenik meg.

$k^2 = 0$, ezért $k^z = \pm k^0$ attól függően, hogy a fény a z -tengely pozitív vagy negatív irányában terjed.

Legyen a határozottság kedvéért $\mathcal{I}_a \leftrightarrow \mathcal{K}$, $\mathcal{I}_v \leftrightarrow \mathcal{K}'$. Ekkor \mathcal{K}' negatív z -irányban mozog \mathcal{K} -hoz képest, $k^z = +k^0$, és a Lorentz-transzformáció szerint

$$k^{0'} = \frac{k^0 + \frac{V}{c} k^z}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1 + V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} k^0 = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} k^0.$$

A $k^0 = \omega_a/c$, $k^{0'} = \omega_v/c$ következtében ez azonos a (23.6) képlettel (és természetesen a (23.8)-cal is).

²⁹Ez a metrika az $r' = c/\Omega$ hiperfelületen szinguláris, mert itt $g_{tt} = 0$. Elég kis Ω -nál a szingularitás tetszőlegesen nagy r' -nél előfordulhat. Matematikailag ez a szingularitás jelzi, hogy a koordináta-rendszer forog.

A sajátidő a $d\tau^2 = ds^2/c^2$ képleten keresztül függ össze a koordinátaidő dt megváltozásával. Nyugvó objektumokra ez az összefüggés a következő:

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt. \quad (23.13)$$

A sajátidőben és a koordinátaidőben mért frekvenciák $1/d\tau$ -val és $1/dt$ -vel arányosak, ezért

$$\frac{\nu_a}{\nu} = \frac{dt}{d\tau_a} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}(r_a)}}, \quad \frac{\nu_v}{\nu} = \frac{dt}{d\tau_v} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}(r_v)}}.$$

Ha ezekből kizárjuk ν -t, megkapjuk a kapcsolatot a ν_a és a ν_v között:

$$\nu_v = \nu_a \cdot \sqrt{\frac{g_{00}(r_a)}{g_{00}(r_v)}}. \quad (23.14)$$

Amikor az adó az origóban nyugszik, ahogy feltettük, $g_{00}(r_a) = 1$ és így

$$\nu_v = \frac{\nu_a}{\sqrt{g_{00}(r_v)}} = \frac{\nu_a}{\sqrt{1 - r_v^2 \Omega^2 / c^2}}.$$

Ez azonos a (23.9)-el, mert $V = r_v \Omega$.

A tranzverzális Doppler-effektus kétfajta tárgyalásából levonható fő tanulság az, hogy ugyanaz a frekvenciaeltolódás, amely az első tárgyalásban a relatív mozgás következményeként jelenik meg, a második tárgyalási módban (amikor relatív mozgás nincs) a g_{00} -k különbözősége miatt lép fel.

D) A gravitációs vöröseltołodás.

Nyugodjon az adó egy h magasságú torony földszintjén, a vevő pedig a torony felső emeletén³⁰. Ha a (23.14) származtatását újra átgondoljuk láthatjuk, hogy erre az esetre is érvényes, csak g_{00} -n a (17.9)-t kell érteni, amelyben $\Phi(r) = -GM/r$ a Föld gravitációs potenciálja:

$$\nu_v = \nu_a \sqrt{\frac{1 + 2\Phi_a/c^2}{1 + 2\Phi_v/c^2}} \approx \nu_a \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\Phi_v - \Phi_a)} \approx \nu_a \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right).$$

Így

$$\nu_v = \nu_a \left(1 - \frac{gh}{c^2}\right).$$

Látjuk, hogy $\nu_v < \nu_a$, a fény a vörös felé tołodik el, ezért kapta az effektus a vöröseltołodás nevet³¹. De persze ha az adót és a vevőt felcseréljük, "kék eltołodást" kapunk.

A relatív frekvenciaeltolódás a következő:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_a} = \frac{\nu_a - \nu_v}{\nu_a} = \frac{gh}{c^2}.$$

Ez nagyon kis érték, az említett kísérletben kb. $2 \cdot 10^{-15}$ -tel volt egyenlő.

³⁰A ténylegesen elvégzett kísérletben (Pound és Rebka, 1960) a torony magassága kb. 20 méter volt.

³¹Eredetileg a frekvenciaeltolódást a Nap színekében szerették volna kimutatni. Mivel a sugárzás a Nap felszínéhez képest "felfelé" terjed, ezért vöröseltołodást kellett volna kapni. A intenzív hőmozgás azonban ebben az esetben elmossa a várható effektust.

Hangsúlyozzuk, hogy mialatt a fény az adóból a vevőbe jut, *nincs* frekvenciaváltozás ($\nu = \text{konstans}$). A kibocsátott és a megfigyelt fény frekvenciája azért különbözik egymástól, mert a koordinátaidő és a sajátidő közötti kapcsolat az adó és a vevő helyén nem ugyanaz.

A gravitációs vöröseltolódásnál nem létezik olyan természetes nézőpont, amelyből a frekvenciaeltolódás a vevő és az adó relatív mozgásának a következményeként lép fel. Ezért fogalmaztunk úgy, hogy ez a jelenség *rokon* a Doppler effektussal, de nem azonos vele.

E) Kapcsolat az ikerparadoxonnal.

A földszintről elindított ν_a frekvenciájú fényt az emeleten $\nu_v < \nu_a$ frekvenciájúnak találják. Ezt úgy is lehet interpretálni, hogy az emeleten az idő gyorsabban telik, mint a földszinten. A $\nu_v < \nu_a$ egyenlőtlenség ugyanis annyit jelent, hogy ha pl. 2π fázisváltozás alatt a földszinten 1 másodperc telik el, akkor az emeleten ugyanezt a fázisváltozást mondjuk 2 másodperc alatt regisztrálják. A fény frekvenciája azonban a két emelet között állandó ($\nu = \text{konstans}$), ezért ez csak úgy lehetséges, ha az emeleten a sajátidő gyorsabban telik, mint a földszinten. Általánosabb formában ezt úgy is ki lehet fejezni, hogy "a gravitáció lassítja az idő múlását" (mert a földszinten "nagyobb a gravitáció").

Az ikerparadoxonnak ezért van egy újabb változata: Az ikerpár egyik tagja felmegy egy magas toronyba. Ott üldögél valamennyi ideig. Amikor újra lejön a földszintre, *idősebb* lesz, mint a testvére, aki végig a földszinten támasztotta az ajtófélfát. Ha azonban az emeleten az előbbi testvér üldögélés helyett a fényhez közeli sebességgel rohangál elérheti, hogy a lejövetele után fiatalabb legyen, mint a földszinten álldogáló testvére.

A (18.1) képlet két különböző előjelű tagja ezt a két tényezőt, a magasságot és a sebességet veszi figyelembe.

F) A gravitációs vöröseltolódás és az energiamegmaradás tétele.

A fotonok egészben keletkeznek és nyelődnek el. A keletkező és az elnyelődő fotonok energiája azonban különböző, mert $h\nu_a$ és $h\nu_v$ nem egyenlő egymással. Nem jelenti-e ez az energiamegmaradás sérülését?

Ugyanez a kérdés a Doppler-effektussal kapcsolatban is feltehető, és ott rögtön látjuk, miről van szó. A ν_a frekvencia az adó nyugalmi rendszerében, a ν_v frekvencia a vevő nyugalmi rendszerében érvényes. Ennek megfelelően a $h\nu_a$ az adó nyugalmi rendszerében, a $h\nu_v$ pedig a vevő nyugalmi rendszerében egyenlő a foton energiájával, és ez a két nyugalmi rendszer *mozog egymáshoz képest*. Az energiamegmaradásnak azonban *egyetlen* vonatkoztatási rendszeren belül kell teljesülnie és ezzel nincs is baj: Az *adó nyugalmi rendszerében* például a vevő által elnyelt foton frekvenciája is ν_a -val, és a vevő energiájának megnövekedése is $E_a = h\nu_a$ -val egyenlő, ami pontosan ugyanannyi, amennyivel az adó energiája csökkent.

A gravitációs vöröseltolódásnál ugyanez a helyzet. Az energiamegmaradással annyira nincs probléma, hogy a (23.14) alapképletet az energiamegmaradás tételéből kiindulva is meg lehet kapni.

Tekintsük először az adóban egy foton keltési folyamatát. Jelöljük \mathcal{K} -val a 19. fejezetben használt koordinátarendszert, amelyben $g_{00} = 1 + 2\Phi/c^2$. Az adó energiája \mathcal{K} -ban $E_a = m_a c V_0$ -al egyenlő (17. fejezet). Mivel az adó nyugszik \mathcal{K} -ban a \mathbf{V} -nek csak a V^0 kontravariáns komponense különbözik zérustól: $V^0 = \frac{dx^0}{d\tau} \stackrel{(23.13)}{=} \frac{c}{\sqrt{g_{00}(r_a)}}$. Így $V_0 = g_{00} V^0 = c\sqrt{g_{00}(r_a)}$ és az adó energiája a foton emissziója előtt $m_a c^2 \sqrt{g_{00}(r_a)}$ -val egyenlő.

A foton emissziója következtében ez az energia lecsökken. A fényforrás azonban mozdulatlan marad, ezért az energiavesztés m_a csökkenése következtében lép fel: $m_a \rightarrow m_a - \Delta m_a$. A keletkező foton frekvenciáját \mathcal{K} -ban továbbra is ν -vel jelöljük, ezért a \mathcal{K} -beli energiamegmaradás következtében $h\nu = \Delta m_a c^2 \sqrt{g_{00}(r_a)}$.

Nézzük most ugyanezt a folyamatot az adó nyugalmi rendszeréből, amelyben a koordinátaidő az adó sajátidejével egyezik meg, ezért $g_{00} = 1$. Ennek következtében itt $V_0 = m_a c^2$, és az adó energiájának csökkenése $\Delta m_a c^2$. A fotonenergiát ehhez a koordinátarendszerhez viszonyítva ν_a -val jelöltük, ezért az energiamegara-

dást most a $h\nu_a = \Delta m_a c^2$ képlet fejezi ki. A két képletből $\Delta m_a c^2$ -t kizárva kapjuk a

$$\nu = \nu_a \sqrt{g_{00}(r_a)}$$

képletet, és ugyanezt a gondolatmenetet a vevőre alkalmazva a

$$\nu = \nu_v \sqrt{g_{00}(r_v)}$$

képletre jutunk.

A két képletben azért használhattuk ugyanezt a ν -t, mert a foton $h\nu$ energiája a ν állandósága következtében nem változik, mialatt a foton az adóból a vevőbe jut el. Ha a két utóbbi képletből ν -t kizárjuk, valóban (23.14)-re jutunk³².

24. Elektrodinamika a relativitáselméletben

A) Sűrűség és áramsűrűség.

Tekintsünk egy gáz- vagy folyadékáramlást, amelynek \mathcal{K} -beli részecskesűrűsége és áramsűrűsége ρ és $\vec{J} = \rho\vec{v}$. ρ és \vec{v} makroszkópikus szempontból infinitezimálisan kicsiny, de még mindig nagyszámú részecskét tartalmazó térfogatra átlagolt mennyiségek, a helykoordináták és az idő függvényei. Minden térfogatelemhez hozzárendelhetjük a hozzá tartozó részecskék \mathcal{K}' pillanatnyi nyugalmi rendszerét, amely \mathcal{K} -hoz képest \vec{v} sebességgel mozog. A \mathcal{K}' -ben természetesen $\vec{J}' = \vec{v}' = 0$. A Lorentz-kontrakció következtében a kiválasztott részecskék által elfoglalt térfogatelem a pillanatnyi nyugalmi rendszerben a legnagyobb, a sűrűség a legkisebb, ezért

$$\rho' = \rho \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (24.1)$$

Ezek a képletek összeférnek azzal, hogy a $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$ áramsűrűséget és a ρ -t egyetlen \mathbf{j} négyesvektorba foglaljuk a

$$\mathbf{j} = (c\rho, j^1, j^2, j^3) = (c\rho, J_1, J_2, J_3)$$

képlet szerint. A \mathbf{j} neve: *négyes áramsűrűség*. A j^0 komponensben azért szerepel a c szorzó, hogy az összes komponensnek egyöntetűen áramsűrűség legyen a dimenziója.

Az igazolást a speciális relativitáselméletben végezzük Minkowski koordinátákban. Tegyük fel, hogy a koordinátarendszert úgy választottuk, hogy \vec{v} az 1. tengely irányába mutasson. A négyesvektorok transzformációs törvénye alapján ekkor

$$j^0 = \frac{j^{0'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$j^1 = \frac{+ \frac{v}{c} j^{0'}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (24.2)$$

$$j^2 = j^{2'} = 0 \quad j^3 = j^{3'} = 0.$$

Az első egyenlet (24.1)-gyel, a többi $\vec{J} = \rho\vec{v}$ -vel azonos. Két tetszőleges inerciarendszer közötti Lorentz-transzformáció mindig felbontható két lépésre úgy, hogy a közbenső rendszer legyen a pillanatnyi nyugalmi rendszer,

³²A gravitációs vöröseltolódást gyakran azzal magyarázzák, hogy a foton frekvenciája a potenciális energiájának változása következtében csökken ν_a -ról ν_v -re, mialatt az adóból a vevőbe jut el. Ez a "magyarázat" minden alapot nélkülöz.

ezért (24.2)-ből az is következik, hogy \mathbf{j} két tetszőleges inerciarendszer közötti átmenetnél is négyesvektorként viselkedik.

A \mathbf{j} négyesvektor jellege mellett szól a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad (24.3)$$

kontinuitási egyenlet is, amely — a Gauss-tételen keresztül — azt fejezi ki, hogy bármely adott v térfogatban³³ az $N_v = \int_v \rho \, dv$ részecskeszám csak ki- és beáramlás következtében változhat (*lokális részecskeszám megmaradás*):

$$\frac{dN_v}{dt} = \int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv = - \int_v \operatorname{div} \vec{J} \cdot dv = - \int_s \vec{J} \cdot \vec{n} \, ds \quad (24.4)$$

(\vec{n} a határfelület külső normálisa, ds a felületelem). Ha az integrálást kiterjesztjük a teljes térre, akkor a jobboldali felületi integrál eltűnik (mert minden reális fizikai rendszer térbeli kiterjedése véges) és a (24.4) képlet a részecskeszám megmaradását fejezi ki.

A négyesvektor-jelölésben (24.3) azt fejezi ki, hogy \mathbf{j} *négyesdivergenciája* zérus:

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \quad (\text{vagy } \partial_i j^i = 0). \quad (24.5)$$

A kontrakció skalár jellege miatt ebből a felírási módból nyilvánvaló, hogy a kontinuitási egyenlet Lorentz-invariáns: Ha fennáll egy inerciarendszerben, akkor az összes többiben is érvényes.

Megjegyezzük, hogy a részecskeszám megmaradhatna áramsűrűség nélkül is úgy, hogy a részecskék világvonala a tér egy pontjában megszűnik és *ugyanabban a pillanatban* megjelenik egy másikban. Nyilvánvaló azonban, hogy az egyidejűség relativitása miatt a többi inerciarendszerben a részecskeszám megmaradása sérülne. A relativitáselméletben ezért a megmaradási tételeket általában lokálisnak tekintjük, kontinuitási egyenlettel fogalmazzuk meg őket, amelyben a szóbanforgó megmaradó mennyiség sűrűségén kívül az áramsűrűsége is szerepel.

A \mathbf{j} négyesvektor jellege az ekvivalencia-elv következtében természetesen az általános relativitáselméletben is megmarad. A (24.5) matematikai formája azonban $\nabla_i j^i = 0$ -ra változik, de ezt az egyenletet az ekvivalens

$$\frac{\partial(\sqrt{-g} \cdot j^i)}{\partial x^i} = 0 \quad (24.6)$$

alakban is fel lehet írni. A g a metrikus tenzor elemeiből képzett determináns, amelyről tudjuk (16. fejezet), hogy a téridő esetében negatív. Az átalakításhoz a

$$\Gamma_{ki}^k = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^i} \quad (24.7)$$

képletre van szükség, amelynek az igazolására nem térünk ki. Ha ezt elfogadjuk, akkor látható, hogy

$$\nabla_i j^i = \frac{\partial j^i}{\partial x^i} + \Gamma_{ki}^k j^i = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} \cdot j^i)}{\partial x^i}. \quad (24.8)$$

Mindaz, amit ebben a pontban a sűrűségről és az áramsűrűségről mondtunk, vonatkozik a töltéssűrűsége és a töltések áramsűrűségére is. A jelölést sem változtatjuk meg. A továbbiakban a töltések áramsűrűségét is többnyire egyszerűen csak áramsűrűségnek fogjuk hívni.

³³Itt a térfogatot is ugyanúgy v -vel jelöljük, mint a sebességet, de ennek nem szabad zavart okoznia.

B) A Maxwell-egyenletek a speciális relativitáselméletben.

A relativitáselmélet posztulátumai azt követelik, hogy a

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} = \rho \quad (24.9)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J} \quad (24.10)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (24.11)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (24.12)$$

Maxwell-egyenletek legyenek *Lorentz-invariánsak*. Ezen azt értjük, hogy ezt az alakjukat őrizték meg, amikor az egyik inerciarendszerről a másikra áttérve a téridő koordináták transzformálására a Lorentz-transzformációt használjuk. Az áttérésnél azonban nem csak a koordinátákat, hanem az \vec{E} , \vec{B} térmennyiségeket és a ρ , \vec{J} töltés- és áramsűrűséget is transzformálni kell. Ez utóbbiakról megállapítottuk, hogy a \mathbf{j} négyesvektor komponensei, tehát rájuk is a Lorentz-transzformáció alkalmazandó. A térmennyiségekről azonban csak annyit tudunk, hogy hármassvektorok, és ebből nem állapítható meg, hogyan kell őket transzformálni, amikor mozgó vonatkoztatási rendszerre térünk át.

Az \vec{E} és a \vec{B} fizikai objektumok a téridőben, ezért 4D tenzorként kell transzformálódniuk (6. fejezet). A kétindexes antiszimmetrikus tenzorok négy dimenzióban éppen hat független komponenssel rendelkeznek, amelyek könnyen beazonosíthatók \vec{E} és \vec{B} komponenseivel úgy, hogy a Maxwell-egyenletek minden inerciarendszerben teljesüljenek, még hozzá áttetszően egyszerű alakban: A tértenzort F^{ij} -vel jelölve ($F^{ij} = -F^{ji}$) az $F^{0\alpha}$ komponenseket $-\frac{1}{c}E_\alpha$ -val, az $F^{\alpha\beta}$ komponenseket $-B_\gamma$ -val kell azonosítani ($\alpha\beta\gamma$ az 123 ciklikus permutációja).

Az azonosítást mátrixalakban is felírjuk (az első index a sorindex, a második az oszlopindex, és a mátrix első sorát és oszlopát nulladiknak tekintjük):

$$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_1 & -\frac{1}{c}E_2 & -\frac{1}{c}E_3 \\ \frac{1}{c}E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ \frac{1}{c}E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ \frac{1}{c}E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (24.13)$$

és $F_{0\alpha} = -F^{0\alpha}$, $F_{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta}$ következtében

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_1 & \frac{1}{c}E_2 & \frac{1}{c}E_3 \\ -\frac{1}{c}E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -\frac{1}{c}E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -\frac{1}{c}E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24.14)$$

A képletekben az 1,2,3 index természetesen helyettesíthető x, y, z -vel.

A tértenzoron és a négyes-áramsűrűségen keresztül kifejezett Maxwell-egyenletek a következők:

$$\partial_k F^{kl} = -\mu_0 j^l \quad (24.15)$$

$$\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0 \quad (i \neq j \neq k) \quad (24.16)$$

($\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$). Mindkét sor 4-4 egyenletet tartalmaz: A (24.15) a (24.9) és a (24.10) egyenletet, a (24.16) a maradék kettőt.

A (24.15) és a (24.16) baloldala a Lorentz-transzformációkkal szemben tenzor, mert ekkor a $\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}$ transzformációs koefficiensek konstansok (a Lorentz-transzformáció lineáris a koordinátákban) és ezért a deriválás alól kihozhatók (ld. a 7. fejezetet). Ha tehát a Lorentz-transzformációkra korlátozódunk, akkor (24.15) és (24.16) tenzoregyenlet, amely Minkowski koordinátákban minden inerciarendszerben ugyanolyan alakú és vagy mindegyikben igaz, vagy egyikben sem. Ezt értjük azon, hogy ezek az egyenletek *invariánsak a Lorentz-transzformációkkal szemben*. Ez érvényes az eredeti (24.9) - (24.12) egyenletekre is, amelyek csak formájukban különböznek a (24.15), (24.16) tenzoregyenletektől. A tenzoregyenleteknél azonban ez az invariancia *nyilvánvaló*, a (24.9) - (24.12) esetében azonban, amelyek nem tenzoregyenletek, *nem nyilvánvaló*.

A (24.15)-t parciálisan deriválva a

$$\partial_l \partial_k F^{kl} = -\mu_0 \partial_l j^l \quad (24.17)$$

egyenletet kapjuk. A baloldal a $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ szimmetrikus és az $F^{ij} = -F^{ji}$ antiszimmetrikus tenzor kontra-háltja és ezért *azonosan* — vagyis *tetszőleges* F^{ij} esetén — zérus, tehát a jobboldalnak is nullának kell lennie. A jobboldali $\partial_i j^i$ kifejezés azonban nem azonosan zérus, hiszen könnyen megadható olyan töltés- és áramsűrűség, amelynél nem tűnik el. Ha azonban ezeket a sűrűségeket (24.15) jobboldalára beírjuk, $\partial_i \partial_j F^{ij} \equiv 0$ következtében önellentmondó egyenletrendszerre jutunk. A $\partial_i j^i = 0$ lokális töltésmegmaradás ilymódon a Maxwell-egyenletek *integrálhatósági feltétele*, ezért a Maxwell-egyenletek mellett nem szükséges még külön is posztulálni.

C) A Maxwell-egyenletek a pszeudoriemann téridőben.

Görbült téridőben a (24.15) csak akkor marad tenzoregyenlet, ha a parciális deriválást kovariáns deriválással helyettesítjük. A (24.16)-nál erre nincs szükség, mert a 7. fejezet végén megmutattuk, hogy a baloldal — annak ellenére, hogy parciális deriválásokat tartalmaz — harmadrendű kovariáns tenzor. Ennek következtében ez az egyenlet *általánosan invariáns*, azaz tetszőleges koordináta transzformációkkal szemben megőrzi a matematikai alakját. Az általános relativitáselméletben tehát a Maxwell-egyenletek a következők:

$$\nabla_j F^{ij} = -\mu_0 j^i \quad (24.18)$$

$$\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0 \quad (i \neq j \neq k). \quad (24.19)$$

A (24.18) baloldalát más alakban is fel lehet írni. A

$$\nabla_j F^{ij} = \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i F^{kj} + \Gamma_{jk}^j F^{ik} \quad (24.20)$$

jobboldalán a második tag Γ_{jk}^i szimmetriája és F^{kj} antiszimmetriája miatt zérus, a harmadikban pedig alkalmazhatjuk a (24.7) képletet. Így

$$\nabla_j F^{ij} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} F^{ij})}{\partial x^j}. \quad (24.21)$$

Ezt felhasználva (24.18) a

$$\frac{\partial(\sqrt{-g} F^{ij})}{\partial x^j} = -\mu_0 \sqrt{-g} j^i \quad (24.22)$$

alternatív formába írható át.

A (24.18) tenzoregyenlet, amely vagy minden koordinátarendszerben igaz, vagy egyikben sem, azonban a matematikai formája nem ugyanaz minden koordinátarendszerben. Ez a (24.22)-ből látszik világosan: Az egyenletben ugyanis explicite szerepel a metrikus tenzor determinánsa, amely a különböző koordinátarendszerekben különböző módon függ a koordinátáktól. Az ilyen tulajdonságú tenzoregyenleteket *általánosan kovariánsnak* hívják.

Ha (24.22)-t x^i szerint parciálisan deriváljuk, a baloldalon nullát, a jobboldalon pedig (24.6) szerint az áramsűrűség kovariáns divergenciáját kapjuk. Ezért a görbült téridőben is igaz, hogy a töltésmegmaradás a Maxwell-egyenletek integrálhatósági feltétele.

A (24.18) azonban a (24.15)-nek nem az egyedül lehetséges olyan általánosítása, amely (1) sík téridőben a (24.15)-be megy át és (2) a töltésmegmaradás az integrálhatósági feltétele. Egy másik ugyanilyen tulajdonságú általánosítás például a $\nabla_j(F^{ij} + \alpha R^{ijkl} F_{kl}) = -\mu_0 j^i$ egyenlet, amelyben α egy tetszőleges hosszúságnégyzet dimenziójú állandó. A ∇_j operátor itt is antiszimmetrikus tenzorra hat, és mivel (24.20) tetszőleges antiszimmetrikus tenzorra érvényes, ez az egyenlet is átírható (24.22) alakba és ezért belőle is következik a töltésmegmaradás.

Ha azonban az ekvivalencia-elvet is figyelembe vesszük, ilyen általánosításra nincs lehetőség. Az elv ugyanis azt követeli meg, hogy a \mathcal{G} időszerű geodetikuskhoz rögzített lokális inerciarendszerekben Minkowski koordinátákban a Maxwell-egyenletek a speciális relativitáselméletben megismert (24.15)-(24.16) alakjukban legyenek érvényesek. Az (24.18) alak a $\Gamma_{jk}^i(\mathcal{G}) = 0$ következtében eleget tesz ennek a feltételnek. A Riemann-tenzort tartalmazó általánosítások azonban megsértik az ekvivalencia-elvet, mert $R^i{}_{jkl}(\mathcal{G}) \neq 0$.

Megállapíthatjuk tehát, hogy az ekvivalencia-elv az, amely lehetővé teszi a Maxwell-egyenletek *egyértelmű* általánosítását pszeudoriemann téridőre. Ez a konklúzió érvényes minden olyan fizikai törvényre, amelyet elsőrendű parciális differenciálegyenletekkel lehet matematikailag megfogalmazni.

25. Az energia-impulzus tenzor

Ebben a fejezetben a speciális relativitáselmétről lesz szó. Csak a fejezet legvégén utalunk majd rá, hogy az általános relativitáselméletben milyen módosításokra van szükség.

Az előző fejezet A. pontjában az áramsűrűséggel kapcsolatban megállapítottuk, hogy a relativitáselmélet szerint a megmaradási tételek lokálisak, kontinuitási egyenlet írja le őket. Foglalkozzunk most az energiamegmaradással. A kontinuitási egyenlet ekkor a w energiasűrűséget és az \vec{s} energiaáram-sűrűséget tartalmazza:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div } \vec{s} = 0. \quad (25.1)$$

Az energia csak zárt rendszerben marad meg, ezért $w(\vec{r}, t)$ -nek tartalmaznia kell az összes energiafajtát, amely a t pillanatban az \vec{r} pontban jelen van, és természetesen ugyanez vonatkozik az $\vec{s}(\vec{r}, t)$ -re is. Az áramsűrűség tulajdonságai alapján arra gondolhatnánk, hogy a négy (cw, \vec{s}) komponens négyesvektort alkot, de ez nincs így. Az energiasűrűség és a részecskesűrűség (vagy a töltéssűrűség) között ugyanis van egy egészen alapvető különbség: Egy adott dv térfogatelemben a $\rho \cdot dv$ részecskeszám (vagy töltés) invariáns ($\rho \cdot dv = \rho' \cdot dv'$), a $w \cdot dv$ energia ezzel szemben a térfogatelemben felhalmozott négyesimpulzus null-komponensének c -szerese (ezért $w \cdot dv \neq w' \cdot dv'$)³⁴. Ahhoz, hogy ez utóbbit az egyik koordinátarendszerből a másikba átszámíthassuk,

³⁴A ρ és a w transzformációja közötti különbség teljesen nyilvánvalóvá válik, ha $\rho \cdot dv$ -n egy dv térfogatú kisméretű test atomjainak a számát, $w \cdot dv$ -n pedig az energiáját értjük. Az atomok száma teljesen független a koordinátarendszer megválasztásától, az energia azonban megváltozik, ha az új koordinátarendszerben más lett a test mozgásállapota.

a térfogatelem Lorentz-kontrakcióján kívül az ott felhalmozott $\vec{g} \cdot dv$ impulzust is figyelembe kell venni.

A \vec{g} vektor három komponense egy-egy *impulzussűrűség*: g_x az x -irányú, g_y és g_z az y és z -irányú impulzus sűrűsége. Zárt rendszerben az impulzus komponensei megmaradó mennyiségek, és ahhoz, hogy a megmaradásuk lokális legyen, figyelembe kell vennünk mindhárom impulzussűrűség áramsűrűségét, amelyeket $\vec{\sigma}_x$, $\vec{\sigma}_y$, $\vec{\sigma}_z$ -vel fogunk jelölni. Az x -irányú impulzus megmaradását leíró kontinuitási egyenlet például a következő:

$$\frac{\partial g_x}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\sigma}_x = 0, \quad (25.2)$$

vagy részletesebben

$$\frac{\partial g_x}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0.$$

Hasonlóan írható fel a kontinuitási egyenlet az y és a z komponensre is.

Összesen 16 mennyiségünk van (négy sűrűség és négy, egyenként három komponensű számláló áramsűrűség), amelyeket célszerű 4×4 -es mátrixként felírni:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} w & s_x/c & s_y/c & s_z/c \\ cg_x & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ cg_y & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ cg_z & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (25.3)$$

A c -ket úgy helyeztük el, hogy minden mátrixelem energiasűrűség dimenziójú legyen. Mint rendesen, a T^{ij} első indexe a sorindex. Az első sort és oszlopot nulladiknak tekintjük (mert $i, j = 0, 1, 2, 3$).

A T^{ij} minden sorában a nulladik elem valamilyen sűrűség (vagy annak c -szerese), a többi három pedig a hozzá tartozó áramsűrűség. Ezek a mennyiségek zárt rendszerekre mind megmaradnak, ezért minden i -hez tartozik egy kontinuitási egyenlet:

$$\partial_j T^{ij} = 0. \quad (25.4)$$

$i = 0$ -nál ez a képlet a (25.1) energiamegmaradással, $i = 1$ -nél a (25.2)-vel egyezik meg. A (25.4) és a (24.5) összevetése azt sugallja, hogy T^{ij} második indexe éppen úgy kontravariáns vektorindex, mint a \mathbf{j} áramsűrűség felső indexe. Az előző fejezetben láttuk, hogy egy sűrűség és a hozzá tartozó áramsűrűség négyesvektor jellege szorosan összefügg az elemi térfogat Lorentz-kontrakciójával, ami természetesen minden áramsűrűségnél fellép.

Térjünk át most a sorokról a nulladik oszlopra. Ha a T^{i0} elemeket dv -vel megszorozzuk, az elemi térfogatban felhalmozott négyesimpulzus komponenseit (pontosabban ezek c -szeresét) kapjuk. Ebből már sejthető, hogy T^{ij} első indexe is kontravariáns vektorindex.

Mindezek alapján T^{ij} -t másodrendű kontravariáns tenzornak kell tekintenünk, amelyet *energia-impulzus tenzornak* neveznek. Az energia-impulzus tenzor a fizika egyik legfontosabb fogalma.

A rendszer energiáját és impulzusát a

$$W = \int w dv = \int T^{00} dv \quad p_\alpha = \int g_\alpha dv = \frac{1}{c} \int T^{\alpha 0} dv \quad (25.5)$$

integrálok határozzák meg, amelyekben a teljes térre integrálunk. Ezek a mennyiségek megmaradnak. A bizonyítás ugyanúgy történik, mint a részecskeszám megmaradásának igazolása a 24. fejezet A. pontjában. A $\mathbf{P} = (P^0, P^x, P^y, P^z) = (W/c, p_x, p_y, p_z)$ a rendszer teljes négyesimpulzusa.

A $\sigma_{\alpha\beta}$ tenzor fizikai jelentésének tisztázásához jelöljük ki egy v térfogatot és számítsuk ki a térfogatot kitöltő közeg impulzusának változási sebességét a

$$\frac{d}{dt} \int_v g_\alpha dv = \int_v \frac{\partial g_\alpha}{\partial t} dv = - \int_v \operatorname{div} \vec{\sigma}_\alpha dv = - \int_s (\vec{\sigma}_\alpha \cdot \vec{n}) ds. \quad (25.6)$$

képlet segítségével. Az átalakításoknál a kontinuitási egyenletet, valamint a Gauss-tételt használtuk. Az s a v tartomány határfelülete, amelynek külső normálisa \vec{n} .

Mivel $\vec{\sigma}_\alpha$ az impulzussűrűség α komponensének az áramsűrűsége, a $(\vec{\sigma}_\alpha \cdot \vec{n})$ az egységnyi felületen időegység alatt *távozó* impulzus α komponensével egyenlő. Az integrál és a negatív előjel következtében a jobboldal az egységnyi idő alatt *beáramló* teljes impulzus α komponense.

Ennek a beáramló impulzusnak (az impulzus áramsűrűségének általában) két lehetséges formája van: Történhet erőhatás vagy konvekció útján. Rugalmas közegekben az erőhatás útján történő impulzusáramsűrűség a *feszültség*. Ez definíció szerint akkor pozitív, amikor a külső normális irányában hat, ezért ekkor a $\sigma_{\alpha\beta}$ -ban az erőhatást figyelembe vevő rész a rugalmasságtanból ismert feszültségtenzor *negatívja*. Folyadékokban és gázokban az erőhatást nyomásként fogjuk fel, amely mindig pontosan a belső normális irányában hat. Ekkor $\sigma_{\alpha\beta} = +p\delta_{\alpha\beta}$, mert (25.6) utolsó alakjában a negatív előjel az \vec{n} külső normálisból $-\vec{n}$ belső normálist csinál.

Első példaként írjuk fel a $\vec{V}(x, y, z, t)$ sebességgel áramló ideális folyadék energia-impulzus tenzorát nemrelativisztikus közelítésben (vagyis a V^2/c^2 rendű tagok elhanyagolásával):

$$T_f^{ij} = \begin{pmatrix} \rho(V^2/2 + c^2 + u) & \rho(V^2/2 + c^2 + h)V_x/c & \rho(V^2/2 + c^2 + h)V_y/c & \rho(V^2/2 + c^2 + h)V_z/c \\ c \cdot \rho V_x & \rho V_x^2 + p & \rho V_x V_y & \rho V_x V_z \\ c \cdot \rho V_y & \rho V_y V_x & \rho V_y^2 + p & \rho V_y V_z \\ c \cdot \rho V_z & \rho V_z V_x & \rho V_z V_y & \rho V_z^2 + p \end{pmatrix} \quad (25.7)$$

A $w = \rho(V^2/2 + c^2 + u)$ energiasűrűség a mozgási, a nyugalmi és a nemrelativisztikus belső energia összege, amelyben u az egységnyi *tömegre* jutó nemrelativisztikus belső energia. Azt váránk, hogy az energiaáram sűrűsége $w\vec{V}$ -vel egyenlő, de a w helyén a $\rho(V^2/2 + c^2 + h)$ kifejezés szerepel, amelyben

$$h = u + p/\rho \quad (25.8)$$

az egységnyi tömegre jutó *entalpia*³⁵.

A magyarázathoz írjuk fel (25.1)-t integrális alakban és a jobboldalon \vec{s} -t helyettesítsük be (25.7)-ből és (25.8)-ból:

$$\frac{d}{dt} \int_v w dv = - \int_s (w\vec{V}) \cdot \vec{n} ds + \int_s (-p\vec{n}) \cdot \vec{V} ds.$$

A baloldalon az energia növekedési sebessége áll a kijelölt v térfogatban. A jobboldal mutatja, hogy ez két összetevőre vezethető vissza. Az első a w energia beáramlási sebessége, a második pedig a nyomás időegység alatt végzett munkája a térfogatba beáramló közegen. Ha \vec{s} -ben a h entalpia helyett az u belső energiát használnánk, ez utóbbi tag hiányozna.

A $\sigma_{\alpha\beta}$ komponensek fizikai jelentése nyilvánvaló: A σ_{xy} komponens például $g_x V_y$ -nal egyenlő, ami az x irányú impulzussűrűség y irányú áramsűrűsége. Ez tisztán konvektív járulék, amit az áramló közeg szállít magával. A σ_{xx} -ben a $g_x V_x$ konvektív járulékon kívül a nyomás hatását is figyelembe kell venni az impulzusáramlásra, amint azt a (25.6) képlet kapcsán tisztáztuk.

³⁵Vegyük figyelembe, hogy $1/\rho$ az egységnyi tömegre jutó (fajlagos) térfogattal egyenlő, és a V térfogatú közeg entalpiája $H = U + pV$.

A (25.7) mintájára a nyugvó ideális gáz energia-impulzus tenzorát is felírhatjuk nemrelativisztikus közelítésben. Az ideális gáz attól ideális, hogy a részecskék közötti kölcsönhatás potenciális energiája elhanyagolható, ezért az energia-impulzus tenzor komponenseit egyedül a molekulák sebességeloszlása határozza meg.

A (25.7)-beli \vec{V} most a sebességeloszlás átlaga, amely nyugvó gáz esetében nullával egyenlő. Az energiasűrűség a nyugalmi és az átlagos mozgási energia összege:

$$T_g^{00} = \rho c^2 + \frac{1}{2} \overline{\rho v^2}.$$

$\frac{1}{2} \overline{v^2} = u$ az egységnyi tömegre jutó belső energia sűrűsége a (nemrelativisztikus) termodinamikában, a felhúzás pedig átlagolást jelent a molekulák sebességeloszlására. A g alulindex az ideális gázra utal.

Az ideális gázban továbbá $s_x = \rho(c^2 + h)\bar{v}_x$. Nyugvó gázban $\bar{v}_x = V_x = 0$, ezért $T_g^{0\alpha} = 0$.

Az impulzussűrűség x komponense $g_x = \rho\bar{v}_x = 0$, és így $T_g^{\alpha 0} = 0$.

A $\sigma_{\alpha\beta}$ fizikai jelentése a $g_\alpha = \rho v_\alpha$ impulzussűrűség áramának β komponense, ezért $\sigma_{\alpha\beta} = \overline{\rho v_\alpha v_\beta}$. De nyugvó gázban kitüntetett irány hiányában termodinamikai egyensúlyban $\alpha \neq \beta$ esetén $\overline{v_\alpha v_\beta} = 0$, míg $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$. Így

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \frac{1}{3} \overline{\rho v^2} = \frac{2}{3} \rho u.$$

A $\sigma_{\alpha\beta}$ ílymódon diagonális mátrix, és az ideális gáz $E = \frac{3}{2} pV$ állapotegyenlete, valamint a $\rho u = E/V$ következtében a diagonális elemei a nyomással egyenlők, ahogy várható.

Nyugvó közeg esetében tehát

$$T_{\text{nyugvó}}^{ij} = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (25.9)$$

amelyben $w = \rho(c^2 + u)$. Amennyiben a közeg ideális gáz, a nyomás és a belső energia között fennáll a $p = \frac{2}{3} \rho u$ állapotegyenlet.

Harmadik példánk az elektromágneses mező energia-impulzus tenzora. Az elektrodinamikából ismeretes, hogy

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{\mu_0}{2} H^2, \\ \vec{s} &= (\vec{E} \times \vec{H}), \\ \vec{g} &= \frac{1}{c^2} (\vec{E} \times \vec{H}) = (\vec{D} \times \vec{B}), \\ \sigma_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} w - \epsilon_0 E_\alpha E_\beta - \mu_0 H_\alpha H_\beta. \end{aligned} \right\} \quad (25.10)$$

Az \vec{s} a Poynting-vektor, $\sigma_{\alpha\beta}$ pedig a Maxwell-féle feszültségtenzor negatívja.

Az F_{ij} tértenzor segítségével ezek az összefüggések egyetlen képletbe tömöríthetők:

$$T_{em}^{ij} = \epsilon_0 c^2 \left(\frac{1}{4} \eta^{ij} F_{kl} F^{kl} - F^{ik} F^j_{.k} \right). \quad (25.11)$$

Ennek alapján könnyen igazolható, hogy az elektromágneses mező energia-impulzus tenzora *spúrtalan*:

$$T_{em} \equiv T_{em i}^i = 0. \quad (25.12)$$

Termodinamikai egyensúlyban lévő sugárzási térben (*hőmérsékleti sugárzás*) az energia-impulzus tenzornak megint (25.9) alakúnak kell lennie, mert ebben a fizikai rendszerben sincs kitüntetett irány. Az energiasűrűség ekkor természetesen $(\epsilon_0 \overline{E^2}/2 + \mu_0 \overline{H^2}/2) \equiv w_r$. A (25.12) következtében azonban $T_0^0 + T_x^x + T_y^y + T_z^z = 0$. Minkowski-metrikában $T_0^0 = T^{00} = w_r$, $T_x^x = -T^{xx} = -\sigma_{xx} = -p$ stb., ezért $w_r = 3p$. Hőmérsékleti sugárzásnál ez az állapotegyenlet felel meg az ideális gáz $\rho u = \frac{3}{2}p$ állapotegyenletének.

Van-e általános recept az energia-impulzus tenzor meghatározására? Ha ismerjük a rendszer Lagrange-függvényét, akkor igen, de erre az eljárásra nem térünk ki.

Az energia-impulzus tenzor fontos tulajdonsága, hogy *szimmetrikus*

$$T^{ij} = T^{ji}. \quad (25.13)$$

A T_f^{ij} , T_g^{ij} , T_{em}^{ij} rendelkezik ezzel a tulajdonsággal³⁶. A 3×3 -as $T^{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta}$ almátrix szimmetriája a feszültségtenzor jól ismert tulajdonsága és annak következménye, hogy az impulzusmomentum megmaradását is kontinuitási egyenlet írja le (az impulzusmomentum megmaradási törvénye is lokális).

A $T^{0\alpha} = T^{\alpha 0}$ egyenlőség azt fejezi ki, hogy a *stacionér zárt rendszerek* teljes \vec{p} impulzusa mindig nulla (vagyis egy zárt rendszernek csak akkor lehet nullától különböző impulzusa, ha mozog). Valóban, zárt rendszerben fennáll a (25.1) reláció. Ha a rendszer még stacionér is, akkor $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ és ezért $\text{div } \vec{s} = 0$. Ha az energia-impulzus tenzor szimmetrikus, akkor $\vec{s}/c = c\vec{g}$, tehát $\text{div } \vec{g} = 0$. De akkor \vec{p} -nek egy tetszőleges \vec{n} egységvektorra vetett $\vec{p} \cdot \vec{n}$ vetülete zérus, ugyanis

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{n} &= \int (\vec{n} \cdot \vec{g}) dv = \int (\text{grad}(\vec{n} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{g}) dv = \\ &= \int [\text{div}((\vec{n} \cdot \vec{r})\vec{g}) - (\vec{n} \cdot \vec{r}) \text{div } \vec{g}] dv. \end{aligned} \quad (25.14)$$

Az utolsó integrál második tagja $\text{div } \vec{g} = 0$ miatt zérus, az első pedig a Gauss-tétel segítségével végtelen sugarú gömbre vett felületi integrállá alakítható, amelyen minden véges kiterjedésű rendszer \vec{g} impulzus sűrűsége zérus. Így $\vec{p} \cdot \vec{n} = 0$, amiből \vec{n} tetszőlegessége miatt következik $\vec{p} = 0$.

Az elmondottak többsége nyilvánvaló módosítások után érvényes marad az általános relativitáselméletben is. A (25.4) helyébe a

$$\nabla_i T^{ij} = 0 \quad (25.15)$$

képlet lép, a (25.11)-ben pedig a Minkowski-szimbólumot a metrikus tenzorral kell helyettesíteni. A (25.5) képletek azonban a gravitációs energia és impulzus miatt komolyabb változtatást igényelnek, de ezzel a kérdéskörrel nem tudunk foglalkozni.

26. Az Einstein-egyenlet

Mindeddig nem foglalkoztunk azzal a kérdéssel, hogy a tömegek milyen törvény szerint alakítják maguk körül a téridő geometriáját. Az Einstein-egyenlet erre a kérdésre ad választ.

³⁶A T_f esetében a szimmetria is csak $o(1/c^2)$ pontossággal teljesül.

Newton gravitációs elméletében az analóg probléma az adott ρ tömegeloszláshoz tartozó Φ gravitációs potenciál megkeresése. Az elmélet szerint a két mennyiséget a

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \quad (26.1)$$

Poisson-egyenlet kapcsolja össze egymással, amelynek végtelenben eltűnő megoldása a

$$\Phi(\vec{r}, t) = -G \int d^3x' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (26.2)$$

integrál. Az integrálhoz természetesen csak az az \vec{r}' tartomány ad járulékot, amelyben a tömegsűrűség különbözik zérustól. Ha az \vec{r} megfigyelési pont nagyon messze van a tömegeloszlástól, akkor az ilyen \vec{r}' pontokra $|\vec{r} - \vec{r}'| \approx |\vec{r} - \vec{R}(t)|$, ahol $\vec{R}(t)$ a tömegeloszlás egy belső pontjának a koordinátája a t pillanatban. Ekkor

$$\Phi(\vec{r}, t) = -\frac{GM}{|\vec{r} - \vec{R}(t)|} \quad (26.3)$$

az \vec{R} -ben lévő M tömegű tömegpont gravitációs potenciálja. Abban a speciális esetben, amikor a tömegpont az origóban nyugszik

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{GM}{r}. \quad (26.4)$$

A 19. fejezetben láttuk, hogy amikor $\Phi/c^2 \ll 1$, a gravitációs erő hatása helyettesíthető a téridő geometriájának módosításával úgy, hogy g_{00} -t, amely a speciális relativitáselméletben 1-el egyenlő, $\left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)$ -re változtatjuk. Ha nem a Φ -t, hanem g_{00} -t tekintjük alappmenyiségnek, (26.1)-t a

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^2} \rho \quad (26.5)$$

alakban célszerű felírunk.

A (26.3), (26.4) egyenletekben M a newtoni gravitációs mezőt létrehozó test súlyos tömege. Az általános relativitáselméletben csak egyfajta tömeg van, ezért M -n ezt kell értenünk. De van egy másik lehetőség is: Az, hogy ne a tömeget, hanem az energiát tekintsük a gravitáció forrásának, amely egy nyugvó M tömegű test esetében az Mc^2 nyugalmi energiával egyenlő. Ha valóban ez a korrekt felfogásmód, akkor (26.5) jobboldalán a ρ -t $w/c^2 = T_{00}/c^2$ -ként kell értelmezni, amelynek a *nyugvó* testre vett integrálja a tömeg.

A döntő érv, amely emellett az interpretáció mellett szól az, hogy az energiasűrűség eleget tesz egy lokális megmaradási törvénynek — a (24.3) kontinuitási egyenletnek —, a tömegsűrűség azonban csak a newtoni fizikában elégít ki kontinuitási egyenletet, a relativitáselméletben nem. Képzeljük el, hogy a (26.3) vagy a (26.4) képletet egy izolált mikrorészecskére, mondjuk egy radioaktív ${}_Z X^A$ atommagra alkalmazzuk, amely α -részecske kibocsátásával a ${}_{Z-2} Y^{A-4}$ magra bomlik. A bomlás pillanatában a rendszer tömege m_X -ről ($m_Y + m_\alpha$)-ra csökken, aminek következtében a gravitációs potenciál a bomlás helyétől tetszőlegesen nagy r távolságra hirtelen $-Gm_X/r$ -ről $-G(m_Y + m_\alpha)/r$ -re nő. Az ilyen végtelen sebességgel terjedő hatás azonban elkerülhető, ha a gravitáció forrása nem a tömegsűrűség, hanem az energiasűrűség, mert a bomlás során az energia lokálisan megmarad (a nyugalmi energia egy része alakul át mozgási energiává).

A (26.5)-t tehát logikus átírni a

$$\Delta g_{00} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \quad (26.6)$$

alakba. A feladatunk az, hogy ennek olyan általánosítását találjuk meg, amely tenzoregyenlet, és newtoni határesetben ezt az egyenletet — vagyis (26.1)-t — adja vissza.

Első pillanatra a feladat egyszerűnek látszik: Nem kell mást tenni, mint a 00 indexpárt ij -vel helyettesíteni, és a Δ Poisson-operátort négydimenziós megfelelőjével, a $\square = \nabla^i \nabla_i = g^{ij} \nabla_i \nabla_j$ d'Alembert operátorral helyettesíteni. De ez a próbálkozás értelmetlen egyenletre vezet, mert $\nabla_i g_{jk} = 0$ következtében $\square g_{ij} = 0$.

A metrikus tenzornak ez a tulajdonsága reménytelenné teszi annak a kifejezésnek próbálgatással történő megtalálását, amely g_{ij} maximálisan másodrendű parciális deriváltját tartalmazza és (26.6) baloldalának az általánosítása lehetne. Mivel (26.6) általánosításában a jobboldalnak T_{ij} -t kell tartalmaznia T_{00} helyett, a keresett kifejezésnek szimmetrikus kétindexes tenzornak kell lennie.

A Riemann-geometria elmélete azonban tálcán kínál *egy* ilyen kifejezést, az R_{ij} Ricci-tenzort, amelyből képezhető még egy, a $g_{ij}R$. Szóba jöhetnének még az R_{ij} hatványait tartalmazó tenzorok, mint pl. a $g^{kl}R_{ik}R_{lj}$, de ezek a metrikus tenzor második parciális deriváltját az elsőnél magasabb hatványon tartalmazzák, és ezért teljesen valószínűtlen, hogy a newtoni limeszben vissza tudják adni (26.6)-t³⁷.

Van természetesen még egy másodrendű szimmetrikus tenzor, ami szóba jöhet: maga a g_{ij} . Így végül arra a következtetésre jutunk, hogy a keresett egyenlet baloldalán az R_{ij} , a $g_{ij}R$ és a g_{ij} konstans koefficienssekkel képzett kombinációja állhat. Ha azonban az R_{ij} -t szorzó koefficiens inverzével végigszorozzuk az egyenletet, akkor az R_{ij} koefficiense 1 lesz, viszont a jobboldalon jelenik meg egy szorzófaktor. Ezért az általánosság megszorítása nélkül kereshetjük az egyenletet az

$$R_{ij} + \beta R g_{ij} - \Lambda g_{ij} = \kappa T_{ij}$$

alakban, amelyben β , Λ és κ meghatározásra váró konstansok.

Célszerűbbnek fog bizonyulni azonban R_{ij} helyett a (14.8)-ban felírt

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$$

Einstein-tenzonnal dolgozni, ezért inkább a

$$G_{ij} + \alpha R g_{ij} - \Lambda g_{ij} = \kappa T_{ij} \quad (26.7)$$

alakból indulunk ki.

Az α -t azonban nullának kell választanunk. Ezt a következő négylépéses gondolatmenettel láthatjuk be:

1) A téregyenletet átírjuk vegyes komponensekre:

$$G_j^i + \alpha R \delta_j^i - \Lambda \delta_j^i = \kappa T_j^i.$$

2) Képezzük (26.7) mindkét oldalának kontrakcióját. Mivel $\delta_i^i = 4$ és

$$G_i^i = R_i^i - \frac{1}{2} \delta_i^i R = -R, \quad (26.8)$$

a Ricci-skalárra az

$$R = \frac{\kappa T + 4\Lambda}{4\alpha - 1} \quad (26.9)$$

kifejezést kapjuk, amelyben $T = T_i^i$.

3) A ∇_i operáció alkalmazásával vegyük a vegyes komponensekben felírt téregyenlet négyesdivergenciáját:

$$\nabla_i G_j^i + \alpha \nabla_j R = \kappa \nabla_i T_j^i.$$

³⁷Ennek a sejtésnek a helyességét Cartan az Einstein-egyenlet felállítását követően hét évvel be is bizonyította.

A (14.8) Bianchi-azonosság szerint $\nabla_i G_j^i = 0$, az R skalárra pedig

$$\nabla_j R = \partial_j R \stackrel{(26.9)}{=} \frac{\kappa}{4\alpha - 1} \partial_j T,$$

ezért

$$\frac{\alpha}{4\alpha - 1} \partial_j T = \nabla_i T_j^i.$$

4) Térjünk át végül lokális inerciarendszerre, ahol ez az egyenlet

$$\partial_i T_j^i = \frac{\alpha}{4\alpha - 1} \partial_j T$$

alakú. De az ekvivalencia-elv alapján (25.4) szerint a baloldalnak nullának kell lennie, és mivel arra nincs általában ok, hogy $\partial_j T$ tűnjön el, az α -nak kell zérusnak lennie. Így végül az

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R - \Lambda g_{ij} = \kappa T_{ij} \quad (26.10)$$

egyenletre jutunk.

A Λ konstans a *kozmológiai állandó*. Ha abból a feltételezésből indulunk ki, hogy az üres térben ($T_{ij} = 0$) a téridő görbüetlen ($R_{ij} = R = 0$), akkor az egyenletben $\Lambda = 0$ veendő. Ha azonban megengedjük, hogy az "üres" Világegyetemnek is lehet görbülete, akkor a kozmológiai állandó az egyenlet olyan paramétere, amelyet tapasztalati úton vagy valamilyen elméleti megfontolásból (ld. a 42. fejezetet) kell meghatározni. A "kozmológiai állandó" elnevezés arra utal, hogy ez a tag csak az Univerzumra mint egészre vonatkozó feladatokban játszik szerepet, a Naprendszer tárgyalásánál azonban elhagyható. Az egyenletből látszik, hogy a fizikai dimenziója az R dimenziójához hasonlóan inverz hosszúságnégyzet, és — mint a kozmológia tárgyalásánál látni fogjuk — $1/\sqrt{\Lambda} \approx 10^3 \text{ Mpc}$ az Univerzum leírásában fellépő karakterisztikus távolság³⁸. A Naprendszer tárgyalásánál az egyenletnek ezt a tagját ugyanazért nem kell figyelembe venni, amiért egy ház tervezésénél nem kell számításba venni a Föld sugarát. A továbbiakban ezért a gravitációs téregyenletet az

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \kappa T_{ij} \quad (26.11)$$

alakban fogjuk használni mindaddig, amíg át nem térünk a kozmológia tárgyalására.

Visszaadjuk-e ez az egyenlet a lassan mozgó testek határesetében Newton gravitáció elméletét? A kérdés megválaszolásához célszerű (26.11)-t kissé átalakítani. Ha mindkét oldalt kontraháljuk, $R = -\kappa T$ -t kapjuk, és ezt az egyenletbe visszahelyettesítve az

$$R_{ij} = \kappa \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right) \quad (26.12)$$

alternatív alakra jutunk.

A newtoni határesetre történő áttérés szempontjából lényeges, hogy dimenzióokból κ arányos $1/c^4$ -nel. Ez így látható be: A (26.11) szerint $[\kappa] = [R_{ij}]/[T_{ij}]$. Lokális Minkowski koordinátákban $[R_{ij}] = 1/m^2$ (14. fejezet), $[T_{ij}] = J/m^3 = kg/m \cdot s^2$, tehát $[\kappa] = s^2/m \cdot kg$. A κ kifejezésére csak két természeti állandó áll rendelkezésre, a gravitációs állandó és a fénysebesség, ezekkel kell a *három* mértékegység, az m , a kg és a s hatványát egyenlővé tenni a két oldalon. Mivel $[G] = N \cdot m^2/kg^2 = m^3/kg \cdot s^2$, ezért

$$\kappa = k \cdot \frac{G}{c^4},$$

³⁸1 Mpc \equiv 1 megaparsec = 3,262 millió fényév.

ahol k dimenziótlan konstans.

Newton gravitáció elmélete a $v \ll c$, vagy — másképpen — a $c \rightarrow \infty$ határesetnek felel meg. A G -t nyugvó testekre vonatkozó mérések alapján definiálták (Cavendish-kísérlet), ezért maga nyilván nem függ a fénysebességtől. A 19. fejezetből tudjuk, hogy a metrikus tenzorban a newtoni határesetnek az $1/c^2$ szerinti kifejtés első, $1/c^2$ -tel arányos tagja felel meg. Ami az energia-impulzus tenzort illeti, ehhez a legnagyobb járulékot a c^2 -tel arányos nyugalmi energia adja. A (26.12) szerkezete pont ennek a helyzetnek felel meg. Ha a jobboldalon T_{ij} és T vezető rendje c^2 , akkor R_{ij} -ben a vezető rend $1/c^2$, amely a metrikus tenzor $1/c^2$ -tel arányos járulékaiból számítható ki.

Írjuk fel (26.12)-t ebben a rendben. A jobboldalon előforduló g_{ij} -ket ekkor η_{ij} -vel kell közelíteni. A T_{ij} komponensei a $T_{00} = \rho c^2$ -n kívül nullák, ezért $T = \rho c^2$. Így (26.12) három egyenletre esik szét:

$$R_{200} = \frac{\kappa}{2} \rho c^2 \quad (26.13)$$

$$R_{2\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\kappa}{2} \rho c^2 \quad (26.14)$$

$$R_{2\alpha 0} = 0. \quad (26.15)$$

R_{ij} az $1/c^2$ -tel arányos járulék a Ricci-tenzorhoz. Legyen $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$, ahol h_{00} -ról tudjuk, hogy $1/c^2$ rendű és tegyük fel, hogy $h_{\alpha\beta}$ is $1/c^2$ rendű, $h_{\alpha 0}$ pedig $1/c^2$ -nél magasabb rendű ($1/c^3$ vagy ennél is magasabb). Alább ez a feltevés igazolódni fog.

Az R_{jl} -hez a (14.3) képlet h -ban lineáris tagjai adhatnak csak járulékot:

$$R_{2jl} = \frac{1}{2} \eta_{ik} [\partial_j \partial_k h_{il} + \partial_i \partial_l h_{jk} - \partial_j \partial_l h_{ik} - \partial_i \partial_k h_{jl}]. \quad (26.16)$$

A jobboldalon természetesen csak az $1/c^2$ rendű tagokat kell meghagyni. A képletben x^0 szerinti deriváltak is előfordulnak. A metrikus tenzor időfüggését az égitestek mozgása okozza, amely a newtoni határesetben lassú. Ezt úgy kell figyelembe venni, hogy a $\partial_0 = \frac{1}{c} \partial_t$ kifejezést $1/c$ rendűnek tekintjük és ezért R_{ij} számításánál a ∂_0 -t tartalmazó tagokat elhagyjuk.

Ha (26.13), (26.14), (26.15) baloldalát ezen a módon kifejezzük h_{ij} -n keresztül, az

$$\frac{1}{2} \Delta h_{00} = \frac{\kappa}{2} \rho c^2 \quad (26.17)$$

$$\frac{1}{2} [\nabla^2 h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \partial_\gamma h_{\gamma\beta} - \partial_\gamma \partial_\beta h_{\alpha\gamma} + \partial_\alpha \partial_\beta h_{\gamma\gamma} - \partial_\alpha \partial_\beta h_{00}] = \delta_{\alpha\beta} \cdot \frac{\kappa}{2} \rho c^2 \quad (26.18)$$

egyenleteket kapjuk (a kétszer előforduló görög index összegzést jelent 1,2,3-ra). A harmadik egyenlet $0 = 0$ -ként teljesül, mert $R_{2\alpha 0} = \frac{1}{2} [-\partial_\alpha \partial_\gamma h_{\gamma 0} + \Delta h_{\alpha 0}]$ és ez valójában $1/c^2$ -nél magasabb rendű kifejezés.

Mivel a vizsgált rendben $\Delta h_{00} = \Delta g_{00}$, a (26.17) nem más, mint a (26.5) egyenlet: A (26.11) tehát *tartalmazza* Newton gravitáció elméletét anélkül, hogy szándékosan beépítettük volna. A teljes formai egyezéshez csupán annyit kell tenni, hogy κ -t $8\pi G/c^4$ alakban írjuk, ami $k = 8\pi$ választásnak felel meg. Ez nem új fizikai feltevés, hanem csupán annak a megállapodásnak a fenntartása, hogy két nyugvó tömegpont közötti gravitációs erőben az $m_1 m_2 / r^2$ kifejezést szorzó számot (nem pedig ennek valahányszorosát) tekintjük gravitációs állandónak.

Így végül (26.11) a következő alakban írható:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}. \quad (26.19)$$

Ez a téregyenlet (*Einstein-egyenlet*) a geodetikus hipotézissel mint mozgásegyenlettel együtt alkotja az általános relativitáselméletet.

Megjegyezzük, hogy a jobboldalon az energia-impulzus tenzor az összes jelenlévő anyagtípus (részecskék és elektromágneses sugárzás) járulékát tartalmazza a gravitációs energián és impulzuson kívül. Az egyenlet analízise azt mutatja, hogy ez utóbbiakat az egyenlet baloldala tartalmazza implicit módon.

Mint látjuk, Einstein nem a newtoni elmélet korrekcióján keresztül jutott el az általános relativitáselmélethez. A newtoni elméletnek csupán néhány általános vonását használta fel. A (26.1) newtoni téregyenlet szerkezete az Einstein-egyenletben is tükröződik annyiban, hogy az egyenlet baloldala a térmennyiségre ható másodrendű differenciáloperátor, a jobboldala pedig a mező forrása. A forrás azonban átértelmezésre szorult: Nem a tömeg, hanem az energia-impulzus tenzor a gravitáció forrása. A baloldali differenciáloperátor lehetséges formáját a Riemann-geometria szinte egyértelműen determinálja, az einsteini megközelítés teljesítőképessége ebben mutatkozik meg a legélesebben. A matematikailag még fennmaradó lehetőségeket, amelyek a második parciális deriváltakat az elsónél magasabb hatványon tartalmazzák, a newtoni határesettel való egyezés követelménye szűri ki.

Ha a (26.19) Einstein-egyenlet kovariáns divergenciáját képezzük, a baloldalon a Bianchi-azonosság következtében azonosan nullát kapunk. Ha a T_{ij} kovariáns divergenciája nem lenne zérus, az egyenlet önellentmondó lenne, ezért a $\nabla_j T^{ij} = 0$ egyenlet az Einstein-egyenlet integrálhatósági feltétele. Lokális inerciarendszerben ez az energia és az impulzus lokális megmaradását fejezi ki, ami ilymódon az Einstein-egyenlet következménye. Az analógia a Maxwell-egyenlettel és a töltésmegmaradással nyilvánvaló.

Az Einstein-egyenlet általánosan invariáns abban az értelemben, ahogy ezt a terminust a 24. fejezetben definiáltuk. Az egyenlet azért nem lehet semmiképpen sem általánosan kovariáns, mert az általánosan kovariáns egyenletekben a metrikus tenzort ismertnek tekintjük, míg az Einstein-egyenletnek maga a g_{ij} metrika az ismeretlen. Az egyenlet általános invarianciájából következik, hogy *ha ismerjük az egyenlet valamilyen $g_{ij}(x)$*

megoldását, akkor ennek a megoldásnak minden $g_{k'l'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} g_{ij}$ koordinátatranszformáltja is megoldás. Az egyenlet tehát nem választ ki megoldásként egyetlen konkrét koordinátarendszert sem, hanem csak a koordinátarendszereknek azt a *halmazát*, amely a téridőn felvehető. Ezt viszont a téridő *belső geometriája* határozza meg. Ez a belső geometria az, amit az Einstein-egyenleten keresztül az energia-impulzus tenzor meghatároz.

Az Einstein-egyenletet általában együtt kell használni a különböző típusú részecskék és terek dinamikai egyenleteivel. Ha pl. a téridőben csak elektromágneses mező van, akkor a feladat teljes egyenletrendszere az Einstein-egyenletből és a (24.18), (24.19) Maxwell-egyenletekből áll ($j^i = 0$ mellett). Ezek összecsatolt egyenletek, mert az Einstein-egyenlet jobboldalán a (25.11) energia-impulzus tenzor áll, amely az F_{ij} elektromágneses tenzortól függ. A (24.18)-ban pedig szerepel a metrikus tenzor, amely eredetileg az Einstein-egyenlet ismeretlen. Ez az egyenletrendszer egészében általánosan invariáns annak ellenére, hogy az elektrodinamikában önmagában a (24.18) általánosan kovariáns egyenlet.

27. A centrálszimmetrikus statikus téridő

Az Einstein-egyenletek általános invarianciája következtében az egyenlet a téridő geometriáját határozza meg, és nem korlátozza azt, hogy a téridőn hogyan vegyük fel a koordinátarendszert. Logikus feltételezni, hogy egy gömbszimmetrikus statikus csillag körül a téridő geometriája olyan, hogy *felvehető* rajta olyan koordinátarendszer, amely ezt a szimmetriát tükrözi. Ezt a lehetőséget bizonyára célszerű kihasználni.

Ha egy pillanatra visszanyúlunk Newton gravitáció elméletéhez és a metrika helyett gravitációs potenciálra gondolunk, akkor ezek a tulajdonságok a gravitációs potenciálban úgy nyilvánulnak meg, hogy a potenciál független a t időtől és polárkoordinátákban a legegyszerűbb, mert csak egyetlen térkoordinátától, az r -től függ. Feltételezhetjük, hogy a metrikával ugyanez a helyzet: Ha a metrikus tenzor komponensei függetlenek t -től és csak r -től függenek, akkor az $r = 0$ origó egy gömbszimmetrikus statikus objektum középpontja. Ha

így gondolkozunk nem járunk messze az igazságtól. Csak azt kell még figyelembe venni, hogy az általános relativitáselméletben nem egyetlen $\Phi(r)$ függvényt, hanem a metrikus tenzor tíz komponensét kell kiszámítani.

Az Einstein-egyenlet megoldását mindenesetre azzal kezdjük, hogy a négy koordinátát t, r, ϑ, φ -nek nevezzük el. Ezzel azonban nem érünk el sokat, mert magában az egyenletben semmi sem utal arra, hogy a t időkoordináta, r, ϑ, φ pedig polárkoordináták. A koordináták természetét úgy lehet rögzíteni, hogy az ívelemnégyzet — a metrikus tenzor, — bizonyos tulajdonságait *előírjuk* és az Einstein-egyenletek olyan megoldásait keressük, amelyek az előírásnak eleget tesznek. Nyilván olyan előírással kell próbálkoznunk, amely megfelel az előző bekezdésben megfogalmazott várakozásnak.

Mindenekelőtt fel kell tennünk, hogy a metrika, amelyet megoldásként kapunk, megfelelő szignatúrájú (16. fejezet). Ebből kiindulva megállapíthatjuk, hogy az a koordináta, amelyet t betűvel jelölünk, akkor lesz az idő, ha a koordinátabázis $\mathbf{e}_{(t)}$ eleme időszerű négyesvektor. Mivel $\mathbf{e}_{(t)} \cdot \mathbf{e}_{(t)} = g_{tt}$, ez annyit jelent, hogy g_{tt} -nek pozitívnek kell lennie. Ezután megkövetelhetjük, hogy a g_{ij} -k ne függjenek t -től.

Egy csillag statikussága azonban többet jelent, mint a paramétereinek időbeli állandósága. Ha egy rögzített tengely körül állandó szögsebességgel forog, akkor a paraméterei időben állandók, mégsem statikus. Erre az esetre a stacionér elnevezést használjuk. A forgás ténye természetesen befolyásolhatja a csillag által létrehozott metrikát. Vezethet olyan járulékra a metrikus tenzorban, amely előjelet vált, amikor a forgás irányát az ellenkezőjére változtatjuk. Mivel a szögsebesség $\frac{d\varphi}{dt}$ -vel egyenlő, akkor is ugyanilyen változást kell kapnunk az ívelemnégyzetben, amikor dt -t $-dt$ -vel helyettesítjük. Nyilván a $2g_{tr}dtdr + 2g_{t\vartheta}dtd\vartheta + 2g_{t\varphi}dtd\varphi$ járulék ilyen tulajdonságú. A forgás természetesen befolyásolhatja az ívelemnégyzet többi részét is, de az bizonyos, hogy ha $g_{tr}, g_{t\vartheta}, g_{t\varphi}$ bármelyike különbözik zérustól, akkor a csillag forog³⁹. Statikus csillag téridejében ezért $g_{tr} = g_{t\vartheta} = g_{t\varphi} = 0$.

A gömbszimmetriát azzal a feltevéssel építjük be a keresett metrikába, hogy a $t = \text{konstans}$, $r = \text{konstans}$ egyenletekkel meghatározott kétdimenziós felület metrikája legyen egyenlő az r sugarú gömbfelület $r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \cdot d\varphi^2)$ metrikájával, azaz legyen

$$\mathbf{e}_{(\vartheta)} \cdot \mathbf{e}_{(\vartheta)} = g_{\vartheta\vartheta} = -r^2, \quad \mathbf{e}_{(\varphi)} \cdot \mathbf{e}_{(\varphi)} = g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2\vartheta, \quad g_{\vartheta\varphi} = 0$$

(a negatív előjel oka az, hogy a két bázisvektor térszerű). Az ívelemnégyzetnek ez a része határozza meg az r koordináta geometriai jelentését: A $t = \text{konstans}$, $r = \text{konstans}$ gömb felülete $4\pi r^2$ -el egyenlő (vagy a $t = \text{konstans}$, $r = \text{konstans}$, $\vartheta = \pi/2$ kör hossza $2\pi r$.)

A gömbszimmetriához az is hozzátartozik, hogy az r -koordinátavonalak legyenek ortogonálisak az $r = \text{konstans}$ gömbökre. A keresett megoldásra ezt a tulajdonságot is kirójuk:

$$\mathbf{e}_{(r)} \cdot \mathbf{e}_{(\vartheta)} = g_{r\vartheta} = 0 \quad \mathbf{e}_{(r)} \cdot \mathbf{e}_{(\varphi)} = g_{r\varphi} = 0.$$

Mindössze két komponens maradt rögzítetlenül, g_{tt} és g_{rr} . Amikor a következő fejezetben felírjuk az Einstein-egyenleteket, látni fogjuk, hogy ezeket már nem lehet önkényesen megválasztani. Azt azonban meg kell követelnünk, hogy — miután biztosítottuk az r koordináta megfelelő geometriai jelentését, — ezek az elemek csak r -től függjenek.

Célszerű a két tenzorkomponensre speciális jelölést bevezetni:

$$g_{tt} = c^2 \cdot A(r) \quad g_{rr} = -B(r). \quad (27.1)$$

³⁹A metrikában akkor is felléphetnek ilyen tagok, ha a csillag ugyan nem forog, de a koordinátarendszer forog. A (23.11) metrika esetében ez volt a helyzet. A (23.11)-ben az utal a koordinátarendszer forgására, hogy az ívelemnégyzet csak az $r' < c/\Omega$ véges sugarú körön belül érvényes. Attól a metrikától, amelyet ebben a fejezetben keresünk, megköveteljük, hogy az egész geometriai térben legyen érvényes. Ezért ha a $g_{t\alpha} = 0$ feltételt nem rónánk ki, biztosan forgó csillag téridejére jutnánk, amit *most* nem akarunk (ld. a 34. fejezetet).

Ha t helyett az $x^0 = ct$ időkoordinátát használjuk, akkor

$$g_{00} = A(r). \quad (27.2)$$

A szignatúra megköveteli, hogy mind $A(r)$, mind $B(r)$ legyen pozitív. Ezenkívül azt is elvárjuk, hogy a csillagtól végtelen távol a metrika tartson a sík téridő metrikájához polárkoordinátákban:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = 1 \quad \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1. \quad (27.3)$$

Végeredményben tehát a metrikát a

$$ds^2 = A(r) c^2 dt^2 - B(r) dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2) \quad (27.4)$$

alakban kereshetjük, a statikus centrálszimmetrikus téridőt pedig definiálhatjuk azzal, hogy ez olyan téridő, amelyben *felvehető* a koordináták úgy, hogy az ívelemnégyzet (27.4) alakú legyen. Azokat a koordinátákat, amelyekben a metrika (27.4) alakú, *Schwarzschild-koordinátáknak* nevezzük.

Az $A(r)$ geometriai jelentésének a megállapítására tekintsünk egy objektumot, amely a Schwarzschild-koordinátákban nyugszik (r, ϑ és φ egyaránt konstans). A $ds^2 = c^2 d\tau^2$ összefüggés alapján ekkor $d\tau = \sqrt{A(r)} \cdot dt$. Az $A(r)$ tehát a nyugvó órák sajátideje és a koordinátaidő közötti kapcsolatot határozza meg. Abból, hogy $r \rightarrow \infty$ -nél $A(r) \rightarrow 1$ következik, hogy a t Schwarzschild koordinátaidő a végtelen távoli megfigyelő sajátidejével egyezik meg.

Tekintsük most valamelyik r -koordinátavonalat (t, ϑ és φ konstans). Az ívhossz négyzete $dl^2 = B(r) dr^2$, ezért a koordinátavonal ($r, r + dr$) szakaszának a hossza nem dr -rel, hanem $dl = \sqrt{B(r)} \cdot dr$ -rel egyenlő. Ez nem mond ellent az r korábban megállapított geometriai jelentésének, amely szerint az $r =$ konstans gömb felszíne $4\pi r^2$ (a főkörök hossza $2\pi r$), hanem a $t =$ konstans geometriai tér görbültségének a következménye.

A (27.4) metrikához tartozó konnxiós koefficiensek a következők:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0r}^0 &= \frac{A'}{2A} \\ \Gamma_{00}^r &= \frac{A'}{2B} \quad \Gamma_{rr}^r = \frac{B'}{2B} \quad \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r = -\frac{r}{B} \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{r}{B} \cdot \sin^2 \vartheta \\ \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta = -\sin \vartheta \cos \vartheta \quad \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi = \text{ctg } \vartheta. \end{aligned} \quad (27.5)$$

A vessző r szerinti deriválást jelöl. A 0 és a t indexű komponensek átszámítása a fizikai dimenzió alapján nagyon egyszerű (4.9/2 feladat). Pl. $\Gamma_{tt}^r = c^2 \Gamma_{00}^r$.

28. A Schwarzschild-megoldás

Egy véges a sugarú statikus gömbszimmetrikus csillag téridejét az $r > a$ külső tartományban *Schwarzschild-téridőnek* nevezzük. Schwarzschild-koordinátákban a metrika a csillagon kívül is, belül is (27.4) alakú, de $A(r)$ és $B(r)$ a két esetben különbözik egymástól. A csillagon kívül vákuum van, ahol $T_{ij} = T = 0$, ezért $r > a$ -nál az Einstein-egyenlet *vákuummegoldását* kell megtalálnunk.

Célszerű a vákuumegyenlet vegyes komponensekben felírt

$$G_j^i = R_j^i - \frac{1}{2} \delta_j^i R = 0$$

alakját használni. A Ricci-tenzor komponenseit a 14. fejezet és a (27.5) alapján lehet felírni. A nemdiagonális komponensek mind nullák, ezért az Einstein-egyenletek a következők ($0, 1, 2, 3 \equiv ct, r, \vartheta, \varphi$):

$$G_t^t = \frac{1}{B} \left(\frac{B'}{rB} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (28.1)$$

$$G_r^r = -\frac{1}{B} \left(\frac{A'}{rA} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0, \quad (28.2)$$

$$G_\vartheta^\vartheta = G_\varphi^\varphi = -\frac{A''}{2AB} + \frac{A'}{4AB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{2rAB} + \frac{B'}{2rB^2} = 0 \quad (28.3)$$

Az $A(r)$ és a $B(r)$ meghatározásához elég az első két egyenlet. Az egyenletrendszer mégsem túlhatározott, mert levezethető variációs elvből⁴⁰, és a variációs egyenletek mindig kompatibilisek egymással. Ezért a $G_t^t = 0$, $G_r^r = 0$ egyenletekből kapható A , B biztosan nullává teszi G_ϑ^ϑ -t és G_φ^φ -t is.

A megoldás menete a következő: A (28.1)-et

$$-r \left(\frac{1}{B} \right)' - \frac{1}{B} + 1 = 0$$

alakban is írhatjuk. Ennek általános megoldása

$$\frac{1}{B} = 1 - \frac{C_1}{r},$$

ahol C_1 tetszőlegesen választható integrációs konstans. Ezután képezzük a

$$G_t^t - G_r^r = \frac{1}{rB} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = 0 \quad (28.4)$$

különbséget, amelyből

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0. \quad (28.5)$$

Ezt $(AB)' = 0$ alakban is fel lehet írni, innen $AB = C_2$ (a C_2 újabb konstans), és így

$$A = \frac{C_2}{B} = C_2 \left(1 - \frac{C_1}{r} \right).$$

A (27.3) követelményből $C_2 = 1$, és ha meg akarjuk tartani a gravitációs állandó elfogadott definícióját, akkor $C_1 = 2MG/c^2 = r_g$.

Így végül

$$A(r) = 1 - r_g/r \quad B = \frac{1}{1 - r_g/r}. \quad (28.6)$$

A csillag körül az ívelemnégyzet végleges alakja tehát a következő:

$$ds^2 = (1 - r_g/r)c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - r_g/r} dr^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2). \quad (28.7)$$

Ezt a metrikát *Schwarzschild-megoldásnak* nevezzük.

⁴⁰Hilbert megmutatta, hogy az Einstein-egyenletek az $L = R \cdot \sqrt{-g}$ Lagrange-függvényből származtathatók.

Ha a (28.7) egzakt megoldást összehasonlítjuk (17.11)-el látjuk, hogy a metrikus tenzor determinánsának az előjelével a $0 < r < r_g$ tartományban sincs probléma, mert $g \equiv \det g_{ij} = -1$. A szignatúra is mindenütt -2 . Az $r = r_g$ azonban mégis különleges, mert $g_{rr}(r_g) = \infty$. A $0 < r < r_g$ intervallumban továbbá sérül az a követelmény, hogy A és B legyen pozitív. Ebben a tartományban $g_{rr} = -B > 0$ (és $g_{tt} = A < 0$), ezért az előző fejezet érvelése szerint nem a t -t, hanem az r -t kell időkoordinátának tekinteni. Mivel a metrika függ r -től, ebben a tartományban a Schwarzschild-koordináták nem tükrözik a téridő statikusságát. A (28.7) megoldás azonban $r < r_g$ -nél is kielégíti az $G_i^j = 0$ Einstein-egyenletet.

Emlékezzünk most vissza, hogy r_g rendkívül kis sugár. A Nap esetében például alig 3 km, míg a Nap geometriai sugara $a \approx 700\,000$ km. Az $r = r_g$ -nél fellépő *Schwarzschild-szingularitásnak* tehát a Nap körüli téridő tartományban nincs jelentősége és a csillagoknál általában ez a helyzet. A csillagon belül pedig A -ra és B -re (28.7) már nem érvényes. (Az asztrofizikában természetesen a belső sztatikus gömbszimmetrikus megoldásokat is vizsgálják a csillag energia-impulzus tenzorára tett különböző feltevések alapján.)

A (27.5) felhasználásával könnyen megkaphatjuk a Schwarzschild-megoldáshoz tartozó konnexiós koefficienseket:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0r}^0 &= -\Gamma_{rr}^r = \frac{r_g}{2r(r-r_g)} \\ \Gamma_{tt}^r &= c^2 \Gamma_{00}^r = c^2 \frac{r_g(r-r_g)}{2r^3} & \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -(r-r_g) & \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -(r-r_g) \sin^2 \vartheta \\ \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta &= \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r} & \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin \vartheta \cdot \cos \vartheta & \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi &= \text{ctg } \vartheta. \end{aligned} \quad (28.8)$$

A Schwarzschild-megoldáshoz tartozó Riemann-tenzort legáttekinthetőbben az $R_{ij..}{}^{kl}$ típusú komponenseivel lehet felírni:

$$\begin{aligned} R_{01..}{}^{01} &= R_{23..}{}^{23} = -\frac{r_g}{r^3} \\ R_{02..}{}^{02} &= R_{03..}{}^{03} = R_{12..}{}^{12} = R_{13..}{}^{13} = \frac{r_g}{2r^3}. \end{aligned} \quad (28.9)$$

29. A fényelhajlás a Schwarzschild-metrikában

Emlékeztetünk rá, hogy a 22. fejezetben hogyan számítottuk ki a fényelhajlás szögét a Nap körül a közelítő metrikában. A

$$\mathbf{k}^2 = g^{ij} k_i k_j = (1 - r_g/r)^{-1} k_0^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 = (1 - r_g/r)^{-1} (\omega/c)^2 - k^2 = 0$$

egyenletet megoldottuk a $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ hullámszámmra:

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - r_g/r}} \cdot \frac{\omega}{c} \approx (1 + r_g/2r) \cdot \frac{\omega}{c}.$$

Mivel a törésmutatót a $k = n(r) \cdot \frac{\omega}{c}$ diszperziós formula definiálja, ezért a téridő görbülete ugyanolyan szögű fényelhajlást okoz, mint az $n(r) = (1 + r_g/2r)$ törésmutatójú közeg. Azt találtuk, hogy ez a szög $\chi = r_g/\rho$ radián.

Ugyanezt az eljárást a pontos Schwarzschild-metrika esetében is alkalmazhatjuk, ha egy alkalmasan választott $r = q(r')$ függvény segítségével r helyett új r' koordinátát vezetünk be úgy, hogy a Schwarzschild-ívelemnégyzet a

$$ds^2 = h(r') c^2 dt^2 - f(r') (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) = h(r') c^2 dt^2 - f(r') [dr'^2 + r'^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)]$$

alakot vegye fel, amelyben $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ (a szögletes zárójelben itt az euklidészi tér (9.3) ívelemnégyzete áll 3D polárkoordinátákban, amely a jól ismert (9.2) képletek segítségével kapható meg a Descartes-koordinátákban felírt alakból). Ebben a koordinátarendszerben (*izotróp koordináták*)

$$\mathbf{k}^2 = \frac{1}{h(r')}k_0^2 - \frac{1}{f(r')}(k_{x'}^2 + k_{y'}^2 + k_{z'}^2) = \frac{1}{h(r')}k_0^2 - \frac{1}{f(r')}k^2.$$

A $\mathbf{k}^2 = 0$ feltételből most a

$$k = \sqrt{\frac{f(r')}{h(r')}} \cdot \frac{\omega}{c} \quad (29.1)$$

diszperziós formulát kapjuk az $n(r') = \sqrt{f(r')/h(r')}$ effektív törésmutatóval.

Az $f(r')$ függényt a

$$ds^2 = h(r')c^2 dt^2 - f(r')(dr'^2 + r'^2 d\vartheta^2 + r'^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (29.2)$$

ívelemnégyzet és a (28.7) Schwarzschild-ívelemnégyzet összehasonlításával határozhatjuk meg. Ebből nyilvánvaló, hogy $f(r')$ -nek az

$$f(r')dr'^2 = B(r)dr^2 \quad (29.3)$$

$$f(r')r'^2 = r^2 \quad (29.4)$$

egyenleteket kell kielégítenie. A felsőt az alsóval elosztva

$$\frac{dr'}{r'} = \sqrt{B(r)} \cdot \frac{dr}{r}.$$

Ezt könnyű integrálni:

$$r' = Ce^{\int dr \cdot \sqrt{B(r)}/r} = C \left(r - r_g/2 + \sqrt{r(r - r_g)} \right).$$

A C integrációs konstansot válasszuk meg abból a feltételből, hogy a Naptól távol ne legyen különbség r és r' között: $\lim_{r \rightarrow \infty} r'/r = 1$. Ez $C = 1/2$ -nél teljesül. Az egyenletet r -re megoldva kapjuk a $q(r')$ függvényt:

$$r = r' \left(1 + \frac{r_g}{4r'} \right)^2 \equiv q(r').$$

Ezt és (29.4)-t felhasználva $f(r')$ -re és $h(r')$ -re az

$$f(r') = \frac{r^2}{r'^2} = \left(1 + \frac{r_g}{4r'} \right)^4,$$

$$h(r') = A(r)|_{r=q(r')} = \left(\frac{1 - \frac{r_g}{4r'}}{1 + \frac{r_g}{4r'}} \right)^2.$$

képleteket kapjuk. Ezeket (29.1)-be beírva r_g -ben lineáris pontossággal a

$$k = \left(1 + \frac{r_g}{r} \right) \cdot \frac{\omega}{c}$$

képletre jutunk. A közelítő metrikában érvényes (22.1)-től ez abban különbözik, hogy r_g helyébe $2r_g$ -t kell írunk. Nyilván ugyanezt kell tennünk a (22.2) képletben is⁴¹:

$$\chi = 2\frac{r_g}{\rho}. \quad (29.5)$$

Ez a fényelhajlás képlete r_g/ρ legalacsonyabb rendjében a Schwarzschild-metrika alapján.

A (17.11) közelítő metrikát a pontos Schwarzschild-metrikából $B(r) = 1$ helyettesítéssel kapjuk. Mint a 19. fejezetben láttuk, a $v \ll c$ sebességű bolygómozgás tárgyalásánál ez igen jó közelítés. A fényelhajlás χ szögéhez azonban az $A(r)$ és a $B(r)$ járuléka egyaránt r_g/ρ -val egyenlő.

30. A Schwarzschild-téridő forgó koordinátarendszerben

A koordinátarendszer választása önkényes. Néha előnyös a magányos csillag sztatikus téridejét konstans ω szögsebességgel forgó koordinátarendszerben tárgyalni. A Schwarzschild-koordináták $(t, r, \vartheta, \varphi)$ és a *forgó Schwarzschild-koordináták* $(t', r', \vartheta', \varphi')$ között a kapcsolat a következő:

$$t = t', \quad r = r', \quad \vartheta = \vartheta', \quad \varphi = \varphi' + \omega t. \quad (30.1)$$

Az ívelemnégyzet:

$$ds^2 = \left[A(r') - \left(\frac{r'\omega}{c} \right)^2 \cdot \sin^2 \vartheta' \right] c^2 dt'^2 - 2\omega r'^2 \sin^2 \vartheta' dt' d\varphi' - B(r') dr'^2 - r'^2 (d\vartheta'^2 + \sin^2 \vartheta' d\varphi'^2), \quad (30.2)$$

amelyből leolvashatók a metrikus tenzor komponensei⁴².

A vesszős koordinátarendszerben a konnxiós koeficienseket (28.8)-ból lehet kiszámítani a (10.14) képlet segítségével. A transzformációs koeficiensek a (30.1) egyszerűsége miatt szintén nagyon egyszerűek. A kontravariáns és a kovariáns indexeket transzformáló koeficiensek közül a zérustól különbözők a következők:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial r'}{\partial r} = \frac{\partial \vartheta'}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} = 1, & \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = -\omega, \\ \frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{\partial r}{\partial r'} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \vartheta'} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'} = 1, & \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t'} = +\omega. \end{aligned}$$

Ezek a koeficiensek nem függenek a koordinátáktól, ezért (10.14) második tagja nulla: A (30.1) transzformációval szemben a konnxiós koeficiensek tenzorként viselkednek.

Négy dimenzióban összesen 40 különböző konnxiós koeficiens lehet. Schwarzschild-koordinátákban (28.8) szerint ebből csak 9 különbözik nullától. Ezek egy kivételével a vesszős koordinátákban is érvényesek (pl. $\Gamma_{\vartheta'\vartheta'}^r = \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r = -(r' - r_g)$). Az egyetlen kivétel a következő:

$$\Gamma_{t't'}^{r'} = \Gamma_{tt}^r + \omega^2 \Gamma_{\varphi\varphi}^r = (r' - r_g) \left(\frac{c^2 r_g}{2r'^3} - \omega^2 \sin^2 \vartheta' \right) = (r' - r_g) \left(\frac{MG}{r'^3} - \omega^2 \sin^2 \vartheta' \right). \quad (30.3)$$

⁴¹A ρ helyébe természetesen ρ' kerül, de a kettő között a különbség a $C = 1/2$ választás következtében $\rho \gg r_g$ -nél elhanyagolható.

⁴²A (30.2) ívelemnégyzet az $A(r') - (r'\omega/c)^2 \sin^2 \vartheta' = 0$ egyenlet által meghatározott r' értékeknél szinguláris. Könnyen igazolható, hogy pozitív r' -nél ennek az egyenletnek két megoldása van, $r_1(\omega)$ és $r_2(\omega)$, amelyekre $\omega \neq 0$ -nál $r_g < r_1(\omega) < r_2(\omega)$. Speciálisan a Schwarzschild-megoldásban ($\omega = 0$ -nál) az r_2 megoldás eltűnik (elmegy a végtelenbe), az r_1 pedig egyenlővé válik r_g -vel. Ha ω elég kicsi (de nem nulla), az r_2 tetszőlegesen nagy lehet. Ez a típusú szingularitás mutatja, hogy a koordinátarendszerünk forog.

Ezen kívül a vesszős koordinátákban öt olyan konnexiós koefficiens van, amelyek Schwarzschild-koordinátákban nullák:

$$\begin{aligned}\Gamma_{t'r'}^{\varphi'} &= \omega(\Gamma_{\varphi r}^{\varphi} - \Gamma_{tr}^t), & \Gamma_{t'\varphi'}^{r'} &= \omega\Gamma_{\varphi\varphi}^r, & \Gamma_{t'\varphi'}^{\vartheta'} &= \omega\Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta}, \\ \Gamma_{t'\vartheta'}^{\varphi'} &= \omega\Gamma_{\varphi\vartheta}^{\varphi}, & \Gamma_{t't'}^{\vartheta'} &= \omega^2\Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta}.\end{aligned}\tag{30.4}$$

31. A körmozgás a Schwarzschild-téridőben

Newton gravitáció elmélete szerint az r sugarú körpályán keringő bolygó körfrekvenciáját az

$$\omega = \sqrt{\frac{MG}{r^3}}\tag{31.1}$$

formula határozza meg, amelyet forgó polárkoordinátarendszerben a legegyszerűbb levezetni. Ha a koordinátarendszer ω szögsebességgel forog, akkor a bolygó a $\vartheta = \pi/2$ síkban annál az r -nél lehet nyugalomban, amelyben az $mr\omega^2$ centrifugális erő éppen kiegyenlíti a GmM/r^2 tömegvonzási erőt (az $m^* = m$ egyenlőség esetén).

Mi lesz az analóg formula az általános relativitáselméletben? Ahhoz, hogy a kérdésre válaszolhassunk, meg kell találnunk a geodetikus egyenletnek olyan megoldását, amely (a nem forgó) Schwarzschild-koordinátákban $r = konstans$, $\vartheta = \pi/2$, $\varphi = \omega t$ alakú. A téridőben ez a geodetikus egy konstans sugarú és menetmagasságú csavarvonal, amelynek szimmetriatengelye a t -tengely.

A feladatot azonban most is *forgó* koordinátarendszerben lehet a leggyorsabban megoldani. A kérdést úgy kell feltenni, hogy a konstans ω körfrekvenciával forgó Schwarzschild-koordinátarendszerben milyen $r'(=r)$ -nél lesz egy *nyugvó* tömegpont

$$t' = t'(\tau), \quad r' = konst., \quad \vartheta' = \pi/2, \quad \varphi' = konst.\tag{31.2}$$

\mathcal{G} világvonala geodetikus.

A geodetikus egyenletben affin paramétert kell használni, ezért választottuk (31.2)-ben paraméterként a sajátidőt, amelyről tudjuk, hogy affin paraméter. Ennél a paraméternél a (31.2) világvonal érintővektora a következő

$$\mathbf{V} = (V^{t'}, V^{r'}, V^{\vartheta'}, V^{\varphi'}) = \left(\frac{dt'}{d\tau}, \frac{dr'}{d\tau}, \frac{d\vartheta'}{d\tau}, \frac{d\varphi'}{d\tau} \right) = \left(\frac{dt'}{d\tau}, 0, 0, 0 \right).$$

A \mathcal{G} azonban a forgó koordinátarendszerben *nyugvó* test világvonala, amelyen (30.2) szerint

$$d\tau = dt' \sqrt{g_{0'0'}} = dt' \sqrt{A(r') - (r'\omega/c)^2}.$$

A gyök alatti kifejezés a világvonalon konstans, ezért a t' is affin paraméter.

A képleteink sokkal egyszerűbbek lesznek, ha a τ helyett a t' -vel paramétráljuk \mathcal{G} -t. A geodetikus egyenlet ekkor

$$\frac{dV^{i'}}{dt'} + \Gamma_{j'k'}^{i'} V^{j'} V^{k'} = 0,\tag{31.3}$$

az érintővektor pedig, amelyet ide be kell helyettesíteni, a következő:

$$\mathbf{V} = (V^{t'}, V^{r'}, V^{\vartheta'}, V^{\varphi'}) = \left(\frac{dt'}{dt'}, \frac{dr'}{dt'}, \frac{d\vartheta'}{dt'}, \frac{d\varphi'}{dt'} \right) = (1, 0, 0, 0).\tag{31.4}$$

A behelyettesítés a négy

$$\Gamma_{t't'}^{i'} = 0$$

relációra vezet. Az előző fejezet képletei szerint ebből kettő azonosan teljesül, mert $\Gamma_{t't'}^{t'} = \Gamma_{t't'}^{\varphi'} = 0$. Az $i' = \vartheta'$ -höz tartozó egyenletben $\Gamma_{t't'}^{\vartheta'} = \omega^2 \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} = -\omega^2 \sin \vartheta' \cos \vartheta'$, ezért ez az egyenlet $\vartheta' = \pi/2$ következtében szintén automatikusan teljesül. Csak az $i' = r'$ -höz tartozó $\Gamma_{t't'}^{r'} = 0$ egyenlet az, amely feltételt ró ki r' -re. A (30.3) szerint $\vartheta' = \pi/2$ mellett $r' \neq r_g$ esetén ez a feltétel pontosan a (31.1) newtoni összefüggésre vezet ω és $r' (= r)$ között.

Azonban nem minden r megengedett. A (31.2) világvonalon ugyanis (30.2) szerint a sajátidőt, mint már láttuk, a

$$d\tau = dt' \sqrt{A(r') - (\omega r'/c)^2}, \quad (31.5)$$

képlet határozza meg, amely (31.1) teljesülése esetén $\omega^2 = MG/r'^3 = c^2 r_g/2r'^3$ következtében a

$$d\tau = dt' \sqrt{1 - \frac{3r_g}{2r'}} \quad (31.6)$$

formulára redukálódik, amelyben a vesszők el is hagyhatók. Ebből az összefüggésből látszik, hogy csak $r' > 3r_g/2$ sugarú körpályák időszerű geodetikusok. Az égitestek geometriai sugara általában sokkal nagyobb, mint $3r_g/2$, ezért ez a feltétel nem jelent korlátozást a bolygópályákra. Látni fogjuk azonban, hogy r_g az M tömegű fekete lyuk sugara, ezért a (31.6)-t figyelembe kell venni még akkor is, ha a fekete lyukon kívüli ($r > r_g$) tartományra korlátozódunk. A fekete lyuk körül csak az $r > 3r_g/2$ sugarú körökön keringhetnek tömegpontok. Az $r = 3r_g/2$ sugarú kör fényszerű geodetikus, amelyen fény tud csak keringeni a fekete lyuk körül. Az $r_g < r < 3r_g/2$ sugarú körök pedig térszerű geodetikusok, amelyeken nem keringhet se tömegpont, se fény.

* * *

A (31.1) képlet egybeesése a newtoni gravitáció elméletben és az általános relativitáselméletben természetesen nagyon impresszív tény, különös tekintettel arra, hogy nem korlátozódik az $r \gg r_g$ tartományra, ahol elvárható, hogy az általános relativitáselmélet nagyon pontosan visszaadja az általános tömegvonzás newtoni elméletének eredményeit. Az egybeesés jelentőségét mégsem szabad túlértékelni. A newtoni felfogásban r a bolygó és a Nap középpontjának *térbeli távolságát* jelenti, az általános relativitáselméletben azonban csak az egyik a végtelenül sok lehetséges radiális koordináta közül. Ha mondjuk izotróp koordinátákat használtunk volna, akkor az ω és az izotróp koordináták r radiális koordinátája között az

$$\omega = \frac{1}{(1 + r_g/4r)^3} \sqrt{\frac{MG}{r^3}}$$

összefüggést kaptuk volna, amely csak $r \gg r_g$ esetén megy át a newtoni (31.1)-be.

De van-e egyáltalán invariáns geometriai jelentése a térbeli távolságnak két olyan egymástól anyagi értelemben független objektum között, mint mondjuk a Föld és a Mars? Létezik-e határozott geometriai jelentéssel bíró térbeli távolság két megadott időszerű világvonalon mozgó tömegpont között?

A kérdésre csak akkor válaszolhatnánk igennel, ha a két világvonalon egyértelműen (a koordinátarendszer választásától függetlenül) ki lennének jelölve az egyidejű pontpárok, mert ekkor minden ilyen pontpár térbeli távolsága egyenlő lenne a $\sqrt{|g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta|}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) differenciális kifejezés integráljával a két pontot összekötő (térszerű) geodetikus mentén.

Az általános relativitáselméletben azonban két különböző helyen történő esemény egyidejűségének éppen úgy nincs fizikai értelme, mint a speciális relativitáselméletben (3. fejezet). Ezért az olyan nagyon speciális eseteket kivéve, mint a körpálya (ld. a következő lábjegyzetet), nem létezik egyértelmű térbeli távolság a két egymástól anyagi értelemben független világvonalon mozgó tömegpont között.

Vajon nem jelenti-e ez a negatív konklúzió azt, hogy az általános relativitáselmélet hiányosan írja le a valóságot? Csak akkor jelentené ezt, ha az elmélet keretei között nem lehetne leírni azokat a *méréseket*, amelyekből térbeli távolságokat határozunk meg. De az ilyen mérések mind tárgyalhatók az általános relativitáselmélet keretei között.

Konkrét példaként vizsgáljuk meg a Föld-Mars távolság meghatározását célzó eljárást. A Marson elhelyezett rádió adó-vevő a földi rádiójeleket azonnal továbbítja minden irányba, így azokat a Földön is lehet észlelni. Tegyük fel például, hogy a földi jelek $\Delta t = 700$ szekundum múlva érkeznek vissza a Földre. Ebből arra következtethetünk, hogy a kísérlet időpontjában a Mars-Föld távolság $c \cdot \Delta t/2 = 105$ millió kilométer volt.

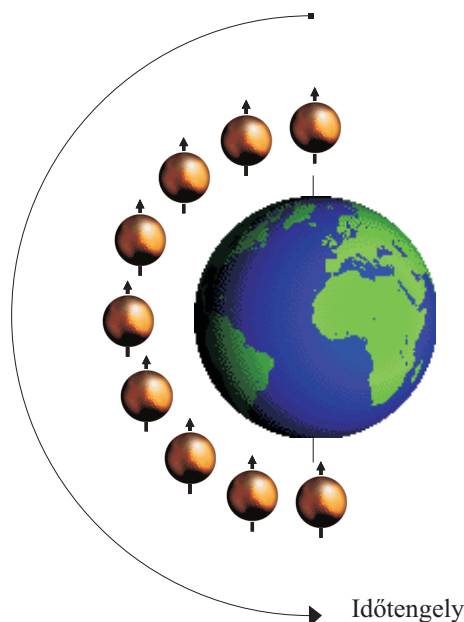
Ez valóban egy távolság, de a *newtoni fizikai világgép értelmében*, amely szerint a tér geometriája euklidészi, kiegészítve azzal a feltevéssel, hogy abban a globális inerciarendszerben, amelyben a bolygómozgást leírjuk (5. fejezet), a fénysebesség minden irányban $c \approx 300.000$ km/s-mal egyenlő.

Vegyük észre azonban, hogy a 105 millió kilométert nem valamilyen hosszúság etalon segítségével mértük meg, hanem egy olyan mérés adataiból számítottuk ki, amelyben kizárólag sajátidő intervallumot mértünk pontos óra (azaz időetalon) segítségével⁴³. Ezt a közvetlenül megmért 700 szekundumot a bolygópályák pályaelemeinek az ismeretében az általános relativitáselmélet segítségével *ki tudjuk számítani*, éspedig pontosabban, mint a newtoni általános tömegvonzás és a fény terjedésére tett előbb említett *ad hoc* feltevés alapján.

Az ilyen és ehhez hasonló mérések valójában persze maguknak a pályaelemeknek minél pontosabb meghatározását célozzák. Ha az összes mérési adatot az általános relativitáselmélet segítségével minden bolygó esetében határozott koordinátarendszerben (pl. Schwarzschild-koordinátákban) sikerül egyetlen jól meghatározott világvonalban tömöríteni, akkor kijelenthetjük, hogy a megfigyelések igazolják az elméletet. Ezek között a mérések között azonban nem lesz közvetlen távolság-meghatározás. Ezért amikor pl. bolygók közötti távolságokról beszélünk, ami persze többnyire nagyon célszerű szóhasználat, mindig világossá kell tenni, milyen kontextusban értjük.

Az általános relativitáselmélet szerint két pont térbeli távolságának csak akkor lehet invariáns értelme, ha ugyanahhoz az anyagi testhez tartoznak. Egy egykristály két pontja közötti távolság meghatározása visszavezethető a pontok közötti elemi cellák leszámolására, vagyis a térbeli távolságot ebben az esetben nem egy sajátidőkre vonatkozó mérésből kapjuk meg a távolság valamilyen többé-kevésbé önkényes definíciója alapján. Egy merev rúdnak tehát van meghatározott hossza, amelyet *nyugalmi hossz*nak nevezünk. Ha a rúd (vagy bármilyen hosszúság alakú test) szabadon mozog, Fermi-koordinátákban a nyugalmi hossz a végpontok koordinátáiból képzett $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ kifejezés négyzetgyökével egyenlő.

⁴³ *Csillagászati egységen* (CSE) a Nap-Föld távolságot értjük, de 1984 óta ezt is sajátidő meghatározásra vezetik vissza: A csillagászati egység annak a perturbálatlan körpályának a sugarával egyenlő, amelyen egy elhanyagolható tömegű test $2\pi/k$ középnap alatt tesz meg egy fordulatot a Nap körül, ahol $k = 0,017\,202\,098\,95$. Megjegyezzük, hogy egy r_g -nél nagyobb sugarú gömbszimmetrikus csillag körüli körpályának *van* jól meghatározott sugara, amely a körpályán és az origó világvonalán tetszőleges módon kijelölt két pont közötti geometriai távolsággal egyenlő.



8.ábra

32. A geodetikus precesszió

Tekintsünk most egy forgó gömböt, amely a centrális égitest, mondjuk a Föld körül körpályán kering és kérdezzük meg, precesszál-e a forgástengely (változik-e az iránya) a keringés közben.

A newtoni fizika szerint ilyen precesszió nincs. Ebben az elméletben ugyanis a mozgást a legcélszerűbb globális inerciarendszerhez viszonyítva tárgyalni, amelyben a keringő gömbre csak a Föld gravitációs vonzása hat, centrifugális vagy Coriolis-erő azonban nem. Ebben az esetben egy keringő test impulzusnyomaték vektora — és vele együtt a forgástengely iránya — csak akkor precesszálna, ha a Föld gravitációs vonzóereje forgatónyomatékot gyakorolna a testre. Ilyen forgatónyomaték azonban gömbszimmetrikus objektumra nem hat (a földtengely 26700 év periódusú luniszoláris precessziója a Föld egyenlítői kidudorodásának a következménye), ezért egy gömb forgástengelye valóban nem precesszálhat. A 8. ábra ezt a newtoni szituációt illusztrálja. Az ábra a keringő gömb néhány egymást követő helyzetében mutatja a forgástengely orientációját abban a feltevésben, hogy a kezdőpillanatban a gömb forgástengelyének az iránya párhuzamos a Föld forgástengelyével.

Az általános relativitáselmélet szerint csak lokális inerciarendszerek léteznek, ezért ennek az elméletnek a nézőpontjából az előbbi newtoni gondolatmenetnek nincs fizikai értelme. Az érvelést úgy kell átalakítani, hogy csak lokális inerciarendszer szerepeljen benne. Ezt nem nehéz megtenni. A 16. fejezetben láttuk, hogy egy geodetikuson azok az objektumok (pl. űrhajók) mozognak forgásmentesen, amelyek nyugszanak a geodetikushoz rendelhető Fermi-koordináta-rendszer tengelyeihez képest, és ezért ezek azok a tengelyirányok, amelyek az adott geodetikuson mozgó lokális inerciarendszer orientációját rögzítik. Ez az az inerciarendszer, amelyhez képest a keringő gömb forgástengelyének az iránya állandó. A 16. fejezetben azt is láttuk, hogy ha a tengelyek irányát a geodetikus egy tetszőleges pontjában megadjuk, akkor azok parallel transzportálódnak a geodetikus mentén. Ezért a gömb forgástengelye is a párhuzamos elterjesztés (11.3) egyenletének megfelelően változik. Ezt az egyenletet kell megoldani ahhoz, hogy eldöntsük, precesszál-e a forgástengely a keringés során.

A számítást a forgó Schwarzschild-koordináta-rendszerben célszerű elvégezni, amelyben

$$\frac{dU^{i'}}{d\lambda} + \Gamma_{j'k'}^{i'} V^{j'} U^{k'} = 0.$$

A λ paraméter itt tetszőleges lehet (11. fejezet), de most is a $\lambda = t'$ választás a legcélszerűbb. Az érintővektort a (31.4) képlet adja meg, amelynek felhasználásával a következő egyenletrendszerre jutunk:

$$\begin{aligned} \frac{dU^{t'}}{dt'} + \Gamma_{t'r'}^{t'} \cdot U^{r'} &= 0 \\ \frac{dU^{r'}}{dt'} + \Gamma_{t't'}^{r'} \cdot U^{t'} + \Gamma_{t'\varphi'}^{r'} \cdot U^{\varphi'} &= 0 \\ \frac{dU^{\vartheta'}}{dt'} + \Gamma_{t't'}^{\vartheta'} \cdot U^{t'} + \Gamma_{t'\varphi'}^{\vartheta'} \cdot U^{\varphi'} &= 0 \\ \frac{dU^{\varphi'}}{dt'} + \Gamma_{t'r'}^{\varphi'} \cdot U^{r'} + \Gamma_{t'\vartheta'}^{\varphi'} \cdot U^{\vartheta'} &= 0. \end{aligned} \tag{32.1}$$

Az egyenletrendszer felírásánál csak a nemzérus Γ -kat vettük figyelembe. Azonban a körpálya síkjában $\vartheta = \pi/2$, és ennél a ϑ -nál $\Gamma_{t't'}^{\vartheta'} = \Gamma_{t'\varphi'}^{\vartheta'} = \Gamma_{t'\vartheta'}^{\varphi'} = 0$. Ekkor az

$$\mathbf{U} = \mathbf{e}_{(\vartheta)} = (0, 0, 1, 0)$$

konstans vektor nyilvánvalóan kielégíti az egyenletet. Ez a megoldás azt mutatja, hogy a pályasíkra merőleges vektor orientációja időben állandó, vagyis a pályasíkra merőleges tengely körül pörgő gömb forgástengelye az általános relativitáselmélet szerint sem precesszál. A feladat szimmetriája alapján ez várható is, ezért korlátozódtunk eddig is arra az esetre, amikor a forgástengely a keringés síkjában fekszik.

Az előző fejezetben a geodetikus körpályán az ω és az r kapcsolatát a $\Gamma_{t't'}^{r'} = 0$ egyenletből határoztuk meg. Mivel az úrhajó, amelynek az orientációját vizsgáljuk, ezen a geodetikuson mozog, a (32.1)-ban a $\Gamma_{t't'}^{r'}$ konnexiós koefficiens is nulla.

A megjelölt négy konnexiós koefficiens elhagyása után a második és negyedik egyenlet csak az $U^{r'}$ és az $U^{\varphi'}$ komponenseket tartalmazza⁴⁴:

$$\begin{aligned} \frac{dU^{r'}}{dt'} + \Gamma_{t'\varphi'}^{r'} U^{\varphi'} &= 0 \\ \frac{dU^{\varphi'}}{dt'} + \Gamma_{t'r'}^{\varphi'} U^{r'} &= 0. \end{aligned}$$

Ebben az egyenletrendszerben a két Γ koefficiens a vizsgált körpályán konstans értékű, ezért ha az első egyenletét deriváljuk t' szerint, és a $\frac{dU^{\varphi'}}{dt'}$ -t a második egyenletből ide behelyettesítjük, a

$$\frac{d^2 U^{r'}}{dt'^2} - \Gamma_{t'\varphi'}^{r'} \Gamma_{t'r'}^{\varphi'} U^{r'} = 0$$

egyenletre jutunk, ami nem más, mint az Ω körfrekvenciájú lineáris harmonikus oszcillátor differenciál-egyenlete, amelyben $\Omega^2 = -\Gamma_{t'\varphi'}^{r'} \Gamma_{t'r'}^{\varphi'}$. Ha a Christoffel-szimbólumok értékét ide behelyettesítjük, a körfrekvencia abszolút értékére az

$$|\Omega| = \omega \sqrt{1 - \frac{3r_g}{2r}}$$

⁴⁴Az \mathbf{U} -nak lesz még $U^{t'}$ komponense is, amelyet $U^{r'}$ ismeretében a (32.1) első egyenletéből lehet meghatározni. A precessziót azonban az $U^{r'}$, $U^{\varphi'}$ komponensek írják le.

képletet kapjuk. Ilyen szögsebességgel forog a keringés síkjában fekvő forgástengely a \mathcal{K}' koordinátarendszer lokális koordinátabázisához viszonyítva (a keringés ω körfrekvenciája definíció szerint pozitív).

Ez a forgás negatív irányú. Abban a pillanatban például, amikor $U^{\varphi'}$ maximális, $U^{r'}$ pedig nulla, a második egyenlet mindkét tagja nulla, az elsőből pedig

$$\frac{dU^{r'}}{dt'} = -\Gamma_{t'\varphi'}^{r'} U^{\varphi'} = +\omega(r - r_g) U^{\varphi'} > 0,$$

vagyis a pozitív φ -tengely irányába mutató vektor a pozitív r -tengely irányába kezd befordulni. Ez valóban negatív irányú forgás, ezért

$$\Omega = -\omega \sqrt{1 - \frac{3r_g}{2r}} \quad (32.2)$$

Mint már említettük, ez az Ω a lokális koordinátabázishoz viszonyított körfrekvencia egyszerűen azért — mint minden vektorkomponens, — az $U^{i'}$ komponensek is erre a bázisra vonatkoznak. De a keringés körpályája mentén a lokális koordinátabázisnak magának az orientációja is változik ugyanakkor az ω körfrekvenciával, amellyel a keringés történik. Ennek következtében a lokális koordinátabázishoz viszonyított szögsebesség még a newtoni esetben sem lehet nulla, mert ahhoz, hogy a keringő gömb forgástengelye állandóan párhuzamos maradjon a Föld forgástengelyével (8. ábra), $\Omega_{newtoni} = -\omega$ körfrekvenciával kell forognia a lokális koordinátabázishoz képest. A newtoni gondolatmenetben a gravitációs állandónak semmilyen szerepe sem volt, ezért nem csoda, hogy ezt a newtoni konklúziót a (32.2)-ből az $r_g = 0$ esetben kapjuk meg.

Geodetikus precessziónak a

$$w = \Omega - \Omega_{newtoni} = \Omega - (-\omega) = \omega \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3r_g}{2r}} \right) > 0$$

különbséget nevezzük⁴⁵. Ez mutatja meg, hogy a vizsgált jelenségre vonatkozóan miben különbözik az általános relativitáselmélet predikciója a newtoni fizikáétól. Mint látjuk abban, hogy a keringő gömb forgástengelye a keringés irányával megegyező (pozitív) irányban precesszál a keringés síkjában. Ez a precesszió nagyon lassú, néhány száz kilométer magasan keringő gömb esetében 6,7 szögmásodperc/év. A NASA a GP-B nevű űrkísérletben igazolta az elméletnek ezt a jóslatát.

A GP-B kísérlet több csaknem 50 éves előkészítés után 2004 április 20-n kezdődött⁴⁶. A geodetikus precessziót egy távoli referencia csillaghoz (kvazárhoz) viszonyítva mérték. A kísérlet tudományos fázisa összesen 352 napig tartott (nem folyamatosan), a kísérlet eredményét 2007 májusában publikálták.

33. A perihélium vándorlás

A Kepler-törvények szerint a bolygópályák rögzített ellipszisek. A tömegvonzás newtoni elméletének egyik legfontosabb bizonyítéka, hogy levezethetők belőle a Kepler-törvények, feltéve, hogy eltekintünk a bolygók egymásra gyakorolt hatásától a Naptól származó sokszorta nagyobb vonzóerő mellett. Ebben a közelítésben igaz, hogy a bolygópályák a térben rögzítettek és a perihélium, amely a pálya Naphoz legközelebb eső pontja, a Naptól mint centrumból nézve az égbolton mindig ugyanazt a helyet foglalja el az állócsillagokhoz képest. A bolygók egymásra gyakorolt vonzása következtében azonban a Kepler-törvények nem teljesülnek egészen pontosan és a perihélium nem marad mindig ugyanott. A perihélium vándorlás a Merkúrnál figyelhető meg a legjobban, mert az összes bolygó közül ennek a bolygónak a pályája a legelnyújtottabb.

⁴⁵A geodetikus precesszióról ld. még *A GP-B kísérlet elvi alapjai* c. előadásomat a honlapomon (peter.hrasko.com)

⁴⁶A szonda 642 km magasan majdnem pontosan kör alakú poláris pályán keringett. A földrajzi pólusokon áthaladó pálya szerepére még visszatérünk.

A 19. század közepén Leverrier kiszámította az összes bolygó perturbáló hatását a Merkúrra, amelyek a kis perturbációk additivitása alapján összegződnek. Azt találta, hogy a perihéliumnak évszázadonként 527 ívmásodperccel kellene eltolódnia az ekliptika mentén az állócsillagokhoz viszonyítva, de a ténylegesen megfigyelt eltolódást ennél 38"-el nagyobbának találta⁴⁷. Később S. Newcomb tovább pontosította a számításokat, és arra az eredményre jutott, hogy a Newton elmélete alapján számított eltolódási sebesség 534"/évszázad, a megfigyelt érték pedig 575"/évszázad. A megfigyelés és a számítás közötti eltérés $(41 \pm 2.1)''$ /évszázad, a mérési hiba sokszorosa. Ahhoz, hogy ezt a pontosságot kellően méltányolhassuk, jusson eszünkbe, hogy a Nap és a Hold látszólagos átmérője 30', csaknem ötvenszer akkora, mint az egy évszázad alatt felgyülemelő 41 ívmásodpercnyi anomália.

Az elkövetkező évtizedek során az anomáliát a legkülönbözőbb feltevések alapján próbálták megmagyarázni, de nem sikerült elfogadható magyarázatot találni. Az általános relativitáselmélet a perihélium vándorlás problémáját automatikusan megoldja. A Schwarzschild-téridőben felírt geodetikus egyenletnek ugyanis azok a megoldásai, amelyek kissé eltérnek a köralaktól, lassan forgó ellipszisként interpretálhatók. Az egy keringési periódusra jutó eltolódásra a

$$\Delta\varphi = 3\pi \cdot \frac{2GM}{c^2} \cdot \frac{1}{a} \text{ rad/fordulat} \quad (33.1)$$

képletet kapjuk, amelyben a a bolygópálya nagytengelye. Ha (33.1)-t a Merkúrra alkalmazzuk és a szögelfordulást ívmásodperc/évszázadra számítjuk át, 42.95-t kapunk eredményül, ami ugyanolyan additív járulékot ad a perihélium precessiójához, mint egy-egy bolygó.

34. Az impulzusmomentum hatása a téridőre

Ha nagyon messziről nézünk rá egy magányos csillagra, tömegpontnak látjuk. A téridőnek azt a tartományát, amely a csillag méreteihez képest nagyon nagy, de kozmológiai skálán (vagy az állócsillagok egymás közötti távolságához viszonyítva) infinitezimálisan kicsinek tekinthető, le lehet fedni Minkowski-koordinátákkal, amelyek választhatók úgy, hogy a csillag nyugodjon benne. Ebben a koordinátarendszerben a csillag energiája $E = Mc^2$ -tel egyenlő.

Most célszerű lesz egy kis időre megint különbséget tenni a tehetetlen és a súlyos tömeg között. A nyugalmi energiában szereplő tömeg a tehetetlen tömeg, amelynek nincs köze a gravitációhoz. Ezért a tömegpont-csillag nyugalmi energiájában szereplő M a csillag tehetetlen tömege.

Másrészt a csillag Schwarzschild-metrikában fellépő tömegét mindeddig *kizárólag a gravitációval összefüggésben* értelmeztük, ezért már eddig is meg kellett volna különböztetnünk a tehetetlen tömegtől és M^* -gal kellett volna jelölnünk. Legyen tehát mostantól $r_g = 2M^*G/c^2$.

Milyen kapcsolatban áll egymással a kétféle tömeg?

Ahhoz, hogy erre a kérdésre válaszolhassunk, ki kell jelölnünk egy nagyon nagy (elvben végtelenhez tartó) sugarú gömböt, és a Schwarzschild-metrika figyelembe vételével ki kell számítanunk a gömbön belüli teljes energiát, azaz E -t. Az elmélet erre a számításra ad egy általános receptet, amelyet azonban nem tudunk ismertetni.

A számítás a teljes energiára a $E = M^*c^2$ eredményt adja, amiből következik, hogy $M^* = M$: A súlyos és a tehetetlen tömeg egyenlősége a csillagra is érvényes.

A kétfajta tömeg egyenlősége az elmélet alapfeltevése volt, amely a geodetikus hipotézisben került kihasználásra. A geodetikus hipotézis a próbatetek mozgására vonatkozik, amelyek maguk nincsenek hatással a téridő geometriájára. Ez a hipotézis azonban csak az egyik összetevője az elméletnek, a másik a metrika meghatározására szolgáló Einstein-egyenlet. Az elmélet belső konzisztenciája megköveteli, hogy az Einstein-egyenlet se

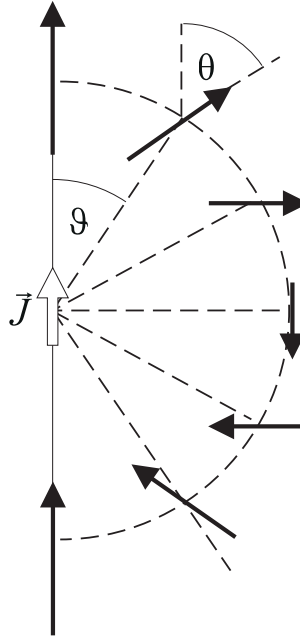
⁴⁷Ha a perihélium helyzetét az ekliptikai hosszúsággal adjuk meg, az állócsillagokhoz viszonyított eltolódáshoz még hozzá kell adni 5037"-t. Ennyivel mozdul el az ekliptikai hosszúság kezdőpontja — a tavaszpont, — a földtengely precessiója következtében egy évszázad alatt ellenkező irányban.

mondjon ellent a súlyos és a tehetetlen tömeg egyenlőségének. Mint látjuk, az elmélet ebből a szempontból ellentmondásmentes.

A tömegpontoknak (részecskéknél) a nyugalmi tömegükön kívül van még egy belső jellemző tulajdonságuk, a *spinjük*. A spin olyan impulzusmomentum, amely a tömegpont nyugalmi rendszerében sem tűnik el. Az általános relativitáselméletben a belső energia számításához hasonló eljárással meg lehet határozni a tömegpontnak tekintett csillag J spinjét is. A Schwarzschild-téridőre a számítás $J = 0$ -t ad. 1963-ban R. P. Kerr földerítette a nullától különböző impulzusmomentumú gömbszimmetrikus csillag körüli téridő geometriáját (*Kerr-téridő*), amelynek metrikája az R. H. Boyer és R. W. Lindquist által később bevezetett koordinátákban a következő:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\vartheta^2 - \\
 &\quad - \left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2} \sin^2 \vartheta\right) \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2 + 2 \frac{r_g r a}{\rho^2} \sin^2 \vartheta d\varphi \cdot c dt, \\
 \Delta &= r^2 - r_g r + a^2, \quad r_g = \frac{2GM}{c^2}, \\
 \rho^2 &= r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta.
 \end{aligned} \tag{34.1}$$

Az r_g pozitív, az a pedig tetszőleges előjelű hosszúság dimenziójú állandó⁴⁸.



9.ábra

A Kerr-megoldás tengelyszimmetrikus téridőt ír le (a metrika nem függ φ -től), amelynek a $\vartheta = \pi/2$ sík szimmetriasíkja. A metrika a t koordinátáidőtől sem függ, de $g_{t\varphi} \neq 0$ miatt a téridő nem statikus, hanem

⁴⁸A (34.1) metrikában az a nem olyan paraméter, amelynek alkalmas megválasztásával konstans r_g mellett a g_{00} tetszőlegesen nagy r -nél szingulárisá tehető. Ilyen tulajdonságú paraméter ebben a metrikában egyáltalán nincs, ezért ez a metrika *nem forgó* koordinátarendszerben írja le a J impulzusmomentumú csillagot (ld. a 30. fejezet lábjegyzetét).

stacionér (27. fejezet). A (34.1) eleget tesz az $G_j^i = 0$ egyenleteknek. A csillag nyugalmi energiája Mc^2 -tel egyenlő, impulzuszórája pedig z -irányú, és a nagysága $J = Mca$.

A csillagoknak a forgásuk következtében van zérustól különböző spinjük. Egy gáz halmazállapotú csillagnak azonban nincs határozott szögsebessége: A Nap felületének különböző pontjai sem forognak pontosan ugyanazzal a szögsebességgel. A csillag impulzuszórája azonban határozott szám, amely ráadásul az energiához hasonlóan mozgásállandó.

Ez a jól definiált impulzuszórája az, ami befolyással van a téridő geometriájára és ezen keresztül hatással van a geodetikus pályákra és a geodetikus precesszióra is. A geodetikus precessziót célszerű ebből a szempontból két összetevőre bontva tárgyalni, amelyekre különböző elnevezést vezettek be. A "geodetikus precesszió" elnevezést csak arra a komponensre használják, amely $J = 0$ -nál is fellép (ezt tárgyaltuk a 32. fejezetben). A J -vel arányos komponens az angol *drag* terminussal jelölik⁴⁹.

A 32. fejezetben láttuk, hogy a geodetikus precesszió a pálya síkjában, vagyis a pálya síkjára merőleges tengely *körül* történik. A dragnek nevezett precesszió tengelyének a helyzetét a csillag spinjének az iránya határozza meg: A drag olyan tengely körül történik, amely a helyzetvektort és a forgástengelyt tartalmazó síkban fekszik. Ezen a síkon belül a drag tengelyének az iránya és szögsebessége függ az úrhajó (giroszkóp) pillanatnyi helyzetétől (r -től és ϑ -tól). A 10. ábrán a nyilak iránya mutatja, hogy adott ϑ -nál milyen θ szöget zár be a drag szögsebessége a csillag forgástengelyével. A nyilak hossza a szögsebességgel arányos. Ez utóbbiról megmutatható, hogy $\frac{ar_g c}{2r^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \vartheta}$ -val egyenlő (a Földre vonatkozóan $a \approx 3 m$).

Amikor az úrhajó a csillag forgástengelyére merőleges pályán kering ($\vartheta = 90^\circ$), a geodetikus precesszió és a drag forgástengelye párhuzamos egymással: Mindkét precesszió a keringés síkjában megy végbe, ezért nem analízálhatók külön-külön. Poláris pályán azonban, amelyik a földrajzi pólusok felett halad át, a két precesszió szögsebesség-vektora merőleges egymásra: A geodetikus precesszió merőleges a pályasíkra, a drag szögsebességvektora pedig a pályasíkban fekszik benne (9. ábra). Ennek alapján lehetségessé válik a kétfajta járulékok különválasztása.

Ezért keringett a GP-B űrszonda poláris pályán. A drag megmérése azonban így is rendkívül nehéz feladat, mert a szögsebessége mindössze 0,041 szögmásodperc/év (szemben a geodetikus precesszió 6,7 szögmásodperc/év szögsebességével). A kísérlet pontossága végül 1% körüli érték lett, és ez nem volt elég a drag meghatározásához.

35. A Schwarzschild-szingularitás természete

A 28. fejezetben már felhívtuk a figyelmet a Schwarzschild-szingularitásra, amely a (28.7) Schwarzschild-ívelemnégyzet szingularitása az $r = r_g$ sugárnál. Megjegyeztük, hogy a csillagok r_g gravitációs sugara sokkal kisebb a geometriai sugaruknál, ezért a csillagok esetében ennek a szingularitásnak nincs jelentősége.

Azonban léteznek (vagy legalább is létezhetnek) olyan kozmikus objektumok is, amelyeknek a geometriai sugara kisebb a gravitációs sugaruknál — ezeket *fekete lyukaknak* nevezzük. A határozottság kedvéért tegyük fel, hogy a csillag mérete sokkal kisebb, mint r_g . Ebben az esetben az objektumot magát pontszerűnek tekinthetjük.

A (28.7) ívelemnégyzet pontszerű objektum esetében minden $r > 0$ sugárnál megoldása az Einstein-egyenleteknek, de a Schwarzschild szingularitás miatt szétesik egy belső S_i ($r < r_g$) és egy külső S_e ($r > r_g$) Schwarzschild-megoldásra, és felmerül a kérdés, hogy milyen a kapcsolat a kettő között.

Tegyük fel például, hogy valamilyen $r_0 > r_g$ sugárnál kezdősebesség nélkül "elejtünk" egy tömegpontot. Ez nyilván elkezd gyorsulva zuhanni a centrum felé, de vajon mi történik vele, amikor elér az $r = r_g$ sugárhoz? Megáll? Visszapattan? Vagy háborítatlanul zuhan tovább?

⁴⁹A teljes és némileg pontatlan elnevezés: "drag of the coordinate system". A "drag" szótári jelentése húzás, vonzás. Az elnevezés arra utal, hogy a központi égitest forgása "magával ragadja" a csillag körüli lokális inerciarendszereket is.

A helyes válaszhoz meg kell találnunk azt a centrális (ϑ és φ konstans) \mathcal{G} geodetikust, amelyen a zuhanás történik. Mielőtt azonban ezt meghatároznánk, oldjuk meg a feladatot a newtoni gravitációelméletben. A legegyszerűbben az energiamegmaradás tétele vezet célhoz, amely szerint

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{mMG}{r}.$$

Ha a testet az r_0 koordinátájú pontból kezdősebesség nélkül ejtjük el, akkor a mozgás során végig $E = -mMG/r_0$. Ezt beírjuk az energia fenti kifejezésébe és az egyenletet megoldjuk v^2 -re:

$$v^2 = 2MG \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = c^2 \cdot \frac{r_g}{r_0} \cdot \frac{r_0 - r}{r}.$$

Mivel $v = \frac{dr}{dt}$, a szabadesést leíró $r(t)$ függvényre a

$$\frac{dr}{dt} = -c \sqrt{\frac{r_g}{r_0} \cdot \frac{r_0 - r}{r}}$$

differenciálegyenletet kapjuk (figyelembe vettük, hogy az r időben csökken).

Az általános relativitáselméletben is ugyanígy, az energiatétel segítségével célszerű a feladatot megoldani. A gondolatmenet első lépése az, hogy az energiát két olyan tag összegére bontjuk, amelyek analógok a newtoni mechanika kinetikus és potenciális energiájával. Az energia $W = mcV_0$ képlete alapján az energia helyett a V_0 -lal dolgozunk. Ennek a

$$(V_0)^2 = (g_{00}V^0)^2 = A^2(V^0)^2$$

négyzetét lehet a jelzett módon felbontani.

A keresett \mathcal{G} geodetikus \mathbf{V} érintővektorának csak a V^0 és a V^r komponense különbözik zérustól, amelyek a τ sajátidő egyenlőre ismeretlen függvényei. A 16. fejezetből tudjuk, hogy $\mathbf{V}^2 = c^2$. A (28.7) metrika felhasználásával ez az egyenlet a következő:

$$A(r)(V^0)^2 - B(r)(V^r)^2 = c^2,$$

amelyből $A(V^0)^2$ -t behelyettesíthetjük az előző képletünkbe:

$$(V_0)^2 = A [B(V^r)^2 + c^2] = (V^r)^2 + Ac^2 \quad (35.1)$$

(kihasználtuk, hogy a Schwarzschild-metrikában $AB = 1$). A jobboldalon az első tag a kinetikus, a második a potenciális energia szerepét játssza.

A következő lépés az, hogy ezt az egyenletet megoldjuk $V^r = \frac{dr}{d\tau}$ -ra:

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{V_0^2(r) - A(r)c^2}. \quad (35.2)$$

Azért választottuk a negatív gyököt, mert a centrum felé eső (*befutó*) megoldást keressük.

A V_0 — mint tudjuk — mozgásállandó, ezért $V_0(r) = V_0(r_0)$. Feltevés szerint r_0 -ban a kezdősebesség nulla, ezért (35.1) szerint

$$V_0(r) = V_0(r_0) = +c\sqrt{A(r_0)} \quad (35.3)$$

(a pozitív négyzetgyököt kellett vennünk, mert $V_0 = AV^0 = A \frac{d(ct)}{d\tau}$ és itt mindkét tényező pozitív). Ha ezt (35.2)-be helyettesítjük, a

$$\frac{dr}{d\tau} = -c\sqrt{[A(r_0) - A(r)]} = -c\sqrt{\frac{r_g}{r_0} \cdot \frac{r_0 - r}{r}} \quad (35.4)$$

egyenletre jutunk, amely *ugyanolyan, mint a newtoni esetben* azzal az egyetlen kivétellel, hogy a newtoni t idő helyén a τ sajátidő áll. Az egyenlet a változók szeparálásával könnyen integrálható:

$$\tau = -\frac{1}{c} \sqrt{\frac{r_0}{r_g}} \int_{r_0}^r dr' \sqrt{\frac{r'}{r_0 - r'}} = +\frac{1}{c} \sqrt{\frac{r_0}{r_g}} \left[\sqrt{r(r_0 - r)} + \frac{r_0}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{r_0 - 2r}{r_0} \right) \right]. \quad (35.5)$$

Ez az integrál egészen $r = 0$ -ig véges, az $r = 0$ -hoz tartozó értéke $\tau_{max} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r_0}{r_g}} \cdot \frac{r_0}{c}$.

A Schwarzschild-szingularitásnak tehát nincs hatása a centrum felé zuhanó tárgyakra. Ha a zuhanó objektum nem tömegpont, hanem űrszonda, benne űrhajósokkal, akkor az $r = r_g$ ponton történő áthaladásnál az űrhajósok nem vesznek észre semmi különöset. Abban a pillanatban azonban, amikor az órájuk mutatója a τ_{max} -hoz ér, az űrhajó becsapódik a kisméretű, de a méreteihez képest hatalmas tömegű centrális égitestbe. A geodetikuskok — és az űrhajó — további sorsáról csak a centrális égitest materiális tulajdonságainak az ismeretében lehetne többet mondani.

De tanulságos lesz a zuhanó tömegpont mozgását megvizsgálni a t koordinátaidő függvényében is. Célszerű rögtön a $\frac{dr}{dt}$ inverzét keresni:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dr} = \frac{1}{c} \cdot \frac{V^0}{V^r}. \quad (35.6)$$

A jobboldali tört számlálójában

$$V^0(r) = g^{00}(r)V_0(r) = \frac{1}{A(r)}V_0(r) = \frac{r}{r - r_g}V_0(r) \stackrel{(35.3)}{=} c\sqrt{A(r_0)}\frac{r}{r - r_g}.$$

A nevezőben $V^r = \frac{dr}{d\tau}$, amely (35.4)-ből vehető. Így a

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{1}{c} \sqrt{A(r_0)} \cdot \sqrt{\frac{r_0}{r_g}} \times \frac{r}{r - r_g} \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}$$

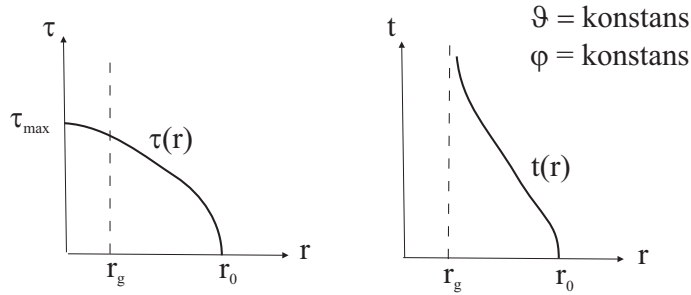
differenciálegyenletre jutunk, amelynek megoldása

$$t = -\frac{1}{c} \sqrt{A(r_0)} \cdot \sqrt{\frac{r_0}{r_g}} \times \int_{r_0}^r dr' \frac{r'}{r' - r_g} \sqrt{\frac{r'}{r_0 - r'}}. \quad (35.7)$$

Ez a kifejezés csak az $r_g < r \leq r_0$ intervallumban határozza meg a $t(r)$ függvényt, mert amikor $r' \rightarrow r_g + 0$, az integrál logaritmikusan divergál (tartalmaz egy $\ln 1/(r - r_g)$ faktort). Centrális időszerű geodetikuskok persze a $0 < r < r_g$ tartományban is léteznek, de mivel $r \rightarrow r_g - 0$ -nál szintén divergálnak, nem lehet tudni, hogy melyikük a (35.7) geodetikusk folytatása.

A $\tau(r)$ függvény és a $t(r)$ geodetikusk kvalitatív viselkedése a 10. ábrán látható. Mindkettő ugyanannak az objektumnak ugyanarra a mozgására vonatkozik. Hogyan egyeztethetők össze egymással?

Folyamodjunk egy nagyon egyszerű példához! Az euklidészi síkon az x, y Descartes-koordinátákban az ívelemnégyszet képlete $dl^2 = dx^2 + dy^2$. A geodetikuskok egyenesek. Ha az ívhosszal parametráljuk őket, akkor kielégítik a geodetikusk egyenleteket, amelyek most a $\frac{d^2x}{d\lambda^2} = \frac{d^2y}{d\lambda^2} = 0$ -ra redukálódnak.



10.ábra

Vezessük be a ξ, η új koordinátákat az

$$x = \xi, \quad y = \frac{1}{\eta}$$

egyenletekkel. Az új koordinátákban az ívhossz képlete $dy = -d\eta/\eta^2$ következtében

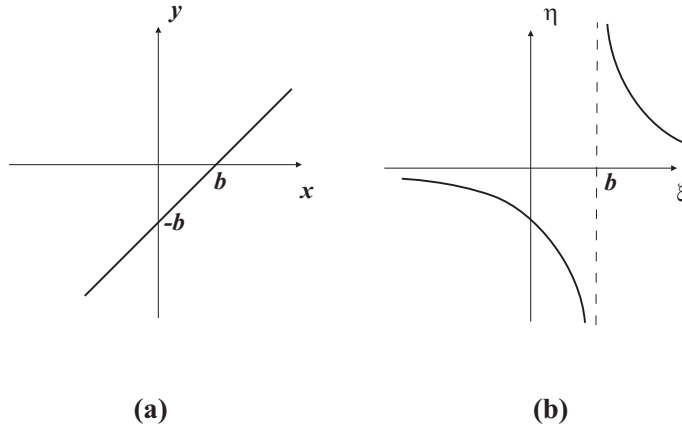
$$dl^2 = d\xi^2 + \frac{1}{\eta^4} d\eta^2.$$

Ez a metrika az $\eta = 0$ vonalon szinguláris.

Tekintsük most a \mathcal{G} geodetikust, amely Descartes-koordinátákban egyenes és az

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda + b, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda$$

egyenletek írják le (11a ábra). A b tetszőlegesen választható konstans. Ha a paramétert kizárjuk, a \mathcal{G} egyenlete $y = x - b$. A \mathcal{G} -n $dx^2 + dy^2 = d\lambda^2$, ezért λ valóban az egyenes ívhossza (előjeles értelemben: $y = 0$ -nál $\lambda = 0$, és ettől a ponttól két irányban távolodva $\lambda \rightarrow \pm\infty$).



11.ábra

Ugyanez a geodetikus a (ξ, η) koordinátákban a

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda + b, \quad \eta = \frac{\sqrt{2}}{\lambda}$$

egyenletekkel írható le. Ha a λ paramétert kizárjuk, akkor \mathcal{G} -re az $\eta = \frac{1}{\xi - b}$ egyenletet kapjuk (12b ábra).

A példa mutatja, hogy egy folytonos geodetikust két *nem teljes részre* lehet bontani azzal, ha olyan koordinátákra térünk át, amelyekben az ívelemnégyzetnek (metrikus tenzornak) valamilyen szingularitása van. Vagy megfordítva: Egy részekre bontott geodetikus egységét *esetleg* vissza lehet állítani olyan koordináták bevezetésével, amelyekben a metrika mindenütt reguláris. Az olyan szingularitást, amely új koordinátákra történő áttéréssel megszüntethető, *koordináta-szingularitásnak* hívjuk⁵⁰.

A 27. fejezetben a Schwarzschild-koordinátákat úgy választottuk meg, hogy maximálisan simuljanak a téridő sztatikuságához és gömbszimmetriájához. Az $A(r) \rightarrow 1$ előírással azt is megköveteltük, hogy a centrumtól elég messze (a bolygópályák tartományában) a t koordinátaidő és a τ sajátidő között ne legyen észrevehető különbség. Nyilván csak ilyen koordinátaválasztás mellett kaphatjuk vissza az általános relativitáselméletből nagy pontossággal a newtoni gravitáció elmélet eredményeit. Valószínűleg ezzel a követelménnyel kényszerítettük rá öntudatlanul a koordinátarendszere azt, hogy $r = r_g$ -nél a metrikus tenzorban szingularitás keletkezett. Ha a diagnózisunk helyes, akkor bizonyára át lehet térni a Schwarzschild-koordinátákról olyan új koordinátákra, amelyben a metrikának csak az $r = 0$ -ban van *valódi szingularitása*, amely a tömegpont ott-létével függ össze, a centrális geodetikuskoknál azonban $r > 0$ -nál sehol sincs szakadása.

Ezt valóban meg lehet tenni. Az eljárás kulcs lépése az a követelmény, hogy az új koordinátarendszerben a centrális befutó geodetikuskok legyenek koordinátavonalak, és a rajtuk futó koordinátaidő legyen a sajátidő. Úgy is mondhatjuk, hogy a Schwarzschild-koordináták t koordinátáideje helyébe az új koordinátarendszerben a τ sajátidő lép. Az új koordinátarendszerben ezért a 11. ábra baloldali grafikonja fogja ugyanazt a szerepet betölteni, amit a Schwarzschild-koordinátákban a jobboldali játszott, és a metrikus tenzor minden $r > 0$ -nál reguláris lesz. Az ilyen módon konstruált koordinátarendszert *Lemaitre–Finkelstein koordinátáknak* hívjuk.

A Schwarzschild koordinátáknak azonban a Schwarzschild-szingularitáson kívül van még egy hiányossága: Nem fedik le teljesen a tömegpont egész téridejét. Azt, hogy ez mit jelent, a következő fejezetben fogjuk látni. A Lemaitre–Finkelstein koordinátákban a metrika ugyan reguláris a Schwarzschild-szingularitás helyén, de a tömegpont téridejének ezek a koordináták is csak ugyanazt a részét fedik le, mint a Schwarzschild-koordináták. Ennek az az oka, hogy az új koordinátarendszert egyedül a *befutó* centrális geodetikuskokra alapoztuk. A következő fejezetben látni fogjuk, hogy be lehet vezetni új koordinátákat úgy, hogy ne csak a befutó, hanem a kifutó geodetikuskok is koordinátavonalak legyenek. Ezek a koordináták le fogják fedni a csillag teljes téridejét, amellyről kiderül, hogy olyan tartományai is vannak, amelyekre a Schwarzschild-koordináták nem terjednek ki.

36. A pontszerű csillag térideje

A) Az u , v koordináták.

Az előző fejezetben mondtuk, hogy ha az időszerű befutó centrális geodetikuskokat választjuk új koordinátavonal-seregnek, akkor nem lép fel koordinátaszingularitás, de az új koordinátarendszer sem fedi le az egész téridőt. Ezért most *két* új U , V koordinátavonal-sereg bevezetésével próbálkozunk, amelynek a koordinátavonalai a centrális ki- és befutó *teljes fényszerű* geodetikuskok. Fényyszerű geodetikuskokon sajátidő nincs értelmezve, de affin paraméter igen, és ez betölti ugyanazt a szerepet, amit időszerű geodetikuskokon a sajátidő. Ráadásul könnyen igazolható, hogy ez az affin paraméter nem más, mint maga az r radiális koordináta. A bizonyítás azon alapul, hogy ha statikus téridőben egy geodetikus érintővektorának $V_0 = g_{00} \frac{d(ct)}{d\lambda}$ komponense a geodetikus

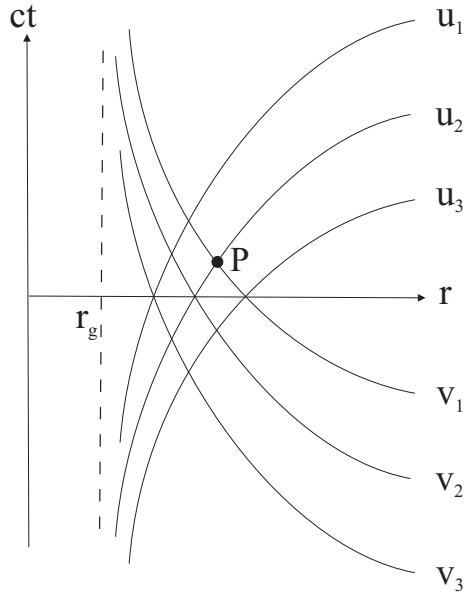
⁵⁰Forgó Schwarzschild-koordinátákban a metrikának, mint láttuk, két szingularitása van, $r_1(\omega)$ és $r_2(\omega)$, amelyek függenek a koordinátarendszer megválasztásától (az ω értéktől) és ezért nyilván koordináta-szingularitások. A (nem forgó) Schwarzschild-megoldásban a kisebbik szingularitás éppen a Schwarzschild-szingularitás. Már ebből a gondolatmenetből is várható, hogy a Schwarzschild-szingularitás koordináta-szingularitás típusú.

mentén állandó, akkor a geodetikus mozgásállandók tétele alapján (19. fejezet) a λ affín paraméter. Mármost centrális fényszerű geodetikuson $ds^2 = Ac^2 dt^2 - Bdr^2 = 0$, ahonnan $AB = 1$ következtében $V_0 = A \frac{d(ct)}{dr} = \pm 1$ valóban konstans. Egy ilyen geodetikus tehát akkor teljes, ha rajta az r affín paraméter értéke az origóban ülő pontszerű szingularitásnak megfelelő $r = 0$ és az $r = \infty$ között változhat.

Az $A \frac{d(ct)}{dr} = \pm 1$ egyenlet részletesen kiírva a következő:

$$\frac{d(ct)}{dr} = \pm \frac{1}{A(r)} = \pm \frac{r}{r - r_g}. \quad (36.1)$$

Az S_e -re fogunk korlátozódni, ahol $r > r_g$, és ezért a felső előjel a kifizető ($dt > 0 \rightarrow dr > 0$), az alsó a befutó ($dt > 0 \rightarrow dr < 0$) geodetikusokhoz tartozik.



12.ábra

Behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető, hogy a két megoldás-sereg a következő:

$$ct = r + r_g \ln \frac{r - r_g}{r_g} + r_g u \equiv r^* + r_g u, \quad (36.2)$$

$$ct = -r - r_g \ln \frac{r - r_g}{r_g} + r_g v \equiv -r^* + r_g v, \quad (36.3)$$

ahol u, v két tetszőlegesen választható integrációs konstans és

$$r^* = r + r_g \ln \frac{r - r_g}{r_g} \quad (r > r_g). \quad (36.4)$$

A felső egyenlet a kifizető, az alsó a befutó geodetikusokat írja le. A 12. ábra mutatja, hogy az S_e minden pontján (minden adott ϑ, φ mellett) egy kifizető és egy befutó fényszerű geodetikus halad át. Első lépésben

a pont új koordinátájának azt az u -t és v -t választjuk, amelyek ezeket a geodetikusokat meghatározzák. Az ábrán a P pont új koordinátái pl. $P(u_2, v_1)$. A Schwarzschild-koordinátákról az

$$u = \frac{1}{r_g}(ct - r^*), \quad v = \frac{1}{r_g}(ct + r^*) \quad (36.5)$$

képletek segítségével lehet áttérni az új u, v koordinátákra.

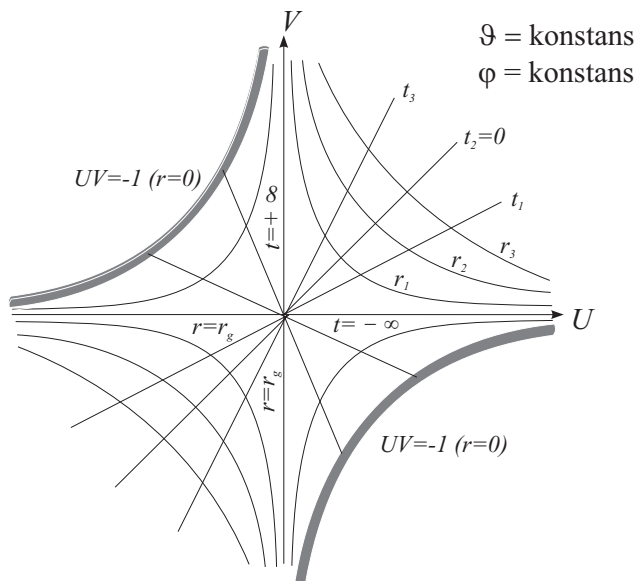
B) Az U, V Kruskal—Szekeres koordináták.

A $-\infty < u, v < \infty$ koordinátasíkkal az a baj, hogy a koordinátavonalai *nem teljes* fényszerű geodetikusok, mert az r affín paraméternek csak az $r_g < r < \infty$ tartományát jelenítik meg. Ennek a (36.5)-ben szereplő $\ln(r - r_g)$ az oka. A logaritmus kiküszöbölése érdekében vezessük be az u helyett az U , a v helyett a V koordinátákat az

$$U = e^{-u/2} \quad V = e^{+v/2} \quad (36.6)$$

definícióval. Az $U = konstans, V = konstans$ koordinátavonalak nyilván ugyanazok a fényszerű geodetikusok, mint az $u = konstans, v = konstans$ koordinátavonalak. A (36.5) segítségével azonban könnyen igazolható, hogy

$$UV = \frac{r - r_g}{r_g} e^{r/r_g}. \quad (36.7)$$



13.ábra

Ez az egyenlet konstans V -nél a V adott értékéhez tartozó U -koordinátavonalnak, konstans U -nál pedig az U adott értékéhez tartozó V -koordinátavonalnak az r affín paraméteren keresztül kifejezett egyenlete, amely az r monoton növekvő függvénye az egész $0 < r < \infty$ tartományban. Amikor azonban $r < r_g$, az UV szorzat negatív. A (36.6) ugyanakkor minden u, v párhoz pozitív U, V koordinátákat rendel. Ahhoz tehát, hogy a fényszerű centrális geodetikusokat, amelyeken az r affín paraméter tetszőleges pozitív értéket felvehet, egész terjedelmükben ábrázolhassuk, az U, V koordinátasíknak nemcsak az első negyedét, hanem minden olyan

tartományát igénybe kell vennünk, amelyben minden pont U, V koordinátája pozitív r affin paraméterhez tartozik.

A (36.7) szerint ennek a tartománynak az $r = 0$ határai az $UV = -1$ hiperbolák. Az U, V koordinátáinak ez az $UV = -1$ hiperbolák által határolt része a pontszerű csillag teljes téridejének a térképe (13. ábra). Ezt a téridőt *Kruskal—Szekeres téridőnek* hívjuk. Két olyan tartománya van, amelyben $UV > 0$: Az eredeti $U > 0, V > 0$ és az $U < 0, V < 0$. Az elsőt S_{e1} -el, a másodikat S_{e2} -vel fogjuk jelölni. Ugyancsak két olyan tartománya van, amelyekben $UV < 0$, az $U < 0, V > 0$, és az $U > 0, V < 0$, amelyeket S_{i1} -el és S_{i2} -vel jelölünk. A továbbiakban a tartományokat *szektoroknak* fogjuk hívni.

C) Az ívelemnégyzet.

Az U =konstans, V =konstans koordinátavonalak fényszerű geodetikusok, hiszen azonosak az u =konstans, v =konstans koordinátavonalakkal. A metrikus tenzornak ezért (a $g_{\vartheta\vartheta}$ és a $g_{\varphi\varphi}$ komponenseken kívül) csak a g_{UV} komponense különbözhet zérustól. Ha ugyanis lenne — mondjuk — nemzérus g_{UU} komponense, akkor azokon az U -geodetikusokon, amelyeken V, ϑ, φ konstans, $ds^2 = g_{UU}dU^2 \neq 0$ volna, de a koordinátavonal fényszerűsége miatt ez nem lehetséges. Így

$$ds^2 = 2g_{UV}dUdV - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (36.8)$$

Az r -t itt természetesen (36.7) invertálásával ki kell fejezni az U, V változókon keresztül. Nem nehéz igazolni, hogy ez a reláció az r minden pozitív értékénél invertálható, és így egyértelműen meghatározza az $r = r(UV)$ függvényt, amely azonban nem fejezhető ki elemi függvények segítségével. A (36.8)-ban az r -n ezt az $r(UV)$ függvényt értjük.

A g_{UV} meghatározásához korlátozódjunk az S_{e1} tartományra, amelyben az U, V koordináták és a Schwarzschild-koordináták kapcsolata (36.6) szerint a következő:

$$U = e^{(r^* - ct)/2r_g} = \sqrt{\frac{r - r_g}{r_g}} e^{(r-ct)/2r_g}, \quad (36.9)$$

$$V = e^{(r^* + ct)/2r_g} = \sqrt{\frac{r - r_g}{r_g}} e^{(r+ct)/2r_g} \quad (36.10)$$

Mindkét kifejezés pozitív, ezért ez a transzformáció az $r > r_g$ külső Schwarzschild-tartományt az U, V sík első negyedére képezi le. A (36.9), (36.10) transzformációk és a Schwarzschild-metrika ismeretében ki lehet számítani g_{UV} -t⁵¹, amelyet (36.8)-ba írva a

$$ds^2 = -\frac{4r_g^3}{r} e^{-r/r_g} dUdV - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) \quad (36.11)$$

ívelemnégyzetre jutunk.

Ezt az ívelemnégyzetet az S_{e1} -ben érvényes (36.9), (36.10) koordináta transzformációval kaptuk a (28.7) Schwarzschild-ívelemnégyzetből. Ennek következtében (36.11) az $U > 0, V > 0$ tartományban kielégíti az Einstein-egyenleteket. De amikor az egyenletbe beírjuk a (36.11) ívelemnégyzetben szereplő metrikus tenzort és megállapítjuk, hogy kielégíti az egyenletet, sehoh sem kell kihasználni az U, V változók számértékét. Ezért

⁵¹A (36.9) és a (36.10) az új koordinátákat fejezi ki a régieken keresztül, ezért a g^{UV} kontravariáns komponens tudjuk velük kiszámítani:

$$g^{UV} = \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial t} g^{tt} + \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial V}{\partial r} g^{rr},$$

ahol $g^{tt} = 1/(Ac^2)$ és $g^{rr} = -1/B$. Ezután $g_{UV} = 1/g^{UV}$.

ez a metrika az egész Kruskal-Szekeres téridőben kielégíti az Einstein-egyenletet, mert itt $r > 0$ és a (36.11) ívelemnégyzet regularitásának éppen ez a feltétele.

A (36.11) metrikához tartozó Christoffel-szimbólumok az egész Kruskal-Szekeres téridőn regulárisak, és ennek következtében a geodetikus egyenlet is reguláris. Ez a téridő tehát *geodetikusán teljes*, mert a geodetikusokat csak akkor nem lehet folytatni, ha az $r = 0$ -beli fizikai szingularitásba ütköznek.

D) Schwarzschild-metrika az egyes szektorokban.

Az S_{e1} -ben érvényes (36.9), (36.10) kis módosításával a többi három szektorban is be lehet vezetni Schwarzschild-koordinátákat, amelyekben a ds^2 (28.7) alakú. A szükséges változtatások a következők:

- S_{e2} -ben mindkét egyenlet jobboldalán az előjel negatívra változik.
- S_{i1} -ben (36.9) jobboldala, és mindkét egyenletben a gyök alatti kifejezés -1 szorzót kap.
- S_{i2} -ben (36.10) jobboldala, és mindkét egyenletben a gyök alatti kifejezés -1 szorzót kap.

Ha a (36.11)-ben szereplő metrikus tenzort ezeknek a képleteknek a segítségével áttranszformáljuk r, t koordinátákra, mindhárom esetben a (28.7)-t kapjuk. Megjegyezzük, hogy a (36.7) képlet a (36.9)-ben és a (36.10)-ben végrehajtott változtatások ellenére eredeti formában érvényes mindegyik szektorban.

A 13. ábrán felrajzoltuk az $r = konstans$ és a $t = konstans$ koordinátavonalakat. A (36.7)-ből látható, hogy az r koordinátavonalak az $UV = konstans > 0$ hiperbolák. Az S_{e1} -ben és S_{e2} -ben az r koordináta az $(r_g, +\infty)$, az S_{i1} -ben és az S_{i2} -ben pedig a $(0, r_g)$ intervallumban változik. A $t = konstans$ koordinátavonalakra mindegyik szektorban a

$$V/U = \pm e^{ct/r_g} \quad (36.12)$$

egyenletek egyikét kapjuk, amelyek szerint a $t = konstans$ koordinátavonalak az U, V sík centrális egyenesei. A konstans értéke mindegyik szektorban a $(-\infty, +\infty)$ intervallumban változik. Magukon az U, V tengelyeken $r = r_g$, az U tengelyen $t = -\infty$, a V tengelyen $t = +\infty$.

A t Schwarzschild koordinátáidőt az S_e -ben úgy vezettük be, hogy legyen egyenlő a végtelen távoli megfigyelő sajátidejével. Ezt jól meg lehet érteni a 13. ábra alapján: Legyen a t_1 és a t_2 koordinátavonal metszéspontja az r_3 koordinátavonallal P_1 és P_2 . Ha r_3 elég nagy, akkor ennek a koordinátavonalnak a P_1P_2 szakaszán eltelt sajátidő majdnem pontosan $(t_2 - t_1)$ -el egyenlő.

A Nap körüli téridőben ez a követelmény biztosította, hogy a Schwarzschild-koordinátáidő csak nagyon kis mértékben térjen el a földi órák sajátidejétől és ennek következtében a newtoni fizika abszolút idejétől. Most látjuk, hogy amikor a központi égitest sugara kisebb r_g -nél, ez az ártalmatlannak látszó követelmény megakadályozza, hogy a Schwarzschild-koordináták az egész téridőt lefedjék.

Mondottuk, hogy a Kruskal—Szekeres téridő a pontszerű csillag *teljes* térیدهje. Ezen azt értjük, hogy ebben a téridőben nincs olyan geodetikus, amely ne ezen a téridőn belül kezdődne és végződne (geodetikus teljesség). A (36.6)-hoz hasonló transzformációval az egész U, V koordinátasíkot le lehetne képezni egy új X, Y koordinátasík 1. negyedére, de ennek nem lenne sok értelme, mert nincs olyan geodetikus, amely "kilógna" az 1. negyedből.

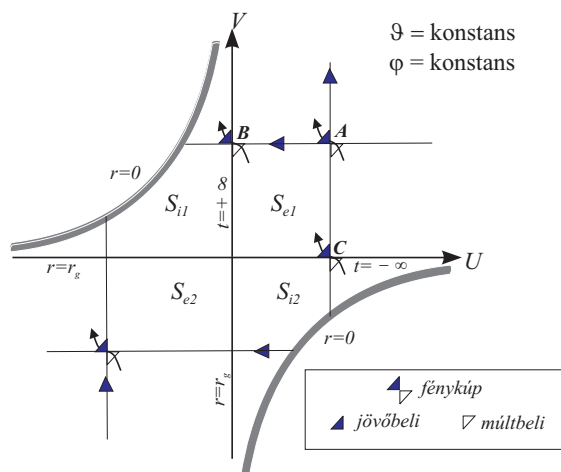
37. Geodetikusok a pontszerű csillag térیدهjében

A) A fényszerű centrális geodetikusok.

A Kruskal—Szekeres koordinátákban a fényszerű centrális geodetikusok az $U = konstans, V = konstans$ koordinátavonalak. Az S_{e1} -ben ezek azonosak az $u = konstans, v = konstans$ vonalakkal, amelyek a (36.2) és a (36.3) szerint a kifutó, illetve a befutó fénysugarakat írják le. A 14. ábrán ennek megfelelően rajzoltunk nyilat a koordinátavonalakra, amelyek mentén a fénysugarak terjednek. A nyilak iránya a folytonosság alapján

minden szektorban ugyanaz, de csak S_{e1} -ben igaz, hogy a $V = konstans$ vonalak befutók, az $U = konstans$ vonalak pedig kifutók.

A fénysugarak irányítottsága határozza meg a fénykúp helyzetét és jelöli ki a jövőbeli és a múltbeli fénykúp-pot. A Kruskal—Szekeres koordinátákban rögzített ϑ és φ mellett bármely P ponthoz tartozó jövőbeli fénykúp belseje a 2. negyed, a múltbeli fénykúp belseje pedig a 4. negyed (ha a koordináta-rendszer origóját P -ben képzeljük el)⁵². A P -n természetesen nemcentrális fénysugarak is haladnak keresztül. A centrális fénysugarakat tartalmazó térképen a teljes fénykúpnek csak a centrális metszetét tudjuk ábrázolni, amelyet a fénykúp két centrális irányú alkotója határol.



14.ábra

B) Az időszerű világvonalak.

Az időszerű világvonalak minden P pontjukban a P -hez tartozó múltbeli fénykúp belsejéből a jövőbeli fénykúp belseje felé haladnak. Ez az irány felel meg a sajátidő növekedési irányának. A 15. ábrán felrajzoltunk néhány centrális időszerű világvonal szakaszt, amelyeken a nyíl a sajátidő növekedésének az irányába mutat.

Az U, V koordinátákban a jövőbeli fénykúpot a P -n áthaladó $r = konstans$ világvonal érintője két részre bontja. Ez az érintő választja el egymástól a centrális kifutó és befutó irányokat. Egy időszerű világvonalnak lehetnek kifutó és befutó részei. A feldobott kő geodetikusan pl. egy kifutó szakasz után egy befutó rész következik.

A nemcentrális világvonalak ábrázolásához a 15. ábra koordináta-rendszere, amely konstans ϑ -hoz és φ -hez tartozik, nem elegendő. Az $r = konstans$, $\vartheta = \pi/2$ körön keringő objektumok világvonala például csak a $\vartheta = \pi/2$ -höz tartozó U, V térképeken látható: Ez minden rögzített φ -nél egy pontsorozat az $r = konstans$ hiperbolán S_{e1} -ben.

C) A fekete lyuk.

Az S_{i1} -ből semmilyen időszerű világvonalon sem lehet kijutni a sajátidő növekedési irányában, mert a fénykúp úgy érinti az S_{i1} -t határoló pozitív V - és negatív U -tengelyt (mindkettőn $r = r_g$), hogy a jövőbeli

⁵²Ha $\mathbf{V} = (V^U, V^V, 0, 0)$ egy időszerű centrális világvonal érintővektora, akkor $\mathbf{V}^2 = 2g_{UV}V^UV^V$ -nek pozitívnak kell lennie. Mivel $g_{UV} < 0$, ezért $V^UV^V < 0$, tehát vagy $V^V > 0$, $V^U < 0$, vagy megfordítva. Az egyik eset jelöli ki a jövőbeli, a másik a múltbeli fénykúpot. Az S_{e1} -ben a t koordinátáidőt úgy választottuk, hogy a t növekedési iránya egyezzen meg a sajátidő növekedési irányával. A 14. ábráról leolvasható, hogy pl. az $r = konst.$ időszerű világvonalakon a $V^V > 0$, $V^U < 0$ érintővektor mutat a t és a τ növekedési irányába, vagyis a jövőbeli fénykúpba.

része teljesen belülré, a múltbeli része teljesen kívülré esik. A fénysugarak ugyancsak bezárva maradnak S_{i1} -ben, amint az legalább a centrális fénysugarakra vonatkozóan a 14. ábra alapján megállapítható. Ennek következtében azok a fényszerű vagy időszerű világvonalak, amelyek S_{e1} -ből vagy S_{e2} -ből S_{i1} -be vezetnek az $r = r_g$ sugáron (azaz a pozitív V - vagy a negatív U -tengelyen) keresztül, egész további terjedelmükben S_{i1} -n belül maradnak.

Röviden ezt úgy foglalhatjuk össze, hogy az S_{i1} téridő tartomány *fekete lyuk*, ahonnan "nem tud kijönni semmi"⁵³. Azokról az eseményekről tehát, amelyek a fekete lyuk tartományában történnek, nem "szivároghat ki" semmilyen információ: A fekete lyuk határa mögé kívülről nem láthatunk be. Ezért nevezik ezt a határt *eseményhorizontnak*.

A fekete lyukban $r < r_g$ következtében a (27.4) Schwarzschild-ívelemnégyzetben A és B negatív, ezért itt az r a koordinátaidő, a t pedig térszerű koordináta. A 14. ábra alapján megállapítható, hogy a centrális időszerű világvonalakon a sajátidő növekedési irányának r folyamatos csökkenése felel meg. Ez minden időszerű világvonala igaz. Az időszerű világvonalak az $r = 0$ időpillanatban véget érnek, ez véges sajátidő alatt következik be⁵⁴.

D) A fehér lyuk és a második külső Schwarzschild-tartomány.

Az S_{i2} felületén a fény és a tömegpontok csak kifelé haladhatnak keresztül, ezért ezt a szektort gyakran "fehér lyuknak" hívják.

Az S_{e2} "második külső Schwarzschild-szektor" az S_{e1} pontos mása. Egy pontszerű csillagnak elvben mindkét külső szektorban lehet bolygórendszere. A két külső szektor között azonban nem lehetséges "utazás", mert a kettőt összekötő minden világvonalnak van térszerű szakasza ("féreglyuk").

Külön tárgyalást igényel az az eset, amikor egy csillag rohamos összehúzódás (kollapszus) következtében válik kisebbé a saját gravitációs sugaránál. Megmutatható, hogy az ilyen csillag térídeje csak az S_{e1} és az S_{i1} szektorokat tartalmazza.

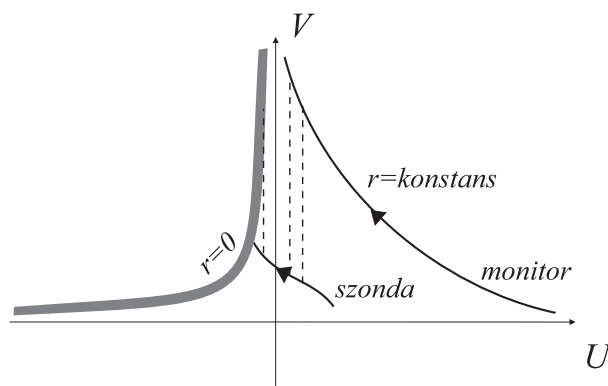
E) Rádiójelek a fekete lyuk közeléből.

Mozogjon egy űrszonda olyan pályán, amely az S_{e1} külső Schwarzschild-tartományból átvezet a fekete lyukba. Közben sajátidőben mérve ω_* = konstans frekvencián folyamatosan rádiójelet sugároz, amelyet egy konstans $r \gg r_g$, ϑ , φ -ben parkoló monitor-űrhajó állandóan vesz. Milyen ω frekvenciájúnak észleli a sugárzást?

A 15. ábrán felrajzoltuk a szonda és az űrhajó trajektóriáját. Az ábrán szaggatott vonallal jeleztük a kifutó ($U = \text{konstans}$) fényszerű geodetikusokat, amelyeken a rádiósugárzás terjed. Ezek a sugarak csak az $U > 0$ tartományban jutnak el a monitor-űrhajóhoz. Miután a szonda átlépett az $U < 0$ negyedbe, a jelei az $r = 0$ szingularitásban végződnek.

⁵³A kvantummechanika figyelembevételével ez a következtetés módosulhat, mert a kvantummechanika szerint a fekete lyuk feltehetően folyamatosan emittál elektromágneses hullámokat és részecskéket (*Hawking-sugárzás*). A feltételes mód használatát az indokolja, hogy ma még nincs megoldva a kvantummechanika és az általános relativitáselmélet egyesítése egyetlen elméletben.

⁵⁴Mivel a fekete lyukban az r a koordinátaidő, ezért az űrhajó "kormányzásával" nem lehet elérni, hogy az űrhajó kikerüljön az $r = 0$ -t. A külső Schwarzschild-szektorban sem lehetséges, hogy egy adott t időpont ne következzen be egy "örökéletű" űrhajó pályáján. Az űrhajó megfelelő kormányzásával azonban a fekete lyukat el lehet kerülni.



15.ábra

A monitor olyan messze van a szingularitástól, hogy a sajátideje praktikusán megegyezik a t Schwarzschild-koordinátáidővel. A szonda τ sajátidejű pontjából emittált sugárzás abban a t sajátidejű pontban éri el a monitort, amely ugyanazon az $U = \text{konstans}$ koordinátavonalon fekszik, mint a τ sajátidejű pont: a $\tau = F(t)$ függvényt az $U = \text{konstans}$ egyenlet határozza meg.

A szonda pályáján a $\tau = 0$ esemény legyen az, amikor a pálya metszi a V -koordináta tengelyt (a $V = V_0$ pontban). Az S_{e1} -be eső szakaszon ezért $\tau < 0$. A metszéspont közelében $U = -\alpha\tau > 0$, $V = V_0 + \beta\tau < V_0$, tehát α és β pozitív konstans. A monitor pályája (36.9), (36.10) alapján

$$U = \sqrt{\frac{r - r_g}{r_g}} e^{r/2r_g} \cdot e^{-ct/2r_g}$$

$$V = \sqrt{\frac{r - r_g}{r_g}} e^{r/2r_g} \cdot e^{ct/2r_g},$$

ahol $r = \text{konstans}$. A szonda és az űrhajó U koordinátáját egyenlítve kapjuk a

$$\tau = F(t) = -\gamma e^{-ct/2r_g} \quad (\gamma \text{ pozitív konstans})$$

képletet, amely azt fejezi ki, hogy a monitoron észlelt sugárzás frekvenciája t -függő:

$$\omega(t) = \omega_* \frac{d\tau}{dt} = \omega_* \frac{dF}{dt} = \text{konstans} \cdot e^{-ct/2r_g}.$$

Válasszuk a $t = 0$ kezdőpontot úgy, hogy az a sugárzás, amely ekkor ér a monitorhoz, olyan kis negatív sajátidőpillanatban — a V -tengelyhez nagyon közel — emittálódott, amikor a közelítésünk már érvényes. Ekkor

$$\frac{\omega(t)}{\omega(0)} = e^{-ct/2r_g}.$$

A monitor űrhajón tehát $t > 0$ -nál a jel frekvenciájának exponenciális csökkenését tapasztalják. A csökkenés nagyon gyors, mert az időállandója nagyon kicsi: Azzal az idővel egyenlő, amely alatt a fény sík téridőben $2r_g$ távolságot tesz meg. A jel véges számú oszcilláció után monoton csökkenve szűnik meg.

* * *

Ezzel a fejezettel lezárjuk az általános relativitáselmélet ismertetését és áttérünk a relativisztikus kozmológia alapjainak a megtárgyalására az általános relativitáselmélet szemszögéből.

38. A relativisztikus kozmológia alapfeltevései

A relativisztikus kozmológia kiindulópontja Einsteinnek az a hipotézise, hogy az

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \quad (38.1)$$

gravitációs téregyenlet az Univerzum egészére is alkalmazható.

Einstein tett még két további feltevést is: Az átlagolási hipotézist és a kozmológiai elvet.

Az *átlagolási hipotézis* szerint a téregyenlet jobboldalán T_{ij} -n az Univerzum *térben kisimított* anyagsűrűségének energia-impulzus tenzorát kell érteni. Ez a kisimított energia-impulzus tenzor a (38.1) egyenleten keresztül a Világegyetem *kisimított metrikáját* hozza létre, amelyen az anyag lokális sűrűség-egyenletlenségei (galaxisok, egyedi csillagok) "helyi gyűrődéseket" okoznak.

Az átlagolási hipotézis nagyon erős feltevés. Az Univerzum egy P pontjában ugyanis a "kisimítást" a P körüli valamilyen nem túl nagy térfogatra (cellára) vett átlagolásként értelmezhetjük. Az Einstein-egyenlet nemlinearitását figyelembe véve azonban az Einstein-egyenlet átlagolásával kapható téregyenlet nem lehet azonos az átlagolt mennyiségeket tartalmazó Einstein-egyenlettel, mert egy szorzat átlaga nem egyenlő az átlagok szorzatával. Például

$$\overline{R_{jl}} = \overline{\frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{im}^i \times \Gamma_{lj}^m - \Gamma_{lm}^i \times \Gamma_{ij}^m} \neq \overline{\frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{im}^i \times \Gamma_{lj}^m - \Gamma_{lm}^i \times \Gamma_{ij}^m}.$$

A $\overline{\Gamma}$ -k pedig maguk sem egyenlők az átlagolt metrikus tenzorból képzett Christoffel-szimbólumokkal. A továbbiakban azonban mégis kizárólag kisimított mennyiségekkel és az őket tartalmazó Einstein-egyenletekkel fogunk dolgozni.

A *kozmológiai elv* azt mondja ki, hogy a *kisimított térben minden pont és minden irány egyenértékű*. Ez az elv megfelel annak a felfogásnak, hogy a Föld, a "mi" lakóhelyünk, nem kitüntetett helye az Univerzumnak. Matematikailag ez a feltevés úgy fogalmazható meg, hogy a kisimított geometriai tér maximálisan szimmetrikus (10. fejezet). Három geometriai dimenzióról lévén szó ez hat független Killing-mező létezését tételezi fel. A kisimítás előtti valóságos Univerzumban természetesen a helyek és az irányok nem egyenértékűek. Ma még nem tudjuk elég megbízhatóan, hogy milyen skálán (és hogyan) kell az átlagolást elvégezni ahhoz, hogy a kozmológiai hipotézis teljesüljön.

Ha a geometriai tér kétdimenziós volna, a kozmológiai elv a kisimított Univerzumra három lehetőséget engedne meg: A 2D gömböt (9. és 12. fejezet), a 2D pszeudogömböt (15. fejezet), valamint a 2D euklidészi síkot, amelyek kétdimenziós maximálisan szimmetrikus sokaságok. Tekintsük át ezek 3D megfelelőit!

Induljunk ki egy *hipotetikus* 4D metrikus sokaságból, amelyen az x, y, z, u koordinátákat vesszük fel.

A) A 3D gömb.

Tegyük fel először, hogy ez a sokaság euklidészi:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2. \quad (38.2)$$

Ebben az esetben az

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = a^2 \quad (38.3)$$

egyenlettel meghatározott felület 3D gömb.

Vezessük be ezen a gömbön a χ, ϑ, φ 3D gömbi koordinátákat az

$$u = a \cos \chi, \quad z = a \sin \chi \cos \vartheta, \quad y = a \sin \chi \sin \vartheta \sin \varphi, \quad x = a \sin \chi \sin \vartheta \cos \varphi \quad (38.4)$$

$$0 < \chi, \vartheta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

képletekkel. A (38.3) ekkor azonosan teljesül. Ha pedig ezeket a kifejezéseket beírjuk (38.2)-be, megkapjuk a 3D gömb ívelemnégyzetét 3D gömbi koordinátákban:

$$dl^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2)]. \quad (38.5)$$

A χ, ϑ, φ koordináták origójában $\chi = 0$. Az origót a 3D gömb bármely pontjában felvehetjük. A (38.5) metrika segítségével meggyőződhetünk róla, hogy a χ koordinátájú pont origótól mért r távolsága $r = a\chi$ -vel egyenlő⁵⁵, az origó körül felvett r sugarú 2D gömb felszínét pedig az

$$S_2 = 4\pi a^2 \sin^2 \chi = 4\pi a^2 \sin^2 \frac{r}{a}$$

képlet határozza meg⁵⁶. Ebből következik, hogy a 3D gömbön a 2D gömb felszíne az r növekedésével lassabban nő, mint $4\pi r^2$ (vagyis lassabban nő, mint a 3D euklidészi térben).

A teljes 3D gömb térfogata a $(\chi, \chi + d\chi)$ vastagságú gömbhéjak $S_2(r) \cdot dr = S_2(\chi) \cdot a \cdot d\chi$ térfogatának integráljával egyenlő:

$$V_3 = \int_0^\pi 4\pi a^2 \sin^2 \chi \cdot a d\chi = 2\pi^2 a^3.$$

B) A 3D pszeudogömb.

Tegyük fel most, hogy a hipotetikus 4D sokaság pseudoeuklidészi:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2. \quad (38.6)$$

Akkor a

$$-x^2 - y^2 - z^2 + u^2 = a^2 \quad (u > 0) \quad (38.7)$$

egyenlettel meghatározott felület a 3D pszeudogömb.

Vezessünk be a 3D pszeudogömbön a $\bar{\chi}, \vartheta, \varphi$ 3D pszeudogömbi koordinátákat a

$$\begin{aligned} u &= a \operatorname{ch} \bar{\chi}, & z &= a \operatorname{sh} \bar{\chi} \cos \vartheta, & y &= a \operatorname{sh} \bar{\chi} \sin \vartheta \sin \varphi, & x &= a \operatorname{sh} \bar{\chi} \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 &\leq \bar{\chi} < \infty, & 0 &< \vartheta < \pi, & 0 &\leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \quad (38.8)$$

képletekkel. A (38.7) ekkor azonosan teljesül. Ha pedig ezeket a kifejezéseket beírjuk (38.6)-ba, megkapjuk a 3D pszeudogömb ívelemnégyzetét 3D pszeudogömbi koordinátákban:

$$dl^2 = a^2 [d\bar{\chi}^2 + \operatorname{sh}^2 \bar{\chi} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2)]. \quad (38.9)$$

A $\bar{\chi}, \vartheta, \varphi$ koordináták origóját a 3D pszeudogömb bármely pontjában felvehetjük. A (38.9) metrika segítségével meggyőződhetünk róla, hogy a $\bar{\chi}$ koordinátájú pont origótól mért r távolsága $r = a\bar{\chi}$ -vel egyenlő, az origó körül felvett r sugarú 2D gömb felszínét pedig az

$$\bar{S}_2 = 4\pi a^2 \operatorname{sh}^2 \bar{\chi} = 4\pi a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{r}{a}$$

képlet határozza meg. Ebből következik, hogy a 3D pszeudogömbön a 2D gömb felszíne az r növekedésével gyorsabban nő, mint $4\pi r^2$. A teljes 3D pszeudogömb térfogata végtelen: $\bar{V}_3 = \infty$.

⁵⁵A kiválasztott pontot az origóval összekötő sugár mentén $d\vartheta = d\varphi = 0$, ezért az ívhossz a $dl = a \cdot d\chi$ integrálja.

⁵⁶A $\bar{\chi} = \text{konstans}$ gömbön a metrika $dl^2 = a^2 \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2)$, és azt tudjuk, hogy ez egy $a \sin \chi$ sugarú gömb ívelemnégyzete.

C) A 3D euklidészi tér.

Végül a 4D hipotetikus sokaságon az $u = konstans$ egyenlettel jelöljük ki egy 3D hiperfelületet. Akár euklidészi, akár pszeudoeuklidészi a beágyazó 4D sokaság, ennek a 3D felületnek a metrikája euklidészi:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2). \quad (38.10)$$

A 9. és a 15. fejezetben követett eljárással nem nehéz igazolni, hogy mindhárom sokaság maximálisan szimmetrikus, mert van hat lineárisan független Killing-mezője.

Vezessük be a k indikátort a következő definícióval:

$$k = \begin{cases} +1 & \text{gömb esetében,} \\ -1 & \text{pszeudogömb esetében,} \\ 0 & \text{euklidészi sík esetében.} \end{cases} \quad (38.11)$$

A k felhasználásával a három eset összefoglalható így:

$$\begin{aligned} k \cdot (x^2 + y^2 + z^2) + u^2 &= a^2 \\ dl^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + k \cdot du^2. \end{aligned} \quad (38.12)$$

A 3D gömb és pszeudogömb (38.5), (38.9) ívelemnégyszetének ismeretében kiszámíthatjuk a konnexiós koefficienseket és a Riemann- görbületet. A továbbiakban csak a Ricci-skalárra lesz szükségünk, amelyre az

$$R = k \cdot \frac{6}{a^2} \quad (38.13)$$

képletet kapjuk⁵⁷.

39. A standard modell

A *standard modellben* feltesszük, hogy a kisimított téridőben felvehető olyan koordinátarendszer, amelyben az ívelemnégyszet $ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$ alakú, és dl^2 az előző fejezet valamelyik maximálisan szimmetrikus geometriai terének ívelemnégyszete. Azonban megengedjük, hogy a geometriai tér *skálája* függjön a t koordinátaidőtől. Ezen azt értjük, hogy két *nyugvó* (rögzített térkoordinátájú) pont térbeli távolsága az idő múlásával változhat⁵⁸. A (38.5), (38.9) esetében ez annyit jelent, hogy az a hosszúság dimenziójú paraméter függhet t -től, a (38.10)-ben pedig a jobboldal tartalmazhat egy $b(t)$ dimenziótlan szorzótényezőt:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = \begin{cases} c^2 dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2)] & \text{ha } k = +1 \\ c^2 dt^2 - a^2(t) [d\bar{\chi}^2 + \text{sh}^2 \bar{\chi} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2)] & \text{ha } k = -1 \\ c^2 dt^2 - b^2(t) [dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta \cdot d\varphi^2)] & \text{ha } k = 0. \end{cases} \quad (39.1)$$

Az $a(t)$ és a $b(t)$ függvényeket az Einstein-egyenletből kell meghatározni. Ezt a három ívelemnégyszetet közös néven *Robertson–Walker (RW) metrikának* hívják. A $k = 1$ univerzumot *zárt*nak, a másik kettőt *nyitottnak* nevezzük.

⁵⁷ n -dimenziós gömbre és pszeudogömbre $R = k \cdot n(n-1)/a^2$. Ebből visszakapjuk a két dimenzióra vonatkozó már ismert képleteket.

⁵⁸A 2D gömb esetében ez a változó sugarú léggömb geometriájának felel meg, amikor polárkoordinátákat rajzolunk rá.

Mindhárom ívelemnégyzetre jellemző, hogy

$$g_{tt} = c^2 = \text{konstans}, \quad g_{t\alpha} = 0 \quad (39.2)$$

(α — mint mindig — a térszerű koordináták indexe). Az ilyen tulajdonságú koordinátarendszert *szinkron-rendszernek* nevezik (a metrikát magát pedig *szinkron-metrikának*). A szinkron-rendszer megkülönböztető tulajdonsága, hogy az $x^\alpha = \text{konstans}$ koordinátavonalak geodetikusok, amelyeken a t koordinátaidő affin paraméter. Ezeknek a koordinátavonalaknak az érintővektora a lokális koordinátabázis $\mathbf{e}_{(t)}$ eleme, ezért az állítás igazolásához azt kell belátni, hogy $\frac{D\mathbf{e}_{(t)}}{dt} = 0$. Mivel $e^i_{(t)} = \delta^i_t = (1, 0, 0, 0)$, ezért $\frac{De^i_{(t)}}{dt} = \Gamma^i_{jk} e^j_{(t)} e^k_{(t)} = \Gamma^i_{tt}$, és a (39.2) teljesülése esetén ez a négy Christoffel-szimbólum valóban zérus⁵⁹.

A tétel fontos következménye, hogy RW-koordinátarendszerben az izolált tömegpontok *nyugodhatnak*, mert a világvonaluk ekkor geodetikus. A relativisztikus kozmológiában feltesszük, hogy *a galaxisok, amelyek a kozmológiában tömegpontoknak tekinthetők, nagy pontossággal nyugszanak a RW koordinátarendszerben*. A továbbiakban ezt a feltevést *a nyugvó objektumok hipotézisének*⁶⁰ fogjuk nevezni.

A relativisztikus kozmológiának tehát az Einstein-egyenletek alkalmazhatóságán kívül három alapfeltevése van: Az átlagolási és a kozmológiai hipotézis, valamint a nyugvó objektumok hipotézise.

A RW-metrikához tartozó konnexiós koeficiensok közül a továbbiakban nem lesz szükségünk azokra, amelyeknek az indexei között nem szerepel a koordinátaidő. A $k = \pm 1$ esetben a többi nemzérus koeficiens a következő:

$$\Gamma^t_{\alpha\beta} = -\frac{\dot{a}}{ac^2} g_{\alpha\beta}, \quad \Gamma^\alpha_{t\beta} = \frac{\dot{a}}{a} \delta^\alpha_\beta. \quad (39.3)$$

A Ricci-tenzor komponensei közül csak R^t_t -re lesz szükség. A $k = \pm 1$ esetben

$$R^t_t = -\frac{3\ddot{a}}{c^2 a}. \quad (39.4)$$

A Ricci-skalár az

$$R = -k \frac{6}{a^2} - \frac{6(\dot{a}^2 + a\ddot{a})}{c^2 a^2} \quad (39.5)$$

képletet kapjuk⁶¹. A (39.3), (39.4), (39.5) képlet a $k = 0$ esetben is érvényben marad, ha $a(t)$ -t $b(t)$ -vel helyettesítjük.

40. A kozmológiai vöröseltolódás

A standard modellben két *rögzített térbeli koordinátájú* pont térbeli távolsága az $a(t)$ skálafaktorral arányosan változik. Nem arról van tehát szó, hogy "mindennek a mérete" változik. Egy merev testnél például a skálafaktor változása arra vezet, hogy a testben rugalmas erők gerjednek, amelyek a méretváltozás ellen hatnak és ennek következtében a testet alkotó elemek térbeli koordinátáit változtatják meg⁶². Speciálisan az ideális méterrúd

⁵⁹Ezek a Christoffel-szimbólumok $\partial g_{tt}/\partial x^i$ és $\partial g_{t\alpha}/\partial t$ típusú deriváltakat tartalmaznak, amelyek (39.2) következtében nullák.

⁶⁰Nem általánosan használt elnevezés.

⁶¹Amikor a nem függ t -től, az R -re innen a (38.13) *negatívját* kapjuk. Ennek az az oka, hogy a RW-ívelemnégyzetben a dl^2 negatív előjellel szerepel, vagyis a metrikus tenzor $g_{\alpha\beta}$ komponensei a (38.5), (38.9) megfelelő komponenseinek a negatívjai. Mivel R minden tagja páratlan számú metrikus tenzor-komponens szorzatát tartalmazza, ezért a $g_{\alpha\beta} \rightarrow -g_{\alpha\beta}$ helyettesítésénél az R előjele is megváltozik.

⁶²Egy merev test méretei csak akkor változhatnak $a(t)$ -vel arányosan, ha minden pontjuk tehetetlenségi mozgást végezne úgy, hogy nyugszik a RW koordinátákban. De ez nem lehetséges, mert ezek a pontok erőt fejtenek ki egymásra, és ennek következtében nem mozoghatnak geodetikuson (ld. a 19. fejezetet).

megmarad 1 méter hosszúságúnak. Elvben a méterrúd segítségével regisztrálhatjuk a skálafaktor hatását ott, ahol ilyen hatás fellép.

A nyugvó objektumok hipotézise szerint a galaxisok térbeli koordinátája állandó érték, ezért a galaxisok közötti térbeli távolság az $a(t)$ -vel arányosan változik. A határozottság kedvéért tegyük fel, hogy az Univerzumot a $k = +1$ indikátorhoz tartozó RW-metrika írja le. Legyen a mi Galaxisunk a koordinátarendszer origójában, amelynek χ koordinátája nulla. Ez — mint mondtuk, — időben állandó érték. Az a galaxis, amelynek a χ koordinátája χ_g -vel egyenlő, az RW-metrika szerint tőlünk $l(t) = a(t)\chi_g$ távolságban van. A nyugvó objektumok hipotézise szerint a χ_g is állandó érték, ezért

$$\frac{l(t)}{a(t)} = \frac{l(t_0)}{a(t_0)} \equiv \frac{l_0}{a_0},$$

vagyis

$$l(t) = \frac{l_0}{a_0} a(t).$$

Itt és a továbbiakban a nulla index a *mai állapotra* utal⁶³, vagyis pl. $l(t_0) \equiv l_0$ a kiválasztott galaxis tőlünk számított távolsága *most* ($t = t_0$ -ban). Ez a "most" azonban nem a fizikában megszokott időtartam nélküli pillanat, hanem sok millió évig érvényes, mert ismereteink szerint a skálafaktor változása rendkívül lassú folyamat.

Milyen gyorsan változik $l(t)$ a mai állapotban ("most")? Deriváljuk az előző képletet:

$$\dot{l}_0 \equiv \left. \frac{dl(t)}{dt} \right|_{t_0} = \frac{l_0}{a_0} \left. \frac{da(t)}{dt} \right|_{t_0} \equiv \frac{l_0}{a_0} \dot{a}_0 \equiv Hl_0,$$

ahol

$$H = \frac{\dot{a}_0}{a_0} \quad (40.1)$$

a *Hubble-konstans*. Mint látjuk, két galaxis távolsága *most* annál gyorsabban változik, minél távolabb vannak *most* egymástól:

$$\dot{l}_0 = Hl_0. \quad (40.2)$$

A H függ t_0 -tól, de abban az értelemben konstans, hogy *most bármely* két galaxisra alkalmazható. A képletnek ez az univerzális érvényessége azzal kapcsolatos, hogy a galaxisok közötti távolság növekedése nem a galaxisok saját mozgásának, hanem a metrikus tenzor időfüggésének a következménye.

De mi van a galaxisok között terjedő fény hullámhosszával? Ez is "távolság", de vajon melyik kategóriába tartozik? Állandó marad-e, mint a méterrúd hossza, az $a(t)$ -vel arányosan skálázik-e, mint a galaxisok távolsága, vagy valamilyen ezektől különböző módon viselkedik? Ahhoz, hogy a kérdésre válaszolhassunk, ki kell számítanunk az RW metrikában terjedő fénysugár frekvenciájának változását a fénysugár mentén.

A fénysugarak, mint tudjuk, fényszerű geodetikusok, amelyek érintővektora a \mathbf{k} hullámvektor. Írjuk fel a (19.4) összefüggést ezekre a geodetikusokra:

$$\frac{d}{d\xi}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{W}) = \frac{1}{2} k^i k^j \mathcal{L}_W g_{ij}. \quad (40.3)$$

A ξ a fénysugár affin paramétere, a \mathbf{W} pedig tetszőleges vektormező. Ha \mathbf{W} -ként a lokális koordinátabázis $\mathbf{e}_{(0)}$ elemét választjuk, akkor

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{e}_{(0)} = k_0 = \frac{\omega}{c}. \quad (40.4)$$

⁶³A *mai állapot* az angol *present epoch* kifejezés magyar megfelelője.

Így

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{c}{2} k^i k^j \mathcal{L}_{\mathbf{e}_{(0)}} g_{ij} \stackrel{(7.13)}{=} \frac{c}{2} k^i k^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} = \frac{1}{2} k^i k^j \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}. \quad (40.5)$$

Amikor g_{ij} nem függ a koordinátáidőtől, a frekvencia a fénysugár mentén állandó. Ez volt a helyzet Schwarzschild-koordinátákban. A RW metrika azonban *függ* a t koordinátáidőtől, ezért a fénysugár frekvenciája a terjedés során változik. Milyen gyorsan?

A térbeli koordinátarendszer origóját mindig választhatjuk úgy, hogy rajta legyen a vizsgált fénysugáron. Ekkor a fénysugár centrális: $k^\vartheta = k^\varphi = 0$, és csak k^0 és k^x különbözik zérustól (a határozottság kedvéért a $k = +1$ geometria esetét tárgyaljuk, de a gondolatmenet érvényes a másik két geometriára is). Mivel $g_{00} = 1$ és $g_{xx} = -a^2(t)$, a (40.5) most a következő:

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \frac{c}{2} (k^x)^2 \cdot \frac{d}{dx^0} (-a^2) = - (k^x)^2 a \cdot \frac{da}{dt}.$$

A fénysugarak azonban fényszerű geodetikusok, ezért \mathbf{k} érintővektoruk fényszerű:

$$\mathbf{k}^2 = g_{ij} k^i k^j = (k^0)^2 - a^2 (k^x)^2 = 0.$$

Ennek következtében

$$(k^x)^2 = \frac{1}{a^2} (k^0)^2,$$

és így

$$\frac{d\omega}{d\xi} = -\frac{1}{a} \cdot (k^0)^2 \frac{da}{dt}.$$

A $k^0 = \frac{dx^0}{d\xi}$ képlet segítségével a baloldalon is áttérünk t szerinti deriválásra:

$$\frac{1}{c} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{a} k^0 \frac{da}{dt}.$$

A $k^0 = \omega/c$ kihasználásával pedig rövid átalakítás után kapjuk a végeredményt:

$$\frac{d}{dt}(\omega a) = 0. \quad (40.6)$$

A fénysugár mentén tehát az $\omega \cdot a$ szorzat értéke az, ami változatlan. Ha a változik, akkor ω az $1/a$ -val arányos változást szenved⁶⁴

A változás hatása a távoli galaxisok spektrumvonalainak a helyzetében jelentkezik. A fény, amit *most itt* megfigyelünk, Δt koordinátáidővel korábban indult el a galaxisból. Ha a galaxis elég messze van, a frekvenciája ezalatt észrevehetően megváltozott, ezért egy alkalmasan kiválasztott kémiai elem atomjának spektrumában egy meghatározott spektrumvonal ω_0 *megfigyelt* frekvenciája különbözni fog ugyanezen spektrumvonal ω frekvenciájától a *kibocsátás* pillanatában. Ezt az ω frekvenciát mi a saját laboratóriumi kísérleteinkből ismerjük, ezért meg tudjuk határozni a frekvencia megváltozásának a nagyságát. Az emittált és az észlelt frekvenciát természetesen az emittáló és az észlelő galaxis sajátidejében kell érteni, de az RW metrika szinkron jellege következtében ezek a sajátidők megegyeznek a koordinátáidővel, mivel a nyugvó objektumok hipotézise szerint a galaxisok nyugszanak az RW koordinátákban. A tapasztalat szerint ω_0 mindig *kisebb* ω -nál. Ez a jelenség a *kozmológiai vöröseltolódás*.

⁶⁴Ha ugyanezt a gondolatmenetet k^i helyett egy szabadon mozgó tömegpont négyessebességére alkalmazzuk, amelyre $\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_{(0)} = V_0 = E/mc$, azt találjuk, hogy koordinátáidőben $p \cdot a = \text{konstans}$, ahol $p = \sqrt{(E/c)^2 - m^2 c^2}$ az impulzus nagysága.

Az ω és az ω_0 kapcsolatát (40.6) szerint az $\omega_0 a_0 = \omega a$ egyenlőség írja le, vagyis az ω/ω_0 hányados az a_0/a aránnyal egyenlő, ahol — mint korábban, — a_0 az $a(t)$ függvény értéke a mai állapotban, a pedig ugyanezen paraméter értéke az emisszió pillanatában. Vöröseltolódásról lévén szó $a_0 > a$.

Az ω helyett többnyire a $\lambda = 2\pi c/\omega$ hullámhosszal dolgoznak. A (40.6) szerint $a/\lambda = a_0/\lambda_0$, azaz

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a}, \quad (40.7)$$

vagyis *a fény hullámhossza ugyanúgy skálázik, mint a galaxisok közötti távolság*. A tapasztalat szerint a (40.7) arány nagyobb 1-nél. Az eltolódás mértékének a jellemzésére a

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} \quad (40.8)$$

paramétert használják.

Meg lehet-e mondani a z mért értéke alapján, hogy milyen l_0 távolságra van most (a mai állapotban) az a galaxis, amelynek a fényét analizáltuk? A gondolatmenet, amely elvezet a z és az l_0 közötti összefüggéshez, két lépésből áll. A z -t először azon a Δt koordinátaidő intervallumon keresztül fejezzük ki, amennyi alatt a fény a vizsgált galaxisból elérkezett hozzánk, majd pedig Δt -t kapcsolatba hozzuk l_0 -lal.

Ha az $a(t)$ függvényt az Einstein-egyenlet megoldásából ismerjük, akkor Δt -t a

$$z = \frac{a_0}{a(-\Delta t)} - 1$$

egyenletből számíthatjuk ki. Ha $a(t)$ -t nem ismerjük, és a z , amit mértünk, 1-hez képest kicsi, akkor sorfejtést használhatunk, amelyben $a(t)$ -t két empirikusan meghatározandó konstanson keresztül fejezzük ki. Fejtsük sorba $1/a(-\Delta t)$ -t az $1/a_0$ érték körül:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(-\Delta t)} &= \frac{1}{a_0} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} \right) \Big|_0 \cdot (-\Delta t) + \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{a} \right) \Big|_0 \cdot (-\Delta t)^2 + \dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} \right) \Big|_0 &= -\frac{\dot{a}_0}{a_0^2}, \quad \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{a} \right) \Big|_0 = -\frac{\ddot{a}_0}{a_0^2} + \frac{2\dot{a}_0^2}{a_0^3}, \end{aligned} \quad (40.9)$$

ahol \dot{a}_0 és \ddot{a}_0 az $a(t)$ első és második deriváltja a mai állapotban.

Ezt a sorfejtést használva

$$z = \frac{\dot{a}_0}{a_0} \Delta t + \left[\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0} \right)^2 - \frac{\ddot{a}_0}{2a_0} \right] \Delta t^2 + \dots,$$

amelyben megjelent a (40.1) Hubble-konstans. Vezessük be a

$$q = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2} = -\frac{\ddot{a}_0}{H^2 a_0} \quad (40.10)$$

lassulási paramétert. Ekkor

$$z = H \cdot \Delta t + \left(1 + \frac{1}{2}q \right) \cdot (H \cdot \Delta t)^2 + \dots \quad (40.11)$$

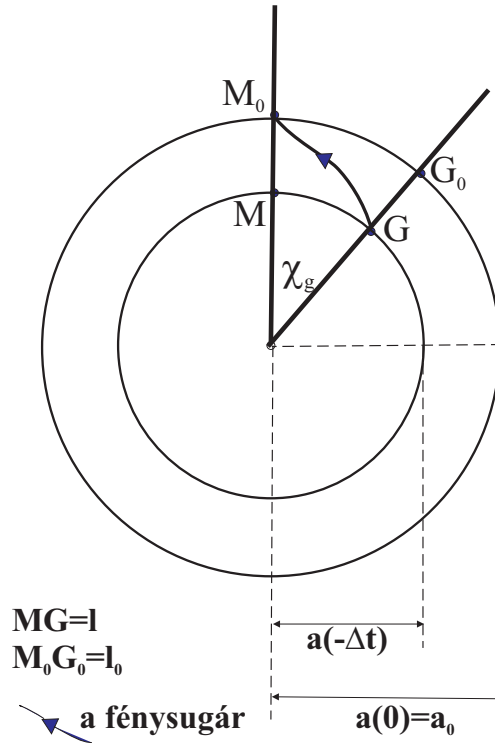
Ezek a képletek a $k = \pm 1$ RW-metrikára vonatkoznak, mert (39.1) szerint csak ezekben szerepel az $a(t)$ függvény. Azonban a $k = 0$ esetben is a dimenziótlan $b(t)$ helyett bevezethetünk hosszúság dimenziójú $a(t)$ -t a $b(t) = a(t)/a_0$ definícióval, amelyben az $a(0) \equiv a_0$ értéke tetszőlegesen választható (vagyis megállapodunk benne, hogy a mai állapotban legyen $b = 1$). Ekkor a képleteink már mindhárom esetben érvényesek.

Az l_0 és a Δt kapcsolatát a 16. ábra segítségével tisztázhatjuk, amely gömbi ($k = 1$) geometriára vonatkozik. Amikor a vizsgált galaxis fénye a G pontból elindult felénk, az $a(t)$ skálaparaméter értéke $a(-\Delta t)$ volt (gömbi geometriánál $a(t)$ a gömb sugarával egyenlő). A fénysugár folyamatosan növekvő sugarú gömbön terjedt, és most, amikor az M_0 pontban megfigyeljük, a sugár a mai állapotnak megfelelő a_0 -lal egyenlő.

Ha a 3D gömbi koordinátarendszer origóját M_0 -ban (a mi Galaxisunkban) vesszük fel, akkor a fénysugáron a ϑ és a φ értéke végig megegyezik azzal az értékkel, amely irányból a fény megérkezik hozzánk (a fénysugár centrális). Ezért két közeli pontja között $ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) d\chi^2 = 0$, vagyis $d\chi = -c \cdot dt/a(t)$. Közeli galaxis esetén $d\chi \approx -\chi_g$, $a(t) \approx a_0$ és $dt \approx \Delta t$. Ha innen Δt -t (40.11)-be helyettesítjük, a Δt első rendjében a

$$z \approx \frac{1}{c} H l_0 \quad (40.12)$$

Hubble-törvényre jutunk, amely szerint az l_0 távolság legalacsonyabb rendjében z arányos l_0 -lal.



16.ábra

Távoli galaxis esetében a $c^2 dt^2 - a^2(t) d\chi^2 = 0$ egyenletet integrálnunk kell a G és az M_0 között a t a $(-\Delta t, 0)$ intervallumban, miközben a χ a $(\chi_g, 0)$ intervallumban változik:

$$\chi_g = c \int_{-\Delta t}^0 \frac{dt}{a(t)}.$$

Ha ezt a_0 -lal megszorozzuk, az $l_0 = a_0 \chi_g$ képlet alapján megkapjuk az l_0 és a Δt kapcsolatát meghatározó

$$l_0 = a_0 \chi_g = c \int_{-\Delta t}^0 dt \frac{a_0}{a(t)}$$

egyenletet, amely — ha az $a(t)$ -t ismerjük, — tetszőleges Δt -nél használható.

A sorfejtésen alapuló tárgyalás évtizedekig elegendő volt a megfigyelések értelmezéséhez, mert sokáig csak $z \approx 0,1$ nagyságrendű vöröseltolódásokat figyeltek meg. Ezekből a megfigyelésekből meg lehetett határozni a Hubble-konstansot, amelynek értéke mai ismereteink szerint

$$H = 71 \pm 3 \frac{km}{s} \cdot \frac{1}{Mpc}.$$

Dimenzióanalízisnél természetesen $[H] = 1/s$, de a H számértékét a (40.2) által sugallt vegyes dimenzióban szokás megadni. Az így megadott szám azt fejezi ki, hogy a mai állapotban két egymástól 1 Mpc távolságra lévő galaxis távolodási sebessége 71 km/s-mal egyenlő. Ennek az értéknek $1/H \approx 15$ milliárd év felel meg.

A Hubble-konstans ismeretében a vöröseltolódás méréséből meg lehet határozni a közeli galaxisok távolságát. Ekkor ugyanis még nem kell figyelembe venni a skálafaktor megváltozását a fény kibocsátása és észlése között. A nagy vöröseltolódásoknál más a helyzet. Ezeket a megfigyeléseket elsősorban arra lehet felhasználni, hogy a kozmológiai modellszámításokból kapott $a(t)$ függvény menetét ellenőrizzük a t_0 -t megelőző hosszabb-rövidebb intervallumban. Ehhez azonban máshonnan már tudni kell a megfigyelt galaxis távolságát, és ez nagyon bizonytalanná teszi a megfigyelések értékelését.

Történeti megjegyzés: A gravitációs és a kozmológiai vöröseltolódás — mint láttuk — bizonyos szempontból pont ellentéte egymásnak. A gravitációs vöröseltolódásnál a fény frekvenciája a terjedés során állandó, és a megfigyelt frekvenciaváltozás oka az, hogy a sajátidő a tér különböző pontjaiban különböző módon függ a koordinátaidőtől. A kozmológiai vöröseltolódásnál ezzel szemben a sajátidő mindenütt egyenlő a koordinátaidővel, viszont a frekvencia a terjedés során nem marad állandó.

Másrészt a 23. fejezetben láttuk, hogy a gravitációs vöröseltolódás a Doppler-effektussal van szoros kapcsolatban. A kétfajta vöröseltolódás ellentétes természetéből ezért az is következik, hogy a kozmológiai vöröseltolódás nem rokonítható a Doppler-effektussal. A Doppler-effektusnál a frekvenciaváltozás oka az, hogy az adó és a vevő különböző sebességű mozgása miatt a sajátidejük különböző módon függ a koordinátaidőtől. A kozmológiai vöröseltolódásnál ezzel szemben a nyugvó objektumok hipotézise szerint mind az adó, mind a vevő galaxis nyugalomban van, és a frekvencia változása a fény terjedése közben az Univerzum tágulása következtében jön létre.

Amikor azonban Hubble a múlt század húszas éveiben felismerte, hogy a vöröseltolódás annál nagyobb, minél távolabbi galaxis spektrumát vizsgálja, és feltételezte, hogy a hullámhossz relatív megváltozása arányos a távolsággal (Hubble-törvény), még nem gondolhatott változó metrikájú téridőre, és a sík téridőben bekövetkező Doppler-effektussal magyarázta a jelenséget. A gondolatmenetét így rekonstruálhatjuk:

A (23.6), vagy a vele azonos (23.8) képletből indulhatunk ki, amelyben ν' -t most ν_0 -ra kell átjelölnünk, és távolodásról lévén szó a V előjelét meg kell változtatnunk. Tegyük fel továbbá, hogy a galaxisok sebessége sokkal kisebb a fénysebességnél. A V/c legalacsonyabb rendjében ekkor $\nu_0 = \nu(1 - V/c)$, vagy $\nu_0/\nu = \lambda/\lambda_0$ következtében

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 - \frac{\dot{l}}{c}.$$

Feltételeztük, hogy V -n a megfigyelt galaxis sebességét kell érteni az emisszió pillanatában, amikor l távolságra volt tőlünk: $V = \dot{l}$. Ezt a képletet átrendezhetjük a

$$\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{c} \left(\frac{\dot{l}}{l} \right) \cdot l \quad (40.13)$$

alakba. Ez a képlet akkor van összhangban Hubble-nak azzal a feltevésével, hogy a baloldal arányos a fényforrás távolságával, ha az \dot{l}/l hányados univerzális állandó: A galaxisok annál gyorsabban távolodnak tőlünk, minél messzebb vannak. Ezt a következtetést vont le Hubble a megfigyeléseiből.

Pontosított formában ($\dot{l}/l = konstans$ helyett $\dot{l}_0/l_0 = konstans$) ez utóbbi következtetés a standard modellben is megmaradt, de a Hubble-törvény csak a nem túl távoli galaxisokra bizonyult érvényesnek (a (40.13) baloldalán a nevező ekkor helyettesíthető λ -val). A standard modell nézőpontjából azonban a Doppler-effektuson alapuló megfontolás a részleges egybeesések ellenére sem fogadható el.

41. A Fridman-egyenletek

Most meg kell vizsgálni, hogy a RW metrika kielégíti-e az Einstein-egyenleteket, és ha igen, milyen $a(t)$ mellett. A RW metrikában egyedül ez a függvény az ismeretlen, ezért az Einstein-egyenletek közül egyet kell kiválasztanunk⁶⁵. A (38.1) egyenlet

$$R_t^t - \frac{1}{2}R - \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_t^t \quad (41.1)$$

komponensét választjuk. A (39.4), (39.5) alapján némi átrendezéssel ez az egyenlet az

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} T_t^t a^2 + \frac{\Lambda c^2}{3} a^2 - kc^2 \quad (41.2)$$

alakra hozható, amelyben nem fordul elő \ddot{a} .

A T_t^t konkretizálásához el kell döntenünk, milyen fajtájú anyag járulékat vesszük figyelembe. A mai állapotban a szemcsés (tömeges) anyag dominálja az Univerzumot, mégis figyelembe kell vennünk az elektromágneses sugárzást is, mert az így kapható egyenletek megoldásából kiderül, hogy korábban az Univerzumnak volt sugárzás-dominált korszaka is. A RW metrikában $g_{0i} = \delta_{0i}$, ezért $T_t^t = T_0^0 = T^{00}$ az energiasűrűséggel egyenlő:

$$T_t^t = w = \rho c^2 + w_r, \quad (41.3)$$

ahol ρ a tömegsűrűség, w_r pedig a sugárzási energia sűrűsége (ld. a 25. fejezetet). A (41.3) felírásánál azt is kihasználtuk, hogy a nyugvó objektumok hipotézise szerint a szemcsés anyagot alkotó galaxisok nyugszanak a RW koordinátarendszerben, ezért ennek az "ideális gáznak" a p nyomása és u belső energiája nulla.

A (41.3)-t (41.2)-be helyettesítve kapjuk az

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + w_r) + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \quad (41.4)$$

első *Fridman-egyenletet*⁶⁶.

Ebben az egyenletben azonban ρ és w_r is ismeretlen függvény, amelyek a kozmológiai-hipotézis következtében csak t -től függhetnek, a térkoordinátáktól nem. A (41.4)-n kívül ezért még két további egyenletre van szükség, hogy a három $a(t)$, $\rho(t)$, $w_r(t)$ függvényt kiszámíthassuk.

A szemcsés anyag a tömegpont-galaxisokból áll, amelyek nyugszanak a RW koordinátákban, és az Univerzum tágulása következtében az $a(t)$ -vel arányosan távolodnak egymástól. Ennek következtében egy kiválasztott galaxis-csoport által elfoglalt (vagyis rögzített koordinátájú pontokat tartalmazó) térfogat $a^3(t)$ -vel arányosan nő, és a $\rho(t)$ ennek megfelelő mértékben csökken:

$$\rho(t) = \frac{\rho_0 \cdot a_0^3}{a^3}. \quad (41.5)$$

⁶⁵A Schwarzschild-metrikában két ismeretlen függvény volt, $A(r)$ és $B(r)$, amelyeket az $R_{00} = 0$, $R_{rr} = 0$ Einstein-egyenletekből határoztunk meg.

⁶⁶Fridman ezt a $w_r = 0$, $\Lambda = 0$ esetre vezette le, de a nyomást nullától különbözőnek tekintette.

A jobboldalon ρ_0 a tömegsűrűség a mai állapotban. Ez az egyenlet a $\rho(t)$ -t visszavezeti $a(t)$ -re, ezért már csak egy további egyenletre van szükségünk.

Ez a még hiányzó egyenlet lehet a tíz Einstein-egyenlet (41.1)-től független komponense, vagy a komponensek alkalmas kombinációja. A legjobb választásnak a (38.1) Einstein-egyenletek kontrakciójával kapható

$$-R - 4\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T \quad (41.6)$$

bizonyul, amelyben $T = T^i_i = \rho c^2$ nem tartalmaz sugárzási járulékot, mivel (25.12) szerint az elektromágneses mező energia-impulzus tenzorának kontrakciója nulla. Ez az a lépés, ahol kihasználjuk, hogy az elektromágneses mezőnek van nyomása, mert különben az energia-impulzus tenzorának kontrakciója nem lehetne nulla.

Az R -t (39.5)-ből vehetjük, és a benne szereplő \dot{a}^2 -t helyettesíthetjük (41.2) jobboldalával. Ezután kis átalakítással az

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 2w_r) a + \frac{\Lambda}{3} c^2 a \quad (41.7)$$

egyenletre jutunk. Ez a második Fridman-egyenlet.

A (41.7) helyett azonban választhatnánk a $\nabla_j T^{ij} = 0$ egyenlet valamelyik komponensét, mert erről az egyenletről tudjuk, hogy az Einstein-egyenletek következménye. A

$$\nabla_j T^{0j} = 0 \quad (41.8)$$

komponens a lokális energiamegmaradással függ össze, és ez a világos fizikai jelentés a (41.8) választása mellett szól a (41.7)-tel szemben, amelynek nincs ilyen közvetlen fizikai értelme.

Nem lenne nehéz kifejezni (41.8)-t az $a(t)$, $\rho(t)$, $w_r(t)$ változókon keresztül⁶⁷, de némileg egyszerűbben lehet ugyanahhoz az egyenlethez eljutni a (41.4) és a (41.7) átalakításával. Ez a lehetőség abból következik, hogy (41.8) az Einstein-egyenletek következménye.

Az eljárás az, hogy (41.4)-t deriváljuk t szerint, és az így kapott egyenletben \ddot{a} -t a (41.7) jobboldalával helyettesítjük. Ezután türelmes átalakítások után az

$$a \cdot \frac{d}{dt} (a^3 \rho c^2) + \frac{d}{dt} (a^4 w_r) = 0 \quad (41.9)$$

egyenletre jutunk. A (41.5) szerint azonban az első tag zérus, ezért végül (41.4) és (41.5) mellett harmadik egyenletként a

$$\frac{d}{dt} (a^4 w_r) = 0 \quad (41.10)$$

⁶⁷A gondolatmenet a következő:

$$\nabla_j T^{0j} = \partial_j T^{0j} + \Gamma_{jl}^j T^{0l} + \Gamma_{jl}^0 T^{lj}.$$

Az energia-impulzus tenzorra vonatkozó információkat a 25. fejezet tartalmazza. Ez a tenzor diagonális, ezért a fenti képletben csak a (39.3)-beli Γ -k fordulnak elő ($\Gamma_{00}^0 = 0$). Így

$$\nabla_j T^{0j} = \frac{1}{c} \left[\partial_t T^{00} + 3 \frac{\dot{a}}{a} T^{00} - \frac{\dot{a}}{a} T_{\alpha}^{\alpha} \right].$$

Itt $T^{00} = \rho c^2 + w_r$, és mivel (25.12) szerint $T_{em} = 0$, ezért $T_{\alpha}^{\alpha} = -T_{em}^0 = -w_r$ (figyelembe vettük, hogy a "galaxis-gáz" nyomása nulla). Ezt kihasználva

$$\nabla_j T^{0j} = \frac{1}{c} \left[\partial_t (\rho c^2 + w_r) + \frac{\dot{a}}{a} (3\rho c^2 + 4w_r) \right] = \frac{1}{ca^4} \left[a \cdot \partial_t (a^3 \rho c^2) + \partial_t (a^4 w_r) \right],$$

amit (41.8)-ba helyettesítve valóban (41.9)-re jutunk.

egyenletre jutunk, amelyből

$$w_r(t) = \frac{w_{r0} \cdot a_0^4}{a^4}. \quad (41.11)$$

A w_{r0} a sugárzási energiasűrűség értéke a mai állapotban. A (41.11) a $w_r(t)$ -t visszavezeti $a(t)$ -re.

A (41.5) és a (41.11) felhasználásával (41.4)-t az

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \left[\rho_0 c^2 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + w_{r0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \right] + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \quad (41.12)$$

alakra hozhatjuk, amelyben már csak az $a(t)$ ismeretlen. A továbbiakban ezt az egyenletet nevezzük Fridman-egyenletnek.

Térjünk vissza befejezésül a (41.9) egyenletre, amely a (41.8) kifejtett alakja. Az egyenlet valóban az energiamegmaradással függ össze, de *nem* azt fejezi ki, hogy a galaxisok tömegében és a sugárzási térben felhalmozott energia állandó. Az egyenlet átírható a

$$\frac{d}{dt} [(\rho c^2 + w_r) a^3] = -\dot{a} a^2 w_r$$

alakra. Ha a jobboldalon nulla állna, az egyenlet azt fejezné ki, hogy egy kijelölt galaxiscsoport által elfoglalt táguló térfogatban a nyugalmi energia és a sugárzási energia összege időben állandó. A jobboldal azonban különbözik nullától és ez azt mutatja, hogy a metrika időfüggése következtében $\dot{a} > 0$ -nál a szóbanforgó térfogatban az energia csökken, a sugárzási tér — amelynek az energiasűrűség mellett nyomása is van — munkát végez a téridőn. Mivel a téridő a dinamika egyik szereplője, nem is várhatjuk, hogy a tömeges anyagnak és a sugárzási mezőnek az energiája külön is megmaradjon.

Az energiacsökkenés *sebességét* a (41.10)-ből lehet legkönnyebben leolvasni. Írjuk ezt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{a^3 w_r}{1/a} \right) = 0$$

alakban, amelyből látszik, hogy a kiszemelt, rögzített koordinátájú pontokat tartalmazó térfogatban a *sugárzási* energia $1/a(t)$ -vel arányosan csökken. Egységnyi térfogatra számolva a csökkenés $1/a^4$ -nel arányos.

A kozmológiai vöröseltolódás annak következménye, hogy a Világegyetem tágulása következtében a frekvencia csökken: $\nu \sim 1/a$. Most látjuk, hogy nem csak a frekvencia, hanem a sugárzási energia is csökken: Minden rögzített koordinátájú pontokat tartalmazó térfogatban a sugárzási energia mennyisége minden adott frekvencián a frekvenciával arányosan változik: $E_r \sim \nu$.

Ez a konklúzió összefér a fotonképpel. Ha feltesszük, hogy a sugárzási tér különböző frekvenciájú fotonokból áll, akkor a fotonsűrűség $1/a^3$ -nal arányosan, az egyes fotonok energiája pedig az $\varepsilon = h\nu$ képlet szerint a kozmológiai vöröseltolódás következtében $1/a$ -val arányosan csökken.

Történeti megjegyzés: Einstein eredeti elgondolása az volt, hogy az Univerzum statikus 3D gömb, vagyis a "mai állapot" örökké fennáll (*Einstein-univerzum*). Ha a (41.4), (41.7) Fridman-egyenleteket erre az esetre specializáljuk ($a = a_0$, $\dot{a} = \ddot{a} = 0$, $\rho = \rho_0$, $w_r = w_{r0} = 0$), akkor a

$$\frac{8\pi G}{3} \rho_0 + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{c^2}{a_0^2} = 0, \quad -\frac{4\pi G}{3} \rho_0 + \frac{\Lambda}{3} c^2 = 0$$

egyenletekre jutunk. Ha feltesszük, hogy a csillagászati megfigyelésekből ismerjük ρ_0 -t, ezekből az egyenletekből kiszámíthatjuk a_0 -t és Λ -t.

Einstein azonban eredetileg nem írta be a $-g_{ij}\Lambda$ tagot a téregyenletébe, és ezért az előbbi egyenleteket is a Λ -t tartalmazó tagok nélkül kapta meg. Így viszont a két egyenlet ellentmond egymásnak. Ez az ellentmondás sugallta Einsteinnek a kozmológiai állandó bevezetését az elméletbe.

Később az is kiderült, hogy az Einstein-univerzum instabil, ezért a továbbiakban nem foglalkozunk vele.

42. A Fridman-egyenlet megoldása

A ρ_0 , a w_{r0} és a Λ dimenziós mennyiségek: $[\rho_0 c^2] = [w_{r0}] = J/m^3$, $[\Lambda] = 1/m^2$. Vezessük be helyettük az Ω_m , Ω_r , Ω_Λ standard dimenziótlan mennyiségeket, amelyek a mai állapotra vonatkoznak:

$$\rho_0 = \Omega_m \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad w_{r0} = \Omega_r \frac{3H^2 c^2}{8\pi G}, \quad \Lambda = \Omega_\Lambda \frac{3H^2}{c^2} \quad (42.1)$$

($[\rho_0 G] = [H^2] = 1/s^2$). A (41.12) Fridman-egyenlet ekkor a következő alakot ölti:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 \left[\Omega_m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_r \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda \right] - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (42.2)$$

Ebben az egyenletben azonban nem mindegyik paraméter független egymástól, mert a három Ω paraméter egyértelműen meghatározza k -t. Ahhoz, hogy ezt belássuk, írjuk fel az egyenletet a mai állapotban, amikor $a = a_0$, $\dot{a} = \dot{a}_0$ és $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2$, és rendezzük úgy, hogy a k -t tartalmazó tag a baloldalra kerüljön:

$$\frac{kc^2}{a_0^2} = H^2 [\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - 1]. \quad (42.3)$$

Ebből látszik, hogy a geometriát az

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda \quad (42.4)$$

összeg egyértelműen rögzíti:

$$k = \begin{cases} +1 & \text{ha } \Omega > 1, \\ -1 & \text{ha } \Omega < 1, \\ 0 & \text{ha } \Omega = 1. \end{cases} \quad (42.5)$$

A (42.3)-ból az is látható, hogy ha $k = \pm 1$, akkor⁶⁸

$$a_0 = \frac{c}{H\sqrt{|\Omega - 1|}}. \quad (42.6)$$

A (40.10)-ben definiált lassulási paraméter is kifejezhető a három Ω paraméteren keresztül. Ehhez a (41.7) második Fridman-egyenletet kell a mai állapotra felírni:

$$\frac{\ddot{a}_0}{a_0} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho c^2 + 2w_{r0}) + \frac{\Lambda}{3} c^2.$$

A (42.1) és a $q = -\ddot{a}_0/H^2 a_0$ definíció alapján innen

$$q = \frac{1}{2} \Omega_m + \Omega_r - \Omega_\Lambda. \quad (42.7)$$

Térjünk vissza a (42.2) Fridman-egyenlethez és fejezzük ki benne kc^2 -t (42.3) segítségével az Ω paramétereken keresztül:

$$\frac{1}{H^2} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \Omega_m \left[\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right] + \Omega_r \left[\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right] + \Omega_\Lambda \left[1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right] + \left(\frac{a_0}{a}\right)^2. \quad (42.8)$$

⁶⁸Amikor $k = 0$ az a_0 skálafaktor értéke tetszőlegesen választható.

Ennek az elsőrendű közönséges nemlineáris differenciálegyenletnek a megoldása adja meg az $a(t)$ függvényt a standard modellben.

Az Univerzum mai állapota *tömeg-dominált*, mert $\Omega_r \ll \Omega_m$ ($w_{r0} \ll \rho_0 c^2$). A korábbi állapotokban azonban a sugárzás energiája összemérhető, sőt nagyobb is volt, mint a részecskéké. Amíg a hőmérséklet magasabb volt, mint kb. 10^4 K, az elektromágneses sugárzás és a töltött elemi részecskék intenzíven kölcsönhatottak egymással, és a sugárzás termikus egyensúlyban volt a részecskékkel. Később, a hőmérséklet csökkenésével a töltött elemi részecskék semleges atomokat képeztek, amelyek lényegesen gyengébben hatnak kölcsön a sugárzással. Ettől kezdve ρ és w_r egymástól függetlenül változott, a sugárzási tér *lecsatolódt* az anyagról.

Az előző fejezetben láttuk, hogy bármely, adott koordinátájú pontokat tartalmazó térrészben a szemcsés anyag energiája (a galaxisok nyugalmi energiája) időben állandó, a sugárzási tér energiája azonban $1/a(t)$ -vel arányosan csökken. Ennek következtében a sugárzás a mai állapotban már csak a 2,7 K hőmérsékletű *háttérsugárzásként* van jelen, amelynek energiatartalma elhanyagolható a részecskéké mellett.

A (42.8) további analízisének ezért az Ω_r paramétert nullának vesszük. Ennek következtében a megoldást a mai állapottól visszafelé csak addig érvényes, amíg ez a közelítés elfogadható. Az alább következő matematikai analízisben azonban ezt a korlátozást nem vesszük figyelembe.

A matematikai analízis érdekében vezessünk be új dimenziótlan független és függő változót az

$$x = Ht, \quad y = \frac{a_0}{a}$$

relációkkal. A pont továbbra is a t szerinti deriválást fogja jelölni, az x szerinti deriválás jele pedig a vessző lesz. Ekkor

$$\dot{y} = -\frac{a_0 \dot{a}}{a^2} = -\frac{\dot{a}}{a} y,$$

azaz

$$\frac{\dot{a}}{a} = -\frac{\dot{y}}{y} = -H \frac{y'}{y}. \quad (42.9)$$

A (42.8) Fridman-egyenlet ezekben a változóknál $\Omega_r = 0$ -nál a következő:

$$(y')^2 = y^2 [\Omega_m y^3 + (1 - \Omega_\Lambda - \Omega_m) y^2 + \Omega_\Lambda]. \quad (42.10)$$

Az egyenlet a változók szeparálásával integrálható:

$$x = \pm \int \frac{dy}{y \sqrt{\Omega_m y^3 + (1 - \Omega_\Lambda - \Omega_m) y^2 + \Omega_\Lambda}}. \quad (42.11)$$

Ez a képlet a keresett $y(x)$ függvény *inverzét* határozza meg, de ez csupán apró kényelmetlenséget jelent.

A (42.11)-ben a határokat nem rögzítettük, mert a megválasztásuk függ a

$$P(y) = \Omega_m y^3 + (1 - \Omega_\Lambda - \Omega_m) y^2 + \Omega_\Lambda \quad (42.12)$$

polinóm nullhelyeitől. Csak annyi bizonyos, hogy $a(t)$ pozitivitása miatt az integrálási tartomány nem terjedhet ki a negatív y -tengelyre.

Tegyük fel, hogy az Ω paraméterek olyanok, hogy $P(y)$ -nak nincs nullhelye a pozitív y -tengelyen. A nevezőbeli y szorzótényező miatt az integrál $y = 0$ -nál divergál, ezért nem választhatjuk integrálási tartománynak a $(0, y)$ tartományt. A (42.10) egyenletet azonban az (y, ∞) választással is kielégítjük:

$$x = \pm \int_y^\infty \frac{dy}{y \sqrt{P(y)}}. \quad (42.13)$$

Az egyenlet x -szerinti deriválásával könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a felső előjelhez tartozó megoldásban az egész pozitív y tengelyen $y' < 0$, az alsó előjelhez tartozóban pedig $y' > 0$. Mivel $a \sim 1/y$, a felső előjelnél $a(t)$ az idő monoton növekvő, az alsónál monoton csökkenő függvénye. A kozmológiai vöröseltolódással ezért csak a felső előjel van összhangban.

A határok alapján megállapítható, hogy ebben a megoldásban $y \rightarrow \infty$ -nél $x \rightarrow 0$, és $y \rightarrow 0$ -nál $x \rightarrow \infty$. Mivel $t \sim x$ és $a \sim 1/y$, ezért az $a(t)$ skálafaktor $t \rightarrow 0$ -nál nullához tart (*Nagy Robbanás*), a t növekedésével pedig monoton nő.

A felső előjelhez tartozó megoldást a 17. ábrán láthatjuk.

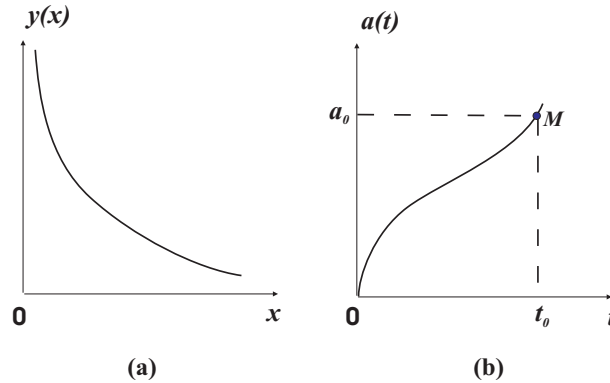
$y \rightarrow \infty$ -nél⁶⁹ $P(y) \rightarrow \Omega_m y^3$, ekkor

$$x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\Omega_m}} \int_y^\infty \frac{dy}{y^{5/2}} = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_m}} \cdot \frac{1}{y^{3/2}},$$

vagy másképpen

$$Ht \rightarrow \frac{2}{3\sqrt{\Omega_m}} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{3/2}.$$

Az $a(t)$ függvény tehát $t \rightarrow 0$ -nál $t^{2/3}$ -ként indul: $a(t) \sim t^{2/3}$. Ne felejtsük el azonban, hogy w_r elhanyagolása miatt nagyon kis időknél a megoldásunk már biztosan érvénytelen.



17.ábra

$y \rightarrow 0$ -nál $P(y) \rightarrow \Omega_\Lambda$. Válasszunk egy olyan η számot, hogy $y < \eta$ -nál $P(y)$ jól közelíthető Ω_Λ -val. Ekkor $y < \eta$ -nál

$$x = \int_y^\infty \frac{dy}{y\sqrt{P(y)}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_y^\eta \frac{dy}{y} + \int_\eta^\infty \frac{dy}{y\sqrt{P(y)}} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} [-\ln y + A],$$

ahol az A konstans. A másik változópárban ugyanez:

$$Ht \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \left[\ln \frac{a}{a_0} + A \right],$$

⁶⁹Amikor $a \rightarrow$ jel nem számok, hanem függvények között áll, akkor "aszimptotikusan egyenlőt" jelent: Amikor $t \rightarrow t_0$ -nál $f(t) \rightarrow g(t)$, akkor ez úgy értendő, hogy az $f(t)/g(t)$ hányados 1-hez tart. Ha eközben a függvények maguk végtelenhez tartanak, a különbségük lehet véges.

ahonnan

$$a(t) \longrightarrow \textit{konstans} \cdot e^{\sqrt{\Omega_\Lambda} \cdot H \cdot t}.$$

$t \rightarrow \infty$ -nél tehát (pozitív Λ -nál) a tágulás exponenciális, minél nagyobb a kozmológiai állandó, annál gyorsabb.

Jelenlegi ismereteink szerint $\Omega_m = 0,3$, $\Omega_\Lambda = 0,7$ ⁷⁰, vagyis $P(y) = 0,3y^3 + 0,7$. A pozitív y -tengelyen ez sehohsem nulla, ezért a diszkutált megoldás éppen a ma valóságosnak gondolt helyzetre vonatkozik. A lassulási paraméter $q = \Omega_m/2 - \Omega_\Lambda = -0,55$, ezért úgy látszik, hogy a mai állapotban a tágulás már a gyorsuló szakaszban van. A 18b. ábrán ennek megfelelően helyeztük el a mai állapothoz tartozó M pontot. A Nagy Robbanás óta eltelt időt a megoldás ismeretében úgy számíthatjuk ki, hogy megkeressük azt az $x = x_0$ -t, amelynél $y(x_0) = 1$ és elosztjuk H -val. Jelenleg ezt az időt kb. 13,7 milliárd évre becsülik. Ez ugyan koordinátaidő, de a standard modellben a galaxisokon a Nagy Robbanás óta eltelt *sajátidő* is ugyanennyi.

Amikor $\Omega \neq 1$, az a_0 -t (42.6)-ból számíthatjuk ki.

A geometriát meghatározó $\Omega = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda$ azonban esetünkben éppen 1-gyel egyenlő, ami a $k = 0$ sík térbeli geometriának felel meg (a *téridő* azonban görbült!). Az a_0 ekkor önkényesen választható. Elgondolkoztató, hogy a bővülő tapasztalati anyag egyöntetűen az euklidészi univerzumot favorizálja. Ha megengedjük magunknak azt a luxust, hogy univerzumok anszamljában gondolkozzunk, ez nyilván végtelenül valószínűtlen. De még ha erre nem is vetemedünk, akkor sem tekinthetjük ezt pusztán véletlennek: Valószínűleg létezik egy ma még felderítetlen szempont vagy törvény, amely megköveteli az euklidészi jelleget.

A kozmológiai állandó és a finomhangolás problémája:

Mint látjuk, mai ismereteink szerint a kozmológiai állandóra szükség van ahhoz, hogy a megfigyeléseket a standard modell keretei között értelmezni tudjuk. Ugyanakkor a kozmológiai állandó a standard modell egyetlen olyan paramétere, amelynek az értékét a kozmológiától függetlenül, a kvantumtérelméletben ki kellene tudni számítani.

Vigyünk át a kozmológiai állandót tartalmazó tagot a (38.1) Einstein-egyenlet jobboldalára. Ha bevezetjük a

$$T_{\Lambda ij} = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} g_{ij} \equiv \rho_\Lambda c^2 g_{ij} \equiv w_\Lambda g_{ij}$$

energia-impulzus tenzor jellegű mennyiséget, ezt az egyenletet

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} (T_{ij} + T_{\Lambda ij})$$

alakban is felírhatjuk, ami mutatja, hogy a kozmológiai állandó egy speciális energia-impulzus tenzor járuléknak felel meg. A 25. fejezet energia-impulzus tenzoraival való összevetés alapján megállapíthatjuk, hogy a $w_\Lambda g_{ij}$ alak pozitív Λ -nál pozitív energiasűrűséget és *negatív nyomást* jelent. A ρ_Λ effektív tömegsűrűséget és a w_Λ effektív energiasűrűséget a (42.1) definíciók segítségével kifejezhetjük a standard modell paraméterein keresztül:

$$\frac{\rho_\Lambda}{\rho_0} = \frac{w_\Lambda}{w_{m0}} = \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m}.$$

A kvantumtérelmélet szerint a vákuumfluktuációk néven ismert jelenség következtében a különféle részecskéket leíró kvantumterek energia-impulzus tenzorának vákuumbeli várható értéke lehet zérustól különböző, és ha nem zérus, akkor $\textit{konstans} \times g_{ij}$ alakúnak kell lennie. A kozmológiai állandó ezért valóban lehet kvantumtérelméleti eredetű. A konstans értékét azonban még a renormált kvantumtérelméletben sem sikerült mindezeideig kiszámítani. Ebben áll a kozmológiai állandó problémája.

⁷⁰A (42.1) alapján ehhez $1/\sqrt{\Lambda} \approx c/H \approx 10^3 \text{ Mpc}$ tartozik.

De ha az Ω_Λ mennyiség kvantumtérelméleti eredetű, miért egyezik meg az értéke nagyságrendileg (valójában majdnem pontosan) Ω_m -mel, amely tisztán klasszikus fizikai természetű? Ez a *finomhangolás problémája*, amelynek igazi megoldása csak az lehet, hogy a két függetlennek tűnő mennyiség mégis *egyetlen közös elmélet* két különböző következménye legyen. A finomhangolás és a kozmológiai állandó problémája nyilván szorosan összefügg egymással, és az elméleti fizika egyik legfontosabb megoldatlan problémája.

A (42.11) megoldást ugyanígy lehet diszkutálni tetszőleges $\Omega_m \geq 0$ és Ω_Λ mellett. A megoldás jellegét a $P(y) = 0$ egyenlet pozitív gyökei határozzák meg. A gyökök számától és jellegétől (egyszeres vagy többszörös gyök) függően nagyon különböző $a(t)$ görbéket kapunk. Az általános analízist azonban mellőzzük. Történeti jelentősége miatt azonban egy esetet még megvizsgálunk: Az $\Omega_r = \Omega_\Lambda = 0$ -hoz tartozó *Fridman-univerzumot*.

43. A Fridman-univerzum

Ha Ω_r mellett még Ω_Λ is nulla, akkor $\Omega = \Omega_m \stackrel{(42.1)}{=} \rho_0 / \rho_{kr}$, ahol

$$\rho_{kr} = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (43.1)$$

a *kritikus tömegsűrűség*. A (42.5) szerint az Univerzum 3D gömb, ha $\Omega > 1$ ($\rho_0 > \rho_{kr}$), 3D pszeudogömb, ha $\Omega_m < 1$ ($\rho_0 < \rho_{kr}$) és 3D euklidészi tér, ha $\Omega_m = 1$ ($\rho_0 = \rho_{kr}$).

A (42.11) megoldás most

$$x = \int \frac{dy}{y^2 \sqrt{\Omega_m y + 1 - \Omega_m}}. \quad (43.2)$$

Amikor $0 < \Omega_m < 1$, akkor a gyök alatti kifejezés a pozitív valós y -tengelyen végig pozitív, és így az előző fejezethez hasonlóan a megoldás olyan, hogy $y(x)$ monoton csökkenő, $a(t)$ pedig monoton növekvő. $y \rightarrow \infty$ -nél most is $x \sim 1/y^{3/2}$ és ezért $t \rightarrow 0$ -nál $a(t) \sim t^{2/3}$. $y \rightarrow 0$ -nál azonban most

$$x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_m}} \int_y^\infty \frac{dy}{y^2} + \int_\eta^\infty \frac{dy}{y \sqrt{\Omega_m y + 1 - \Omega_m}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_m}} \left[\frac{1}{y} + A \right],$$

ezért

$$Ht \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_m}} \left[\frac{a}{a_0} + 1 \right],$$

tehát $t \rightarrow \infty$ -nél az $a(t)$ függvény aszimptótája egy pozitív iránytangensű egyenes.

Ha $\Omega_m > 1$, akkor a pozitív

$$y_1 = \frac{\Omega_m - 1}{\Omega_m} \stackrel{(42.6)}{=} \frac{c^2}{\Omega_m H^2 a_0^2} > 0 \quad (43.3)$$

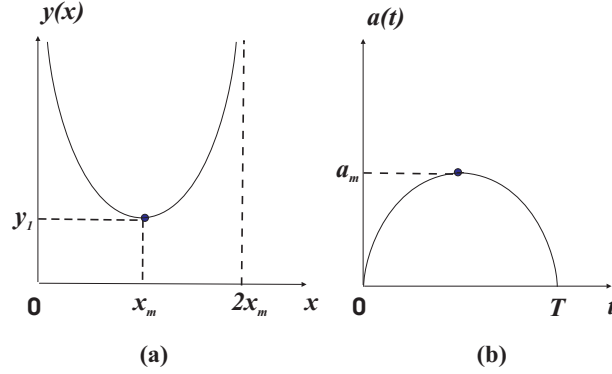
-nál $P(y)$ eltűnik: $\sqrt{P(y)} = \sqrt{\Omega_m} \cdot \sqrt{y - y_1}$. A (43.2) nevezőjében ez *integrálható szingularitás*. Mivel azonban $y < y_1$ -nél $P(y) < 0$, ezért a (43.2)-beli integrálást az $y > y_1$ tartományra kell korlátozni:

$$x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\Omega_m}} \int_y^\infty \frac{dy}{y^2 \sqrt{y - y_1}} & \text{ha } 0 \leq x \leq x_m \\ x_m + \frac{1}{\sqrt{\Omega_m}} \int_{y_1}^y \frac{dy}{y^2 \sqrt{y - y_1}} & \text{ha } x_m \leq x \leq 2x_m, \end{cases} \quad (43.4)$$

amelyben

$$x_m = \frac{1}{\sqrt{\Omega_m}} \int_{y_1}^{\infty} \frac{dy}{y^2 \sqrt{y - y_1}} = \frac{1}{y_1^{3/2} \sqrt{\Omega_m}} \int_1^{\infty} \frac{du}{u^2 \sqrt{u - 1}} = \frac{\pi}{4y_1^{3/2} \sqrt{\Omega_m}}. \quad (43.5)$$

Ezt a megoldást a 18. ábrán rajzoltuk fel.



18.ábra

Itt $T = 2x_m/H$, $a_m = a_0/y_1$. A (43.3) és a (43.5) alapján ebből következik, hogy $T = \frac{\pi a_m}{2c}$. $\rho_0 > \rho_{kr}$ esetben tehát az Univerzum története Nagy Robbanással kezdődik és véges idő után Nagy Összeroppanással ér véget.

Mivel $T \sim x_m \sim (1 - 1/\Omega_m)^{-3/2} \times \Omega_m^{-1/2}$, az összeroppanás annál hamarabb következik be, minél nagyobb a tömegsűrűség (az Ω_m): A tömegsűrűség a felületi feszültség szerepét játssza, amely összehúzni igyekszik az Univerzum 3D gömbjét, de ez a hatás csak $\rho > \rho_{kr}$ -nál elég a kezdeti tágulás megfordítására. Az előző fejezet utolsó képlete pedig azt mutatja, hogy a (pozitív) kozmológiai állandó (az Ω_Λ) szétfeszíteni igyekszik az Univerzumot⁷¹. Az Einstein-univerzumban (41. fejezet) a két hatás éppen kompenzálja egymást.

Végül $\rho_0 = \rho_{kr}$ -nál $\Omega_m = 1$, ezért

$$x = \int_y^{\infty} \frac{dy}{y^{5/2}} = \frac{3}{2y^{3/2}},$$

vagyis

$$a(t) = a_0 \left(\frac{2Ht}{3} \right)^{2/3}.$$

Az Univerzum ekkor folyamatosan lassulva tágul.

Mint látjuk, a Fridman-modellben szoros összefüggés van a tér geometriája és az Univerzum *terminális viselkedése* között:

$$\begin{cases} 3\text{D gömb } (k = 1) & \text{Nagy Összeroppanás} \\ 3\text{D pszeudogömb } (k = -1) & \text{Folyamatos tágulás: } a(t) \rightarrow t \\ 3\text{D euklidészi tér } (k = 0) & \text{Folyamatos tágulás: } a(t) \rightarrow t^{2/3}. \end{cases}$$

⁷¹A $T_{\Lambda 00} = \rho_\Lambda c^2$ komponens ugyanúgy pozitív szám, mint a galaxisok tömegével kapcsolatos ρc^2 tömegsűrűség, amely a tágulás ellen dolgozik. Lényeges különbség azonban, hogy ρ_Λ nem arányos $1/a^3$ -nal és a $T_{\Lambda\alpha\alpha}$ térszerű komponensek nem nullák, hanem negatív mennyiségek. Ezek az eltérések magyarázzák, hogy a 00 komponens hasonlósága ellenére a $T_{\Lambda ij}$ — vagyis a Λ — nem csökkenteni, hanem növelni igyekszik a geometriai tér $a(t)$ skálafaktorát.

Amikor Ω_Λ (és/vagy Ω_r) is különbözik zérustól, ez a szoros kapcsolat megszűnik, pl. gömbi ($k = +1$) geometriájú univerzum sem végződik minden esetben Nagy Összeroppanással. A Nagy Robbanás sem kötelező kezdet: Ha $\Omega_\Lambda > 1$ és Ω_m nem túl nagy, akkor mind $t \rightarrow +\infty$, mind $t \rightarrow -\infty$ irányban az Univerzum folyamatosan tágul, és közben $a(t)$ minimumon halad keresztül.

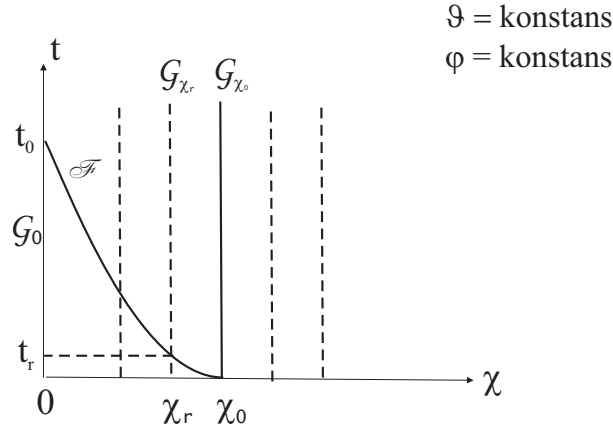
Speciális Ω_m, Ω_Λ kombinációnál az is előfordulhat, hogy a $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} a(t)$ határesetek valamelyikében $a(t) \rightarrow a_\infty > 0$, vagyis a megoldás a megfelelő irányban aszimptotikusan az Einstein-univerzumhoz tart.

44. A horizont-probléma

A kozmológiai háttérsugárzásról a 42. fejezetben már volt szó. Most a háttérsugárzással összefüggő u.n. *horizont-problémát* ismertetjük.

A χ, t koordinátarendszerben fogunk dolgozni⁷², amelyben a galaxisok világvonalai a standard modellben a t -tengellyel párhuzamos egyenesek. A $\chi = \text{konstans}$ világvonalat \mathcal{G}_χ -vel jelöljük. A "mi" Galaxisunk (a referencia galaxis) a $\chi = 0$ -hoz tartozó \mathcal{G}_0 .

A χ, t térkép (19. ábra) nagyon kényelmes, de — mint a térképek általában, — torzít. A galaxisok, amelyek geodetikusai a térképen az egymással párhuzamos $\chi = \text{konstans}$ egyenesek, a t koordinátáidő növekedésével valójában távolodnak egymástól. A helyzet hasonló a Föld térképeihez hengeres projekcióban, amelyeken a hosszúsági körök párhuzamosak egymással.



19.ábra

Melyek azok az események, amelyeket a mai állapotban ("most", t_0 -ban) elvben megfigyelhetünk? Ezek a $\chi = 0, t = t_0$ -hoz tartozó *múltbeli fénykúp* pontjai, vagyis azok a "fénylő események", amelyeknek a fénye $t = t_0$ -ban ér el hozzánk, a \mathcal{G}_0 világvonalra. Szigorúan véve t_0 nem egy matematikai értelemben vett pillanat, hanem egy szűk időintervallum, amely azonban a kozmológiai időskálán akkor is egy pillanatnak tekinthető, ha sok millió földi évre terjed ki. Ezért a továbbiakban a t_0 -t valóban egyetlen pillanatnak fogjuk tekinteni.

A szóban forgó múltbeli fénykúp egy 3D hiperfelület, amelyet a t_0 pillanatban a $\chi = 0$ koordinátájú pontba minden irányból érkező fénysugarak, mint "alkotók", rajzolnak ki. Ezek a fénysugarakon $\vartheta = \text{konstans}$ és $\varphi = \text{konstans}$, a t és a χ közötti összefüggés pedig a fényszerűség

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) d\chi^2 = 0$$

⁷²A χ jelölés használata nem jelenti azt, hogy zárt univerzumra korlátozódunk: A χ helyett használhatnánk $\bar{\chi}$ -t vagy r -t is. Akármelyik geometriáról legyen is szó, csak a tágulási szakasszal foglalkozunk.

feltétele alapján

$$\chi(t) = c \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \quad (0 \leq t \leq t_0). \quad (44.1)$$

A Fridman-egyenlet Nagy Robbanással induló megoldásai ($\Omega_r \neq 0$ -nál is) olyanok, hogy legalábbis a tágulás kezdeti szakaszában

$$a(t) = A \cdot t^\alpha \quad (0 < \alpha < 1). \quad (44.2)$$

A tárgyalás egyszerűsítése érdekében feltesszük, hogy ez a függvényalak még a mai állapotban is érvényes. Az "alkotó-fénysugarak" egyenlete ekkor a következő:

$$\chi(t) = \frac{c}{(1-\alpha) \cdot A} (t_0^{1-\alpha} - t^{1-\alpha}). \quad (44.3)$$

Ezek a fényszerű geodetikusok a Nagy Robbanás pillanatában ($t = 0$ -ban) a

$$\chi(0) = \frac{c}{(1-\alpha) \cdot A} t_0^{1-\alpha} \equiv \chi_0 \quad (44.4)$$

koordinátájú pontból indulnak el, és mialatt elérnek "hozzánk" (a $\chi = 0$ pontba), csak azokat a \mathcal{G}_χ világvonalat metszik, amelyeken $0 < \chi < \chi_0$. Ennek következtében a $\chi > \chi_0$ koordinátájú \mathcal{G}_χ világvonalakról a t_0 időpontig nem juthat el hozzánk semmiféle információ.

A világvonalaknak ezt a két tartományát a \mathcal{G}_{χ_0} világvonala választja el egymástól. Ez a \mathcal{G}_0 világvonala t_0 pillanatához tartozó *részecske-horizont* (ld. a 19. ábrát, amelyen \mathcal{F} a \mathcal{G}_0 világvonala t_0 pontjához tartozó múltbeli fénykúp alkotója). Pontosabban, ez a vonal a részecske-horizontnak a kiválasztott ϑ, φ irányba eső alkotója. A teljes részecske-horizont ugyanis egy 3D henger a \mathcal{G}_0 mint tengely körül, amelynek $t = \text{konstans}$ metszetei gömbök. Ezeknek a gömböknek az $R(t)$ sugara a részecske-horizont sugara a t pillanatban.

A (44.2) és a (44.4) alapján

$$R(t_0) = a(t_0) \cdot \chi_0 = \frac{c}{1-\alpha} t_0.$$

Mint várható, t_0 növekedésével ez a távolság nő. Azok az események, amelyek ezen az $R(t_0)$ sugarú gömbön kívül történtek, nem befolyásolhatták a \mathcal{G}_0 -n (a "mi" Galaxisunkon) addig végbement eseményeket.

Foglalkozzunk most már a háttérsugárzással, amelyről úgy tudjuk, hogy a $t_r \approx 300\,000$ év "koordinátaidő pillanatban" csatolódtott le az anyagról és azóta háborítatlanul terjed. Nézzünk abba a ϑ, φ irányba amelyre a 19. ábra vonatkozik. A háttérsugárzás, amely ebből az irányból érkezik hozzánk, azt a képet közvetíti, amely a \mathcal{G}_{χ_r} világvonalon volt érvényes a t_r koordinátaidő pillanatban.

Helyezzük át most magunkat gondolatban erre a \mathcal{G}_{χ_r} világvonala, és tekintsük ezt referencia-geodetikusnak. A 19. ábráról leolvasható, hogy az adott ϑ, φ -nél a \mathcal{G}_{χ_r} geodetikus t_r pillanatához tartozó részecskehorizont ugyancsak a \mathcal{G}_{χ_0} világvonala, ezért a \mathcal{G}_{χ_r} geodetikus t_r pillanatához tartozó részecske-horizont sugara a (44.3), (44.4) alapján

$$R'(t_r) = a(t_r) \cdot (\chi_0 - \chi_r) = \frac{c}{1-\alpha} t_r. \quad (44.5)$$

Másrészt, a sugárzás lecsatolódásának a pillanatában a \mathcal{G}_{χ_r} a \mathcal{G}_0 -tól

$$L(t_r) = a(t_r) \cdot \chi_r \equiv a(t_r) \cdot \chi(t_r) = A t_r^\alpha \cdot \frac{c}{(1-\alpha)A} (t_0^{1-\alpha} - t_r^{1-\alpha}) = \frac{c}{1-\alpha} \left[t_0 \left(\frac{t_r}{t_0} \right)^\alpha - t_r \right] \quad (44.6)$$

távolságra volt.

Milyen $\Delta\beta$ szög alatt látjuk "mi" az ehhez a ponthoz tartozó $R'(t_r)$ sugarú részecske-horizontot? A $\Delta\beta$ nagyságrendileg azzal a legnagyobb szöggel egyenlő, amely alatt az $L(t_r)$ (nagy) távolságból egy (kis) $R(t_r)$ szakaszt látunk:

$$\Delta\beta \approx \frac{R(t_r)}{L(t_r)} = \frac{t_r}{t_0(t_r/t_0)^\alpha - t_r} = \frac{1}{(t_0/t_r)^{1-\alpha} - 1}.$$

Ha $t_0 \approx 13,7 \cdot 10^9$ év, $t_r \approx 3 \cdot 10^5$ év, akkor $t_0/t_r \approx 4 \cdot 10^4$. Ha a 42. fejezet alapján elfogadjuk, hogy $\alpha = 2/3$, akkor

$$\Delta\beta \approx 2,88 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1,65^\circ.$$

A $\Delta\beta$ nyílásszögű térszög nagyságrendileg $\Delta\beta^2$ szteradián, ezért az éggömbön $4\pi/\Delta\beta^2 \approx 10^4$ olyan különböző irány található, amelyek fénykúpjai a sugárzás lecsatolódása idején nem fedték át egymást.

Általában úgy tekintik, hogy a standard modell következményeként a különböző tartományokból különböző tulajdonságú háttérsugárzásnak kellene érkeznie. Mivel azonban ilyen nem tapasztalunk, ezt a standard- modell hibájának tekintik. Ez a horizont-probléma. Eszerint a modell szerint a sugárzás paraméterei minden irányban azonosak, de az egy-két foknál finomabb skálán a paraméterek fluktuálnak. A megfigyelések ezt igazolják is.

De vajon a részecskehorizontok léte a standard modellben biztosan azt jelenti-e, hogy az Univerzumot kitöltő anyag bármely adott koordinátaidő pillanatban felbomlik olyan tartományokra, amelyek korábban sohasem hatottak egymásra? A 19. ábra χ, t térképén a részecskehorizontok tényleg elkülönítik a galaxisokat egymástól, de mint tudjuk, ez a térkép torzít: A galaxisok térbeli távolsága a t csökkenésével csökken, és $t = 0$ -ban, a Nagy Robbanás pillanatában, nullával egyenlő. Ezért talán nem zárható ki, hogy a Nagy Robbanás maga hozza létre azt a korrelációt, ami a háttérsugárzás egységességét biztosítja minden irányban.