

# Elméleti fizika II.

## Elektrodinamika

Hraskó Péter

Pécs, 1996.

## Tartalom

2.1	Az elektromos mező . . . . .	3
2.2	A töltés mint az elektromos mező forrása, az elektrosztatika 1.alapegyenlete . . . . .	5
2.3	A sztatikus elektromos mező munkája, az elektrosztatika 2.alapegyenlete	11
2.4	A Poincaré-azonosságok . . . . .	14
2.5	Az elektrosztatikus potenciál . . . . .	15
2.6	Elektrosztatikai feladatok megoldása a Poisson-egyenlet segítségével .	16
2.7	A Gauss-tétel és a Stokes-tétel . . . . .	19
2.8	Az elektrosztatika egyenletei integrális formában . . . . .	22
2.9	Dipólnyomaték és polarizáció . . . . .	24
2.10	A pontszerű dipól . . . . .	28
2.11	A dielektrikumok elektrosztatikája . . . . .	31
2.12	Fémek . . . . .	40
2.13	A mágneses mező . . . . .	44
2.14	A Lorentz-erő . . . . .	47
2.15	A mágneses mezőnek nincs töltés jellegű forrása . . . . .	47
2.16	A mágneses mező és az áramsűrűség kapcsolata . . . . .	47
2.17	A vektorpotenciál . . . . .	48
2.18	A magnetosztatika egyenletei integrális formában . . . . .	50
2.19	A mágneses dipól . . . . .	51
2.20	Polarizálható közegek magnetosztatikája . . . . .	54
2.21	Az indukció törvénye . . . . .	59
2.22	A töltésmegmaradás . . . . .	60
2.23	Az eltolási áram . . . . .	62
2.24	A Maxwell-egyenletek vákuumban . . . . .	63
2.25	A polarizációs áramsűrűség . . . . .	64
2.26	A Maxwell-egyenletek közegekben . . . . .	65
2.27	A hullámeqyenlet . . . . .	65
2.28	Elektromágneses síkhullámok vákuumban . . . . .	69
2.29	A monokromatikus síkhullámok polarizációja . . . . .	71
2.30	Általános síkhullám, hullámimpulzus, hullámcsomag . . . . .	72
2.31	A diszperzió . . . . .	75
2.32	A téreenergia . . . . .	78
2.33	A téreenergia mint erőfüggvény . . . . .	80
2.34	A térimpulzus . . . . .	85
2.35	A sugárzási tér számítása . . . . .	88
2.36	A dipólsugárzás . . . . .	90
2.37	A kisugárzott energia . . . . .	92
2.38	A ponttöltés sugárzása . . . . .	93
2.39	Periódikus mozgást végző rendszer dipólsugárzása . . . . .	94
2.40	A sugárzási visszahatás . . . . .	97

2.41	A Galilei-féle relativitási elv az elektrodinamikában . . . . .	100
2.42	A Michelson-Morley kísérlet . . . . .	102
2.43	A Galilei-transzformáció . . . . .	103
2.44	A relativitáselmélet két posztulátuma . . . . .	109
2.45	Az egyidejűség analízise . . . . .	116
2.46	Az idődilatáció . . . . .	118
2.47	Az ikerparadoxon . . . . .	123
2.48	A négyestávolság-négyzet . . . . .	124
2.49	A kauzalitási paradoxon és a 2.posztulátum . . . . .	125
2.50	A gyorsulás transzformációja . . . . .	127
2.51	A relativisztikus mozgásegyenlet . . . . .	128
2.52	Az energia . . . . .	130
2.53	Nulla tömegű részecskék . . . . .	134
2.54	Az energia és az impulzus transzformációja . . . . .	134
2.55	A frekvencia, a hullámvektor és a fázis transzformációja . . . . .	136
2.56	Az elektromágneses mező transzformációja . . . . .	139

A mechanikában deduktív tárgyalási módot követtünk: az alapegyenleteket (a Newton-egyenleteket) posztuláltuk és különféle következményeit vizsgáltuk. Az elektrodinamikában az induktív eljárást választjuk: az alapegyenleteket (a Maxwell-egyenleteket) bizonyos alapjelenségekből próbáljuk meg kikövetkeztetni. Az elektrosztatika jelenségeivel kezdjük.

## 2.1 Az elektromos mező

Mechanikus úton bizonyos testek *elektrizálhatók*: képessé válnak arra, hogy közvetlen érintkezés nélkül erőhatást gyakoroljanak egymásra.

A jelenséget az *elektromos töltés* fogalmának a segítségével interpretáljuk. Az elektromos töltésre vonatkozó alaptények:

a). Az erőhatás előjele alapján megállapítható, hogy kétfajta előjelű töltés létezik.

b). A szimmetria kihasználásával elérhető, hogy két egyforma gömbön azonos mennyiségű és előjelű töltés legyen felhalmozva.

c). A töltés mennyisége a ponttöltések között ható

$$F \sim \frac{q^2}{r^2} \quad (1)$$

*Coulomb-erő* alapján tehető mérhetővé. Ponttöltésen olyan véges kiterjedésű töltést értünk, amelynek mérete az adott feltételek között (pl. az  $r$  mellett) elhanyagolhatóan kicsi.

$A \sim$  arányosságot jelöl. A legtermészetesebb az volna, ha az

$$F = \frac{q^2}{r^2}$$

alakot választanánk, és azt a töltésmennyiséget neveznénk egységnyinek, amelyek  $1m$  távolságból  $1N$  erővel hatnak egymásra.

Az SI-ben nem ez a helyzet. Az áramerősség egységét — az amperet — tekintik alapegységnek, amelynek nagyságát a technikai alkalmazások szempontjából választják meg (ld. később a magnetosztatikát). A töltés SI egysége ezért az  $A \cdot s$ , amelyet coulombnak nevezünk:  $1C = 1A \cdot s$ .

Semmi ok sincs arra, hogy két, egyenként  $1C$  nagyságú töltés  $1m$  távolságból éppen  $1N$  erővel vonzza egymást. Ezért az (1)-ből csak akkor lesz egyenlőség, ha a jobboldalra megfelelő arányossági tényezőt írunk. Ezt a tényezőt  $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$ -el jelöljük. Két azonos nagyságú töltés között tehát az

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

erő, a  $q$  és a  $q'$  között pedig az

$$F = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2)$$

erő hat. Ennek a képletnek a segítségével — a töltés, a távolság és az erő mértékegységének a birtokában —, *empirikus úton* megállapítható az  $\epsilon_0$  paraméternek — a "vákuum permittivitásának" — a számértéke. Ezt találjuk:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}.$$

Később látni fogjuk, hogy ez a szám  $\frac{10^7}{4\pi c^2}$ -el egyenlő, ahol  $c = 2,998 \cdot 10^8 m.s^{-1}$  a fény sebessége vákuumban, a  $10^7$  faktor pedig az amper speciális definíciójának a következménye.

Meg kell vizsgálnunk, hogy az elektrosztatikus kölcsönhatás *távolható*-e vagy *közelható*. Rögzítsük a  $q'$  töltést és mérjük a rá ható erőt, amikor a  $q$ -töltés helyét változtatjuk. Ha az erőt a  $q$  pillanatnyi helyzete határozza meg a (2) alapján, akkor távolhatásról beszélünk (vagyis a "távolhatás" kifejezés nem szinoním azzal, hogy a töltések közvetlen érintkezés nélkül hatnak egymásra). A valóságban azonban a (2) alapján várható erőhatás csak bizonyos késéssel jelentkezik, és ez a közelhatás jele. Ebben az esetben ui. logikus feltenni, hogy a  $q'$  töltésre nem közvetlenül a  $q$  töltés hat, hanem az a  $q'$  helyén<sup>1</sup> lévő *elektromos mező* (elektromos tér), amely a  $q$  töltést körülveszi. Amikor  $q$ -t mozgatjuk, az általa létrehozott elektromos mező változik, de ez a változás  $q$  helyétől kiindulva véges sebességgel (mint látni fogjuk, vákuumban a  $c$  fénysebességgel) terjed. *Ezért* figyeljük meg a  $q'$ -re ható erőben csak bizonyos késéssel a  $q$  helyzetében bekövetkezett változást.

Mekkora erő hat a  $q'$  töltésre, amikor  $E$  nagyságú elektromos mezőben ( $E$  térerősségű pontban) tartózkodik? A legegyszerűbb *feltevés* az, hogy az erő nagysága a  $q'$  és az  $E$  szorzatával egyenlő:

$$F = q'E. \quad (3)$$

A (2)-vel való összevetésből következik, hogy ezen feltevés mellett egy  $q$  töltés önmagától  $r$  távolságra

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (4)$$

elektromos mezőt hoz létre.

A (2)-nek ez a "két lépcsőre bontása" más, bonyolultabb módon is lehetsége volna, de a (3), (4) felosztás bizonyult termékenynek: az elektromágneses mező alapegyenletei ennek az elektromos mező fogalomnak az alapján a legegyszerűbbek.

Az erőtvény pontos egyenletének az erőhatás irányát is ki kell fejeznie. Az  $\vec{R}$  pontban lévő  $q$  *ponttöltés* az  $\vec{R}'$  pontban található  $q'$  ponttöltésre az

$$\vec{F} = \frac{q'q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{R}' - \vec{R}|^3} \cdot (\vec{R}' - \vec{R}) \quad (5)$$

---

<sup>1</sup>A  $q'$  "közelében" — innen a *közelhatás* kifejezés.

Coulomb-erővel hat. A  $q'$  által a  $q$ -ra ható erőt ugyanezen *szabály*<sup>2</sup> alapján kapjuk, azaz (5)-ben fel kell cserélni a vesszős és a vesszőtlen mennyiségeket. Nyilván  $\vec{F}_{q \rightarrow q'} = -\vec{F}_{q' \rightarrow q}$ , tehát a hatás-ellenhatás törvénye teljesül.

Az  $\vec{R}$  pontban elhelyezett  $q$  ponttöltés által az  $\vec{r}$  "futó" pontban (vagy "megfigyelési" pontban) létrehozott elektromos mezőt az

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{R}|^3} \cdot (\vec{r} - \vec{R}) \quad (6)$$

képlet határozza meg, ezért (5) az

$$\vec{F} = q' \vec{E}(\vec{R}') \quad (7)$$

alakban is írható.

A ponttöltés által létrehozott (6) elektromos mezőt *Coulomb-térnek* (Coulomb-mezőnek) hívják. Ez azonban csak egy speciális esete a lehetséges elektromos mezőknek. Az elektromos mező elvben tetszőleges eloszlású lehet a térben és az időben is változhat. A Maxwell-egyenletek alapján lehet eldönteni, hogy adott fizikai feltételeknek milyen elektromos mező felel meg. A  $q\vec{E}$  erőt Coulomb-erőnek nevezzük akkor is, ha benne  $\vec{E}$  nem egy másik ponttöltés elektromos tere.

Az elektromos mező a *vektormezők* kategóriájába tartozik. Vektormezőt akkor kapunk, ha a tér minden pontjához hozzárendelünk egy vektort. A tér  $\vec{r}$  pontjához hozzárendelt  $\vec{V}(\vec{r})$  vektor az  $\vec{r}$  helyzetvektorú pontban van (ebben a pontban "hat" — ha erőnek tekinthető), nem szabad tehát egy  $\vec{r}$  kezdőpontú, és valamilyen másik  $\vec{r}'$  végpontú szakaszként elképzelni. A  $\vec{V}(\vec{r})$  komponenseit az  $\vec{r}$ -beli *lokális bázisban* (Mechanika-jegyzet 5.fejezet) adjuk meg.

Azokat a térgörbéket, amelyek minden pontjukban érintik a  $\vec{V}$  vektormezőnek az ugyabban a pontban lévő vektorát, a  $\vec{V}$  mező *erővonalainak*, vagy *áramvonalainak* nevezzük.

## 2.2 A töltés mint az elektromos mező forrása, az elektrosztatika 1.alapegyenlete

Az  $\vec{R}$  pontban lévő ponttöltés (elektromos terének az) áramvonalai az  $\vec{R}$  pontból "áramlanak ki". Ez a kifejezés a folyadékáramra utal, ami természetesen képletesen értendő. De az elektromos mező és a folyadék áramvonalainak az analógiája segít az elektrosztatika egyik alapegyenletének a megfogalmazásában.

Képzeljünk el valamilyen összenyomhatatlan folyadékot, amely térben áramlik. Az áramlás legyen stacionér (időben változatlan). A folyadék sebessége vektormezőt határoz meg (sebességmező), amelynek értéke az  $\vec{r}$  helyzetvektorú  $P$  pontban a  $P$ -ben megfigyelhető  $\vec{v}(\vec{r})$  áramlási sebességgel egyenlő. Kérdés: Hogyan lehet a  $\vec{v}(\vec{r})$  mező

<sup>2</sup>Nem pedig ugyanezen *képlet* alapján.

ismeretében megtalálni (feltérképezni) a források és a nyelők (negatív források) térbeli eloszlását?

Válasszunk Descartes-rendszert, a  $P$  koordinátái legyenek  $\vec{r} = x, y, z$ . A  $P$  körül képzeljük el egy  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  élhosszúságú infinitezimális "kockát". Az  $yz$  síkkal párhuzamos két lap  $x$ -koordinátája legyen  $x \pm \frac{1}{2}\Delta x \equiv x_{\pm}$ . Ha a folyadék sűrűségét 1-nek választjuk, akkor az  $x_-$  oldallapon másodpercenként  $v_x(x_-, y, z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z$  mennyiségű folyadék áramlik a kockába, az  $x_+$  oldallapon keresztül pedig  $v_x(x_+, y, z) \cdot \Delta y \cdot \Delta z$  mennyiségű folyadék áramlik ki belőle. Az áramlás  $x$ -irányú komponense alapján tehát a kockában másodpercenként

$$[v_x(x_+) - v_x(x_-)]\Delta y\Delta z = \frac{\partial v_x(x, y, z)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z \quad (8)$$

mennyiségű folyadéknak kell keletkeznie.

A (8) felírásánál felhasználtuk, hogy — infinitezimális kockáról lévén szó —

$$v_x(x_{\pm}, y, z) = v_x\left(x \pm \frac{1}{2}\Delta x, y, z\right) = v_x(x, y, z) \pm \frac{1}{2}\frac{\partial v_x(x, y, z)}{\partial x}\Delta x + o(\Delta x)^2.$$

Hasonló megfontolás végezhető a másik két oldallap-párra vonatkozóan is, és így arra jutunk, hogy ha az áramlást a  $\vec{v}(x, y, z)$  sebességmező határozza meg, akkor az  $x, y, z$  koordinátájú pont körüli kis  $\Delta\Omega = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$  térfogatban másodpercenként

$$\left(\frac{\partial v_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(x, y, z)}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

mennyiségű folyadék jön létre. A zárójelben lévő kifejezés tehát — amelyet a  $\vec{v}$  mező *divergenciájának* nevezünk és  $div \vec{v}$ -vel vagy  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ -vel jelölünk, — a források  $s(\vec{r})$  sűrűségét határozza meg:

$$div \vec{v} = s.$$

Ez a *stacionér áramlás mérlegegyenlete*, és az következik belőle, hogy a tér azon tartományaiban, amelyekben nincsenek források, fenn kell állnia a

$$div \vec{v} = 0$$

*stacionér kontinuitási egyenletnek.*

A feltett kérdésre tehát a válasz az, hogy a források feltérképezése a divergencia kiszámításával történik.

A Mechanika-jegyzetben tárgyalt lokális bázisok használata esetén a divergencia

a következő képletek segítségével számítható ki:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \begin{cases} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} & \text{Descartes} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} & \text{síkbeli polár} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho V_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_z}{\partial z} & \text{henger} \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot V_\vartheta) & \text{gömbi} \end{cases} \quad (9)$$

1.Feladat: Igazoljuk (9) 3.sorát.

Igazolás vázlata: Az  $\vec{r} = (\rho, \varphi, z)$  pont körül kis térfogatelemet rajzolunk, amelynek élei a  $\Delta\rho$ ,  $\Delta\varphi$ ,  $\Delta z$  koordinátakülönbségekkel jellemezhetők. Vegyük pl. azt a két határoló felületet, amelyen  $\rho = \rho_\pm \equiv \rho \pm \frac{1}{2}\Delta\rho$ . A  $\vec{V}$ -t tekintsük áramlási sebességnek (akármi is a valódi fizikai jelentése). A  $\rho_-$  felületen beáramló folyadék mennyisége  $V_\rho(\rho_-, \varphi, z)\rho_-\Delta\varphi\Delta z$ , a  $\rho_+$ -n kiáramló pedig  $V_\rho(\rho_+, \varphi, z)\rho_+\Delta\varphi\Delta z$  (figyelembe vettük, hogy a  $\rho$  irányra merőleges felületelem nagysága  $\rho\Delta\varphi\Delta z$ ). Ílymódon a térfogatelemben a  $\rho$ -irányú áramlás következtében másodpercenként keletkező folyadék mennyisége

$$\begin{aligned} & [V_\rho(\rho_+, \varphi, z)\rho_+ - V_\rho(\rho_-, \varphi, z)\rho_-] \Delta\varphi\Delta z = \\ & \left[ \left( V_\rho(\rho, \varphi, z) + \frac{1}{2} \frac{\partial V_\rho(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \Delta\rho \right) \left( \rho + \frac{1}{2} \Delta\rho \right) - \right. \\ & \left. - \left( V_\rho(\rho, \varphi, z) - \frac{1}{2} \frac{\partial V_\rho(\rho, \varphi, z)}{\partial \rho} \Delta\rho \right) \left( \rho - \frac{1}{2} \Delta\rho \right) \right] \Delta\varphi\Delta z = \\ & \left[ \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} \rho \Delta\rho + V_\rho \Delta\rho \right] \Delta\varphi\Delta z = \Delta[\rho V_\rho] \Delta\varphi\Delta z = \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} \Delta\rho \Delta\varphi\Delta z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\rho)}{\partial \rho} \Delta\Omega, \end{aligned}$$

ahol  $\Delta\Omega = \Delta\rho \cdot \rho \Delta\varphi \cdot \Delta z$  s í.t. ♣

2.Feladat: Számítsuk ki a  $\vec{V}_k = \frac{1}{r^k} \vec{e}_r$  mező divergenciáját.

Megoldás:

$$\vec{V}_k = (V_{kr}, V_{k\vartheta}, V_{k\varphi}) = (r^{-k}, 0, 0),$$

ezért  $\operatorname{div} \vec{V}_k = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^{2-k} = (2-k) \frac{1}{r^{k+1}}$ . Így pl.  $\operatorname{div} V_{-1} = \operatorname{div} \vec{r} = 3$ , ezért az olyan áramlás, amelynek a sebességmezője  $\vec{V}_{-1}$ , csak akkor tartható fenn, ha a tér minden



pontjában másodpercenként és térfogategységként 3 egységnyi folyadékmennyiség keletkezik (emlékeztetünk rá, hogy a sűrűséget 1-nek vettük).

Mivel  $\operatorname{div} \vec{V}_2 = 0$ , a  $\vec{V}_2$  mezőnek — úgy látszik, — sehol sincs forrása (se nyelője). Meg kell azonban jegyeznünk, hogy (9) csak ott használható a divergencia kiszámítására, ahol a komponensek differenciálható függvények. A  $\vec{V}_2$  komponensei az origóban bizonyosan nem differenciálhatók, ezért ezt a pontot külön meg kell vizsgálni. Az áramvonalak mind az origóból erednek, és az  $r$ -sugarú gömb egységnyi felületén áthaladó folyadékáram  $V_2 = 1/r^2$ -el egyenlő. Ebből egyértelműen következik, hogy az origóban pontszerű forrás működik, amely másodpercenként  $4\pi r^2 V_2 = 4\pi$  mennyiségű folyadékot termel. Egy ilyen forrás *sűrűsége* mindenütt nulla, magában az origóban azonban végtelen. Ez a tulajdonság a Dirac-féle delta-függvény segítségével fejezhető ki:

$$s(\vec{r}) = 4\pi\delta(\vec{r}).$$

Ez a  $\vec{V}_2$  mező forrassűrűsége, és ezért erre a mezőre a stacionér kontinuitási egyenlet a következő:

$$\operatorname{div} \left( \frac{1}{r^3} \vec{r} \right) = 4\pi\delta(\vec{r}). \clubsuit \quad (10)$$

Az "elektromos mező  $\longleftrightarrow$  sebességmező" (formális) analógiája, valamint az erővonalkép alapján sejthető, hogy a töltéssűrűség az elektromos mező forrassűrűségének a szerepét tölti be, és ezért a tér azon pontjaiban, ahol nincs töltés, az  $\vec{E}$  divergenciája zérus:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (\text{töltésmentes tartományban}).$$

Azokban a pontokban, ahol van töltés, a jobboldalon az elektromos mező forrassűrűsége szerepel, amelyről feltesszük, hogy a  $\rho(\vec{r})$  *töltéssűrűséggel*<sup>3</sup> arányos:

$$\operatorname{div} \vec{E} = k \cdot \rho(\vec{r}). \quad (11)$$

A töltéssűrűség *skalármező* (a tér minden pontjában egy szám), amelyet abból a követelményből határozunk meg, hogy a  $\rho(\vec{r}) \cdot \Delta\Omega$  szorzat az  $\vec{r}$  körüli  $\Delta\Omega$  térfogatban található töltés mennyiségével legyen egyenlő.

Kérdés: Mivel egyenlő egy ponttöltés töltéssűrűsége? A  $\delta$ -függvény

$$\int \delta(\vec{r} - \vec{R}) d\Omega = 1 \quad (\vec{R} \text{ tetszőleges konstans vektor}) \quad (12)$$

alaptulajdonságából következik, hogy az  $\vec{R}$  pontban elhelyezkedő  $q$  ponttöltés töltéssűrűsége  $q\delta(\vec{r} - \vec{R})$ -el egyenlő. Megjegyezzük, hogy ez a kifejezés dimenzionálisan (is) helyes, mivel (12) szerint  $[\delta(\vec{r} - \vec{R})] = m^{-3}$ .

A  $k$  arányossági tényező értékét a ponttöltés Coulomb-tere segítségével határozhatjuk meg. Ha ugyanis (11)-t erre az esetre alkalmazzuk, akkor a baloldalon  $\vec{E}(\vec{r}) =$

<sup>3</sup>A töltéssűrűséget és a hengerkoordinátákban a sugarat egyaránt  $\rho$ -val jelöljük. Ha nagyon zavaró, a sugarat jelöljük át  $r$ -re. A töltéssűrűségre ajánlatos megtartani a  $\rho$  jelölést.

$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \vec{r}$ , a jobboldalon pedig  $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r})$  (feltesszük, hogy a ponttöltés az origóban van, azaz  $\vec{R} = 0$ ). Ezeket (11)-be helyettesítve a

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \operatorname{div} \frac{1}{r^3} \vec{r} = kq\delta(\vec{r})$$

egyenlőségre jutunk. Ezt (10)-el összehasonlítva azt találjuk, hogy  $k = 1/\epsilon_0$ , és ezért (11) a

$$\boxed{\operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} = \rho} \quad (13)$$

alakban is írható. Ez az egyenlet az elektrosztatika első alapegyenlete és egyben a Maxwell-egyenletek egyike (ezért kereteztük be).

Kérdés: Hat-e egy töltés Coulomb-erővel önmagára a saját elektromos terén keresztül?

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy matematikai értelemben pontszerű töltésnél a kérdésnek nincs értelme, mert ebben az esetben a töltés által elfoglalt matematikai pontban az elektromos mező végtelen nagyságú és határozatlan irányú, ezért nem vezet határozott Coulomb-erőre. Ha azonban a ponttöltést kicsi de véges nagyságú merev objektumnak tekintjük, amint azt eddig is gondoltuk, a kérdés értelmes, és határozott *igen* választ kell rá adni. Semmi okunk sincs ugyanis feltenni, hogy egy ilyen töltéeloszlás különböző részei nem hatnak Coulomb-erővel egymásra. *Izolált* töltésnél ez az erő az objektumban ható többi belső erővel együtt pontosan kompenzálódik (az eredőjük zérus), ellenkező esetben ugyanis az izolált objektum gyorsítaná önmagát, ellentmondásban a tehetetlenség törvényével. *Sztatikai feladatoknál* ezért a sajátter erőhatásától éppúgy el lehet tekinteni, mint más belső erőktől. A *Sugárzási visszahatás* c. fejezetben azonban látni fogjuk, hogy egy *gyorsuló* töltés az elektromágneses tere következtében fékező erővel hat önmagára (*sugárúrlódás*), ezért ebben az esetben a belső erők nem kompenzálják teljesen egymást.

3.Feladat: Legyen a  $\rho_i$ -hez tartozó elektromos mező  $\vec{E}_i$ . Igazoljuk (13) segítségével, hogy  $\rho = \sum \rho_i$ -hez  $\vec{E} = \sum \vec{E}_i$  tartozik.

Megoldás:

Ha az egyes  $\rho_i$  töltéssűrűégekre vonatkozó

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E}_i = \rho_i$$

egyenleteket összeadjuk, a *div* operáció *linearitása* miatt azt találjuk, hogy a feladatban definiált  $\rho$  és  $\vec{E}$  kielégíti (13)-t.♣

\*\*\*

Faraday és Maxwell az erővonalakat nem sebességmezőnek, hanem *rugalmas szálaknak* képzelte el, amelyek saját irányukban összehúzódní igyekeznek, az irányukra merőlegesen pedig nyomóerőt fejtenek ki (1.ábra).

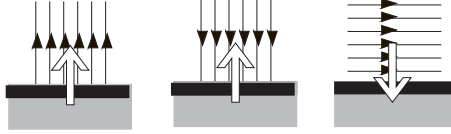


Figure 1:

Maxwell ezt a hatást a (pozitív) nyúlási feszültség és a (negatív) nyomófeszültség segítségével írta le, amelyek nagyságát az  $\vec{E}$  térerősség határozza meg a  $\sigma = \pm \frac{\epsilon_0}{2} E^2$  képlet alapján (*Maxwell-feszültség*). Az ábrákat a következő módon kell érteni: az erővonal-rendszer húzó- vagy nyomóerőt gyakorol a szomszédos (kipontozott) tartomány határfelületére; az erő nagyságát és irányát csak az erővonalak sűrűsége (az  $\vec{E}$  térerősség) és a határfelülethez viszonyított helyzete határozza meg, és egyáltalán nem függ attól, mi van a határfelület mögött. A  $\Delta A$  felületelemre gyakorolt erő  $\sigma \cdot \Delta A$ -val egyenlő.

Vegyünk példaként két ponttöltést és állítsunk merőleges síkot a ponttöltéseket összekötő egyenes felezőpontjára. A Maxwell-feszültség képlete alapján egy integrálás segítségével könnyen kiszámíthatjuk azt az erőt, amelyet a sík egyik oldalán lévő erővonal-rendszer gyakorol a sík másik oldalán lévő rendszerre (a "síkra"). Ha a töltések különböző előjelűek, az erővonalak merőlegesen metszik a síkot és a síkra ható teljes húzófeszültség megegyezik a töltések között ható Coulomb-erővel. Ennek így is kell lennie, hiszen a sík egyik oldalán lévő erővonalak húzó hatása a másik oldal erővonalain keresztül végül is a ponttöltésnek, ill. a ponttöltést rögzítő tartónak adódik át. Hasonló a helyzet az azonos töltésű töltéspárnál is azzal a különbséggel, hogy a felező sík egyik oldalán lévő erővonalak nyomóhatást fejtenek ki a síkra.

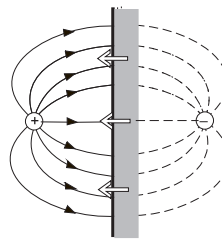


Figure 2:

## 2.3 A sztatikus elektromos mező munkája, az elektrosztatika 2. alapegyenlete

Tekintsünk egy általános  $\vec{F}(\vec{r})$  erőteret. Az erőter által az  $l$  úton végzett  $\mathcal{W}$  munkát a  $\int_l \vec{F} \cdot d\vec{l}$  vonalintegrál adja meg. Az integrandusban  $d\vec{l} = \vec{t} \cdot dl$ , ahol  $\vec{t}$  az utat érintő egységvektor. Adott végpontok mellett a munka általában függ az úttól.

4. Feladat: Legyen  $\vec{F}(x, y, z) = (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)) = (\alpha y, 0, 0)$  ( $\alpha = konst$ ), az út kezdőpontja legyen az origó, végpontja pedig az  $xy$  sík  $(a, b, 0)$  pontja. A munkát számítsuk ki két különböző  $l_1, l_2$  úton. Mindkét út álljon két egymásra merőleges egyenesszakaszból, az  $l_1$  első szakasza legyen az  $x$ -tengely, az  $l_2$ -é az  $y$ -tengely.

Megoldás:

$$W_1 = \int_0^a F_x(x, 0, 0) dx + \int_0^b F_y(a, y, 0) dy = 0,$$

$$W_2 = \int_0^b F_y(0, y, 0) dx + \int_0^a F_x(x, b, 0) dx = \int_0^a \alpha b \cdot dx = \alpha ab \neq 0. \clubsuit$$

Annak, hogy (adott végpontok mellett) a munka független legyen az úttól, az a szükséges és elégséges feltétele, hogy tetszőleges *zárt* kontúrra teljesüljön az

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{minden zárt kontúrra} \quad (14)$$

egyenlőség: a térvektor *cirkulációja* legyen zérus.

Ez a feltétel azonban nyilvánvalóan egyenértékű azzal az áttekinthetőbb követelménnyel, hogy a cirkuláció az összes zárt *infinitezimális* kontúrra tűnjön el.

Az infinitezimális kontúrokat a kontúr által határolt  $\Delta S$  terület és a kontúr térbeli orientációja jellemzi. Ez utóbbit a kontúr síkjára merőleges  $\vec{n}$  egységvektorral adjuk meg. Ahhoz, hogy egyértelműen eldönthessük, a sík melyik oldalán kell  $\vec{n}$ -t fölvennünk, a kontúron meg kell adni a pozitív irányt úgy, hogy az  $\vec{n}$ -el együtt jobbsavart alkosson.

Ha az infinitezimális kontúrt a tér  $\vec{r}$  pontjába helyezzük, a pozitív irány mentén számított kontúrintegrál értékét a

$$\Delta W = (\text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}) \Delta S \quad (15)$$

képlet határozza meg, amelyben  $\text{rot } \vec{F} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{F}$  az  $\vec{F}$  mező *rotációja*. Ezt a képletet a  $\text{rot } \vec{F}$  definíciójának tekinthetjük, belőle kell leolvasni azokat a képleteket, amelyekkel  $\text{rot } \vec{F}$  komponenseit ki lehet számítani.

Legyen pl. a kontúr az  $xy$  síkkal párhuzamos helyzetű ( $\vec{n} = \vec{e}_z$ ), alakja pedig  $\Delta x, \Delta y$  oldalú téglalap. Az  $y$ -tengellyel párhuzamos oldalak mentén  $\vec{n}$  által rögzített

pozitív irányban végzett munka a következő:

$$F_y(x_+, y, z)\Delta y - F_y(x_-, y, z)\Delta y = \frac{\partial F_y}{\partial x}\Delta x\Delta y,$$

ahol

$$x_{\pm} = x \pm \frac{1}{2}\Delta x,$$

a teljes kontúron végzett munka pedig hasonló megfontolásból

$$\Delta W_z = \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta x\Delta y.$$

Itt  $\Delta x\Delta y = \Delta S$  a kontúr által határolt terület.

Ugyanígy kapjuk az  $yz$ , valamint a  $zx$  síkokkal párhuzamos kontúrokon végzett munkát:

$$\Delta W_x = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \Delta y\Delta z$$

$$\Delta W_y = \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \Delta z\Delta x.$$

A (15) szerint az infinitesimalis területeket szorzóoefficiensek a  $\text{rot } \vec{F}$  komponensei Descartes-koordinátákban:

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z.$$

A rotáció kifejezése henger- és gömbi koordinátákban a következő:

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left( \frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z,$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = & \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot F_\varphi) - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r F_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \vartheta} \right] \vec{e}_\varphi + \\ & + \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_\varphi) \right] \vec{e}_\vartheta. \end{aligned}$$

5.Feladat: Igazoljuk, hogy minden centrálszimmetrikus vektormező rotációmentes.

Igazolás: Egy centrálszimmetrikus vektormezőnek csak a radiális gömbi komponense különbözik zérustól, és ez csak  $r$ -től függ. Ezért a gömbi koordinátákban felírt rotáció minden tagja zérus. ♣

Ez a feladat mutatja, hogy egy ponttöltés Coulomb-tere rotációmentes. De akkor — a  $\text{rot}$ -művelet linearitása következtében — tetszőleges töltésrendszer elektromos

terének a rotációja is zérus, és az elektrosztatika második alapegyenleteként kimondhatjuk  $\vec{E}$  rotációmentességét:

$$\text{rot } \vec{E} = 0. \quad (16)$$

Ezt az egyenletet nem kereteztük be, mert nem szerepel a Maxwell-egyenletek között: csak sztatikus esetben érvényes, amikor a Maxwell-egyenletekben szereplő időderiváltak nullák.

6.Feladat: Legyen  $\vec{U}_k = \frac{1}{\rho^k} \vec{e}_\varphi$ . ábrázoljuk az  $\vec{U}_k$  mező erővonal szerkezetét és számítsuk ki a rotációját.

Megoldás: Az erővonalak  $z$ -tengelyre merőleges körök, középpontjuk a  $z$ -tengelyen van. Hengerkoordinátákban csak az  $U_{k\varphi} = 1/\rho^k$  komponens különbözik zérustól, ezért  $\text{rot } \vec{U}_k = (1-k) \frac{1}{\rho^{k-1}} \vec{e}_z$ .

Külön figyelmet érdemel a  $k=1$  eset. Mivel  $\text{rot } \vec{U}_1 = 0$ , azt várnánk, hogy az  $\vec{U}_1$  mező a cirkuláció minden zárt kontúron zérus. Ez azonban csak azokra a kontúrokra érvényes, amelyek nem ölelik körül a  $z$ -tengelyt. Egy (pozitív irányítottságú)  $r$ -sugarú körön pl. a kontúrintegrál értéke a kör sugarától függetlenül  $2\pi$ -vel egyenlő. Ez arra utal, hogy a  $z$ -tengelyen — de csak ott, —  $\text{rot } \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi \neq 0$ . A Stokes-tételből — amelyről később lesz szó — következik, hogy

$$\text{rot } \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi = 2\pi \delta(x) \cdot \delta(y). \clubsuit \quad (17)$$

### Függelék: A delta-függvény.

Egy dimenzióban a  $\delta$ -függvény alaptulajdonságát az

$$\int_a^b \delta(x - \xi) dx = \begin{cases} 1 & \text{ha } a < \xi < b \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

képlet fejezi ki. Ez mutatja, hogy a  $\delta$ -függvény minden  $x \neq \xi$  pontban zérus,  $\xi$ -ben végtelen: nagyon keskeny, magas csúcsnak kell elképzelni az  $x = \xi$  pontban.

Az alapképlet általánosabb formája:

$$\int_a^b f(x) \cdot \delta(x - \xi) dx = \begin{cases} f(\xi) & \text{ha } a < \xi < b \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Parciális integrálással belátható, hogy a  $\delta$ -függvény deriváltja a következő alaptulajdonsággal rendelkezik:

$$\int_a^b f(x) \cdot \delta'(x - \xi) dx = \begin{cases} -f'(\xi) & \text{ha } a < \xi < b \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Háromdimenziós térben az alapképlet

$$\int_{\Omega} \delta(\vec{r} - \vec{\xi}) d\Omega = \begin{cases} 1 & \text{ha } \vec{\xi} \in \Omega \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

és ebből látható, hogy

$$\delta(\vec{r} - \vec{\xi}) = \delta(x - \xi_x) \cdot \delta(y - \xi_y) \cdot \delta(z - \xi_z).$$

Az alapképlet általánosabb formában:

$$\int_{\Omega} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{\xi}) d\Omega = \begin{cases} f(\vec{\xi}) & \text{ha } \vec{\xi} \in \Omega \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A  $\delta(\vec{r})$  gradiensét a térbeli parciális integráláson keresztül értelmezzük (ld. a továbbiakban a *Térbeli parciális integrálás formulái* c. részt).

7.Feladat: Milyen töltéssűrűség mellett lehetséges az  $\vec{E} = (\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r}$  elektromos mező ( $\vec{a}$  konstans vektor)?

Megoldás: Semmilyen töltéssűrűség mellett sem lehetséges, mert a rotációja nem nulla: pl.  $\text{rot}_x \vec{E} = a_y z - a_z y$ . ♣

## 2.4 A Poincaré-azonosságok

A két Poincaré-azonosság a következő:

1).Bármely  $\vec{A}$  vektormező rotációja divergenciamentes:

$$\text{div rot } \vec{A} \equiv (\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})) = 0.$$

2).Bármely  $S$  skalármező gradiense<sup>4</sup> rotációmentes:

$$\text{rot grad } S \equiv (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} S) = 0.$$

8.Feladat: Igazoljuk a Poincaré-azonosságokat. ♣

Végtelen euklideszi térben a Poincaré-azonosságok megfordítása is igaz:

1).Ha egy  $\vec{V}$  vektormező divergenciamentes, akkor található olyan  $\vec{A}$  vektormező, amelynek rotációja  $\vec{V}$ -vel egyenlő:

$$\vec{V} = \text{rot } \vec{A}.$$

Az  $\vec{A}$  a  $\vec{V}$ -hez tartozó *vektorpotenciál*.

<sup>4</sup>A gradiens diszkusszióját ld. a Mechanika-jegyzet 6.fejezetében.

Megjegyzés: Ha  $\vec{A}$  a  $\vec{V}$ -hez tartozó vektorpotenciál, akkor — a 2.Poincaré-azonosság következtében —  $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } S$  is az tetszőleges  $S$ -nél.

A divergenciamentességnek mindenütt teljesülnie kell, ezért a 2.feladat  $\vec{V}_2$ -jéhez nem tartozik vektorpotenciál.

2).Ha egy  $\vec{V}$  vektormező rotációmentes, akkor található olyan  $S$  skalármező, amelynek a gradiense  $\vec{V}$ :

$$\vec{V} = \text{grad } S.$$

A  $\Phi = -S$  skalármező a  $\vec{V}$ -hez tartozó (skalár) *potenciál* (nem tévesztendő össze a potenciális energiával, ld. a köv. fejezetet).

A rotációmentességnek mindenütt teljesülnie kell, ezért a 6.feladat  $\vec{U}_1$ -éhez nem rendelhető potenciál.

## 2.5 Az elektrosztatikus potenciál

Az elektrosztatika 2.alapegyenlete szerint  $\vec{E}$  rotációmentes, ezért a 2.Poincaré-azonosság megfordítása alapján felírható egy  $\Phi$  potenciál negatív gradienseként:

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi. \quad (18)$$

A  $q$  töltésre ható Coulomb-erőt a potenciálon keresztül az

$$\vec{F} = -\text{grad } (q\Phi)$$

képlet adja meg. A Mechanika-jegyzet 1.6 fejezetével való összevetés mutatja, hogy az  $U$  erőfüggvény szerepét a  $q\Phi$  szorzat játssza:

$$U = q\Phi.$$

Mivel az erőfüggvény egyben potenciális energia is (Mechanika-jegyzet 1.7 fejezet), a  $q$  ponttöltés potenciális energiája az  $\vec{E}$  elektromos térben  $q\Phi$ -vel egyenlő, és

$$\int_l \vec{F} \cdot d\vec{l} = q\Phi(\vec{b}) - q\Phi(\vec{a})$$

a Coulomb-erő által az  $\vec{a}$  kezdő- és  $\vec{b}$  végpontú  $l$  kontúron végzett munka. Ha ezt az egyenletet  $q$ -val végigosztjuk, az

$$\int_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \Phi(\vec{b}) - \Phi(\vec{a}) \quad (19)$$

egyenletre jutunk: az elektromos mező vonalintegrálja az *elektrosztatikában* megegyezik a potenciál végpontokban felvett értékeinek a különbségével.

9.Feladat: Határozzuk meg (találjuk ki) a ponttöltés (6) elektromos teréhez tartozó potenciált, és két ponttöltés potenciális energiáját.



Megoldás: Gradiensképzéssel ellenőrizhető, hogy az  $\vec{R}$  pontban lévő pontban lévő ponttöltés potenciálja

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{R}|}, \quad (20)$$

ahonnan

$$U = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{R}|}. \quad (21)$$

Megjegyzés: Használjuk az

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r} \quad (22)$$

képletet. ♣

Ha (18)-t az 1. alapegyenletbe helyettesítjük és használjuk a  $\text{div grad} \equiv \nabla^2$  jelölést, a

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (23)$$

Poisson-egyenletet kapjuk, amelyben

$$\nabla^2 S = \begin{cases} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} & \text{Descartes} \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial S}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} & \text{henger} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial S}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos \vartheta}{r^2 \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial S}{\partial \vartheta} & \text{gömbi} \end{cases}$$

Ez az egyenlet egyenértékű az elektrosztatika két alapegyenletével, mert ha kiszámítjuk belőle  $\Phi$ -t, akkor  $\vec{E} = -\text{grad } \Phi$  automatikusan kielégíti mindkét alapegyenletet. Az egyenletek számának ezen redukciója miatt a Poisson-egyenletet használjuk az elektrosztatikai feladatok megoldására.

A Poisson-egyenletnek ismerjük egy fontos megoldását: ez (20), amely a ponttöltés potenciálja és így a Poisson-egyenletnek is megoldása, ha töltéssűrűsége a ponttöltés töltéssűrűségét értjük. Ezért ha (20)-t, valamint  $\rho = q\delta(\vec{r} - \vec{R})$ -t a (23) Poisson-egyenletbe helyettesítjük, érvényes matematikai összefüggést kapunk, amelyet később használni fogunk:

$$\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{R}). \quad (24)$$

## 2.6 Elektrosztatikai feladatok megoldása a Poisson-egyenlet segítségével

A ponttöltés potenciáljának az ismeretében könnyen fel lehet írni a Poisson-egyenlet megoldó-képletét tetszőleges töltéssűrűségnél (amely a tér véges részét foglalja el).

Egy töltéssűrűség ugyanis gondolatban ponttöltésekre bontható. Az  $\vec{r}'$  pont körüli infinitesimalis  $d\Omega'$  térfogatelemben  $\rho(\vec{r}')d\Omega'$  mennyiségű töltés van felhalmozva, amely az  $\vec{r}$  futó pontban (20) szerint

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}\rho(\vec{r}')d\Omega'$$

potenciált hoz létre. A teljes  $\rho$  töltéssűrűség potenciálja ezek szuperpozíciójából jön létre (ld. a 3.feladatot):

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (25)$$

Ezt a formulát használhatjuk az olyan elektrosztatikai feladatok megoldásánál, amelyekben adott töltésseloszláshoz kell meghatározni az elektromos mezőt.

Könnyen belátható, hogy a töltéssűrűség véges kiterjedése következtében  $\Phi$  a végtelenben zérushoz tart. Az elektrosztatikában megköveteljük, hogy a potenciál tegyen eleget ennek a természetes peremfeltételnek.

Kérdés: Egyértelmű megoldása-e (25) a Poisson-egyenletnek? A válasz: igen. Ha ugyanis létezne még egy  $\Phi'$  megoldás, akkor a  $\Phi - \Phi' \equiv \Phi_0$  különbség nyilván kielégítené a

$$\nabla^2\Phi_0 = 0$$

homogén Poisson-egyenletet, amelyet *Laplace-egyenletnek* neveznek. Mivel  $\Phi$ -nek és  $\Phi'$ -nek egyaránt el kell tűnnie a végtelenben, ugyanennek kell történnie  $\Phi_0$ -al is. A Laplace-egyenletnek azonban minden olyan megoldása, amely a végtelenben elűnik, *mindenütt* zérus, ezért  $\Phi'$  nem különbözhet  $\Phi$ -től.

A Laplace-egyenlet végtelenben eltűnő megoldásainak ez a különös tulajdonsága megérthető abból az észrevételből, hogy egy  $\Phi_0(x, y, z)$  függvénynek csak ott lehet szélső értéke, ahol a  $\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2}$  második deriváltak különböznek zérustól és azonos előjelűek. Mármost ha  $\Phi_0$  eleget tesz a

$$\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2} = 0$$

Laplace-egyenletnek, akkor ez a feltétel egyetlen pontban sem teljesülhet, vagyis ennek az egyenletnek sehol sincs szélső értéke. Egy végtelenben eltűnő megoldásnak azonban *valahol* kell szélső értékének lennie — hacsak nem mindenütt nulla.

10.Feladat: Határozzuk meg egy egyenletesen töltött körlap elektromos terét a középpontra állított merőleges mentén.

Megoldás: A körlap fekszen az  $xy$  síkban, középpontja legyen az origóban, a sugara legyen  $R$ , össztöltése pedig  $q$ . Tekintsük a körlapot végtelenül vékonynak. A

töltéssűrűség ekkor felületi jellegű, azaz  $\rho = \sigma \cdot \delta(z')$ , ahol  $\sigma$  a *felületi töltéssűrűség*:

$$\sigma = \begin{cases} \frac{q}{\pi R^2} & \text{ha } \sqrt{x'^2 + y'^2} < R \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A megfigyelési pont helyzetvektora

$$\vec{r} = (0, 0, z),$$

ezért

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + (z - z')^2} \equiv \sqrt{r'^2 + (z - z')^2}.$$

Az  $\vec{r}'$  vektor hengerkoordinátáit  $r'$ ,  $\varphi'$ ,  $z'$ -vel jelöljük, mert  $\rho'$  összetéveszhető volna a töltéssűrűséggel. Ezért hengerkoordinátákban  $d\Omega' = r' dr' d\varphi' dz'$ .

Mindezek figyelembevételével (25) a következő:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^R \frac{\sigma r' dr'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{r'^2 + z^2}}.$$

Az  $r'$ -integrált egyszerű kiszámítani:

$$\int_0^R \frac{r' dr'}{\sqrt{r'^2 + z^2}} = \left[ \sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right] = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + z^2} + |z|},$$

ezért a  $z$ -tengely mentén a potenciál

$$\Phi(0, 0, z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + z^2} + |z|} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \left[ \sqrt{R^2 + z^2} + |z| \right]},$$

a térerősség pedig

$$E_z(0, 0, z) = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2} \left[ |z| + \sqrt{R^2 + z^2} \right]} \cdot \frac{z}{|z|}.$$

Szimmetriaokokból nyilván  $E_x(0, 0, z) = E_y(0, 0, z) = 0$ . ♣

11.Feladat: Határozzuk meg egy  $q$  töltésű  $2a$  hosszúságú egyenesen töltött szál potenciálját.

Megoldás: A szál essen egybe a  $z$ -tengellyel, a középpontja legyen az origóban.

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2a} \int_{-a}^a \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2a} \int_{-a-z}^{a-z} \frac{du}{\sqrt{x^2 + y^2 + u^2}} =$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2a} \ln \left[ u + \sqrt{x^2 + y^2 + u^2} \right] \Big|_{-a-z}^{a-z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{2a} \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + (a-z)^2} + a-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + (a+z)^2} - a-z} \clubsuit$$

12.Feladat: Határozzuk meg egy egyenletesen töltött körvonal elektromos terét a kör középpontjára állított merőleges mentén.

Megoldás: A geometria legyen ugyanaz, mint a 9.feladatban, a körvonal legyen a kör kerülete. Akkor

$$\Phi(0, 0, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{R d\varphi'}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}},$$

$$E_z(0, 0, z) = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad E_x(0, 0, z) = E_y(0, 0, z) = 0. \clubsuit$$

## 2.7 A Gauss-tétel és a Stokes-tétel

### 1)A Gauss-tétel.

Legyen  $\Omega$  tetszőleges térrész amelynek a térfogatát is  $\Omega$ -val jelöljük,  $\Sigma$  a felülete,  $\vec{V}$  pedig vektormező, amelynek a divergenciája  $\Omega$ -ban folytonos. Akkor érvényes a

$$\int_{\Omega} d\Omega \cdot \operatorname{div} \vec{V} = \int_{\Sigma} (\vec{V} \cdot d\vec{\Sigma}) \quad (26)$$

*Gauss-tétel.*

A baloldali integrál térfogati, a jobboldali — amelyet a  $\vec{V}$  mező  $\Sigma$ -ra vett *fluxusának* nevezünk, — felületi.  $d\vec{\Sigma} = \vec{n} \cdot d\Sigma$ , ahol  $\vec{n}$  a felület külső normálisa (egységvektor),  $d\Sigma$  a felületelem. A pont, *ha két vektor között áll*, skalárszorzatot jelent. Ezt a képlet jobboldalán zárójellel is kifejeztük.

A tétel bizonyításához tekintsük  $\vec{V}$ -t egységnyi sűrűségű folyadék sebességmezőjének, és osszuk fel  $\Omega$ -t infinitezimális "sejtekre". Legyen az  $i$ -k sejt térfogata  $d\Omega_i$ ,  $s_i$  pedig az  $i$ -k sejtben másodpercenként termelődő folyadék mennyisége, amit a sejt felületén másodpercenként kiáramló folyadékmennyiséggel definiáltunk. Láttuk, hogy  $(\operatorname{div} \vec{V})_i \cdot d\Omega_i = s_i d\Omega_i$ , ahol  $(\operatorname{div} \vec{V})_i$  a divergencia értéke az  $i$ -k sejt belső pontjában. Ha ezt az egyenletet az  $i$ -re összegezzük, akkor határesetben a baloldalak összege a Gauss-tétel baloldalával egyenlő. A jobboldali összeghez minden olyan sejt felület-rész nulla járulékot ad, amely két sejtet választ el egymástól — az egyik sejt szempontjából kiáramló folyadék ugyanis a másik szempontjából beáramló, és ezért járulékaik az összegben kiejtik egymást. Az  $\Omega$ -t határoló  $\Sigma$  részeit alkotó sejt felületeken kiáramló folyadék mennyiségét azonban semmi sem kompenzálja. Ezek adják a  $s_i d\Omega_i$ -k összegéhez az egyedüli járulékot, ezért ez az összeg határesetben a Gauss-tétel jobboldali felületi integráljával egyezik meg.

### 2)A térbeli parciális integrálás formulái.

Legyen  $S$  tetszőleges skalármező (függvény),  $\vec{U}$  és  $\vec{V}$  pedig tetszőleges vektormezők. Akkor

$$\operatorname{div} (S\vec{V}) = S \operatorname{div} \vec{V} + (\vec{V} \cdot \operatorname{grad} S) \quad (27)$$

$$\operatorname{div} (\vec{U} \times \vec{V}) = (\vec{V} \cdot \operatorname{rot} \vec{U}) - (\vec{U} \cdot \operatorname{rot} \vec{V}). \quad (28)$$

\*\*\*

Ha figyelembe vesszük, hogy a nabla-operátor elsőrendű differenciálásokat tartalmaz, akkor — Descartes-koordinátákat választva, — könnyen belátható, hogy a szorzat-kifejezésekre történő alkalmazása két lépésre bontható:

1) A szorzat differenciálási szabályának alkalmazása a szorzat tényezőinek megjelölésével.

2) A nabla áthelyezése a megjelölt tényező elé a vektorműveleti szabályok figyelembevételével, miközben  $\vec{\nabla}$ -t konstans vektornak tekintjük.

A szabályok alkalmazását példákon mutatjuk be.

A (27) igazolása:

$$\operatorname{div} (S\vec{V}) \equiv \vec{\nabla} \cdot (S\vec{V});$$

$$\vec{\nabla} \cdot (S\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot (S\vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\overset{\downarrow}{S}\vec{V});$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\overset{\downarrow}{S}\vec{V}) = S(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = S \operatorname{div} \vec{V} \quad (\text{mert } (\vec{a} \cdot \vec{c}\vec{b}) = c(\vec{a} \cdot \vec{b}));$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{S}\vec{V}) = (\vec{\nabla} S \cdot \vec{V}) = (\operatorname{grad} S \cdot \vec{V}) \quad (\text{mert } (\vec{a} \cdot \vec{c}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{c} \cdot \vec{b})).$$

A (28) igazolása:

$$\operatorname{div} (\vec{U} \times \vec{V}) \equiv \vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \times \vec{V});$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot (\overset{\downarrow}{\vec{U}} \times \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \times \overset{\downarrow}{\vec{V}});$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\overset{\downarrow}{\vec{U}} \times \vec{V}) = \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{U}) = \vec{V} \cdot \operatorname{rot} \vec{U} \quad (\text{mert } \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}));$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \times \overset{\downarrow}{\vec{V}}) = -\vec{U} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = -\vec{U} \cdot \operatorname{rot} \vec{V} \quad (\text{mert } \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})).$$

\*\*\*

Integráljuk (27), (28) mindkét oldalát az  $\Omega$  térfogatra és a baloldalon alkalmazzuk a Gauss-tételt:

$$\int_{\Sigma} S (\vec{V} \cdot d\vec{\Sigma}) = \int_{\Omega} d\Omega \cdot S \operatorname{div} \vec{V} + \int_{\Omega} d\Omega \cdot (\vec{V} \cdot \operatorname{grad} S) \quad (29)$$

$$\int_{\Sigma} [(\vec{U} \times \vec{V}) \cdot d\vec{\Sigma}] = \int_{\Omega} d\Omega (\vec{V} \cdot \operatorname{rot} \vec{U}) - \int_{\Omega} d\Omega (\vec{U} \cdot \operatorname{rot} \vec{V}). \quad (30)$$

Ezek a térbeli parciális integrálás képletei, ui. a térbeli integrálásnál ugyanolyan funkciót töltenek be, mint a parciális integrálás jólismert

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b uv' \cdot dx + \int_a^b u'v \cdot dx$$

formulája.

### 3)A Stokes-tétel.

Legyen most  $\Sigma$  tetszőleges felületdarab, az  $l$  kontúr pedig a határvonala. A felületet minden pontjában irányítottnak tekintjük, azaz a két lehetséges normálirány egyikét választjuk (a felület mentén folytonosan) normálvektornak<sup>5</sup>. A kontúron az irányítottságot úgy választjuk, hogy a felület normálvektorával alkosson jobbsavart.

Legyen  $\vec{V}$  vektormező, amelynek rotációja  $\Sigma$ -n folytonos. Akkor érvényes a

$$\int_{\Sigma} (\operatorname{rot} \vec{V} \cdot d\vec{\Sigma}) = \oint_l (\vec{V} \cdot d\vec{l}) \quad (31)$$

*Stokes-tétel.*

A baloldali integrál felületi, a jobboldali — a  $\vec{V}$  cirkulációja  $l$ -n — vonalintegrál.  $d\vec{l} = \vec{t} \cdot dl$ , ahol  $\vec{t}$  a kontúr pozitív irányú érintője. A  $d\vec{\Sigma}$  a  $\Sigma$  normálisa, irányítottsága olyan, hogy az  $l$ -n felvett iránnyal jobbsavart képez.

A tétel bizonyításához tekintsük  $\vec{V}$ -t erőtérrnek, és osszuk fel  $\Sigma$ -t sűrű hálóval infinitesimalis felületelemekre. Legyen az  $i$ -k elem felülete  $d\Sigma_i$ ,  $dW_i$  pedig az erőtérrnek az  $i$ -k elem kerülete mentén végzett munkája. Tudjuk, hogy  $((\operatorname{rot} \vec{V})_i \cdot d\vec{\Sigma}_i) = dW_i$ , ahol  $(\operatorname{rot} \vec{V})_i$  a rotáció értéke az  $i$ -k felületelem belső pontjában. Ha ezt az egyenletet  $i$ -re összegezzük, akkor határesetben a baloldalak összege a Stokes-tétel baloldalával egyenlő. A jobboldali összeghez az elemi kontúrok minden olyan része nulla járulékot ad, amely két felületelemet választ el egymástól — minden ilyen szakasz irányítottsága ugyanis különböző aszerint, hogy az egyik vagy a másik felületelem határának tekintjük, és ezért járulékaik az összegben kiejtik egymást. A  $\Sigma$ -t határoló  $l$  részeit alkotó szakaszokon végzett munkát azonban semmi sem kompenzálja. Ezek adják a  $dW_i$ -k összegéhez az egyedüli járulékot, ezért ez az összeg határesetben a Stokes-tétel jobboldali vonalintegráljával egyezik meg.

<sup>5</sup>Megjegyezzük, hogy bizonyos felületek, mint pl. a Möbius-szalag, nem engedik meg a normálirány egyértelmű kijelölését.

Megjegyzés: Ebben a fejezetben sehol sem kellett áttérni egyik koordinátarendszerről egy másik, elforgatott koordinátarendszerre, és így nem kellett ténylegesen kihasználni, hogy  $S$  skalármező, a  $V_i$ -k pedig egy vektormező komponensei. Ezért képleteink abban az esetben is érvényesek, amikor  $S$  egy vektormező valamelyik komponense.

## 2.8 Az elektrosztatika egyenletei integrális formában

Alkalmazzuk a Gauss-tételt az  $\epsilon_0 \vec{E}$  vektormezőre:

$$\int_{\Sigma} (\epsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\epsilon_0 \vec{E}) \cdot d\Omega.$$

Az elektrosztatika 1. alapegyenlete következtében ez a

$$\int_{\Sigma} (\vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (32)$$

alakban írható, ahol

$$q = \int_{\Omega} d\Omega \cdot \rho.$$

A (32) az első alapegyenlet integrális alakja. Azt fejezi ki, hogy a töltést körülvevő felületen az  $\vec{E}$  fluxusa  $\frac{1}{\epsilon_0}q$ -val egyenlő.

A 2. alapegyenlet integrális alakja a Stokes-tétel következtében

$$\oint_l (\vec{E} \cdot d\vec{l}) = 0.$$

Az integrális alak, mivel tetszőleges zárt felületre ill. kontúrra igaz, egyenértékű a differenciálissal — ez könnyen belátható, ha infinitezimális felületekre és kontúrokra alkalmazzuk. A differenciális alak azonban a számításokra sokkal alkalmasabb. Az integrális alak azokban a speciális esetekben előnyös, amikor a töltéeloszlásnak magasfokú szimmetriája van. A gömbszimmetrikus eloszlás ilyen, de pl. a 10. 11. és a 12. feladat szimmetriája (tengelyszimmetria) nem elegendő ahhoz, hogy az integrális alakkal a számítás egyszerűbb legyen, mint a differenciálissal.

13. Feladat: Szabályos köralapú kúp csúcspontjában  $q$  ponttöltést helyezünk el. Mekkora a fluxus az alaplapon keresztül?

Megoldás: A (32) szerint a ponttöltésből kiáramló teljes fluxus  $q/\epsilon_0$ , és ennek  $o/4\pi$ -szerese halad az  $o$  térszögön belül. A (szteradiánban mért) térszög a térszöget alkotó tetszőleges formájú kúppalást által az egységsugarú gömbből kivágott felület nagyságával egyenlő (a teljes térszög tehát  $4\pi$  szteradián). A  $2\alpha$  nyílásszögű kúp térszöge ennek alapján

$$o = \int_0^\alpha \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \cdot (1 - \cos \alpha),$$

ezért a keresett fluxus a következő:

$$\Psi = \frac{q}{2\epsilon_0}(1 - \cos \alpha). \clubsuit$$

14.Feladat: Határozzuk meg két egymástól  $2a$  távolságra lévő  $\pm q$  ponttöltés erővonalainak egyenletét.

Megoldás: Képzeljük magunk elé az egyik erővonalat. Ha ezt a ponttöltéseket összekötő egyenes körül körbeforgatjuk, olyan tölcészerű 'csövet' (*fluxuscső*) nyerünk, amelyet — mivel erővonalak az alkotói, — egyetlen erővonal sem metsz. A Gauss-tétel szerint egy ilyen fluxuscső különböző helyen fölvetett metszetein ugyanaz a fluxus halad keresztül. Ezt a tényt használjuk fel az erővonalak egyenletének felírásához.

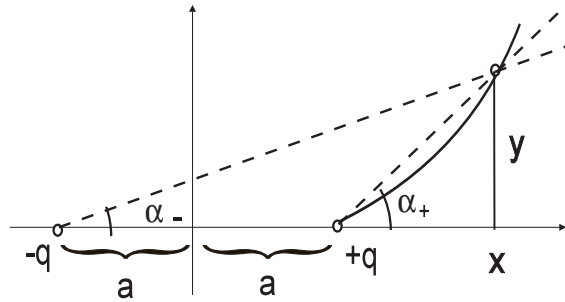


Figure 3:

A 3.ábrán a feltüntetett erővonal fluxuscsövének  $x$  abszcisszájú köralakú metszetének sugara az erővonal  $y$  koordinátája, ezért — az előző feladat szerint — a két ponttöltés fluxusa ezen a metszeten keresztül a következő:

$$\Psi_{\pm} = \frac{\pm q}{2\epsilon_0}(1 - \cos \alpha_{\pm}) = \frac{\pm q}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{x \mp a}{\sqrt{y^2 + (x \mp a)^2}} \right).$$

Az erővonalak egyenletét úgy kapjuk meg, hogy ezt a két függvényt a  $\Psi_+ + \Psi_- = \Psi = konstans$  egyenletbe írjuk. Egyszerűsítés után ezt találjuk:

$$\frac{x+a}{\sqrt{y^2 + (x+a)^2}} - \frac{x-a}{\sqrt{y^2 + (x-a)^2}} = c,$$

ahol  $c = 2\epsilon_0\Psi/q$ . A  $c$ -nek különböző értékeket adva kapjuk az erővonalcsalád különböző tagjainak egyenletét. Az egyenlet nem oldható meg  $y$ -ra, de természetesen minden  $x$ -re meghatározza a hozzá tartozó (egy vagy két)  $y$  értéket. ♣

15.Feladat: Határozzuk meg az  $R$  sugarú  $q$  össztöltésű egyenletesen töltött gömb elektromos terét a gömbön kívül és belül.



Megoldás: Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a megfigyelési pont a  $z$ -tengelyen van. Akkor (25) szerint

$$\Phi(0, 0, z) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \int_0^\pi \sin \vartheta' \cdot d\vartheta' \int_0^R \frac{r'^2 dr'}{\sqrt{r'^2 + z^2 - 2r'z \cos \vartheta'}},$$

ahol  $\rho = \frac{3q}{4R^3\pi}$ . Az integrál kiszámítása elég bonyolult, és utána még gradiensképzéssel kell megkapni a térerősséget.

Az integrális alak felhasználásával ezzel szemben

$$4\pi r^2 E_r = \begin{cases} \rho \cdot \frac{4\pi r^3}{3\epsilon_0} & \text{ha } r < R \\ \rho \cdot \frac{4\pi R^3}{3\epsilon_0} & \text{ha } r > R \end{cases},$$

ahonnan

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot \vec{r} & \text{ha } r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \vec{r} & \text{ha } r > R. \clubsuit \end{cases}$$

16.Feladat: A fenti gömbben az  $\vec{a}$  helyzetvektorú pont körül  $R'$  sugarú üreget vágunk ki ( $a + R' < R$ ). Határozzuk meg a térerősséget az üregben, a gömbben, a gömbön kívül.

Megoldás:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) - \vec{E}_2(\vec{r}),$$

ahol  $\vec{E}_1$  az előző feladatban kapott térerősség,  $\vec{E}_2$  pedig az *eltávolított* gömb térerőssége. Így pl. az üreg belsejében a mező *homogén*:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} - \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 R'^3} (\vec{r} - \vec{a}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{a}$$

$$q = \frac{4R^3\pi}{3} \rho \quad q' = \frac{4R'^3\pi}{3} \rho. \clubsuit$$

## 2.9 Dipólnyomaték és polarizáció

Ha egy töltérendszer összetöltése nem zérus, akkor messziről nézve ponttöltésnek látszik. Ezt úgy láthatjuk be, hogy (25)-ben  $r$ -t jóval nagyobbak választjuk, mint a töltéssűrűség kiterjedése. Ekkor az integrálási tartományban (ahol  $\rho \neq 0$ )  $r'$ -t elhanyagolhatjuk  $r$  mellett, ezért

$$\Phi \sim \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho(\vec{r}') d\Omega' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

ami éppen a  $q$  töltésű ponttöltés potenciálja.

Azt mondhatjuk tehát, hogy a

$$q = \int d\Omega \cdot \rho(\vec{r})$$

töltés a töltéseloszlás globális (számszerű) jellemzője, amely meghatározza a mező távoli viselkedését.

Amikor  $q = 0$ , a töltésrendszer egy másik globális jellemzője, a  $\vec{p}$  dipólnyomaték válik fontossá:

$$\vec{p} = \int d\Omega \cdot \vec{r}\rho(\vec{r}). \quad (33)$$

Descartes-komponensekben:

$$p_i = \int d\Omega \cdot x_i \rho(\vec{r})$$

( $x_1, x_2, x_3 \equiv x, y, z$ ). A dipólnyomaték a töltéssűrűségnek a koord.rendszer origójára vonatkoztatott "nyomatéka". Amikor azonban az össztöltés nulla, a dipólnyomaték független a vonatkoztatási ponttól.

Valóban, az  $\vec{a}$  vektor végpontjára vonatkoztatott dipólnyomaték

$$\vec{p}' = \int d\Omega \cdot (\vec{r} - \vec{a})\rho(\vec{r}) = \int d\Omega \vec{r}\rho(\vec{r}) - \vec{a} \int d\Omega \rho(\vec{r}) = \vec{p} - q \cdot \vec{a},$$

ezért  $q = 0$ -nál  $\vec{p}' = \vec{p}$ .

Semleges testeknél tehát a dipólnyomaték a testek "belső", a vonatkoztatási pont önkényétől független jellemzője. A legegyszerűbb ilyen rendszer az *egyszerű dipól*, amely két ellentétes töltésű ponttöltésből áll.

17.Feladat: Határozzuk meg az egyszerű dipól dipólnyomatékát.

Megoldás: Az egyszerű dipól semlegessége miatt a (33) alkalmazásánál az origót tetszőlegesen választhatjuk, legyen — mondjuk — a negatív,  $-q$  töltésű ponttöltés helyén. Ha a pozitív ponttöltés helyzetvektora  $\vec{a}$ , akkor  $\rho(\vec{r}) = q[\delta(\vec{r} - \vec{a}) - \delta(\vec{r})]$ . Ezt (33)-ba írva kapjuk a

$$\vec{p} = q \int d\Omega \cdot \vec{r} \cdot [\delta(\vec{r} - \vec{a}) - \delta(\vec{r})] = q\vec{a} \quad (34)$$

dipólnyomatékot.♣

A dipólnyomaték fogalma a semleges dielektrikumok (dielektromos) *polarizációjánál* is fellép. Ha egy homogén dielektrikumot homogén elektromos mezőbe helyezünk, a felületen töltéssűrűség jön létre és a test dipólnyomatéka tesz szert. A jelenség legegyszerűbb magyarázata az, hogy az eredetileg zérus dipólnyomatékú molekulák az elektromos mező hatására dipólnyomatéka tesznek szert, vagy ha már volt dipólnyomatékuk, a mező irány szerint rendezi azokat.

A polarizált állapot jellemzése érdekében próbáljuk magunk elé képzelni a dielektrikumot alkotó elemi dipólokat. Amikor a test polarizálatlan állapotban van, elemi dipólok vagy nincsenek, vagy ha vannak is, teljesen véletlenszerű az orientációjuk ("átlagban nincsenek"). Polarizált állapotban az elemi dipólok dipólnyomatéka vektormezőt alkot, amelyet  $\vec{P}$ -vel jelölünk. A  $\vec{P}$  neve *polarizációs vektor*, *polarizációs sűrűség* vagy *dipólsűrűség*.

Ha gondolatban megrajzoljuk ennek a vektormezőnek az áramvonalait, észrevesszük, hogy az áramvonalak forrásának a szerepét a polarizációs töltéssűrűség játssza, éspedig úgy, hogy az áramvonalak a *negatív polarizációs töltésből indulnak és a pozitívban végződnek*. Helyezzünk pl. egy  $xy$  síkkal párhuzamos dielektromos lapot  $z$ -irányú homogén elektromos mezőbe. Azon az oldallapon, amelyen az elektromos mező a lap belsejébe mutat negatív, a szemközt lévők pozitív polarizációs töltéssűrűség jön létre. A lap belsejében polarizációs töltések nincsenek annak ellenére, hogy az elemi dipólnyomatékok mindenütt az elektromos mező irányába mutatnak és ezért a közeg mindenütt polarizált állapotban van. A test belsejében ugyanis a szomszédos dipólok ellentétes töltései kompenzálják egymást és csak a test felületén marad kompenzálatlan töltéssűrűség. A  $\vec{P}$  polarizációs vektor ezért a test belsejében mindenütt azonos nagyságú, az elektromos mezővel párhuzamos, a testen kívül zérus (a vákuumban nincsenek dipólok), és ezért áramvonalai valóban a negatív töltéssűrűségnél kezdődnek és a pozitívban végződnek.

Ez a kvalitatív kép sugallja, hogy a  $\vec{P}$  mező forrassűrűsége (divergenciája) a polarizációs töltéssűrűség *negatívjával* arányos, azzal a kiegészítő peremfeltétellel, hogy a vákuumban mindenütt nulla. Mint látni fogjuk, a  $\vec{P}$  akkor egyenlő a dipólsűrűséggel, ha az arányossági tényezőt 1-nek választjuk. A  $\vec{P}$  differenciálegyenletét mindezek alapján a

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_p \quad (35)$$

alakban posztulálhatjuk.

Ebből az egyenletből mindenekelőtt következik, hogy egy dielektromos test  $q_p$  polarizációs össztöltése zérus, ezért ha a polarizációs töltést (35)-ből számoljuk, nem kell külön gondoskodni arról, hogy  $q_p$  eltűnjön. Integráljuk ui. ezt a képletet egy olyan  $\Omega$  térfogatra, amely az egész dielektrikumot tartalmazza, és ezért  $\Sigma$  felszíne mindenütt a vákuumban van. A Gauss-tétel felhasználásával

$$q_p = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{P} \cdot d\Omega = - \int_{\Sigma} (d\Sigma \cdot \vec{P}) = 0,$$

mert a  $\Sigma$ -n mindenütt  $\vec{P} = 0$ .

Ha magát a  $\vec{P}$ -t integráljuk a fenti  $\Omega$ -ra, a dielektrikum dipólnyomatékát kapjuk eredményül:

$$\vec{p} = \int_{\Omega} d\Omega \cdot \vec{P}(\vec{r}). \quad (36)$$

Ez mutatja, hogy (35)-ben az arányossági tényezőt jól választottuk. A bizonyításhoz vegyünk egy tetszőleges  $\vec{\nu}$  egységvektort. A  $\vec{p}$  és a  $\vec{P}$   $\vec{\nu}$ -re vetett vetületét  $p_{\nu}$ ,  $P_{\nu}$ -vel

jelölve

$$\begin{aligned}
 p_\nu &= (33) = \int_{\Omega} d\Omega \cdot (\vec{r} \cdot \vec{\nu}) \rho_p = (35) = - \int_{\Omega} d\Omega \cdot (\vec{r} \cdot \vec{\nu}) \operatorname{div} \vec{P} = (29) = \\
 &= \int_{\Omega} d\Omega \cdot (\vec{P} \cdot \operatorname{grad} (\vec{r} \cdot \vec{\nu})) = \int_{\Omega} d\Omega (\vec{P} \cdot \vec{\nu}) = \int_{\Omega} d\Omega \cdot P_\nu
 \end{aligned} \tag{37}$$

a (36)-al összhangban. A (29) alkalmazásával először használtunk térbeli parciális integrálást. Esetünkben a  $\Sigma$ -n  $\vec{P} = 0$ , aminek következtében a felületi integrál zérus.

A (36) teszi lehetővé, hogy  $\vec{P}(\vec{r})$ -t dipólsűrűségnek tekintsük:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{p}(\vec{r}) \cdot n(\vec{r}), \tag{38}$$

ahol  $n(\vec{r})$  a molekulák sűrűsége,  $\vec{p}(\vec{r})$  pedig a molekulák (átlagos) dipólnyomatéka a dielektrikum  $\vec{r}$  helyzetvektorú pontjában.

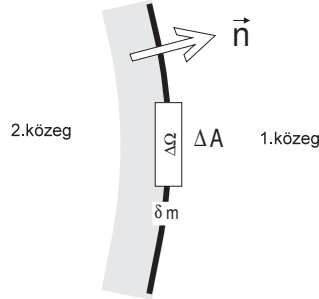


Figure 4:

18.Feladat: Mutassuk meg, hogy két egymással határos dielektrikum határfelületén a  $\sigma_p$  felületi polarizációs töltéssűrűség a  $\vec{P}$  normál irányú komponensének a csökkenésével egyenlő, amikor az egyik közegből a másikba lépünk át.

Megoldás: A 4.ábrán a haladási irányt az  $\vec{n}$  normál irányú egységvektor mutatja. Integráljuk (35)-t az ábrán kijelölt  $\Delta\Omega$  térfogatra és alkalmazzuk a Gauss-tételt. A térfogat "lapos konzervdoboz" alakú, amelynek  $\delta m$  magasságával zérushoz tartunk, ezért az oldalfelület járuléka a felületi integrálhoz zérus. A fedő- és alaplappal területe egyformán  $\Delta A$ . Az "új közegben" fekvő fedőlap külső normálisa  $\vec{n}$ , a "régi közegben" fekvő alaplappal  $-\vec{n}$ , ezért a Gauss-tételben a felületi integrál

$$\int (\vec{P} \cdot d\vec{\Sigma}) = ((\vec{P}_1 \cdot \vec{n}) - (\vec{P}_2 \cdot \vec{n})) \cdot \Delta A = (P_{1n} - P_{2n}) \cdot \Delta A,$$

a térfogati integrál pedig

$$- \int d\Omega \cdot \rho_p = -\sigma_p \cdot \Delta A$$

(a  $\delta m \rightarrow 0$  következtében a térfogati integrálhoz csak a felületi töltés ad járulékot).  
A Gauss-tétel szerint a két kifejezés egyenlő egymással, azaz

$$\Delta P_n \equiv P_{1n} - P_{2n} = -\sigma_p. \quad (39)$$

Szavakban: Amikor  $\vec{n}$  irányban haladva az egyik közegből átlépünk a másikba, a  $\vec{P}$   $\vec{n}$ -irányú komponense  $\sigma_p$ -vel csökken.

Ha speciálisan az 1.közeg a vákuum, akkor  $P_{1n} = 0$  és  $\sigma_p = P_{2n}$ : közeg és vákuum határán a felületi töltéssűrűség a  $\vec{P}$ -nek a közeg külső normálisára vetett vetületével egyenlő.

Megjegyzés: Ez a gondolatmenet a határfelületek kezelésének prototípusa, amely a továbbiakban többször is alkalmazásra kerül.♣

## 2.10 A pontszerű dipól

Egy origóban tartózkodó  $q$  töltésű ponttöltés töltéssűrűsége  $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r})$ . Hasonlóan, egy origóban tartózkodó  $\vec{p}$  dipólnyomatékú pontszerű dipól dipólsűrűsége  $\vec{P}(\vec{r}) = \vec{p} \cdot \delta(\vec{r})$ . Ez a dipólsűrűség ui. valóban csak az origóban különbözik zérustól és a (36) teljesül rá. A pontszerű dipól töltéssűrűsége a (35) alapján ezért

$$\rho(\vec{r}) = \rho_p(\vec{r}) = -\text{div}(\vec{p} \cdot \delta(\vec{r})) \quad (\text{pontszerű dipólra}). \quad (40)$$

19.Feladat: Határozzuk meg az origóban nyugvó pontszerű dipól elektromos terét.

Megoldás: Először a potenciált számítjuk ki úgy, hogy a (25) megoldó-képletbe a dipól (40) töltéssűrűségét írjuk:

$$\Phi_d = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega' \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{div}'(\vec{p}\delta(\vec{r}')).$$

A  $d$ -index a dipólra utal, a  $\text{div}$ -n a vessző pedig arra, hogy a  $\text{div}$ -ben előírt deriválások az  $\vec{r}'$  vektor  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  komponenseire vonatkoznak.

Célszerű a delta-függvényt parciális integrálással szabaddá tenni, mert a delta-függvény egyszerűvé tenné a kijelölt  $d\Omega'$  integrálás elvégzését. A már alkalmazott módon a (29) felhasználásával a

$$\Phi_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega' \cdot \delta(\vec{r}') \cdot \left( \vec{p} \cdot \text{grad}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

képletet nyerjük.

A

$$\frac{\partial f(x - x')}{\partial x'} = -\frac{\partial f(x - x')}{\partial x}$$

képlet következtében

$$\mathit{grad}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\mathit{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (41)$$

Mivel  $\mathit{grad}$  nem hat az  $\vec{r}'$  integrációs változóra és a  $\vec{p}$  konstans vektor, ezért a  $\Phi_d$ -beli integrál

$$\begin{aligned} - \int d\Omega' \cdot \delta(\vec{r}') \cdot \left( \vec{p} \cdot \mathit{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) &= - \int d\Omega' \vec{p} \cdot \mathit{grad} \left( \delta(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \\ &= -\vec{p} \cdot \mathit{grad} \int d\Omega' \cdot \delta(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \left( \vec{p} \cdot \mathit{grad} \frac{1}{r} \right) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2} = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^3}. \end{aligned}$$

A pontszerű dipól potenciálja tehát

$$\Phi_d(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad (42)$$

az elektromos tere pedig

$$\vec{E}_d(\vec{r}) = -\mathit{grad} \Phi_d(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^5}. \quad (43)$$

Ezt a teret — a pontszerű dipól terét —, *dipóltérnek* nevezzük<sup>6</sup>. Egy véges kiterjedésű dipól nagy távolságból nézve pontszerűnek látszik, a tere a dipóltól távol megegyezik a dipóltérrel.

20.Feladat: Mekkora erő hat egy pontszerű dipólra elektromos mezőben?

Megoldás: A  $\rho$  töltéssűrűségre ható erősűrűség  $\vec{f} = \rho\vec{E}$ , a teljes erő pedig a

$$\vec{F} = \int d\Omega' \vec{f}(\vec{r}') = \int d\Omega' \cdot \vec{E}(\vec{r}')\rho(\vec{r}') \quad (44)$$

Coulomb-erő, amelynek  $i$ -komponense

$$F_i = \int d\Omega' \cdot E_i(\vec{r}')\rho(\vec{r}').$$

A képletben szereplő  $\vec{E}$ -be *nem* értendő bele magának a töltésrendszernek az elektromos tere; a hatás-ellenhatás egyenlősége következtében ugyanis a töltésrendszer egyes elemeinek egymásrahatásából származó erők eredője zérus.

A pontszerű dipólra ható erőt úgy kapjuk, hogy ebben a képletben  $\rho$ -n az  $\vec{r}$  pontban tartózkodó pontszerű dipól töltéssűrűségét értjük. A (40) szerint  $\rho(\vec{r}') = -\mathit{div}' (\vec{p}\delta(\vec{r}' - \vec{r}))$ . Mivel azonban  $-\mathit{div}' = +\mathit{div}$  (v.ö. (41)-el), ezért

$$F_i = \mathit{div} \int d\Omega' \cdot E_i(\vec{r}') \cdot \vec{p} \cdot \delta(\vec{r}' - \vec{r}) = \mathit{div} (E_i(\vec{r}) \cdot \vec{p}) = (27) = (\vec{p} \cdot \mathit{grad} E_i(\vec{r})).$$

<sup>6</sup>Ld. a Mechanika-jegyzet 29. feladatát.

(A (27), (29) akkor is igaz, ha  $S$  valamilyen vektormező egyik komponense.)

Ahhoz, hogy a komponensről vektoralakra térhessünk át, célszerű ezt az eredményt az ekvivalens

$$F_i = (\vec{p} \cdot \text{grad}) E_i(\vec{r})$$

alakba írni, ez ui. nyilvánvalóan az

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}(\vec{r}) \quad (45)$$

vektoriális képlet  $i$ -k komponense. Vegyük észre, hogy a dipóltra csak *térben változó* elektromos mezőben hat erő, és ez az erő nem csak a dipól helyzetvektorától függ, hanem a dipólnyomaték orientációjától is.

21. Feladat: Mutassuk meg, hogy a (45)-hoz tartozó erőfüggvény

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r}). \quad (46)$$

Igazolás:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\text{grad} U = \text{grad} (\vec{p} \cdot \vec{E}), \\ F_x &= \frac{\partial}{\partial x} (\vec{p} \cdot \vec{E}) = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x}. \end{aligned}$$

A  $\text{rot} \vec{E} = 0$  következtében

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z},$$

ezért

$$F_x = \left( p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) E_x = (\vec{p} \cdot \text{grad}) E_x$$

helyesen. ♣

22. Feladat: Milyen forgatónyomaték hat egy pontszerű dipóltra homogén elektromos térben?

Megoldás: Egy töltésrendszerre elektromos térben az

$$\vec{M} = \int d\Omega' [\vec{r}' \times \vec{f}(\vec{r}')] = \int d\Omega' [\vec{r}' \times \rho(\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}')]$$

forgatónyomaték hat (az  $\vec{E}$  itt is a külső elektromos tér). Speciálisan pontszerű dipól esetében

$$M_i = - \int d\Omega' [\vec{r}' \times \vec{E}(\vec{r}')]_i \text{div}' (\vec{p} \delta(\vec{r}' - \vec{r})).$$

A divergencia olyan vektormezőre hat, amelynek komponensei csak az  $(\vec{r}' - \vec{r})$  különbségtől függenek. Ezért  $\text{div}'$ -t helyettesíthetjük  $-\text{div}$ -el, és ezt — mivel nem hat az integrációs változóra, — kivihetjük az integráljel elé:

$$M_i = \text{div} \int d\Omega' [\vec{r}' \times \vec{E}(\vec{r}')]_i \cdot \vec{p} \delta(\vec{r}' - \vec{r}) = \text{div} \left( [\vec{r}' \times \vec{E}(\vec{r}')]_i \vec{p} \right) = (27) = \vec{p} \cdot \text{grad} [\vec{r}' \times \vec{E}(\vec{r}')]_i.$$

A (27) alkalmazásánál figyelembe vettük, hogy a  $\vec{p}$  konstans vektor divergenciája zérus. A kapott egyenlőség vektoriális alakja a következő:

$$\vec{M} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) [\vec{r} \times \vec{E}] = [\vec{p} \times \vec{E}] + [\vec{r} \times \vec{F}], \quad (47)$$

amelyben  $\vec{F}$  a dipólra ható (45) erő. Homogén térben  $\vec{F} = 0$ , és csak az első tag ad járulékot. Amikor  $\vec{p} \parallel \vec{E}$  ez a tag is nulla és a dipólra nem hat forgatónyomaték: ezek az egyensúlyi helyzetek. Mivel  $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ , a potenciális energia akkor a legkisebb, amikor  $\vec{p}$  és  $\vec{E}$  azonos irányú: ez a stabil egyensúlyi helyzet.♣

## 2.11 A dielektrikumok elektrosztatikája

Az elektrosztatika

$$\text{div } \epsilon_0 \vec{E} = \rho \quad (48)$$

$$\text{rot } \vec{E} = 0 \quad (49)$$

egyenletei dielektrikumok jelenlétében is érvényesek. A  $\rho$ -ba természetesen bele kell érteni a polarizációs töltéssűrűséget is

$$\rho = \rho_s + \rho_p. \quad (50)$$

A  $\rho_p$  polarizációs töltés a dipólokból származik, amelyekben az ellentétes előjelű töltéspárok csak mikroszkópicusan kicsiny távolságra mozdulnak el egymáshoz képest. A  $\rho_s$  a *szabad töltések* sűrűsége. Szabad töltésen az olyan töltést értjük, amely elszakadt az ellentétes előjelű párjától, és attól teljesen függetlenül mozog. A dörzsöléssel létrehozott elektromosság pl. ebbe a kategóriába tartozik.

A  $\vec{P}(\vec{r})$  polarizáció  $\vec{E}(\vec{r})$ -től függ. Amikor  $\vec{E} = 0$ , a polarizáció is zérus, ezért a legegyszerűbb — és sokszor érvényesnek bizonyuló — feltevés az, hogy  $\vec{P}$  arányos  $\vec{E}$ -vel:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \chi \cdot \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}). \quad (51)$$

A  $\chi$  *dielektromos szuszceptibilitás* a közegre jellemző mennyiség. Homogén izotróp közegben konstans, általában azonban függhet  $\vec{r}$ -től, és a  $\vec{P}$  irányának sem kell feltétlenül megegyeznie a gerjesztő  $\vec{E}$ -tér irányával. A továbbiakban azonban homogén izotróp közegekre korlátozódunk.

A (35), (51) és az (50) alapján a (48) egyenlet a

$$\text{div } \epsilon_0 \vec{E} = \rho_s - \text{div } \chi \epsilon_0 \vec{E}$$

alakot ölti, aminek másik formája

$$\text{div } (\epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}) = \rho_s.$$

Vezessük be az

$$\epsilon_r = 1 + \chi$$



relatív permittivitást, ami az anyagra jellemző mennyiség (homogén izotróp közegben konstans), az  $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$  permittivitást, valamint a

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (52)$$

(elektromos) indukciót (vagy eltolási vektort).

Ezek felhasználásával az elektrosztatika egyenletei a

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_s \quad (53)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (54)$$

alakot öltik, amelyekhez még hozzá kell venni az (52) anyagi egyenletet.

Az (53), (54) — differenciálegyenlet, ezért nem alkalmazható olyan felületek mentén, amelyekeken  $\vec{D}$  és/vagy  $\vec{E}$  nemdifferenciálható módon változik. Két különböző közeg határa ilyen felület, és explicite meg kell adnunk  $\vec{D}$  és  $\vec{E}$  megváltozását a felületekre merőleges irányban. Ezek a szabályok (53)-t és (54)-t helyettesítik, és belőlük származtathatók le a 18.feladatban alkalmazott eljárással.

Vegyük alapul ennek a feladatnak az ábráját (4.ábra, és a gondolatmenetben  $P \rightarrow D$ ,  $\rho_p \rightarrow -\rho_s$ ). Az (53)-t a  $\Delta\Omega$  térrészre integrálva a Gauss-tétel alkalmazása után a

$$(\overline{D_{1n}} - D_{2n}) \cdot \Delta A = \int_{\Delta\Omega} d\Omega \cdot \rho_s$$

képletre jutunk. Amikor  $\delta m \rightarrow 0$  az integrálban csak a felületi töltések járuléka marad meg, ezért a jobboldal  $\sigma_s \cdot \Delta A$ -val lesz egyenlő, ahol  $\sigma_s$  a szabad töltések felületi sűrűsége a határfelületen. Így azt kapjuk, hogy

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_s,$$

vagy tömörebb formában

$$\Delta D_n = \sigma_s.$$

Szavakban: Amikor az egyik közegből a másikba lépünk át, a  $\vec{D}$  normál komponense  $\sigma_s$ -el nő.

Ha  $\sigma_s = 0$ , a  $D_n$  folytonos, de  $E_n$  még ekkor is ugrásszerűen változik. A  $D_{1n} = D_{2n}$  következtében ugyanis  $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$ , és így

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_{2r}}{\epsilon_{1r}} \quad (\sigma_s = 0).$$

Az  $\vec{E}$ -nek a határfelülettel párhuzamos komponensei azonban nem szenvednek ugrást. Legyen  $\vec{t}$  a határfelület egy pontjában a felületet érintő valamelyik egységvektor. A felrajzolt zárt infinitezimális kontúron  $\delta m \rightarrow 0$ -nál az  $\vec{E}$  cirkulációja  $(E_{1t} - E_{2t}) \cdot \Delta l$ -el egyenlő, ahol  $E_{1t}$  és  $E_{2t}$  az 1. és a 2. közeg határpontjaiban az  $\vec{E}$  mező  $\vec{t}$ -rányú komponense. Mivel az elektrosztatikában  $\vec{E}$  cirkulációja mindig zérus, azt találjuk, hogy

$$E_{1t} - E_{2t} = 0,$$

vagy tömörebben

$$\Delta E_t = 0.$$

A  $D_t$  azonban ugrást szenved, az  $E_{1t} = E_{2t}$  következtében ugyanis

$$\frac{D_{1t}}{D_{2t}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{\epsilon_{1r}}{\epsilon_{2r}}.$$

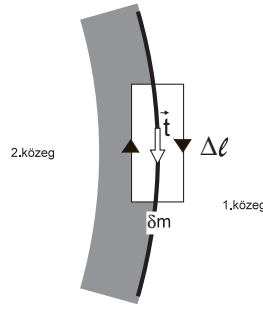


Figure 5:

A potenciálon keresztül ezek a feltételek úgy foglалhatók össze, hogy  $\Phi$ -nek a közeghatáron folytonosnak kell lennie (ezt követeli az  $E_t$  komponensek folytonossága),  $\Phi$  normál irányú deriváltjának pedig olyan ugrása van, amely az  $E_n$  ugrását biztosítja:

$$\frac{(\text{grad}_n \Phi)_1}{(\text{grad}_n \Phi)_2} = \frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{\epsilon_{2r}}{\epsilon_{1r}} \quad (\sigma_s = 0).$$

Vegyük észre, hogy azokban a tartományokban, amelyekben  $\epsilon = konstans$  és  $\rho_s = 0$ , a  $\rho_p$  polarizációs töltéssűrűség szükségképpen zérus, ugyanis ekkor a  $\text{div } \vec{D} = \rho_s$  egyenlet a  $\text{div } \vec{P} = 0$  egyenlettel egyenértékű:

$$\epsilon = konstans \quad \text{és} \quad \rho_s = 0 \implies \rho_p = 0. \quad (55)$$

érvényes a következő unicitási tétel: Az (52), (53), (54) egyenletek, az ugrások a közeghatárokon, valamint a peremfeltétel a végtelenben (az  $\vec{E}$  és a  $\Phi$  a végtelenben eltűnik) az elektrosztatikai feladatok megoldását egyértelművé teszik.

A feladatok előtt csak arra a kérdésre kell még válaszolnunk, hogy miért célszerű a (48) egyenletet (53)-al helyettesíteni. Az ok az, hogy (48) jobb oldala a polarizációs töltéssűrűséget is tartalmazza, ami rendszerint nincs előre megadva és az  $\vec{E}$ -vel együtt kell meghatározni. Az (53) jobb oldalán ezzel szemben a szabad töltéssűrűség áll, és ez akkor is lehet megadott függvény, amikor a polarizációs töltéssűrűség ismeretlen.

A feladatoknál meg lehet majd figyelni, hogyan kell az (53)-ból kiindulva az  $\vec{E}$ -t is és a  $\rho_p$ -t is meghatározni.

23. Feladat:  $xy$  irányban végtelen kiterjedésű  $\epsilon = konstans$  permittivitású, szabad töltéseket nem tartalmazó dielektrikum kitölti a  $0 < z < d$  tartományt. A  $z < 0$  féltérben  $+z$  irányú homogén elektromos mező van. Határozzuk meg a  $\vec{D}$ ,  $\vec{P}$  vektorokat és a polarizációs töltéssűrűséget.

Megoldás:

Indexkonvenció: A  $z < 0$  rész (vákuum) indexe 1, a  $0 < z < d$  (közeg) indexe 2, a  $z > d$  (vákuum) indexe 3.  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ ,  $\epsilon_3 = \epsilon$ . Az elektromos mező az 1. tartományban  $\vec{E}_1 = (0, 0, E_1)$ ,  $E_1 = konstans > 0$ .

A (53)-ból indulunk ki, amely most

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (56)$$

-ra redukálódik.

Az 1. tartományban  $\vec{D}_1 = \epsilon_0 \vec{E}_1$  homogén mező, nyilván eleget tesz (56)-nak.

A dielektrikumon belül  $\vec{D}_2 = \epsilon \vec{E}_2$ . Mivel  $\epsilon = konstans$ , (56)-ból következik, hogy  $\operatorname{div} \vec{E}_2 = 0$ . Mivel minden  $z$ -vel párhuzamos forgástengely a feladat szimmetriatengelye,  $\vec{E}_2 = (0, 0, E_2)$ , és ez az egyenlet  $\frac{dE_2}{dz} = 0$ -ra redukálódik, ahonnan  $E_2 = konstans$ .

A  $konstans$  értékét az ugrásfeltételből lehet meghatározni az 1. és a 2. tartomány határán:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{1}{\epsilon_r} \quad (z = 0),$$

ahol  $\epsilon_r$  a közeg relatív permittivitása. Innen

$$E_2 = \frac{1}{\epsilon_r} E_1. \quad (57)$$

A 3. térrészben újra  $\vec{E}_3 = (0, 0, E_3)$ ,  $\operatorname{div} \vec{E}_3 = \frac{dE_3}{dz} = 0$ , ahonnan  $E_3 = konstans$ .

A 2. és a 3. tartomány határán  $\frac{E_3}{E_2} = \epsilon_r$ , ezért

$$E_3 = \epsilon_r E_2 = E_1.$$

A dipólsűrűség a vákuumban zérus, a közegben

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}_2 = \left( 0, 0, \chi \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} E_1 \right),$$

ahol természetesen  $\chi = \epsilon_r - 1$ .

A (39) szerint a  $z = d$  felületen  $\sigma_p = \chi \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} E_1 > 0$ , a  $z = 0$  felületen  $\sigma_p = -\chi \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} E_1 < 0$ .

Az eltolási vektor az egész térben mindenütt ugyanaz a

$$\vec{D} = (0, 0, \epsilon_0 E_1)$$

homogén mező, ugyanis normál komponense a szabad töltések hiánya miatt, tangenciális komponensei pedig a feladat szimmetriája miatt nem szenvednek ugrást a közegethatárokon. A feladat ebből az észrevételből kiindulva is megoldható. ♣

Megjegyzés: A dielektrikum stabilitása megköveteli, hogy a polarizációs töltések által létrehozott tér *csökkentse* a dielektrikumra ható külső teret, azaz — a példa jelöléseiben —  $E_1$  legyen nagyobb, mint  $E_2$ . Ha nem így volna, a polarizációs folyamat láncreakciószerűen gerjesztené önmagát ahelyett, hogy a külső tér által meghatározott stabil állapothoz közeledne. Az  $E_1 > E_2$  feltétel (57) következtében az  $\epsilon_r > 1$  követelménnyel ekvivalens. Termodinamikai úton szigorúan bebizonyítható, hogy minden anyagra  $\epsilon_r > 1$ . Ez a feltétel  $\chi > 0$ -ként is felfogható, ami azt fejezi ki, hogy  $\vec{E}$  csak önmagával azonos irányú  $\vec{P}$ -t hozhat létre (homogén izotróp közegben).

24. Feladat:  $xy$  irányban végtelennek tekinthető síkkondenzátor lemezei a  $z = d + a$  és a  $z = -a$  síkokat foglalják el ( $a, d > 0$ ). A  $z = -a$  lemezen a szabad töltések sűrűsége  $\sigma_s$ , a  $z = d + a$  lemezen  $-\sigma_s$  ( $\sigma_s > 0$ ). A  $0 < z < d$  térrészt az előző feladat közege foglalja el, ezen kívül mindenütt vákuum van. A kondenzátorra külső tér nem hat. Határozzuk meg a polarizációs töltéssűrűséget.

Megoldás: Indexkonvenció:

1.  $z < -a$   $\epsilon_0$
2.  $-a < z < 0$   $\epsilon_0$
3.  $0 < z < d$   $\epsilon$
4.  $d < z < d + a$   $\epsilon_0$
5.  $d + a < z$   $\epsilon_0$

A szimmetria miatt mind az öt tartományban a tér  $z$ -irányú, ezért a  $z$ -indexet megint nem írjuk ki.

Most  $E_1 = 0$ , ezért  $D_1 = 0$ . Amikor az 1. térrészből a 2.-be lépünk át, a  $\vec{D}$  normál komponense  $\sigma_s$ -el nő, ezért  $D_2 = \sigma_s$ ,  $E_2 = \frac{1}{\epsilon_0} D_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_s$ .

A 2., 3., 4. térrész az előző feladat alapján tárgyalható. Eszerint a dielektrikum felületén

$$\sigma_p = \pm \chi \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} E_2 = \pm \frac{\chi \sigma_s}{\epsilon_r},$$

$$E_3 = \frac{1}{\epsilon_r} E_2 = \frac{\sigma_s}{\epsilon},$$

$$E_4 = E_2 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma_s.$$

A 4. térrészből az 5.-be átlépve  $\vec{D}$  normál komponense  $-\sigma_s$ -el nő. Mivel  $D_4 = \epsilon_0 E_4 = \sigma_s$ , ezért  $D_5 = E_5 = 0$ .

A megoldás  $a = 0$ -nál is érvényes, amikor a közeg kitölti a kondenzátor belsejét. A dielektrikumban ekkor  $E = \frac{\sigma_s}{\epsilon}$ ,  $D = \sigma_s$ .♣

25.Feladat: Hogyan változik meg az előző feladat megoldása, ha  $\sigma_s$  helyett a  $V$  potenciálkülönbséget<sup>7</sup> adjuk meg a lemezek között?

Megoldás: Az előző megoldás érvényben marad, csak benne  $\sigma_s$ -t ismeretlennek tekintjük, amelyet még a (19) képlet segítségével  $V$ -n keresztül ki kell fejezni:

$$V = E_2 \cdot a + E_3 \cdot d + E_4 \cdot a = \left( \frac{2a}{\epsilon_0} + \frac{d}{\epsilon} \right) \sigma_s = (2a\epsilon_r + d) \frac{\sigma_s}{\epsilon},$$

ahonnan

$$\sigma_s = \frac{\epsilon}{2a\epsilon_r + d} V. \clubsuit$$

26.Feladat:  $xy$  irányban végtelennek tekinthető síkkondenzátor  $z = -a$  lemezén  $\sigma_s$ ,  $z = +a$  lemezén  $-\sigma_s$  a töltéssűrűség ( $\sigma_s > 0$ ). A kondenzátor  $-a < z < 0$  tartományát  $\epsilon_1$ , a  $0 < z < a$  tartományát  $\epsilon_2$  permittivitású dielektrikum tölti ki. Határozzuk meg a térerősségeket és a polarizációs töltéssűrűségeket.

Megoldás: Az indexkonvenciót a permittivitás mutatja.

$$\begin{aligned} D_1 = \sigma_s \quad E_1 = \frac{\sigma_s}{\epsilon_1} \quad P_1 = \chi_1 \epsilon_0 E_1 = \frac{\epsilon_{1r} - 1}{\epsilon_{1r}} \sigma_s, \\ D_2 = \sigma_s \quad E_2 = \frac{\sigma_s}{\epsilon_2} \quad P_2 = \chi_2 \epsilon_0 E_2 = \frac{\epsilon_{2r} - 1}{\epsilon_{2r}} \sigma_s. \end{aligned}$$

A polarizációs töltéssűrűségek a határfelületeken:

$$\begin{aligned} \sigma_p(z = -a) &= -P_1 = \frac{1 - \epsilon_{1r}}{\epsilon_{1r}} \sigma_s, \\ \sigma_p(z = 0) &= P_1 - P_2 = \frac{\epsilon_{1r} - \epsilon_{2r}}{\epsilon_{1r} \epsilon_{2r}} \sigma_s, \\ \sigma_p(z = a) &= P_2 = \frac{\epsilon_{2r} - 1}{\epsilon_{2r}} \sigma_s. \clubsuit \end{aligned}$$

27.Feladat:  $R$  sugarú homogén dielektromos gömbre  $q_s$  szabad töltést viszünk rá úgy, hogy (a) egyenletesen oszljon el a gömb térfogatában, (b) legyen ponttöltés a gömb középpontjában, vagy (c) egyenletesen oszljon el a gömb felületén. Határozzuk meg mindhárom esetben az elektromos teret és a polarizációs töltéssűrűséget.

Megoldás: A gömbszimmetria miatt polárkoordinátákat célszerű használni, amelyben

$$\vec{D} = (D_r, D_\vartheta, D_\varphi) = (D, 0, 0).$$

<sup>7</sup>A kondenzátoros feladatokban a tradicionális jelölésmódnak megfelelően a potenciált a  $\Phi$  helyett  $V$ -val jelöljük.

a) Az (53)-ban most

$$\rho_s = \begin{cases} 0 & \text{ha } r > R \\ \frac{3q_s}{4\pi R^3} & \text{ha } r < R. \end{cases}$$

A (53)-ból a Gauss-tétel alapján a gömbön kívül

$$D = \frac{q_s}{4\pi r^2},$$

a gömbön belül pedig

$$D = \frac{q'_s}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r\rho_s,$$

ahonnan

$$\begin{aligned} E_r \equiv E &= \frac{1}{3\epsilon}r\rho_s \\ P_r \equiv P &= \frac{\chi}{3\epsilon_r}r\rho_s. \end{aligned}$$

A polarizációs töltéssűrűséget (35)-ből kapjuk:

$$\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P} = -\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 P) = -\frac{\chi}{\epsilon_r} \rho_s,$$

ez ugyancsak állandó a gömb térfogatán belül.

Emellett a  $q_s$ -el ellentétes előjelű térfogati polarizációs töltéssűrűség mellett a gömb felszínén felületi polarizációs töltéssűrűség is létrejön:

$$\sigma_p = P(r)|_R = \frac{\chi}{3\epsilon_r} R \rho_s.$$

A teljes polarizációs töltés természetesen nullával egyenlő:

$$q_p = 4R^2\pi \cdot \sigma_p + \frac{4R^3\pi}{3} \cdot \rho_p = 0.$$

b)

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{q_s}{4\pi r^2} \\
 E &= \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (r > R) \\
 E &= \frac{q_s}{4\pi\epsilon r^2} \quad (r < R) \\
 P &= \chi\epsilon_0 \frac{D}{\epsilon} = \frac{\chi q_s}{4\pi\epsilon_r r^2} \\
 \sigma_p &= \frac{\chi q_s}{4\pi\epsilon_r R^2} \quad (r = R) \\
 \rho_p &= -\operatorname{div} \vec{P} = -\frac{\chi q_s}{\epsilon_r} \delta(\vec{r}).
 \end{aligned}$$

c) A gömbön kívül a tér ugyanaz, mint az előző esetekben. Mivel  $\sigma_s = \frac{q_s}{4\pi R^2}$ , a gömbön belül  $D = 0$  (a  $D$   $\sigma_s$ -t ugrik, amikor kilépünk a gömbből). Ezért a gömbben  $E = D = P = 0$ ,  $\rho_p = \sigma_p = 0$ ♣.

28.Feladat: Dielektromos gömböt (külső) homogén elektromos mezőbe (nagy méretű síkkondenzátor belsejébe) helyezünk. Határozzuk meg a térerősségeket és a polarizációs töltéssűrűséget.

Megoldás: A megadott külső tér legyen  $z$ -irányú:  $\vec{\mathcal{E}} = (0, 0, \mathcal{E})$ . A vákuumot 1-el, a gömböt 2-vel indexeljük. A gömb sugara  $R$ .

A feladatot célszerű a potenciál segítségével tárgyalni. A külső tér potenciálja  $\Phi_0 = -\mathcal{E}z = -\mathcal{E}r \cos \vartheta$ . Ez a tér polarizációs töltéssűrűséget indukál a gömb felületén<sup>8</sup>, amely létrehozza a maga terét a gömbön kívül ( $\Phi_1$  potenciál) és  $\Phi_0$ -ról  $\Phi_2$ -re változtatja a potenciált a gömbön belül:

$$\Phi = \begin{cases} \Phi_0 + \Phi_1 & \text{ha } (r > R) \\ \Phi_2 & \text{ha } (r < R) \end{cases}$$

A teljes külső potenciál ( $\Phi_0 + \Phi_1$ )-el egyenlő. Amikor  $r \rightarrow \infty$ , ez a potenciál  $\Phi_0$ -hoz tart, ezért  $\Phi_1$ -nek nullához kell tartania.

A potenciálnak a közegetháron (is) folytonosnak kell lennie, ezért

$$\Phi_2 = \Phi_0 + \Phi_1 \quad (r = R),$$

vagyis

$$\Phi_2 = -\mathcal{E}R \cos \vartheta + \Phi_1 \quad (r = R). \quad (58)$$

<sup>8</sup>Az (55) következtében térfogati töltéssűrűség nem jöhet létre.

Az indukcióvektor normál komponensének folytonosságát a  $D_{2r} = D_{0r} + D_{1r}$  egyenlet fejezi ki, amely a potenciálokra keresztül felírva a következő:

$$-\epsilon \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} = \epsilon_0 \mathcal{E} \cos \vartheta - \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \quad (r = R). \quad (59)$$

A  $\Phi_1$ -t és a  $\Phi_2$ -t meg tudjuk választani úgy, hogy a határfelület mentén ugyanolyan függvény legyen, mint  $\Phi_0$ . Mindkét potenciál eleget tesz a Laplace-egyenletnek (a gömbfelületen kívül a töltéssűrűség zérus), és a Laplace-egyenletnek két olyan megoldását is ismerjük, amely  $\cos \vartheta$ -val arányos. Az egyik a  $\textit{konst} \cdot z$  függvény, a másik a  $\vec{p} = p\vec{e}_z$  dipólyomatékú pontszerű dipól (42) potenciálja. Ez utóbbi  $r = 0$ -ban szinguláris, ezért  $\Phi_2$  nem lehet (42) alakú. A  $\Phi_1$  azonban lehet, mivel  $r > R$ -nél ez a potenciál reguláris és  $r \rightarrow \infty$ -nél eltűnik. Tegyük fel ezért, hogy

$$\Phi_1 = \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \vartheta, \quad (60)$$

amelyben  $p$  meghatározásra váró konstans.

A  $\Phi_2$ -re nyilván a  $\textit{konst} \cdot z$ -vel célszerű próbálkozni. Ennek negatív gradiense  $z$ -irányú elektromos mező, amelynek nagyságát  $E_2$ -vel fogjuk jelölni:

$$\Phi_2 = -E_2 z = -E_2 r \cos \vartheta. \quad (61)$$

Ebben a képletben  $E_2$  a meghatározandó konstans.

Ha (60)-t és (61)-t (58)-ba és (59)-be írjuk,  $\cos \vartheta$ -val egyszerűsíthetünk, és az alábbi algebrai egyenletrendszer kapjuk az ismeretlen  $p$ -re és  $E_2$ -re:

$$\begin{aligned} -E_2 R &= -\mathcal{E} R + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 R^2} \\ \epsilon E_2 &= \epsilon_0 \mathcal{E} + \frac{p}{2\pi R^3}. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása az  $\vec{E}_2$  és a  $\vec{p}$  irányának figyelembevételével a következő:

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \vec{\mathcal{E}} \quad (62)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1 &= \vec{\mathcal{E}} + \vec{E}_d = \left[ 1 - \frac{R^3}{r^3} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \right] \mathcal{E} \cdot \vec{e}_z + 3 \frac{R^3}{r^3} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \mathcal{E} \cos \vartheta \cdot \vec{e}_r \\ \vec{E}_2 &= \frac{3}{\epsilon_r + 2} \vec{\mathcal{E}} = \frac{3\mathcal{E}}{\epsilon_r + 2} \vec{e}_z, \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

ahol  $\vec{E}_1$  és  $\vec{E}_2$  az elektromos mező a gömbön kívül és belül.



A gömbön indukált felületi töltéssűrűség a következő:

$$\sigma_p = P_r = \epsilon_0 \chi E_{2r} = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \mathcal{E} \cos \vartheta. \quad (64)$$

Emlékeztetünk rá, hogy  $\Phi_2$ -be beleértettük a külső tér potenciálját is. Ezért a gömbön belül a polarizációs töltések által létrehozott potenciál

$$\Phi_2 - \Phi_0 = (-E_2 + \mathcal{E})z = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \mathcal{E} z,$$

amelyhez az

$$\vec{E}_{dep} = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \vec{\mathcal{E}}$$

elektromos mező (*depolarizációs tér*) tartozik. Az elnevezést az indokolja, hogy ez a mező a külső elektromos mezővel ellentétes irányú.

Ezzel a feladatot megoldottuk. Megoldásunk kielégíti az elektrosztatika alapegyenleteit (az ugrásfeltételeket is beleértve), és azt a peremfeltételt, hogy az elektromos mező a végtelenben tartson zérushoz. Az unicitási tétel alapján ezeket a feltételeket más elektromos térrel és töltéssűrűséggel nem lehet kielégíteni. Megoldási eljárásunk lényeges eleme az volt, hogy az  $r > R$  és az  $r < R$  tartományban olyan alakban kerestük a potenciált, hogy a határfelület mentén függvényalakjuk legyen azonos  $\Phi_0$  függvényalakjával. Ezzel a feladatot a  $\Phi_1$ -ben és a  $\Phi_2$ -ben szereplő egy-egy konstans ( $p$  és  $E_2$ ) megválasztására redukáltuk. Ezt az eljárást általános formában is kidolgozták az *ortogonális függvények módszere* néven, de ezt a módszert — időhiány miatt — nem ismertethetjük.♣

## 2.12 Fémek

A fémek polarizációja során létrejövő töltések tetszőlegesen messze kerülhetnek azoktól a pozitív ionoktól, amelyekhez tartoztak (*vezetési elektronok*), ezért a szabad és a polarizációs töltések megkülönböztetése a fémekben nem olyan hasznos, mint a dielektrikumokban. Ennek megfelelően a fémek esetében csak egyfajta töltéssűrűséggel fogunk dolgozni (az  $s$  és a  $p$  indexet elhagyjuk), és a  $\vec{D}$  vektort is csak akkor vezetjük be, amikor a fémet a dielektrikumok határeseteként akarjuk tárgyalni (ld. alább a 32.feladatot).

Az elektrosztatikai feladatokban a fémek szabad töltéseinek átrendeződése mindaddig tart, amíg a fém belsejében a térerősség zérussá nem válik: a fémbe  $\vec{E} = 0$ , és az  $\vec{E} = -\text{grad } \Phi$  következtében  $\Phi = \text{konstans}$ . Az elektromos mező a fém belső üregeiben is zérus. Az üregbeli potenciál ugyanis a Laplace-egyenlet megoldása, amelynek az üregeken belül sehol sem lehet szélső értéke (ld. a 2.6 fejezetet), ezért az üregben mindenütt megegyezik az üreg falának a potenciáljával, amely nem más, mint a konstans fémbeli potenciál.

Az  $\vec{E}$  tangenciális komponense a fém felületén folytonos, ezért ez a komponens a fémfelületen kívül is zérus: az elektromos mező és az indukcióvektor erővonalai

kívülről merőlegesen érik el a fémfelületet. A 2.fejezet szerint (ld. az 1.ábrát) a fém egységnyi felületére vákuumban  $\frac{\epsilon_0}{2}E^2$  erő ("nyomás") hat a külső normális irányában<sup>9</sup>.

Az elektrosztatika 1.alapegyenlete szerint  $\vec{E} = 0$  következtében a fémekben a térfogati töltéssűrűség mindenütt nulla. Felületi töltéssűrűség azonban lehetséges. Ha a fémet  $\epsilon$  permittivitású dielektrikumba ágyazzuk, akkor a felületi töltéssűrűség nagysága

$$\sigma = D = \epsilon E. \quad (65)$$

(A  $\vec{D}$  és az  $\vec{E}$  a fémfelületen normális irányú, ezért  $D = D_n$ ,  $E = E_n$ .) Speciálisan a vákuummal határos fémfelületen  $\sigma = \epsilon_0 E$ . A (65) képletet a 4.ábra segítségével igazolhatjuk, ha — a már jól ismert módon — a  $\Delta\Omega$  térfogatra alkalmazzuk a Gauss-tételt. A (65) következtében a fémfelületre ható nyomás az  $\frac{\sigma E}{2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon}$  képletekkel is kiszámítható.

29.Feladat:  $q$  nagyságú ponttöltést helyezünk el végtelen kiterjedésűnek tekinthető fémfelülettől  $a$  távolságra. Határozzuk meg az elektromos mezőt és a ponttöltésre ható Coulomb-erőt.

Megoldás: A fémfelület legyen az  $xy$  sík, a ponttöltést pedig rögzítsük a  $z$ -tengelyen a  $z = a$  pontban.

Az elektromos mező csak a  $z > 0$  féltérben különbözik zérustól, ahol a

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} &= q\delta(\vec{r} - a \cdot \vec{e}_z) \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \end{aligned} \quad (z > 0) \quad (66)$$

egyenleteknek, az  $xy$ -síkban pedig az

$$E_x = E_y = 0 \quad (z = 0) \quad (67)$$

határfeltételeknek tesz eleget.

Vegyük észre, hogy ezeknek az egyenleteknek ill. feltételeknek egy *másik* elektrosztatikai feladat is eleget tesz, amelyet úgy kapunk, hogy a fémet eltávolítjuk, és helyette a  $z$ -tengely  $z = -a$  pontjában egy  $-q$  ponttöltést helyezünk el (*tükörtöltés*). Nyilvánvaló, hogy  $a > 0$  féltérben változatlanul a (66) egyenletek érvényesek, és a feladat szimmetriája miatt a (67) feltételek is teljesülnek.

Az új feladat megoldása nagyon könnyű, mert ponttöltések tereinek a szuperpozíciója:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{x^2 + y^2 + (z - a)^2} \vec{e} - \frac{1}{x^2 + y^2 + (z + a)^2} \vec{e}' \right], \quad (68)$$

ahol  $\vec{e}$  a  $q$ -ból,  $\vec{e}'$  pedig a  $-q$ -ból az  $\vec{r}(x, y, z)$  megfigyelési pontba mutató egységvektor:

<sup>9</sup>Dielektrikumba ágyazott fém esetében ebben a képletben  $\epsilon_0$ -t  $\epsilon$ -al kell helyettesíteni.

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a)^2}}(x, y, z - a)$$

$$\vec{e}' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a)^2}}(x, y, z + a).$$

Az új feladatban (68) mindenütt érvényes, az eredeti feladatban csak a  $z > 0$  féltérben, mert a másik féltérben  $\vec{E} = 0$ .

Ha a (68)-ban az  $\vec{r}$  megfigyelési pontot a  $z = 0$  síkban választjuk, akkor azt találjuk, hogy itt  $E_x = E_y = 0$ , és

$$E_z = E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(r^2 + a^2)}(e_z - e'_z) = -\frac{aq}{2\pi\epsilon_0(r^2 + a^2)^{3/2}},$$

ahol  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Így

$$\sigma = \epsilon_0 E = -\frac{aq}{2\pi(r^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Ennek a képletnek a segítségével könnyen kiszámíthatjuk a fémfelületre ható nyomást.

A fémfelület  $Q$  össztöltése  $-q$ -val egyenlő:

$$Q = 2\pi \int_0^\infty dr \cdot r\sigma = -aq \int_0^\infty \frac{r \cdot dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}aq \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi + a^2)^{3/2}} = aq \frac{1}{\sqrt{\xi + a^2}} \Big|_0^\infty = -q.$$

A  $q$ -ponttöltésre a  $\sigma$  töltéssűrűségnek az elektromos tere hat pontosan akkora erővel, amekkora Coulomb-erővel hat rá a fiktív tükörtöltés. Descartes-komponensekben

$$\vec{F} = -\frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 a^2}(0, 0, 1). \clubsuit$$

30.Feladat: Tekintsünk egy síkkondenzátort, amelynek  $q > 0$  töltésű lemeze az  $xy$  sík  $0 < x < b$ ,  $0 < y < c$  része,  $-q$  töltésű lemeze pedig a  $z = d$  sík ugyanezen része. A kondenzátor  $x < \xi$  tartományát  $\epsilon$  permittivitású dielektrikum tölti ki, az  $x > \xi$  tartományban vákuum van. Tegyük fel, hogy  $d \ll \xi \ll b$ ,  $c$  és ezért a széleffektusoktól eltekinthetünk. Határozzuk meg a térerősséget és a töltéssűrűséget.

Megoldás: A kondenzátorban a térerősség konstans  $z$ -irányú vektor:

$$\vec{E} = (0, 0, \mathcal{E}) \quad (\mathcal{E} = \text{konstans}).$$

Egy ilyen mező nyilvánvalóan eleget tesz az alapegyenleteknek és kielégíti az ugrás-feltételeket is: a lemezeken normál irányú, a dielektrikumot a vákuumtól elválasztó felületen ( $x = \xi$ -nél) pedig a tangenciális komponense folytonos. A (65) következtében a pozitív lemezen a töltéssűrűség

$$\sigma = \begin{cases} \epsilon \mathcal{E} & \text{ha } 0 < x < \xi \\ \epsilon_0 \mathcal{E} & \text{ha } \xi < x < b, \end{cases}$$

amelyhez

$$q = c \cdot \xi \cdot \epsilon \mathcal{E} + c \cdot (b - \xi) \epsilon_0 \mathcal{E}$$

össztöltés tartozik. Ez az érték adott, ezért

$$\mathcal{E} = \frac{q}{c[\epsilon \xi + \epsilon_0(b - \xi)]}, \quad (69)$$

és a kondenzátor feszültsége

$$V = \mathcal{E}d = \frac{qd}{c[\epsilon \xi + \epsilon_0(b - \xi)]}. \clubsuit \quad (70)$$

31.Feladat: Ugyanaz, mint előbb, azzal a különbséggel, hogy  $q$  helyett a  $V$  feszültség van megadva.

Megoldás: Az előző feladatban a kondenzátort feltöltés után lekapcsoltuk a tápegységről, ezért volt a töltése állandó. Most rajta hagyjuk a  $V$  feszültségű tápegységen, ezért  $\mathcal{E} = \frac{V}{d}$  lesz állandó, a  $q$  pedig a (70) szerint függni fog  $\xi$ -től:

$$q = \frac{c}{d} V [\epsilon \xi + \epsilon_0(b - \xi)].$$

Ezt a két feladatot később folytatjuk a dielektrikumra ható erő számításával. ♣

32.Feladat: Fémgömböt (külső) homogén elektromos mezőbe helyezünk. Határozzuk meg a térerősségeket és a polarizációs töltéssűrűséget.

Megoldás: Dielektromos gömbre ezt a feladatot már megoldottuk (28.feladat). Hogyan lehetne ez utóbbi feladat megoldását fémgömb esetére alkalmazni?

A fémek alaptulajdonsága az, hogy a térerősség bennük (sztatikus esetben) zérus, ezért egy dielektrikum annál jobban hasonlít a fémhez, minél könnyebben polarizálható. Ez az  $\epsilon \rightarrow \infty$  határesetnek felel meg, ha a  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  egyenletben közben  $\vec{D}$ -t állandónak tartjuk; ekkor ugyanis  $\epsilon \rightarrow \infty$ -vel egyszerre  $E \rightarrow 0$ .

Ennek az észrevételnek az alapján feladatunk megoldását leolvashatjuk (62), (63) és (64)  $\epsilon_r \rightarrow \infty$  határesetéből. A gömbön kívül az elektromos tér

$$\vec{E} = \left[ 1 - \frac{R^3}{r^3} \right] \mathcal{E} \vec{e}_z + 3 \frac{R^3}{r^3} \mathcal{E} \cos \vartheta \cdot \vec{e}_r,$$

a polarizációs töltéssűrűség

$$\sigma = 3\epsilon_0 \mathcal{E} \cos \vartheta,$$

az indukált töltéssűrűség dipólnyomatéka pedig

$$\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 R^3 \vec{\mathcal{E}}.$$

A depolarizációs tér a gömbben nyilván  $-\vec{\mathcal{E}}$ -vel egyenlő.♣

\*\*\*

Az elektrosztatikai feladatokat ezzel lezárjuk és áttérünk a magnetosztatikára.

## 2.13 A mágneses mező

Vegyünk két egymástól  $\rho$  távolságra lévő végtelen hosszúnak tekinthető vezetőt, amelyekben  $I_1$  és  $I_2$  áram folyik. A tapasztalat szerint a vezetők erőt gyakorolnak egymásra: mindkét vezető egységnyi hosszúságú szakaszára ható erő az áramerősségek szorzatával egyenesen, a  $\rho$  távolsággal fordítottan arányos:

$$\frac{F}{l} \sim \frac{I_1 I_2}{\rho}. \quad (71)$$

Ha az áramok egyirányúak, az erő vonzó, ha ellenkező irányúak, akkor taszító.

Erre az erőre alapozzuk az áramerősség egységének a megválasztását. A legegyszerűbb az volna, ha (71)-ben az arányosság helyébe egyenlőséget íránk. Ebben az esetben egységnyinek tekintenénk egy végtelen lineáris vezetőben folyó áramot, ha a vele párhuzamosan, tőle  $1m$  távolságra lévő ugyanolyan erősségű árammal átfolyt vezető minden  $1m$  hosszú szakaszára  $1N$  erővel hatna.

Az áramerősség így definiált egysége azonban a gyakorlati elektrotechnikai alkalmazások szempontjából túl nagy lenne, ezért az ampert (A) abból a követelményből választják meg, hogy két  $1A$  erősségű lineáris áram egységnyi szakaszára — definíció szerint — ne  $1N$ , hanem csak  $2 \cdot 10^{-7} N$  erő hasson. Ennek megfelelően a (71)-t egyenlőségként így kell felírni:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_1 I_2}{\rho}, \quad (72)$$

ahol<sup>10</sup>

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2}.$$

Vegyük észre, hogy míg  $\mu_0$  értékét mérés nélkül, az amper *definíciója* alapján választottuk meg, addig az 1.fejezetben  $\epsilon_0$  értékének a megadásánál a tapasztalatra (mérésre) kellett hivatkoznunk: az  $\epsilon_0$  és a  $\mu_0$  közül csak az egyik választható szabadon.

---

<sup>10</sup>  $\mu_0$ -t a *vákuum permeabilitásának* nevezik.

Logikus feltételezni, hogy az elektromos töltések kölcsönhatásához hasonlóan az áramok egymásra hatása is közelhatás eredménye, amelyet szintén egy mező — a *mágneses mező* vagy mágneses tér — közvetít. Ha a (72)-t — mondjuk — az 1.vezetőre ható erőnek tekintjük, akkor

$$\frac{F}{l} = \mu_0 I_1 H \quad (73)$$

-ként foghatjuk fel (*Ampère törvény*). A  $H$  a 2.vezető által az 1.vezető helyén létrehozott mágneses mező, amelyet a

$$H = \frac{I_2}{2\pi\rho} \quad (74)$$

formula határoz meg (*Biot-Savart törvény*). Ez a felbontás természetesen erősen intuitív és — különösen ami a 2-s faktort illeti — későbbi, részletesebb ismeretet, az Ampère-törvény és a Biot-Savart törvény pontos alakjának az ismeretét tételezi fel. Ezt a pontos alakot természetesen olyan kísérletekből dedukálták, amelyeket különféle geometriai elrendezésű vezetőkkel végeztek. A vezetők között ható erő empirikus formulájának a két tényezőre választása persze mindenképpen tartalmaz bizonyos önkényt, amelyet csak az elmélet egészébe való természetes beilleszkedés igazolhat.

Az Ampère-törvény azt az erőt adja meg, amely a  $\vec{H}$  mágneses mezőben hat egy  $I$  áramerősségű áram által átfolyt lineáris vezető  $d\vec{l}$  szakaszára<sup>11</sup>:

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \mu_0\vec{H}). \quad (75)$$

A Biot-Savart törvény azt mondja meg, hogy egy  $I$  áramerősségű lineáris vezető  $d\vec{l}'$  szakasza milyen mágneses mezőt hoz létre a tér  $\vec{r}$  pontjában:

$$d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi R^3}(d\vec{l}' \times \vec{R}). \quad (76)$$

A képletben  $\vec{R}$  a  $d\vec{l}'$  szakaszt az  $\vec{r}$ -el összekötő  $\vec{r}$ -be mutató vektor, és  $R = |\vec{R}|$ .

Mindenekelőtt azt kell megmutatnunk, hogy amikor két végtelen hosszúnak tekinthető, párhuzamos, egymástól  $\rho$  távolságra lévő vezetőre alkalmazzuk ezeket a képleteket, a (73)-t és a (74)-t kapjuk vissza.

Vegyük fel a koord. rendszert úgy, hogy a 2.vezető az  $x$ -tengelybe esik és  $I_2$  iránya a pozitív  $x$ -irány. Az  $xy$  sík legyen a két párhuzamos vezető síkja, és az 1.vezető az  $y = \rho$  pontban messe az  $y$ -tengelyt.

Számítsuk ki a 2.vezető által az 1.vezető  $x = 0$ ,  $y = \rho$  koordinátájú  $P$  pontjában létrehozott mágneses mezőt. Alkalmazzuk (76)-t az 2.vezető  $(x, x + dx)$  szakaszára, amelyre

$$d\vec{l}' = (dx, 0, 0),$$

<sup>11</sup>A  $\mu_0\vec{H}$  szorzat helyett gyakran használják már a vákuum magnetosztatikájában is a  $\vec{B}$  indukcióvektort. Ebben a jegyzetben az indukciót csak a közegek magnetosztatikájában vezetjük be, de a vákuum magnetosztatikájában is  $\mu_0\vec{H}$  szorzatot írunk azokon a helyeken, ahol közegekben  $\vec{B}$  fog állni.

$$\vec{R} = (-x, \rho, 0),$$

$$R = \sqrt{x^2 + \rho^2},$$

$$(\vec{dl}' \times \vec{R}) = (0, 0, \rho \cdot dx).$$

A szuperpozíció-elvet  $\vec{H}$ -ra is feltételezve azt találjuk, hogy a teljes 1.vezető által az  $x = 0$ ,  $y = \rho$  pontban létrehozott mágneses mező  $z$ -irányú, és a nagysága

$$H = H_z = \frac{I_2 \rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

Az integrál az  $x = \rho \cdot \sinh \alpha$  helyettesítéssel számítható ki, amelyből  $dx = \rho \cdot \cosh \alpha \cdot d\alpha$ , valamint  $x^2 + \rho^2 = \rho^2 \cdot \cosh^2 \alpha$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} = \frac{1}{\rho^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{\cosh^2 \alpha} = \frac{1}{\rho^2} [\tanh \alpha] \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{\rho^2},$$

ezért

$$H = \frac{I_2}{2\pi\rho}, \quad (77)$$

a (74)-el összhangban. Az  $x$ -irányú translációs szimmetriából világos, hogy az 1.vezető *minden* pontjában ugyanekkora a mágneses mező. Vegyük észre, hogy a 2.vezetőre történő integrálás hozza be azt a 2-s faktort, amit — éppen emiatt — célszerű az amper definíciójába belefoglalni.

Számítsuk most ki az 1.vezető  $P$  pontja körüli  $\vec{dl}$  szakaszra ható erőt (75) alapján:

$$\vec{H} = (0, 0, H), \quad \vec{dl} = (dx, 0, 0),$$

$$(\vec{dl} \times \mu_0 \vec{H}) = (0, -\mu_0 H \cdot dx, 0),$$

és így az 1.vezető egységnyi hosszú szakaszára ható erő

$$\frac{d\vec{F}}{dx} = I_1 \cdot (0, -\mu_0 H, 0).$$

Ez az erő a 2.vezető felé mutat (ha  $I_1$  és  $I_2$  azonos irányú) és nagysága

$$\frac{dF}{dx} = \mu_0 I_1 H,$$

a (73)-al összhangban. Ha  $H$ -t (77)-ből ide behelyettesítjük, visszakapjuk (72)-t, amely gondolatmenetünk kiindulópontja volt.

## 2.14 A Lorentz-erő

Lorentz-erőnek az elektromágneses mezőben a ponttöltésre ható erő erőtvényét nevezzük<sup>12</sup>:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \mu_0\vec{H}). \quad (78)$$

Itt  $\vec{v}$  a test sebessége,  $\vec{E}$  és  $\vec{H}$  a mezők értéke a ponttöltés helyén.

A Lorentz-erő második tagját abból lehet kikövetkeztetni, hogy lineáris vezető esetén ez a tag az Ampère-törvényre vezet. Valóban, tegyük fel, hogy az áramot  $q$  töltésű,  $v = konst$  sebességű ponttöltések mozgása hozza létre, amelyek sűrűsége a vezető mentén  $n$  méter<sup>-1</sup>:  $I = nqv$ . A vezető  $dl$  hosszúságú szakaszán a ponttöltések száma  $dn = n \cdot dl$ , ezért (78) szerint mágneses mezőben erre a szakaszra

$$dn \cdot q(\vec{v} \times \mu_0\vec{H}) = n \cdot q(\vec{v} \cdot dl \times \mu_0\vec{H}) = nqv(\vec{dl} \times \mu_0\vec{H}) = I(\vec{dl} \times \mu_0\vec{H})$$

erő hat az Ampère-törvénnyel összhangban (a levezetésnél kihasználtuk, hogy a  $dl$  szakasz iránya a sebesség irányával egyezik meg:  $\vec{v}dl = v\vec{dl}$ ).

## 2.15 A mágneses mezőnek nincs töltés jellegű forrása

A tapasztalat szerint a mágneses térnek nincsenek forrásai abban az értelemben, ahogy az elektromos töltések az elektromos mező forrásai. Mint láttuk, az elektromos mező erővonalai mintegy "kiáramlanak" a tér azon pontjaiból, amelyekben pozitív ponttöltés van, és "beáramlanak" azokba a pontokba, amelyeket negatív ponttöltések foglalnak el. A ponttöltés nagyságát az erővonalak (az elektromos mező) fluxusa határozza meg a Gauss-tételen keresztül. Mágneses töltések (*monopólusok*) azonban a természetben — úgy látszik, — nem fordulnak elő. Matematikailag ezt a tapasztalati tényt a

$$\boxed{\operatorname{div} \mu_0\vec{H} = 0} \quad (79)$$

egyenletben foglalhatjuk össze, amely a magnetosztatika 1. alapegyenlete vákuumban és egyben az egyik Maxwell-egyenlet is.

A divergenciamentes vektormezőket *szolenoidálisnak* is nevezik. A szolenoidális vektormezők erővonalai önmagukba záródnak vagy a végtelenbe távoznak.

## 2.16 A mágneses mező és az áramsűrűség kapcsolata

Ezt a kapcsolatot az (76) Biot-Savart törvény tartalmazza, amely *nem lokális*: a mágneses mező *itt* attól függ, hogy milyen az áram *ott*. Célszerű a kapcsolat *lokális* alakjának a felderítése, amelynek azt kell megmutatnia, hogyan függ össze a tér adott pontjában adott pillanatban a mágneses mező és az áramsűrűség.

<sup>12</sup>Eszert a definíció szerint a Coulomb-erő a Lorentz-erő része. Gyakran azonban Lorentz-erőn a (78) második tagját értik.



Az áramsűrűség definíciója a következő:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t). \quad (80)$$

Itt a  $\rho(\vec{r}, t)$  skalármező a töltéssűrűség, a  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  vektormező pedig a töltéssűrűség áramlási sebessége az  $\vec{r}$  pontban a  $t$ -pillanatban.

Legyen  $d\vec{\Sigma}$  egy  $\vec{n}$  normálvektorú  $d\Sigma$  nagyságú infinitezimális felületelem, amely tartalmazza az  $\vec{r}$  pontot. A  $(t, t + dt)$  intervallumban a  $d\vec{\Sigma}$ -n átáramló töltés mennyiségét a

$$dq = J(\vec{r}, t) \cos \vartheta \cdot d\Sigma \cdot dt = (\vec{J}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{\Sigma}) dt$$

képlet határozza meg, amelyben  $\vartheta$  a  $\vec{J}$  és az  $\vec{n}$  által bezárt szög. Ez az összefüggés világítja meg az áramsűrűség fizikai jelentését.

Megjegyezzük, hogy az áramsűrűség általában egynél több (80) típusú tag összege. A fémekben pl.

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \rho_e(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}_e(\vec{r}, t) + \rho_i(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}_i(\vec{r}, t),$$

a szabad elektronok és a fémionok áramsűrűségeinek összege. A fémionok azonban rácsponthoz kötöttek, ezért nyugvó fémekben  $\vec{v}_i = 0$ , és az áramsűrűség egytagúvá válik. Ez magyarázza, hogy a fémekben úgy folyik áram, hogy közben a teljes töltéssűrűség zérus ( $\rho_e + \rho_i = 0$ ).

A mágneses mező és az áramsűrűség lokális kapcsolatát a

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (81)$$

egyenlet fejezi ki, amely a magnetosztatika 2. alapegyenlete (de nem Maxwell-egyenlet, mert csak akkor érvényes, ha a terek nem változnak az időben). Ennek az egyenletnek a struktúrája alapján az áramsűrűség a mágneses mező forrásának tekinthető, de természetesen egyáltalán nem abban az értelemben, ahogy a töltéssűrűség az elektromos mező forrása: a mágneses mező erővonalai — mivel zártak — nem keletkezhetnek az áramsűrűségben, hanem körülölelik azt. A (81) és az 1. Poincaré-azonosság következtében  $\text{div } \vec{J} = 0$ , az áramsűrűség a magnetosztatikában szolenoidális vektormező.

Alább a 2. alapegyenlet igazolásaként a két alapegyenletből levezetjük a Biot-Savart törvényt. Előbb azonban — az elektrosztatikához hasonlóan — Poisson-egyenletté alakítjuk őket.

## 2.17 A vektorpotenciál

A (79) alapegyenletet az 1. Poincaré-azonosság megfordíthatósága következtében azonosan kielégíthetjük, ha a mágneses mezőt az  $\vec{A}$  vektorpotenciál rotációjaként fejezzük ki:

$$\mu_0 \vec{H} = \text{rot } \vec{A}. \quad (82)$$

Mind az  $\vec{E}$ , mind a  $\vec{H}$  esetében láttuk, hogy egy vektormezőt (a végtelenben megkövetelt eltűnés mellett) *két* egyenlet határoz meg: meg kell adnunk a vektormezőnek mind a divergenciáját, mind a rotációját. Ezért ha adott  $\vec{H}$ -hoz *egyértelműen* vektorpotenciált akarunk hozzárendelni, a (82) nem elegendő<sup>13</sup>, elő kell még írunk az  $\vec{A}$  divergenciáját is. Mivel a vektorpotenciál segédmenyiség, amely maga nem határozható meg a saját erőhatása alapján (csak az  $\vec{A}$ -ból számított  $\vec{H}$  az, ami az erőhatása alapján mérhető), ezért a divergenciáját önkényesen írhatjuk elő. A sugárzási feladatok szempontjából a

$$\operatorname{div} \vec{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (83)$$

választás bizonyul majd célszerűnek, amely a sztatikus feladatoknál a

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (84)$$

egyenletre redukálódik. A (82) és a (84) már egyértelműen meghatározza a vektorpotenciált azon természetes peremfeltétel mellett, hogy véges kiterjedésű rendszereknél a végtelenben tartson zérushoz.

Most már meg tudjuk mutatni, hogy a vektorpotenciál minden komponense egy-egy Poisson-egyenletnek tesz eleget, amelynek jobboldalán az áramsűrűség megfelelő komponensének  $-\mu_0$ -szorososa áll. Ehhez a

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{V} = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}. \quad (85)$$

egyenletet használjuk fel, amely Descartes-komponensekben nagyon könnyen igazolható. Speciálisan a vektorpotenciálra ez az egyenlet (84) következtében a

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A}$$

összefüggésre redukálódik. Ezért ha (82) mindkét oldalának a rotációját vesszük, és felhasználjuk (81)-t is, a keresett

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \quad (86)$$

vektoriális Poisson-egyenletre jutunk, amely egyenértékű a magnetosztatika két alap-egyenletével.

A (86) a három

$$\nabla^2 A_i = -\mu_0 J_i \quad (i = 1, 2, 3, \text{ vagy } x, y, z)$$

egymástól független Poisson-egyenlet vektoriális alakja, amelyek mindegyikére alkalmazható a (25) megoldó képlet, amely szerint

$$A_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\Omega' \frac{J_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (87)$$

<sup>13</sup>Ez a 2.4 fejezetből is kiderül: a (82) csak egy tetszőleges függvény gradienseként az erejéig határozza meg  $\vec{A}$ -t.

Vektoriális formában ugyanez:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\Omega' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (88)$$

A Biot-Savart törvény ennek az egyenletnek a következménye. Vegyük ui. mindkét oldal rotációját:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \cdot \text{rot } \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

A  $\text{rot}$ -t azért vihettük be az integráljel alá, mert nem az  $\vec{r}'$  integrációs változóra, hanem  $\vec{r}$ -re hat. A  $\text{rot}$  az  $S = |\vec{r}' - \vec{r}|^{-1}$  skalármező és a  $\vec{J}(\vec{r}')$  vektormező szorzatára hat, ezért a

$$\text{rot}(S\vec{V}) = S\text{rot}\vec{V} + \text{grad}S \times \vec{V}$$

képletet kell alkalmazni, amely a 2.7 fejezetben tanult módszerrel igazolható. De  $\text{rot}\vec{J}(\vec{r}') = 0$ , ezért

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{J}(\vec{r}') = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \times \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3}, \end{aligned} \quad (89)$$

ahol  $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ . Ha az áramsűrűség csak egy lineáris vezetőkön belül nem zérus, akkor  $d\Omega' \cdot \vec{J}(\vec{r}') = d\vec{l}' \cdot I$  és (89) azt fejezi, hogy az  $\vec{r}$  megfigyelési pontban a mágneses mező a kontúr elemi szakaszaiból pontosan a Biot-Savart törvény alapján származtatott mágneses mezők vektoriális összege.

## 2.18 A magnetosztatika egyenletei integrális formában

Integráljuk (81)-t egy  $\Sigma$  felületre, amelynek határa az  $l$  zárt kontúr:

$$\int (\text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{\Sigma}) = \int (\vec{J} \cdot d\vec{\Sigma}).$$

A baloldal a Stokes-tétel alapján a  $\vec{H}$  cirkulációja  $l$ -n, a jobboldal pedig a  $\Sigma$ -n áthaladó  $I$  áram:

$$\oint (\vec{H} \cdot d\vec{l}) = I. \quad (90)$$

A mágneses mező cirkulációja a zárt kontúr által határolt áramerősséggel egyezik meg: ez a magnetosztatika 2.alapegyenletének integrális alakja. Az 1.alapegyenlet integrális alakja

$$\int_{\Sigma} (\vec{H} \cdot d\vec{\Sigma}) = 0,$$

ahol  $\Sigma$  *zárt* felület: a mágneses mező fluxusa minden zárt felületen keresztül zérus.

33.Feladat: Vezessük le (77)-t újra a (90) segítségével.

Megoldás: A  $\Sigma$  (nem zárt) felület legyen a lineáris áramvezetőre merőleges  $\rho$  sugarú körlap, amelyet a vezető a középpontban metsz. A  $z$ -tengely essen egybe a vezetővel, a pozitív irány az áramiránnyal. A  $\Sigma$  határát képező  $l$  körön  $\vec{H}$  a Biot-Savart törvény alapján érinti a  $\Sigma$  határát képező  $l$  kört és a hengerszimmetria miatt nagysága mindenütt ugyanaz a  $H$ :  $(H_\rho, H_\varphi, H_z) = (0, H, 0)$ . Mivel

$$\vec{dl} = (dl_\rho, dl_\varphi, dl_z) = (0, \rho d\varphi, 0),$$

ezért

$$(\vec{H} \cdot \vec{dl}) = H\rho d\varphi,$$

$$\oint (\vec{H} \cdot \vec{dl}) = \int_0^{2\pi} H\rho d\varphi = 2\pi\rho H,$$

tehát

$$H = \frac{I}{2\pi\rho}, \quad (91)$$

a (77)-el összhangban.♣

## 2.19 A mágneses dipól

Egy áramokat magába foglaló rendszer *mágneses dipólnyomatékának* az

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int d\Omega \cdot (\vec{r} \times \vec{J}) \quad (92)$$

vektort nevezzük. Ez a képlet a (33) mágneses megfelelője.

A mágneses dipólnyomaték az áramsűrűség origóra vonatkoztatott nyomatékának a fele. Azonban annak következtében, hogy a magnetosztatikában az áramsűrűség divergenciamentes,  $\vec{m}$  valójában nem függ a vonatkoztatási pont megválasztásától, és ezért éppen olyan "belső" jellemzője az áramrendszernek, mint amilyen "belső" jellemzője az elektromos dipólnyomaték a zérus össztöltésű töltésrendszereknek.

Valóban, az  $\vec{a}$ -ra vonatkoztatott mágneses dipólnyomaték

$$\vec{m}' = \frac{1}{2} \int d\Omega \cdot ((\vec{r}' - \vec{a}) \times \vec{J}) = \vec{m} - \frac{1}{2} (\vec{a} \times \int d\Omega \cdot \vec{J})$$

$\vec{m}$ -el egyenlő, mert  $\vec{J}$  integrálja zérus. Legyen  $\vec{\nu}$  önkényes irányú egységvektor. Az integrál  $\nu$  komponense a következőképpen alakítható:

$$\int d\Omega \cdot J_\nu = \int d\Omega \cdot (\vec{\nu} \cdot \vec{J}) = \int d\Omega (\vec{\nabla}(\vec{\nu} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{J}) = (29) = - \int d\Omega \cdot (\vec{\nu} \cdot \vec{r})(\vec{\nabla} \cdot \vec{J}),$$

és  $\vec{J}$  divergenciamentessége miatt ez valóban zérus.

34.Feladat: Számítsuk ki egy  $I$  áram által átfolyt zárt lineáris vezető mágneses dipólnyomatékát.

Megoldás: Lineáris vezetőre (92) értelemszerűen a következő:

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint (\vec{r} \times d\vec{l}),$$

amelynek  $\nu$  komponense

$$m_\nu = (\vec{\nu} \cdot \vec{m}) = \frac{I}{2} \oint (\vec{\nu} \cdot (\vec{r} \times d\vec{l})) = \frac{I}{2} \oint ((\vec{\nu} \times \vec{r}) \cdot d\vec{l}) = \frac{I}{2} \int_\Sigma \text{rot}(\vec{\nu} \times \vec{r}) \cdot d\vec{\Sigma},$$

ahol  $\Sigma$  a kontúr által határolt felület (az utolsó lépésben a Stokes-tételt alkalmaztuk).

A 7.fejezetben ismertetett eljárással beláthatjuk, hogy

$$\text{rot}(\vec{U} \times \vec{V}) = (\vec{V} \cdot \text{grad})\vec{U} - (\vec{U} \cdot \text{grad})\vec{V} + \text{div}\vec{V} \cdot \vec{U} - \text{div}\vec{U} \cdot \vec{V},$$

amelynek alapján  $\text{rot}(\vec{\nu} \times \vec{r}) = 2\vec{\nu}$ , így

$$m_\nu = I \cdot (\vec{\nu} \cdot \int_\Sigma d\vec{\Sigma}),$$

azaz

$$\vec{m} = I \int_\Sigma d\vec{\Sigma}.$$

Síkkontúrra  $d\vec{\Sigma} = \vec{n} \cdot d\Sigma$ , ahol  $\vec{n}$  a kontúr síkjára a jobbkézszabálynak megfelelően állított normálvektor. Ezért ebben az esetben

$$\vec{m} = I \cdot S \cdot \vec{n}, \quad (93)$$

ahol  $S$  a kontúr által határolt terület. Speciálisan  $a$  sugarú köráramra  $\vec{m} = I \cdot a^2 \pi \cdot \vec{n}$ .♣

Áttérünk a *pontszerű* mágneses dipól tárgyalására. A pontszerű elektromos dipól tárgyalásával analóg eljárás az volna, ha megadnánk a pontszerű mágneses dipól áram-sűrűségét, és ezt (89)-be írva kiszámítanánk a mágneses terét. Ez az eljárás azonban technikailag bonyolultabb, mint az elektromos dipól esetében, ezért más utat követünk: a kis köráram tulajdonságaiból származtatjuk le a pontszerű mágneses dipól vektorpotenciálját és mágneses terét<sup>14</sup>.

35.Feladat: Határozzuk meg a kis köráram mágneses terét a köráramtól nagy távolságra.

<sup>14</sup>Azok számára, akik a másik utat is kipróbálnák, segítségül megadjuk az  $\vec{m}$  pontszerű mágneses dipól áram-sűrűségét:  $\vec{J}_m = \text{rot}(\vec{m} \cdot \delta(\vec{r}))$ , amely (40) mágneses megfelelője.

Megoldás: Legyen a köráram  $a$ -sugarú kör az  $xy$  síkban az origóval, mint középponttal. A megfigyelési pont legyen  $\vec{r}$  és legyen az  $xz$  síkban:  $\vec{r} = (x, 0, z) = (r \cdot \sin \alpha, 0, r \cdot \cos \alpha)$ . A feladat szerint  $r \gg a$ .

Első lépésben a köráram vektorpotenciálját számítjuk ki (88) segítségével. Az integrálás a körvezető térfogatára terjed ki, ezért

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I \cdot d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

ahol

$$\vec{r}' = (x', y', z') = (a \cdot \cos \varphi', a \cdot \sin \varphi', 0), \quad r' = a$$

valamint

$$d\vec{l}' \equiv d\vec{r}' = (dl'_x, dl'_y, dl'_z) = (-a \cdot \sin \varphi', a \cdot \cos \varphi', 0) \cdot d\varphi'.$$

Az  $\vec{r}$  és a  $\vec{r}'$  által bezárt szöget jelöljük  $\vartheta$ -val:

$$\cos \vartheta = \frac{1}{r \cdot a} (\vec{r} \cdot \vec{r}') = \cos \varphi' \cdot \sin \alpha.$$

Az  $r \gg a$  következtében az  $a/r$  kis mennyiségben lineáris pontossággal

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ra \cos \vartheta}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{r} \cos \vartheta + \frac{a^2}{r^2}}} \approx \\ &\approx \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{r} \cos \vartheta}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \vartheta\right) = \left(1 + \frac{a}{r} \cos \varphi' \cdot \sin \alpha\right), \end{aligned}$$

és így

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint \left(1 + \frac{a}{r} \cos \varphi' \cdot \sin \alpha\right) \cdot d\vec{l}'.$$

Komponensekben:

$$\begin{aligned} A_x(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \varphi' \cdot \sin \alpha\right) (-a \cdot \sin \varphi') d\varphi' = 0 \\ A_y(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \varphi' \cdot \sin \alpha\right) (+a \cdot \cos \varphi') d\varphi' = \frac{\mu_0 I \cdot a^2 \pi}{4\pi r^2} \sin \alpha \\ A_z(\vec{r}) &= 0. \end{aligned}$$

A köráram (93) mágneses dipólnyomatékának felhasználásával ezek a képletek így foglalhatók össze:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (\vec{m} \times \vec{r}),$$

ami

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \vec{m} \times \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right)$$

alakban is felírható.

A következő lépés  $\vec{H}$  kiszámítása  $\vec{A}$ -ból:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \text{rot} \left( \vec{m} \times \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right).$$

A  $\text{rot} (\vec{U} \times \vec{V})$  fentebb már idézett képlete szerint  $\vec{m} = \text{konstans}$  miatt

$$\text{rot} \left( \vec{m} \times \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = \vec{m} \cdot \nabla^2 \frac{1}{r} - (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \frac{1}{r}.$$

Mivel számításunk az origó környékére nem vonatkozik ( $r \gg a$ ), az első tag (24) alapján zérus. A második tagban felcseréljük a differenciálások sorrendjét:

$$\text{rot} \left( \vec{m} \times \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = -\vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} = \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3} \right),$$

tehát

$$\vec{H}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (r \gg a).$$

A gradiens mögött a pontszerű (elektromos) dipól (42) potenciálja szerepel, ha benne  $\frac{1}{\epsilon_0} \vec{p}$ -t  $\vec{m}$ -el helyettesítjük. Ezért (43)-ból

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{4\pi r^5}, \quad (94)$$

vagyis a köráram mágneses tere a köráramtól távol dipóltér. Ez a tény indokolja — utólag — a mágneses dipólnyomaték elnevezést. ♣

*Pontszerű mágneses dipólnak* az olyan pontszerű objektumot nevezzük, amelynek mágneses terét minden  $r > 0$ -nál (94) adja meg. A pontszerű mágneses dipólt olyan kis köráramnak képzelhetjük el, amelynek a sugara nullához, az áramerőssége végtelenhez tart úgy, hogy a mágneses nyomatéka állandó. A mágneses dipólról ható erőt és forgatónyomatékat az elektromos dipólról vonatkozó megfelelő képletek mintájára írhatjuk fel  $\vec{p} \rightarrow \vec{m}$ ,  $\vec{E} \rightarrow \mu_0 \vec{H}$  helyettesítéssel.

A ponttöltésekből álló egyszerű dipólt gyakran *Coulomb-dipólnak*, a köráramból állót *Ampère-dipólnak* nevezik.

## 2.20 Polarizálható közegek magnetosztatikája

A mágnesezhető anyagok tárgyalását az elektromosan polarizálható közegekkel való hasonlóságokra alapozzuk. A dielektrikumok elektrosztatikájának lényeges vonása,

hogy az  $\vec{E}$  mellett bevezetjük a  $\vec{D}$  eltolási vektort is, amely a divergenciát tartalmazó egyenletben kerül  $\vec{E}$  helyébe. A  $\vec{D}$  és az  $\vec{E}$  — a triviális  $\epsilon_0$  faktortól eltekintve, — a közeg polarizációja következtében különbözik egymástól:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}.$$

Az ismeretlenek számának a megnövekedése még egy egyenletet követel: ez az anyagi egyenlet, amely a  $\vec{P}$ -nek az  $\vec{E}$ -től való függését rögzíti.

Alkalmazzuk most ugyanezt a gondolatmenetet a mágnesesen polarizálható közegekre. Bevezetjük a  $\vec{B}$  mágneses indukciót, amely vákuumban arányos a  $\vec{H}$  térerősséggel:  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , és az alapegyenleteket

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (95)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \quad (96)$$

alakban írjuk fel. Közegekben a  $\vec{B} - \mu_0 \vec{H}$  különbség a polarizáció következtében már nem nulla. Erre a különbségre a  $\mu_0 \vec{M}$  jelölést vezetjük be, amelyben  $\vec{M}$  a (*mágneses polarizációs vektor*).<sup>15</sup> Eszerint

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}). \quad (97)$$

Az anyagi egyenletet posztuláljuk megint az  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$  lineáris formában ( $\chi_m$  a *mágneses szuszceptibilitás*). A (97) figyelembevételével

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (98)$$

ahol  $\mu = \mu_0 \mu_r = \mu_0 (1 + \chi_m)$  a *mágneses permeabilitás*,  $\mu_r$  pedig a relatív mágneses permeabilitás. Vákuumban  $\mu_r = 1$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , a korábbi jelöléseinkkel összhangban.

A (95), (96) egyenleteket a közeghatárokon megfelelő ugrásfeltételekkel kell helyettesíteni, amelyek magukból az egyenletekből következnek, és a dielektrikumokhoz hasonló eljárással állapíthatók meg. A (95)-ből a 4. ábra segítségével levonhatjuk a  $\Delta B_n = 0$  határfeltételt. A (96)-ból az 5. ábra felhasználásával megállapíthatjuk, hogy  $\Delta H_t$  a *felületi áramsűrűségnek* azzal a komponensével egyenlő, amely az ábra síkja mögé mutat. Amikor felületi áram nem folyik, a  $\vec{H}$  tangenciális komponense folytonos. Ebben az esetben teljes az analógia magnetosztatika és az elektrosztatika között (ha  $\sigma_s = 0$ ):

$$\vec{E} \longleftrightarrow \vec{H} \quad \vec{D} \longleftrightarrow \vec{B} \quad \epsilon \longleftrightarrow \mu.$$

36. Feladat:  $\mu$  permeabilitású rudat  $N$ /méter menetsűrűségű tekerccsel veszünk körül, amelyben  $I$  áram folyik. Mekkora mágneses tér lesz a rúdban, ha a rúd olyan

<sup>15</sup>Az  $\epsilon_0$  és a  $\mu_0$  kezelésében különbség van az elektromos és a mágneses eset között, ami annak következménye, hogy a (2)-ben  $\epsilon_0$ -t a nevezőbe, (72)-ben  $\mu_0$ -t a számlálóba írtuk.



hosszú és a menetsűrűség olyan nagy, hogy a szórt teret a rúdon kívül nullának tekinthetjük?

Megoldás: A rúd tengelye legyen az  $\vec{e}_z$ , az áram iránya pedig az  $\vec{e}_\varphi$  irány. Nagy menetsűrűségnél feltehetjük, hogy a tekercs  $NI$  felületi áramsűrűséggel egyenértékű. Mivel a tekercs külső felületén  $\vec{H} = 0$  és a felületen átlépve a  $\vec{H}$ -nak a felület  $\vec{e}_\rho$  normálisára és a felületi áramsűrűségre merőleges komponense  $NI$ -vel "ugrik", ezért a tekercsen belül  $H_z = NI$  és a többi komponens zérus. A rúd végétől távol, ahol a széleffektusok elhanyagolhatók, a magnetosztatika egyenleteit a  $\vec{H} = NI \cdot \vec{e}_z$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  homogén terek elégítik ki.♣

A *lágymágneses anyagok* a fémek mágneses megfelelői, noha  $\mu_r$  nem tekinthető bennük végtelennek, csak nagyon nagyoknak ( $10^6 - 10^8$ ). Kvalitatív megfontolásokban azonban feltehetjük, hogy a lágymágnes ideális, és benne  $\vec{H} = 0$  ugyanúgy, ahogy a fémekben  $\vec{E} = 0$ . A teljes analógia következtében a mágneses mező az ideálisan lágymágnes üregeiben is zérus (*mágneses árnyékolás*).

37.Feladat: Mutassuk meg, hogy két különböző mágneses közeg határán zérus felületi áramsűrűség mellett az erővonalak "törési törvénye"

$$\frac{\mu_{1r}}{\mu_{2r}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2},$$

ahol  $\alpha_i$  az erővonalnak a határfelület normálisával bezárt szöge.

Megoldás: A  $B_n$  és a  $H_t$  folytonosságát a

$$B_1 \cos \alpha_1 = B_2 \cos \alpha_2 \quad H_1 \sin \alpha_1 = H_2 \sin \alpha_2$$

egyenletek fejezik ki, amelyeket egymással elosztva kapjuk az igazolandó képletet.♣

A *permanens mágnesek* külső tér nélkül is polarizált állapotban vannak, ezért az  $\vec{M}$  mezőt megadottnak tekinthetjük bennük; a (97) érvényes rájuk is, a (98) azonban nem.

Tekintsünk pl. egy mágnesrudat (6.ábra), amely hossztengelye mentén ( $z$  irányban) polarizált. A rúdon belül  $\vec{M} = (0, 0, M) = \text{konstans}$ , a rúdon kívül  $\vec{M} = 0$ . A dielektromos polarizáció kapcsán szerzett tapasztalataink alapján úgy képzelhetjük, hogy noha valóságos mágneses töltések nem léteznek, ennek az  $\vec{M}$  vektormezőnek az erővonalai valamilyen  $-\sigma_m^*$  *fiktív* felületi mágneses töltéssűrűségből indulnak (déli pólus) és a megfelelő  $+\sigma_m^*$  *fiktív* felületi mágneses töltéssűrűségben végződnek (északi pólus). A (97) valamint  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$  következtében  $\operatorname{div} \vec{H} = -\operatorname{div} \vec{M}$ , vagyis a  $\vec{H}$  mezőnek ugyanazok a (fiktív) töltések a forrásai (nyelői), amelyek az  $\vec{M}$  mező nyelői (forrásai): a  $\vec{H}$  erővonalai az  $\vec{M}$  erővonalaiával ellentétes irányúak, az északi pólusból indulnak és a déliben végződnek. Az  $\vec{M}$ -el ellentétben azonban  $\vec{H}$  nem korlátozódik a mágnes térfogatára, hanem csak a végtelenben kell eltűnnie.

Ha az északi pólust körül vesszük egy  $\Sigma$  felülettel és alkalmazzuk rá a Gauss-tételt, akkor azt találjuk, hogy a  $\Sigma$ -n keresztül a  $\vec{H}$  és az  $\vec{M}$  fluxusa — előjeltől eltekintve — egyenlő egymással. Mivel  $\vec{M}$  csak a mágnesrúdon belül nem nulla, ez csak akkor

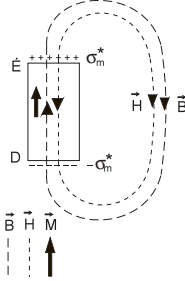


Figure 6:

lehetséges, ha  $M > H$ . A (97) következtében ezért a mágnesrúdban  $\vec{B}$  az  $\vec{M}$  irányába mutat, tehát ellentétes irányú, mint  $\vec{H}$ . A mágnesrúdon kívül azonban  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  következtében  $\vec{B}$  és  $\vec{H}$  ugyanabba az irányba mutat. Ez összefér azzal, hogy a  $\vec{B}$  mező divergenciamentes és az erővonalai zárt görbék.

\*\*\*

A mágneses és az elektromos polarizációt leíró egyenletek, (48) és (49), ill. (95) és (96), szoros formai hasonlóságot mutatnak:  $\sigma_s = 0$  esetén az  $\vec{E} \longleftrightarrow \vec{H}$ ,  $\vec{D} \longleftrightarrow \vec{B}$  helyettesítés egymásba viszi át őket. Ha azonban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy az  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  páron belül melyik a fizikai elektromos mező, a  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  páron belül pedig melyik a fizikai mágneses mező, akkor másfajta csoportosítást kapunk: azt találjuk, hogy  $\vec{E}$  és  $\vec{B}$  a fizikai mező, míg  $\vec{D}$  és  $\vec{H}$  segédmenyiségek.

A fizikai és a nemfizikai mezők közötti választás azon alapul, hogy a divergencaegyenletek jobboldala a mezők forrassűrűségével egyenlő. Az elektromos mezőről tudjuk, hogy minden elektromos töltés létrehozza, és a  $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$  egyenlet éppen azt fejezi ki, hogy az  $\vec{E}$  forrása a teljes töltéssűrűség.  $\vec{D}$  mezőt ezzel szemben a  $\text{div } \vec{D} = \rho_s$  szerint csak szabad töltések hoznak létre, és ezért  $\vec{D}$  semmiképpen sem azonosítható azzal az elektromos mezővel, amelyet a töltésekre gyakorolt hatásán keresztül ismerünk. Ennek következtében a Coulomb-erő képlete polarizálható közegben is  $q\vec{E}$ .

A mágneses mezőről tudjuk, hogy egyáltalán nincs forrása. Ezt a  $\text{div } \vec{B} = 0$  egyenlet fejezi ki, míg a  $\text{div } \vec{H} = -\text{div } \vec{M}$  mutatja, hogy ahol  $\text{div } \vec{M} \neq 0$ , a  $\vec{H}$ -nak forrása van. Ennek következtében a  $\vec{B}$  az a mágneses mező, amelyet a mozgó töltésekre gyakorolt hatása révén ismerünk, és a Lorentz-erő mágneses tagja polarizálható közegekben is  $q[\vec{v} \times \vec{B}]$ .

Felmerül a jogos kérdés: ha  $\vec{B}$  a valódi mágneses mező, a polarizálható közegekre történő áttérésnél miért csak a (79) divergenca egyenletben írtunk  $\mu_0 \vec{H}$  helyett  $\vec{B}$ -t, miért nem tettük meg ugyanezt a (81) rotáció egyenletben is?

A magyarázat elég nyilvánvaló: a közeg  $\vec{M}$  mágneses polarizációjának a hatása éppen az, hogy — a  $\vec{J}$  mellett — maga is létrehoz mágneses mezőt. Valóban, fejezzük

ki (81)-ben  $\vec{H}$ -t  $\vec{B}$ -n keresztül a  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$  egyenlet segítségével. Ezt kapjuk:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \text{rot } \vec{M}.$$

A  $\mu_0$  faktornak nincs különösebb jelentősége, ez már a vákuumban is megkülönböztette  $\vec{B}$ -t  $\vec{H}$ -től. A lényeges a jobboldal második tagja, amely a polarizált közeg járulékat fejezi ki a  $\vec{B}$  fizikai mágneses térhez. Mint látjuk, az  $\vec{M}$  rotációja ebből a szempontból ugyanazt a szerepet tölti be, mint a  $\vec{J}$  áramsűrűség, ezért  $\text{rot } \vec{M}$ -t molekuláris áramsűrűségnek nevezik (és  $\vec{J}_m$ -el jelölik). Ez az elnevezés arra utal, hogy a molekulák mágneses nyomatékát, amelyekből  $\vec{M}$  összetevődik, a molekulán belüli köráramok hozzák létre. Ez a kép azonban csak bizonyos esetekben érvényes. A legmarkánsabb mágneses anyagok  $\vec{M}$ -je az elektronok saját mágneses nyomatékából származik, amely a *spinnel*<sup>16</sup> kapcsolatos, és semmiféle áramsűrűség sem tartozik hozzá. Ezért biztonságosabb, ha a "molekuláris áramsűrűsége" azt értjük, amit  $\text{rot } \vec{B}$  egyenletében kifejez: a közeg mágneses polarizációjának járulékat.

A tankönyvek jelentős részében már a vákuumegyenletekben is a  $\vec{B}$ -t használják  $\vec{H}$  helyett, vagyis a (79), (81) párt

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

formában írják fel. Ekkor a rotáció egyenlet baloldalán már eleve  $\vec{B}$  áll, ezért a polarizálható közegre történő áttérés úgy történik, hogy a jobboldalon figyelembe vesszük a polarizáció járulékat. Mivel célszerű  $\vec{J}$  jelentését változatlanul hagyni ( $\vec{J}$  a szabad és a dielektromos polarizációs töltések áramsűrűsége), a jobboldalhoz egy  $\mu_0 \text{rot } \vec{M}$  tag formájában hozzá kell adni a polarizációs áramsűrűsége (ehhez természetesen el kell fogadni vagy meg kell mutatni, hogy tényleg ilyen alakú). Ezután lehet bevezetni  $\vec{H}$ -t a  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$  definícióval, és így jutunk el a (96) egyenlethez.

A két eljárás tökéletesen egyenértékű. A különbség köztük csupán annyi, hogy a  $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$  egyenletet posztuláljuk előbb, és ebből kapjuk meg a polarizációs áramsűrűsége a  $\text{rot } \vec{M}$  képletet, vagy megfordítva, a  $\text{rot } \vec{M}$  képlettel indítunk, és belőle vezetjük le  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  és  $\vec{M}$  kapcsolatát. A dielektrikumoknál a második eljárással analóg utat követtük, a tárgyalást a  $\rho_p = -\text{div } \vec{P}$  egyenlet bevezetésével indítottuk, amely a  $\vec{J}_m = \text{rot } \vec{M}$  analogonja. A mágneses esetben azért választottuk mégis az első utat, mert a mágneses polarizáció bonyolultabb jelenség, mint az elektromos, és ez megnehezíti a  $\vec{J}_m = \text{rot } \vec{M}$  egyenletből történő indítást. Ezenkívül az elektromos polarizáció ismerete lehetővé tette, hogy a mágneses esetet az elektromos mintájára tárgyaljuk.

<sup>16</sup>A spint a kvantumelméletben tárgyaljuk.

## 2.21 Az indukció törvénye

Ha egy  $R$  ellenállású zárt vezető (jelöljük  $l$ -el) közelében rúd-mágnest mozgatunk, akkor a vezetőben általában *áram indukálódik*, amelynek az erőssége legyen  $I(t)$ . Ez a tény mutatja, hogy a vezetőben a  $t$ -pillanatban  $\mathcal{E} = I(t) \cdot R$  *elektromotoros erőnek* nevezett feszültség hat.

Az elektromotoros erőt nem okozhatja más, mint az elektromos mező a vezető mentén:

$$\mathcal{E} = \oint (\vec{E} \cdot d\vec{l}). \quad (99)$$

Az *elektrosztatikában* ez a kontúrintegrál természetesen zérus volna, de az integrandusban szereplő elektromos mezőt nem sztatikus töltés, hanem a mágnes mozgása hozta létre indukció révén. Az indukció révén létrejövő elektromos mezőt Faraday-térnek szokás nevezni, szemben a töltések, mint források által létrehozott Coulomb-térrel. Megjegyezzük azonban, hogy  $\vec{E}$ -ben objektíve nem válik ketté ez a két összetevő, megkülönböztetésük csupán a kommunikációt megkönnyítő konvenció.

Az indukció tapasztalati törvényének a megfogalmazásához vezessük be a  $\Psi$  mágneses fluxust a

$$\Psi = \int_{\Sigma} (\vec{B} \cdot d\vec{\Sigma}) \quad (100)$$

képlettel, amelyben  $\Sigma$  tetszőleges felület, amelynek a határa a fentebb bevezetett  $l$  zárt vezető és normálisa az  $l$ -n felvett irányhoz van igazítva a jobbkézsabály alapján. A definíció a  $\vec{B}$  mágneses mezőt tartalmazza, amely csak vákuumban egyenlő  $\mu_0 \vec{H}$ -val. Adott  $l$  mellett  $\Psi$  ugyanaz, akárhogy is válasszuk a  $\Sigma$  felületet: ez annak következménye, hogy a  $\vec{B}$  divergenciája mindig zérus.

38.Feladat: Bizonyítsuk be ezt az állítást.

Bizonyítás: Legyen  $\Sigma$  és  $\Sigma'$  két különböző felület, amelyeket azonban ugyanaz az  $l$  zárt görbe határol és normálisuk az  $l$ -n fölötti irányhoz van igazítva. A két felületen a keresztül a fluxus legyen  $\Psi$  és  $\Psi'$ . A  $\Psi - \Psi'$  különbség a  $\vec{B}$  fluxusa a  $\Sigma$ -ból és  $\Sigma'$ -ből összetett *zárt* felületen keresztül, az összetett felület külső normálisa irányában. A Gauss-tétel alapján azonban ez a fluxus  $\text{div } \vec{B}$  térfogati integráljával egyenlő, és  $\text{div } \vec{B} = 0$  miatt zérus. Ennek következtében  $\Psi = \Psi'$ , ahogy állítottuk.♣

Az indukció törvényének a tapasztalat által igazolt integrális alakja a következő:

$$\mathcal{E} = -\dot{\Psi}. \quad (101)$$

A közelhatás elve alapján egy adott pontban a Faraday-tér a mágneses mező változási sebességével kapcsolatos ugyanabban a pontban, és természetesen ott is megjelenik, ahol nincs jelen vezető. A vezető csak a Faraday-tér *észleléséhez* szükséges. Keressük ezért az indukció törvényének lokális megfogalmazását.

A (99), (100) segítségével az indukció törvénye az

$$\int_{\Sigma} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\Sigma} \right) = \oint (\vec{E} \cdot d\vec{l})$$

alakra hozható. Alakítsuk át a jobboldalt a Stokes-tétel segítségével:

$$\int_{\Sigma} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{\Sigma} \right) = \int_{\Sigma} (\text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}).$$

Ez az egyenlőség tetszőleges  $\Sigma$  felületre fennáll, ami csak úgy lehetséges, hogy az integrandusok egyenlők. Ezt az egyenlőséget fejezi ki az indukció törvényének differenciális alakja

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,} \quad (102)$$

amely egyben a Maxwell-egyenletek egyike.

Az elektrosztatikában a  $\text{rot } \vec{E} = 0$  következtében állíthattuk, hogy  $\vec{E}$  a  $\Phi$  potenciál negatív gradiense. A (102) ezt nem teszi lehetővé. De ez az egyenlet a magnetosztatika  $\text{div } \vec{B} = 0$  1. alapegyenletével együtt — mint könnyen meggyőződhetünk róla —, *azonosan* kielégíthető a

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \text{rot } \vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \end{aligned} \quad (103)$$

helyettesítéssel, amelyekben az  $\vec{A}$ ,  $\Phi$  potenciálok a többi Maxwell-egyenletből határozhatók meg. A (103) első tagja a Faraday-térrel, a második a Coulomb-térrel azonosítható.

**39. Feladat:** Mutassuk meg, hogy az indukció révén létrejövő áram mágneses tere csökkenti a vezető által határolt fluxust (Lenz-törvény).

Igazolás: Legyen a vezető körvonal az  $xy$  síkban, a középpontja essen egybe az origóval. A rúd mágnes a negatív  $z$ -tengely mentén közeledjen a kontúr felé és pozitív pólusa legyen a kontúrhoz közelebb. Ekkor  $\Psi$  nő,  $\dot{\Psi} > 0$ ,  $\mathcal{E} < 0$  és az indukált áram iránya a jobbcsavarral ellentétes (a pozitív  $z$ -tengely felől nézve az óramutató járásával egyirányú). A jobbkézsabály alapján ez az áram az origó tartományában negatív mágneses mezőt hoz létre, ami a mágnes terével ellentétes irányú. ♣

## 2.22 A töltésmegmaradás

Azt az empirikus tényt, hogy a természetben az elektromos töltések algebrai összege szigorúan változatlan, *töltésmegmaradásnak* nevezzük. Keressük meg a töltésmegmaradást kifejező matematikai egyenletet!

Egy rögzített pont körüli  $\Delta\Omega$  térfogatban lévő töltésmennyiség növekedési sebességét a  $\frac{\partial(\rho \cdot \Delta\Omega)}{\partial t}$  parciális derivált fejezi ki. Ha a szóbanforgó térfogatban

nem keletkezik töltés (az  $s$  forrassűrűség zérus), akkor a növekedést csak beáramlás okozhatja, amely a 2.fejezet elemzése szerint  $-\operatorname{div} \vec{J} \cdot \Delta\Omega$ -val egyenlő:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{J} \quad (s = 0).$$

Ha a netto beáramlás zérus ( $\operatorname{div} \vec{J} = 0$ ), akkor a töltéssűrűség növekedését csak forrás működése okozhatja:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = s \quad (\operatorname{div} \vec{J} = 0).$$

Amikor sem a netto beáramlás, sem a forrassűrűség nem zérus, mindkettő hozzájárul a töltéssűrűség változási sebességéhez:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{J} + s.$$

Ezt az egyenletet, amelyet inkább az átrendezett

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = s \quad (104)$$

alakban szoktak felírni, *általános* (nem stacionér) *mérlegegyenletnek* nevezzük.

A töltésmegmaradás szerint azonban töltések nem keletkezhetnek a semmiből — *empirikusan*  $s(\vec{r}, t) = 0$  —, ezért az elektromos áramsűrűség és töltéssűrűség között fenn kell állnia a

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (105)$$

*kontinuitási egyenletnek*<sup>17</sup>. Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy az  $\vec{r}$  körüli  $\Delta\Omega$  térfogatban a töltések  $\rho \cdot \Delta\Omega$  mennyisége csakis ki- és beáramlás következtében változhat, a semmiből töltések nem keletkezhetnek.

40.Feladat: Végtelennek tekinthető közegben létrehozuk a  $\rho(\vec{r}) = \rho_0 e^{-ax^2}$  töltéssűrűséget ( $\rho_0 = \text{konstans}$ ). A  $t = 0$  pillanatban a közeget a rajta lévő töltésekkel együtt konstans  $v$  sebességgel mozgatni kezdjük  $x$ -irányban. Határozzuk meg  $t > 0$ -nál  $\rho$ -t és  $\vec{J}$ -t és ellenőrizzük, eleget tesznek-e a kontinuitási egyenletnek.

Megoldás: A mozgó közegre

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \rho_0 a^{-a(x-vt)^2} \\ \vec{J}(\vec{r}, t) &= (J_x, J_y, J_z) = (\rho \cdot v, 0, 0) = \left( v \cdot \rho_0 e^{-a(x-vt)^2}, 0, 0 \right). \end{aligned}$$

<sup>17</sup>A töltésmegmaradáshoz — szigorúan véve — nem kellene  $s$ -nek zérusnak lennie, elég lenne, ha  $s$  teljes térrre vett *integrálja* zérus. Amikor ezt a feltételt a szigorúbb  $s = 0$ -val helyettesítjük, a lokalitás elvét is figyelembe vesszük.

Innen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (-v) \cdot (-2a(x-vt)) \cdot \rho_0 e^{-a(x-vt)^2}$$

$$\operatorname{div} \vec{J} = \frac{\partial J_x}{\partial x} = (-2a(x-vt)) \cdot v \cdot \rho_0 e^{-a(x-vt)^2}.$$

E két kifejezés összege nyilván zérus, a kontinuitási egyenlet tehát valóban teljesül.♣

## 2.23 Az eltolási áram

Kérdés: összhangban vannak-e az elektrodinamika eddig megtalált egyenletei a töltés-megmaradással?

Soroljuk fel ezeket az egyenleteket arra az esetre, amikor polarizálható közegek nincsenek jelen:

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} = \rho \quad (106)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial(\mu_0 \vec{H})}{\partial t} = 0 \quad (107)$$

$$\operatorname{div} \mu_0 \vec{H} = 0 \quad (108)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}. \quad (109)$$

Helyettesítsük be  $\rho$ -t és  $\vec{J}$ -t (106)-ból és (109)-ből a (105) kontinuitási egyenletbe és nézzük meg, teljesül-e. Kezdjük  $\rho$  behelyettesítésével:

$$\operatorname{div} \vec{J} + \operatorname{div} \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = ? = 0,$$

azaz

$$\operatorname{div} \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = ? = 0. \quad (110)$$

Ha ide  $\vec{J}$  helyébe (109) alapján  $\operatorname{rot} \vec{H}$ -t írunk, akkor a baloldal nem lesz nulla. De ha feltesszük, hogy (109) csak a *magnetostatikában* érvényes speciális alak, és általános esetben nem egyedül  $\vec{J}$ , hanem a (110) zárójelében lévő *összeg* az, ami  $\operatorname{rot} \vec{H}$ -val egyenlő, akkor (110) baloldala az 1. Poincaré-azonosság következtében azonosan nullává válik, és a kontinuitási egyenlet teljesül.

Ez volt az a megfontolás, amely Maxwellt arra indította, hogy (109)-t

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E})}{\partial t}}$$

-re módosítsa. A jobboldal új tagját *eltolási áramnak* nevezték el, mert az áramsűrűséghez adódik hozzá és ezért logikusnak látszott áramsűrűségnek tekinteni.

Maxwell korában ugyanis még azt hitték, hogy a teret egy speciális közeg, az éter tölti ki, és az eltolási áram az éter polarizációs töltéssűrűségének a változásával van összefüggésben (ld. lentebb a 26.fejezetet). Ma már tudjuk, hogy ez az interpretáció téves, a  $\vec{J}$ -n kívül nincs más áram, de a helytelen “eltolási áram” elnevezés fennmaradt.

## 2.24 A Maxwell-egyenletek vákuumban

A négy bekeretezett egyenlet együtt a Maxwell-egyenletek teljes rendszere:

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} = \rho \quad (111)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial(\mu_0 \vec{H})}{\partial t} = 0 \quad (112)$$

$$\operatorname{div} \mu_0 \vec{H} = 0 \quad (113)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E})}{\partial t} = \vec{J}. \quad (114)$$

Ezt az egyenletrendszert joggal tartják számon az emberi szellem csúcsteljesítményei között.

Honnan tudhatjuk, hogy az egyenletrendszernek pont négy egyenletből kell állnia? Az elektrosztatikában és a magnetosztatikában szerzett tapasztalatok arra mutatnak, hogy egy vektormezőt — a végtelenben megkövetelt eltűnése mellett — két egyenlet határoz meg, amelyek közül az egyik a vektormező divergenciájára, a másik a rotációjára tesz kijelentést. Az elektromágneses jelenségeket két vektormező segítségével lehet leírni, ezért négy olyan egyenletre van szükségünk, amelyek rendre a két mező divergenciájáról és rotációjáról tartalmaznak állítást.

A Maxwell-egyenletek a lokális töltésmegmaradást is tartalmazzák: ha  $\vec{E}$  és  $\vec{H}$  kielégíti ezeket az egyenleteket, a kontinuitási egyenlet — mint láttuk — automatikusan teljesül. Megfordítva: ha a Maxwell-egyenletek jobboldalára olyan töltés- és áramsűrűséget írunk, amelyek *nem* tesznek eleget a kontinuitási egyenletnek, akkor *nincs* olyan  $\vec{E}$  és  $\vec{H}$ , amely eleget tenne a Maxwell-egyenleteknek. Ebből a nézőpontból az töltésmegmaradás a Maxwell-egyenletek *integrálhatósági feltétele*<sup>18</sup>.

41.Feladat: Hogyan lehetne kiterjeszteni a Maxwell-egyenleteket a legegyszerűbben úgy, hogy mágneses áram- és töltéssűrűséget is tartalmazzon?

Megoldás: A mágneses áramsűrűséget jelöljük  $\vec{J}^*$ -al, a mágneses töltéssűrűséget

<sup>18</sup>Ennek az állításnak a speciális esetével már találkoztunk a magnetosztatikában (2.16 fejezet).



$\rho^*$ -al. Akkor

$$\operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} = \rho \quad (115)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial(\mu_0 \vec{H})}{\partial t} = -\vec{J}^* \quad (116)$$

$$\operatorname{div} \mu_0 \vec{H} = \rho^* \quad (117)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E})}{\partial t} = \vec{J}. \quad (118)$$

A (117) a mágneses töltések fogalmán alapul, u.i. azt fejezi ki, hogy ezek a töltések pontosan ugyanolyan értelemben forrásai a mágneses mezőnek, mint az elektromos töltések az elektromos mezőnek. A (116) jobboldalára azért van szükség éppen ebben a formában, hogy a mágneses töltés is megmaradjon.♣

## 2.25 A polarizációs áramsűrűség

A  $\rho_p$  polarizációs áramsűrűség is változhat időben és ez valamilyen  $\vec{J}_p$  polarizációs áramsűrűség megjelenésével jár együtt úgy, hogy teljesül a

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J}_p = 0$$

kontinuitási egyenlet, Ha itt  $\rho_p$  helyébe  $-\operatorname{div} \vec{P}$ -t írunk, látjuk, hogy

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (119)$$

A jobboldalhoz ugyan hozzáadhatnánk egy tetszőleges rotációt, a kontinuitási egyenlet ettől még érvényes maradna. Az alábbi feladat azonban meggyőz arról, hogy erre nincs kényszerítő ok.

42.Feladat: Tekintsünk  $xy$  irányban végtelen kiterjedésű dielektromos közeget, amely a  $z$ -tengely  $-a < z < a$  szakaszát foglalja el. Legyen a közeg polarizált úgy, hogy  $\vec{P} = (0, 0, P)$ ,  $P = konst.$  A  $t = 0$  pillanatban a polarizáció exponenciálisan csökkenni kezd. Számítsuk a folyamatot kísérő polarizációs áramot.

Megoldás: Amikor

$$P \longrightarrow P(t) = P \cdot \exp(-\beta t), \quad (t > 0)$$

a csökkenést (119) szerint

$$\vec{J}_p(t) = (0, 0, -\beta P \exp(-\beta t))$$

polarizációs áramsűrűség kíséri. Az intuícióval összhangban ez a képlet azt fejezi ki, hogy a  $z = a$  határfelületen felhalmozott pozitív töltés megindul negatív irányba és semlegesíti a  $z = -a$  határon felhalmozott negatív töltést.♣

## 2.26 A Maxwell-egyenletek közegekben

A (111)-ben — a már ismert módon — a töltéssűrűséget két tag összegére bontjuk ( $\rho = \rho_s - \operatorname{div} \vec{P}$ ), és bevezetjük az eltolási vektort a  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E}$  képlettel. Hasonlóan, (114)-ben az áramsűrűségből is leválasztjuk a polarizációs járulékot:  $\vec{J} = \vec{J}_s + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ , és összevonás után itt is bevezethetjük  $\vec{D}$ -t.

A (112)-ben  $\mu_0 \vec{H}$  helyén az indukciós törvény differenciális alakjában eredetileg  $\vec{B}$  szerepelt, ezt most visszaállítjuk. Az  $\vec{E}$ -t nincs ok  $\vec{D}$ -vel helyettesíteni. Végül annak érdekében, hogy sztatikus esetben mágnesezhető közegekben a korábbi egyenleteinket kapjuk vissza, (113)-ban is  $\vec{B}$ -t kell írunk  $\mu_0 \vec{H}$  helyébe, a (114)-ben azonban meg kell hagynunk  $\vec{H}$ -t.

Ezek alapján a polarizálható közegekben érvényes Maxwell-egyenletek a következők:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_s \quad (120)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (121)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (122)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_s. \quad (123)$$

Ezt az egyenletrendszer természetesen ki kell egészíteni a  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  anyagi egyenletekkel.

Megjegyzés: Az utolsó egyenletben  $\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}$  időderiváltja két tag összege: az egyik a közeg  $\vec{P}$  polarizációs vektorának időderiváltja — vagyis a közeg polarizációját kísérő áramsűrűség, — a másik a Maxwell által bevezetett  $\frac{\partial(\epsilon_0 \vec{E})}{\partial t}$  kifejezés. Ha éter valóban létezne és a dielektrikumokhoz hasonlóan lehetne polarizálni, akkor teljesen logikus lenne ez utóbbi tagot az éter polarizációját kísérő polarizációs áramsűrűségnek tekinteni. Ez a kép sugallta az "eltolási áram" nevet erre a tagra.

\*\*\*

A Maxwell-egyenletek teljes rendszerének a legfontosabb következménye az elektromágneses hullámok létezésének felfedezése és a hullámok generálási módjának, a sugárzásnak a vizsgálata. Erre a kérdéskörre térünk most át.

## 2.27 A hullámeqyenlet

Az elektromágneses hullámok a forrásmentes ( $\rho = \vec{J} = 0$ ) Maxwell-egyenletek megoldásai. A hullámok gerjesztéséhez (és elnyeléséhez) természetesen szükség van a forrásokra is. A hullámok azonban — ha már egyszer létrejöttek, — a források megszűnése után is tovább terjednek. Ennek az empirikus ténynek felel meg az, hogy

a forrásmentes egyenletrendszer megoldásai. A hullámok gerjesztését — a sugárzás jelenségét — a későbbi fejezetekben tárgyaljuk.

Legyen tehát (111) – (114)-ben  $\rho = \vec{J} = 0$ . Vegyük (112) rotációját:

$$\text{rot rot } \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial \text{rot } \vec{H}}{\partial t} = 0.$$

A  $\text{div } \vec{E} = 0$  következtében  $\text{rot rot } \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$ :

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{H} = 0.$$

A  $\text{rot } \vec{H}$ -t (114) alapján helyettesíthetjük  $\vec{E}$ -vel<sup>19</sup>:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (124)$$

Ez az egyenlet a három független

$$\nabla^2 E_i - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \text{ vagy } x, y, z) \quad (125)$$

egyenlet tömörítése egyetlen vektoregyenletbe. Ugyanilyen egyenletet elégítenek ki a  $\vec{H}$  komponensei is, amint az hasonló eljárással megmutatható a másik két Maxwell-egyenlet segítségével. Emlékeztetünk rá, hogy

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

A

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \quad (v = \text{konstans}, [v] = m/s) \quad (126)$$

típusú egyenletet (skaláris) *hullámegyenletnek* nevezik. Az elnevezés oka az, hogy az egyenletnek tipikus hullámmegoldásai vannak. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy az

$$f = A \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (127)$$

*monokromatikus síkhullám*<sup>20</sup> eleget tesz a hullámegyenletnek, hacsak teljesül a

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (k = |\vec{k}|, \omega > 0) \quad (128)$$

egyenlőség.

<sup>19</sup>Ezt a lépést nem lehetne megtenni, ha az eltolási áramot nem foglaltuk volna bele a Maxwell-egyenletekbe.

<sup>20</sup>A "monokromatikus" jelző egyszínűséget jelent. Ezzel utalunk arra, hogy a hullám frekvenciája — ami fénynél a színt meghatározza — állandó.

Megjegyezzük, hogy az exponenshez hozzáadhatunk egy önkényes  $\delta$  fázisállandót, amelyet most — mivel semmilyen szerepet sem játszana, — nullának veszünk. Amikor azonban monokromatikus síkhullámok szuperpozíciójáról lesz szó, emlékezni kell rá, hogy a szuperpozícióban résztvevő hullámok fázisállandói különbözhetnek egymástól és ezért nem tekinthető mind nullának.

A  $\vec{k}$  konstans vektort *hullámvektornak*, az  $\omega$  pozitív konstansot pedig *körfrekvenciának* nevezzük, a (valós)  $A$  pedig az amplitudó. A (127)-ben adott megoldás komplex, amelynek valós (vagy képzetes) része az, aminek fizikai jelentése van. A komplex alak azonban matematikai szempontból sokszor előnyös.

Miből látszik, hogy (127) (valós része) *hullámot* ír le? Válasszunk egy  $t$  pillanatot és keressük meg azokat az (összefüggő) felületeket, amelyeken az  $f$  "hullámzó mennyiség" értéke állandó. Ezeket állandó fázisú felületeknek, röviden *fázisfelületeknek* nevezzük. Az egy pontból kiinduló hullámok fázisfelületei gömbök (a víz felszínén körök), ezért az ilyen hullámokat *gömbhullámnak* nevezzük. A *síkhullámok* az olyan hullámok, amelyeknek fázisfelületei végtelen síkok.

A (127) szerint  $f$  értéke azokban a pontokban állandó, amelyek kielégítik a

$$\varphi \equiv \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \textit{konstans} \quad (129)$$

feltételt, amely ezért a (127) megoldás fázisfelületeinek az egyenlete: a *konstans* különböző értékeihez különböző fázisfelületek tartoznak. A  $\varphi$  kombinációt magát *fázisnak* nevezzük.

A (129) egyenletek minden rögzített  $t$ -ben végtelen síkot határoznak meg. Komponensekben ez az egyenlet ilyen:

$$k_x x + k_y y + k_z z = \varphi + \omega t \equiv \varphi_t = \textit{konstans}. \quad (130)$$

Az egyenlet által meghatározott sík a koordinátatengelyeket az  $x = \frac{\varphi_t}{k_x}$ ,  $y = \frac{\varphi_t}{k_y}$ ,  $z =$

$\frac{\varphi_t}{k_z}$  pontokban metszi.

Vegyünk a síkon két pontot,  $A$ -t és  $B$ -t:

$$A = (x_a, y_a, z_a), \quad B = (x_b, y_b, z_b),$$

$$\begin{aligned} k_x x_a + k_y y_a + k_z z_a &= \varphi_t \\ k_x x_b + k_y y_b + k_z z_b &= \varphi_t. \end{aligned}$$

A két egyenletet egymásból kivonva a

$$k_x \cdot \Delta x + k_y \cdot \Delta y + k_z \cdot \Delta z \equiv (\vec{k} \cdot \vec{AB}) = 0$$

összefüggésre jutunk, amelyben

$$\vec{AB} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$$

a fázissíkban fekvő (önkéntesen választott) vektor. A kapott összefüggés azt fejezi ki, hogy a hullámvektor a fázissíkban fekvő bármely vektorra merőleges, és így merőleges magára a fázissíkra. Megfordítva: a fázissíkok merőlegesek a hullámvektorra, és mivel ez utóbbi konstans vektor, párhuzamosak egymással. Ezzel megadtuk a hullámvektor *irányának* a jelentését.

Tekintsük most adott  $t$ -ben azokat a fázissíkokat, amelyeken  $f$  ugyanazt az értéket veszi fel. Az  $e^{i \cdot 2\pi n} = 1$  ( $n$  egész) reláció következtében két ilyen sík  $\varphi$  fázisa a  $2\pi$  egész számú többszörösében különbözik egymástól, tehát minden pillanatban végtelen sok fázissíkon lesz  $f$  ugyanakkora.

Két egymásutáni ilyen sík fáziskülönbsége  $2\pi$ . A térbeli távolságukat *hullámhossznak* nevezzük és  $\lambda$ -val jelöljük. Induljunk ki valamelyik fázissík  $\vec{r}$  koordinátájú pontjából, és tegyünk meg a fázissíkra merőleges irányban — azaz  $\vec{k}$ -val párhuzamosan —  $\lambda$  utat. A fázis ezalatt  $2\pi$ -vel változik meg:

$$[\vec{k} \cdot (\vec{r} + \lambda \cdot \vec{n}) - \omega t] - [\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t] = 2\pi,$$

ahol  $\vec{n} = \frac{1}{k} \vec{k}$  a  $\vec{k}$  irányába mutató

$$(\vec{k} \cdot \vec{n}) = k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (131)$$

Ez a képlet határozza meg a hullámvektor hosszát.

Most vizsgáljuk meg, hogyan változik időben az  $f$  megoldás a tér adott  $P$  pontjában. A  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  skalárszorzat ekkor konstans, ezért (127) szerint  $f \sim e^{-i\omega t}$ , amelynek valós része  $\cos \omega t$ -vel egyenlő. Adott pontban tehát a megoldás  $\omega$  körfrekvenciával, vagy  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  frekvenciával oszcillál.

Vizsgáljuk végül a fázissíkok mozgását. Mivel ezek a síkok minden pillanatban merőlegesek a konstans  $\vec{k}$ -ra, bizonyos, hogy önmagukkal párhuzamosan mozognak el. Ha  $P$  adott  $\varphi$ -hez tartozó fázissík  $\vec{r}$  koordinátájú pontja  $t$ -ben, akkor ugyanennek a pontnak a koordinátája  $(t + \Delta t)$ -ben  $(\vec{r} + \Delta a \cdot \vec{n})$  lesz, ahol  $\Delta a$  a fázissík elmozdulása  $\Delta t$  idő alatt. Mivel *adott*  $\varphi$ -jú fázissík mozgását vizsgáljuk, ezért

$$\vec{k} \cdot (\vec{r} + \Delta a \cdot \vec{n}) - \omega \cdot (t + \Delta t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t,$$

ahonnan

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu.$$

A  $\frac{\Delta a}{\Delta t}$  arány a fázissíkok mozgási sebességével egyenlő, amelyet  $v_f$ -el jelölünk és *fázissebességnek* nevezzük így

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \lambda \nu.$$

Ha figyelembe vesszük (128)-t is, akkor a

$$v_f = v$$

eredményre jutunk: a hullámegyenletben szereplő  $v$  konstans az egyenlet által leírt hullámok fázissebességével egyenlő.

43.Feladat: Írjuk fel a  $+z$  és a  $-z$  tengely irányába terjedő síkhullámok képletét.

Megoldás:

$Ae^{i(kz - \omega t)}$  a  $+z$  irányba terjed  $\frac{\omega}{k}$  fázissebességgel,  $\vec{k} = (0, 0, k)$ ,  $k > 0$ .

$Ae^{i(-kz - \omega t)}$  a  $-z$  irányba terjed  $\frac{\omega}{k}$  fázissebességgel,  $\vec{k} = (0, 0, -k)$ ,  $k > 0$ ♣.

44.Feladat: Ugyanaz az  $x = y$  egyenessel párhuzamosan  $x$  pozitív irányával párhuzamosan terjedő hullámra.

Megoldás: Válasszuk meg a hullámvektort:

$$\vec{k} = (k/\sqrt{2}, k/\sqrt{2}, 0) \quad |\vec{k}| = k.$$

$$f = Ae^{i((k/\sqrt{2}) \cdot (x + y) - \omega t)} \clubsuit$$

## 2.28 Elektromágneses síkhullámok vákuumban

Térjünk vissza (124)-hez, amelyről most már tudjuk, hogy van

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad \vec{H} = \vec{\mathcal{H}}e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (132)$$

típusú megoldása, amelyben  $\vec{\mathcal{E}}$  és  $\vec{\mathcal{H}}$  konstans amplitúdó-vektor valós komponensekkel<sup>21</sup>. A (124) és a (126) összehasonlításából  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ , tehát az elektromágneses hullámok fázissebessége vákuumban

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}. \quad (133)$$

A  $v$ ,  $v_f$  jelölés nem specializált hullámra vonatkozott, elektromágneses hullámoknál  $v$  helyett a  $c$ -t használjuk, ezért (128)-t a

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (134)$$

alakba írjuk át.

A (133) képlet összhangban van azzal a korábbi állításunkkal, hogy  $\epsilon_0$  és  $\mu_0$  közül csak az egyik választható önkényesen (ha a hosszúság és az idő mértékegységét már rögzítettük). A képlet a következő elég meglepő állítást tartalmazza: miután *önkényesen* megválasztottuk  $\mu_0$ -t, az áramok közötti erő *megméréseivel* rögzítettük a coulomb

<sup>21</sup>Az általános esetet, amikor a komponensek lehetnek komplexek, a következő fejezetben tárgyaljuk.

nagyságát, és a Coulomb-erő *mérése* alapján meghatároztuk  $\epsilon_0$ -t, ennek a két sztatikus mérésnek az eredményéből kiszámíthatjuk a fény sebességét vákuumban.

Vegyük most figyelembe, hogy a (124) hullámegyenlet nem a Maxwell-egyenletek egyike, hanem ezeknek csak *következménye*. Ezért a forrásmentes Maxwell-egyenletek minden megoldása kielégíti a hullámegyenletet, de a fordított állítás már nem igaz: a  $\vec{E}$ -re és a  $\vec{H}$ -ra felírt hullámegyenletekből ugyanis — visszafele — nem vezethetők le a Maxwell-egyenletek. A (132) megoldások közül ezért a forrásmentes Maxwell-egyenletekbe történő behelyettesítéssel még ki kell választani azokat, amelyek ez utóbbiakat is kielégítik.

Ha (133)-t behelyettesítjük a  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ ,  $\operatorname{div} \vec{H} = 0$  forrásmentes Maxwell-egyenletekbe, a

$$(\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}) = (\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{H}}) = 0 \quad (135)$$

feltételre jutunk. Az  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}$  amplitúdó-vektorokat tehát a hullámvektorra merőleges irányúnak kell választanunk (*tranzverzálitás*).

A (112)-be történő behelyettesítés kapcsolatot teremt az  $\vec{\mathcal{E}}$  és a  $\vec{\mathcal{H}}$  között:

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}). \quad (136)$$

A  $\vec{\mathcal{H}}$  hosszát több ekvivalens formában írhatjuk fel:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega} |\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}| = (135) = \frac{k \mathcal{E}}{\mu_0 \omega} = (134) = \frac{\mathcal{E}}{c \mu_0}.$$

A (136) szerint az  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}$ ,  $\vec{k}$  vektorháromas jobbsodrású Descartes-rendszert alkot. Végül (114) forrásmentes változata szerint

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{\epsilon_0 \omega} (\vec{k} \times \vec{\mathcal{H}}),$$

amelyről könnyű belátni, hogy nem új feltétel, hanem a korábbi feltételek következménye.

összefoglalás: A vákuumbeli forrásmentes Maxwell-egyenleteket kielégítő monokromatikus síkhullám-megoldások a következők:

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (137)$$

$$\vec{H} = \vec{\mathcal{H}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (138)$$

$$\vec{\mathcal{E}} \perp \vec{k}, \quad \vec{\mathcal{H}} \perp \vec{k}, \quad (\text{tranzverzálitás})$$

$$\mathcal{H} = \frac{\mathcal{E}}{c \mu_0}$$

$\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}$ ,  $\vec{k}$  jobbsodrású Descartes-rendszer.

Adott  $\vec{k}$ -nál tehát az  $\vec{\mathcal{E}}$ ,  $\vec{\mathcal{H}}$  amplitúdó-vektorok közül csak az egyik választható meg szabadon a  $\vec{k}$ -ra merőleges síkban. Rendszerint  $\vec{\mathcal{E}}$  az, amit megadnak.

## 2.29 A monokromatikus síkhullámok polarizációja

Rögzítsük  $\vec{k}$ -t. Ezzel  $\omega$ -t is meghatároztuk, de  $\vec{\mathcal{E}}$ -ről csak azt tudjuk, hogy merőleges  $\vec{k}$ -ra. Mivel a síkban két független irány van, amelyre minden síkbeli vektor felbontható, világos, hogy minden  $\vec{k}$ -hoz két lineárisan független monokromatikus síkhullám tartozik.

Mutasson  $\vec{k}$  a  $z$ -irányba. Nyilván új típusú monokromatikus síkhullám megoldást kapunk (az előző fejezetben vizsgált megoldásokhoz képest), ha két olyan monokromatikus síkhullámot szuperponálunk egymásra, amelyek közül az egyik elektromos vektora az  $x$ , a másiké az  $y$  irányba mutat és a fázisállandóik különböznek:

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}_1 \cdot e^{i(kz - \omega t - \delta_1)} + \vec{\mathcal{E}}_2 \cdot e^{i(kz - \omega t - \delta_2)} \quad (139)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = (\mathcal{E}_x, 0, 0) \quad \vec{\mathcal{E}}_2 = (0, \mathcal{E}_y, 0).$$

Vegyük észre, hogy ez a megoldás is felírható (132) alakban, ha megengedjük, hogy  $\vec{\mathcal{E}}$  komponensei komplexek legyenek:

$$\vec{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_x e^{-i\delta_1}, \mathcal{E}_y e^{-i\delta_2}, 0).$$

A valódi elektromos mező a (139) komplex megoldás valós része:

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = (\mathcal{E}_x \cos(kz - \omega t - \delta_1), \mathcal{E}_y \cos(kz - \omega t - \delta_2), 0).$$

Vizsgáljuk meg, milyen görbét ír le  $\vec{E}$  végpontja a terjedési irányra merőleges síkban a tér egy adott pontjában. Legyen ez a pont az  $\vec{r} = 0$  origó. Akkor

$$\vec{E}(t) = (\mathcal{E}_x \cos(\omega t + \delta_1), \mathcal{E}_y \cos(\omega t + \delta_2), 0).$$

Legyen a fáziskülönbség  $\pm \frac{\pi}{2}$ . A nulla időpont alkalmas választásával mindig elérhetjük, hogy  $\delta_1 = 0$  legyen, ezért feltehetjük, hogy  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = \pm \frac{\pi}{2}$ :

$$\vec{E}(t) = (\mathcal{E}_x \cos \omega t, \mp \mathcal{E}_y \sin \omega t, 0).$$

Nyilvánvaló, hogy a végpont által leírt görbe ellipszis, amelynek tengelyei a koordinátatengelyekkel párhuzamosak. Az előjel azt szabja meg, hogy a forgás iránya a jobbsavarnak vagy a balcsavarnak felel meg. Azt a monokromatikus síkhullámot, amely ezzel a tulajdonsággal rendelkezik jobbra vagy balra *elliptikusan polarizáltnak* nevezük. Az  $\mathcal{E}_x = \mathcal{E}_y$  esetben a polarizáció *circuláris*.

Amikor a fáziskülönbség nulla ( $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ), az  $\vec{E}(t)$  végpontja egyenesen mozog és a polarizációt *lineárisnak* nevezzük. A terjedési irány és az  $\vec{E}$  iránya által meghatározott sík a *polarizáció síkja*. Az előző fejezetben ezt a speciális esetet tárgyaltuk.

A  $\delta$  fáziskülönbség közbenső értékeinél az  $\vec{E}$  ellipszist ír le, amely azonban az  $xy$ -síkban általános helyzetű. Egy monokromatikus síkhullám tehát az általános esetben elliptikusan polarizált.



### 2.30 Általános síkhullám, hullámimpulzus, hullámcsomag

Síkhullámnak általában (a "monokromatikus" jelző nélkül) a forrámentes Maxwell-egyenletek olyan megoldásait nevezzük, amelyek síkbeli eltolási szimmetriával rendelkeznek: a terjedési irányra merőleges síkokban a "hullámzó mennyiség" (az  $f$  vagy az  $\vec{E}$  és a  $\vec{H}$ ) állandó. Ha a terjedést  $z$ -irányúnak választjuk, a síkhullám-megoldás nem függ  $x$ -től és  $y$ -től. Ezeket a síkokat továbbra is fázissíkoknak fogjuk nevezni.

A *hullámimpulzus* (jel vagy "löket") olyan síkhullám, amely a fázissíkokra merőleges irányban véges kiterjedésű, vagy a végtelenhez közelítve lecseng. Hullámimpulzust monokromatikus síkhullámok frekvencia-szerinti szuperpozíciójával állítunk elő:

$$f(z, t) = \int_0^{\infty} d\omega' A(\omega') e^{i[k(\omega')z - \omega't]}. \quad (140)$$

Legyen

$$A(\omega') = \begin{cases} 1 & \text{ha } \omega - \Delta\omega/2 < \omega' < \omega + \Delta\omega/2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad (141)$$

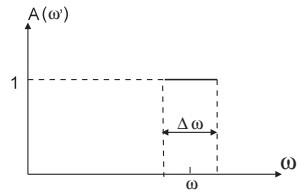


Figure 7:

Ekkor

$$f(z, t) = \int_{\omega - \Delta\omega/2}^{\omega + \Delta\omega/2} d\omega' A(\omega') e^{i[k(\omega')z - \omega't]}.$$

Emeljük ki az integrandusból az  $e^{i(kz - \omega t)}$  faktort, amelyben  $k \equiv k(\omega)$ . Ezt kapjuk:

$$f(z, t) = \mathcal{A}(z, t) e^{i(kz - \omega t)},$$

ahol

$$\mathcal{A}(z, t) = \int_{\omega - \Delta\omega/2}^{\omega + \Delta\omega/2} d\omega' e^{\{[k(\omega') - k(\omega)]z - (\omega' - \omega)t\}}.$$

A (128) szerint

$$k(\omega') - k(\omega) = \frac{1}{v}(\omega' - \omega),$$

ahol  $v = v_f$  a fázissebesség. új integrációs változóként vezessük be  $u = (z/v - t)$ -t. Akkor

$$\mathcal{A}(z, t) = \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} du \cdot e^{i(z/v - t)u} = \frac{e^{i(z/v - t)\Delta\omega/2} - e^{-i(z/v - t)\Delta\omega/2}}{i(z/v - t)},$$

azaz

$$\mathcal{A}(z, t) = 2 \cdot \frac{\sin \left[ \left( \frac{z}{v} - t \right) \frac{\Delta\omega}{2} \right]}{\left( \frac{z}{v} - t \right)}. \quad (142)$$

Ez a függvény egy térben és időben változó amplitúdó szerepét játssza. A neve: *burkoló*<sup>22</sup>. Rögzítsük először  $t$ -t és vizsgáljuk  $\mathcal{A}(z, t)$   $z$ -függését. Mivel  $\left| \sin \left[ \left( \frac{z}{v} - t \right) \frac{\Delta\omega}{2} \right] \right| \leq 1$ , ezért  $z \rightarrow \pm\infty$ -nél  $\mathcal{A} \rightarrow 0$ . Ha adott  $z$ -ben vizsgáljuk a megoldást, akkor  $t \rightarrow \pm\infty$ -nél  $\mathcal{A} \rightarrow 0$ , azaz  $f$  a távoli múltban és a távoli jövőben egyaránt zérus. Ezek a tulajdonságok mutatják, hogy megoldásunk valóban impulzus-jellegű (löket).

Az  $\mathcal{A}$  burkolóval való szorzás tehát hullámimpulzust állít elő az  $e^{i(kz - \omega t)}$  síkhullámból. A gerjesztés centruma ott lesz, ahol  $|\mathcal{A}|$  maximális. Írjuk át  $\mathcal{A}$ -t az

$$\mathcal{A}(z, t) = \Delta\omega \cdot \frac{\sin \left[ (z - vt) \frac{\Delta\omega}{2v} \right]}{(z - vt) \frac{\Delta\omega}{2v}} \equiv \Delta\omega \cdot \frac{\sin \xi}{\xi}$$

alakba, amelyben  $\xi = (z - vt) \frac{\Delta\omega}{2v}$ . A  $\frac{\sin \xi}{\xi}$  függvényről tudjuk, hogy  $\xi = 0$ -ban van a maximuma, ahol az értéke 1. Eszerint  $\mathcal{A}$  maximuma a  $z = vt$  pontban van, ezért az impulzus  $v_i$  terjedési sebessége (a jelterjedés sebessége) a hullámegyenletben szereplő  $v$  paraméterrel egyezik meg, tehát egyenlő a fázissebességgel.

Példánk azt is mutatja, hogy az impulzus alakváltozás nélkül terjed. Legyen  $z' = z - vt$  az impulzus centrumához (maximumához) viszonyított  $z$ -koordináta. A (142) jobboldala a  $z'$ -n keresztül kifejezve

$$2v \cdot \frac{\sin \left( z' \cdot \frac{\Delta\omega}{2v} \right)}{z'},$$

a  $t$ -t nem tartalmazza. Ez mutatja, hogy a terjedés során csak a centrum helye mozdul el, a centrumhoz viszonyított függvényalak időben állandó.

<sup>22</sup>Nem tévesztendő össze a görbesereg burkolójával.

A hullámimpulzus fontos speciális esete a *hullámcsomag*. Hullámcsomagnak az olyan impulzust nevezzük, amely centrumának széles környezetében praktikusán meg-  
egyeznek az  $e^{i(kz-\omega t)}$  síkhullámmal (vagy bármilyen más irányban terjedő síkhullám-  
mal). Ennek az a feltétele, hogy legyen  $\Delta\omega \ll \omega$ .

Az  $\mathcal{A}$  amplitúdó-függvénynek  $z' = 0$ -ban van maximuma és a  $z' = \pm \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2v}{\Delta\omega}$   
pontokban eltűnik. E két pont egymástól  $\Delta l = \pi \cdot \frac{2v}{\Delta\omega}$  távolságban van. Ez a  $\Delta l$   
hossz tekinthető a hullámimpulzus effektív térbeli kiterjedésének. Az impulzus belseje  
akkor lesz praktikusán  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi v}{\omega}$  hullámhosszú síkhullám, ha a  $\Delta l$  szakaszon  
nagyon sok hullámhossz fér el:  $\Delta l \gg \lambda$ . Ha ide beírjuk  $\Delta l$  és  $\lambda$  fenti kifejezését,  
átrendezés után valóban a  $\Delta\omega \ll \omega$  feltételre jutunk.

A monokromatikus síkhullám a hullámegyenlet olyan megoldása, amelyet — végte-  
len térbeli kiterjedése miatt, — a valóságban nem lehet pontosan realizálni. A hullám-  
csomag a monokromatikus síkhullám megvalósítható közelítése, ezért foglal el speciális  
helyet a hullámimpulzusok kategóriájában.

45.Feladat: Legyen  $g(z)$  tetszőleges (kétszer deriválható) függvény. Mutassuk  
meg, hogy  $f_+(z, t) = g(z - vt)$  a  $+z$ ,  $f_-(z, t) = g(z + vt)$  a  $-z$  irányba haladó  
síkhullám.

Megoldás: Mindenekelőtt azt kell belátni, hogy  $f_{\pm}(z \mp vt)$  kielégíti a hullámegyen-  
letet. Vegyük  $f_+$ -t:

$$\begin{aligned}\nabla^2 g(z - vt) &= \frac{d^2}{dz^2} g(z - vt) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} g(z - vt) &= \left( \frac{\partial(z - vt)}{\partial t} \right)^2 \frac{d^2}{dz^2} g(z - vt) = v^2 \frac{d^2}{dz^2} g(z - vt),\end{aligned}$$

amiből következik, hogy

$$\nabla^2 f_+(z, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f_+(z, t)}{\partial t^2} = 0.$$

A terjedési sebesség  $\Delta z/\Delta t$ -vel egyenlő, ha

$$f_+(z + \Delta z, t + \Delta t) = f_+(z, t),$$

azaz, ha

$$(z + \Delta z) - v(t + \Delta t) = z - vt.$$

Innen  $\Delta z/\Delta t = +v$ , a hullám pozitív irányba terjed  $v$  sebességgel, alakváltozás  
nélkül.♣

Alkalmazzuk ezt az eljárást elektromágneses hullámokra. Választunk két tet-  
szőleges függvényt,  $g(z)$ -t és  $h(z)$ -t és a  $+z$  irányba terjedő hullám elektromos vektorát  
az

$$\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x \cdot g(z - vt) + \vec{e}_y \cdot h(z - vt)$$

képlettel adjuk meg. A forrásmentes Maxwell-egyenletekbe történő visszahelyettesítés most is igazolja, hogy alkalmas  $\vec{H}(z, t)$  választás mellett valóban megoldást kaptunk.

Ha a  $g$  és a  $h$  függvényt úgy választjuk, hogy egymástól teljesen független módon (korrelálatlanul) változnak, akkor az  $\vec{E}$  végpontja szabálytalan bolyongást végez a terjedési irányra merőleges  $z = 0$  síkban. Az ilyen hullámot *polarizálatlannak* nevezzük. Ha a hullámot sok egymástól független forrás generálja, az eredmény polarizálatlan hullám lesz.

### 2.31 A diszperzió

Miért van szükség a fázissebesség és a jelterjedés sebességének a megkülönböztetésére, ha egyszer a számértékük ugyanaz? Erre két ok is van. Egyrészt, a fázissebesség és a hullámimpulzus terjedési sebessége *fogalmilag* különbözik egymástól, a két esetben nem ugyanannak a valaminek a sebességéről van szó. Másrészt ezek a sebességek *általában* számértékben is különböznek egymástól. Mint alább látni fogjuk, ez a helyzet akkor, amikor a hullámegyenletben  $v$  nem konstans, hanem a frekvencia függvénye, és ennek következtében a monokromatikus síkhullámok fázissebessége is függ a frekvenciától:  $v_f = v_f(\omega)$ . Ezt a tényt fejezzük ki a *diszperzió* szóval.

Vákuumban az elektromágneses hullámoknak (fénynek) nincs diszperziója, a sebességük minden frekvencián ugyanaz a  $c \approx 300000 \text{ km/s}$  érték. Közegekben azonban megjelenik a diszperzió. Ez a fénytörés törvényszerűségeiből állapítható meg.

Idézzük fel a fénytörés alaptörvényét:

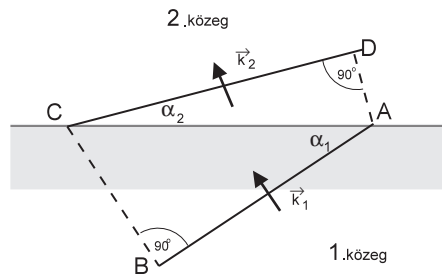


Figure 8:

46.Feladat: Mutassuk meg, hogy egy  $\omega$  körfrekvenciájú hullám két különböző közeg határán a

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_{f1}}{v_{f2}}$$

törvény szerint törik meg.

Igazolás: Amikor egy hullám egyik közegből átmegy egy másik közegbe, a frekvenciája nem változik. A hullámhosszban azonban bekövetkezhet változás, ha az adott  $\nu$  frekvencián a két közegben a fázissebesség különböző: nyilván  $\nu = v_{f1}/\lambda_1 = v_{f2}/\lambda_2$ .

Az  $AB$  fázissík  $B$  pontja  $t = \frac{|BC|}{v_{f1}}$  idő alatt ér  $C$ -be. Ezalatt az  $A$  pont

$$|AD| = t \cdot v_{f2} = \frac{|BC|}{v_{f1}} \cdot v_{f2}$$

távolságot tesz meg:  $CD$  ugyanaz a fázissík, mint  $AB$ , csak  $t$ -vel későbbi időpillanatban.

A beesési és kilépési szög  $\alpha_1$  és  $\alpha_2$ , ezért

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{|BC|}{|AD|} = \frac{v_{f1}}{v_{f2}}$$

valóban.♣

A törésmutatót az

$$n = \frac{v}{v_f} \tag{143}$$

arány definiálja, ahol  $v$  a hullám fázissebessége vákuumban,  $v_f$  pedig a közegben (fénynél ugyanezt az összefüggést  $n = \frac{c}{c_f}$  alakban írjuk), ezért

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

(Descartes-Snellius törvény). Amikor speciálisan az 1.közeg a vákuum ( $n_1 = 1$ ,  $n_2 = n$ ), akkor

$$\sin \alpha_2 = \frac{1}{n} \sin \alpha_1.$$

Ha a vákuumból adott  $\alpha_1$  irányban fehér fény esik a közeghatárra, minden szín más és más  $\alpha_2$  szög alatt törik meg. A tapasztalat szerint a tört sugár annál közelebb van a beesési merőlegeshez (annál kisebb az  $\alpha_2$  kilépési szög), minél nagyobb a frekvenciája: a vörös kevésbé törik, mint az ibolya, vagyis  $\omega \uparrow$ -nál  $n(\omega) \uparrow$ . Mivel (143) szerint a fázissebesség fordítva arányos a törésmutatóval, ez a tapasztalati tény bizonyítja a diszperzió létét a közegben.

A közegben érvényes forrásmentes Maxwell-egyenletek a vákuum-egyenletekhez hasonló módon hullámegyenletté alakíthatók, amely a (125)-től csak abban különbözik, hogy  $\epsilon_0\mu_0$  helyén  $\epsilon\mu$  áll, ezért a fázissebesség  $c_f = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ , a törésmutató pedig a (143) definíciónak megfelelően  $n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}$ . Speciálisan mágneses szempontból semleges dielektrikumban  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ . Ebben a képletben természetesen  $\epsilon_r = \epsilon_r(\omega)$  az  $\omega$  frekvenciához tartozó relatív dielektromos permittivitás. Az elektrosztatikában használt dielektromos konstans ennek a függvénynek  $\omega = 0$ -nál felvett értéke.

47.Feladat: Igazoljuk a Maxwell-egyenletek segítségével, hogy dielektrikumban  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ .♣

Vizsgáljuk meg a jelterjedés sebességét diszperzió esetén.

A (128) összefüggés következtében diszperziómentes esetben a hullámvektor  $k$  nagysága a körfrekvencia lineáris függvénye és a függvényt ábrázoló egyenes iránytangense a fázissebesség inverze, amely ebben az esetben a jelterjedés sebességének az inverze is. Diszperziónál azonban a  $k(\omega)$  függvény alakja bonyolult és általában ismeretlen, hiszen a nevező is  $\omega$ -függő:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{v_f(\omega)}. \quad (144)$$

A hullámimpulzus különböző frekvenciájú síkhullámok szuperpozíciója, ezért diszperzió esetén, amikor az összetevő-hullámok fázissebessége különböző, a jelterjedés  $v_i$  sebességére nem létezik univerzális képlet. Egyedül a hullámcsomag az, aminek meg tudjuk határozni a sebességét a következő egyszerű megfontolás alapján.

Hullámcsomagnál a  $\Delta\omega \ll \omega$  feltétel következtében a (141) függvény nagyon keskeny, és az  $f(z, t)$ -t meghatározó (140) integrál csak erre a szűk  $\omega'$  tartományra terjed ki. A  $k(\omega')$  függvényt ezért *helyettesíthetjük az  $\omega$ -beli érintőjével*, amelynek egyenlete

$$k(\omega') = k(\omega) + \frac{dk(\omega)}{d\omega}(\omega' - \omega). \quad (145)$$

Vezessük be az itt szereplő deriváltra az  $1/v_g$  jelet, azaz legyen

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk(\omega)}{d\omega}. \quad (146)$$

Fogjunk hozzá ezután  $f(z, t)$  kiszámításához a (140) alapján. Pontosan ugyanazokat a képleteket kapjuk, mint a 2.30 fejezet elején. Az egyedüli eltérés a  $k(\omega') - k(\omega)$  különbségben lesz, amelynek a jobboldalán (145) miatt  $v$  helyére  $v_g$  kerül. Ennek következtében a (142) jobboldalán, az  $\mathcal{A}(z, t)$  kifejezésében is el kell végezni a  $v \rightarrow v_g$  helyettesítést.

A hullámcsomag  $f = \mathcal{A}e^{i(kz - \omega t)}$  képletében tehát az exponenciális faktor által leírt monokromatikus hullám  $v_f(\omega) = \frac{\omega}{k}$  fázissebessége általában különbözni fog az  $\mathcal{A}$  burkoló kifejezésében szereplő  $v_g = \left(\frac{dk(\omega)}{d\omega}\right)^{-1}$  csoportsebességtől<sup>23</sup>, amely a burkoló mozgási sebességét határozza meg. Ez utóbbi sebesség a hullámcsomagnak, mint egésznek a terjedési sebessége. Hullámcsomag esetén tehát  $v_i = v_g$ .

<sup>23</sup>A "csoport" szó (angolul *group*) a csomagot alkotó monokromatikus síkhullámok csoportjára utal.

Fejezzük ki a csoportsebességet a fázissebességen, ill. a törésmutatón keresztül! A (144) következtében

$$\frac{dk(\omega)}{d\omega} = \frac{v_f(\omega) - \frac{dv_f(\omega)}{d\omega} \cdot \omega}{v_f^2(\omega)},$$

ezért (146) alapján

$$v_g = \frac{v_f^2(\omega)}{v_f(\omega) - \omega \cdot \frac{dv_f(\omega)}{d\omega}} = (143) = \frac{\frac{v^2}{n^2}}{\frac{v}{n} - \omega \frac{d}{d\omega} \left( \frac{v}{n} \right)} = \frac{v}{n + \omega \frac{dn}{d\omega}}. \quad (147)$$

A fázissebesség és a csoportsebesség relatív nagyságát az határozza meg, hogy a törésmutató  $\omega$ -nak növekvő vagy csökkenő függvénye. Ha csökkenő, akkor  $\omega \frac{dn(\omega)}{d\omega} < 0$ , tehát  $v_g(\omega) > v_f(\omega)$ , ha pedig növekvő, akkor  $v_g(\omega) < v_f(\omega)$ . Közegekben történő fényterjedésnél — mint már utaltunk rá —  $\omega \uparrow$ -nál  $n(\omega) \uparrow$ , és így  $v_g < v_f$ . Ekkor a burkoló lassabban mozog, mint a hullámcsomagot “kitöltő” síkhullám fázissíkjai (“hernyómozgás”).

### 2.32 A térenergia

Ebben a fejezetben amellet fogunk érvelni, hogy ha a tér egy  $P$  pontjában az elektromos mező  $\vec{E}$ , a mágneses mező  $\vec{H}$ , akkor a  $P$ -t tartalmazó  $d\Omega$  elemi térfogatban

$$dW = \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \right) d\Omega$$

energia van felhalmozva, amelyet *térenergiának* nevezünk. úgy is mondhatjuk, hogy  $P$ -ben a *térenergia sűrűsége*

$$w(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} \mu_0 H^2(\vec{r}, t), \quad (148)$$

amelyben  $\vec{r}$  a  $P$  helyzetvektora.

Egy tetszőleges  $\Omega$  térrészben  $W_\Omega = \int_\Omega w(\vec{r}) \cdot d\Omega$  térenergia van felhalmozva.

Mielőtt ezeknek az állításoknak a megfigyelhető következményeire térnénk ki — amelyeken keresztül igazolhatók vagy cáfolhatók, — válaszolni kell arra a kérdésre, hogy mi történik a  $d\Omega$ -ban felhalmozott energiával, amikor a mezők változnak. A közelhatás elve alapján fel lehet tételezni, hogy a  $w$  térenergia-sűrűséghez tartozik egy  $\vec{S}$  térenergia-áramsűrűség is, és teljesül rájuk a

$$\operatorname{div} \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = s \quad (149)$$

mérlegegyenlet. Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy  $d\Omega$ -ban a térenergia csak *lokális okok* miatt változhat: a  $d\Omega$  felületén történő kiáramlás, valamint a  $d\Omega$ -ban működő  $s \cdot d\Omega$  intenzitású energiaforrás következtében.

Mi lehet vajon a térenergia forrása? A mező Lorentz-erővel hat a töltésekre és megváltoztatja azok mozgási energiáját. Az energiamegmaradás tétele azt követeli, hogy a töltések mozgási energiájának a megnövekedése (lecsökkenése) egyezzen meg a térenergia csökkenésével (magnövekedésével). Ebből következik, hogy a térenergia  $s \cdot d\Omega$  forrása a mezőnek a  $d\Omega$ -ban található  $dq = \rho d\Omega$  töltésen kifejtett *teljesítményével* egyenlő, negatív előjellel (emlékeztetünk rá, hogy  $s \cdot d\Omega$  a forrás által *időegység* alatt termelt “folyadékkal” egyenlő — ez indokolja a teljesítmény használatát a munka helyett). Képletben:

$$s \cdot d\Omega = -dq \cdot \left( \vec{E} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = -\rho d\Omega \cdot (\vec{E} \cdot \vec{v}) = -(\vec{E} \cdot \vec{J}) \cdot d\Omega,$$

azaz

$$s = -(\vec{E} \cdot \vec{J}). \quad (150)$$

A  $\vec{H}$  nem ad járulékot  $s$ -hez, mert nem változtatja meg a töltések kinetikus energiáját (ld. Mechanika-jegyzet 30.feladatot).

Az energia mérlegegyenlete tehát (149), amelyben  $w$ -t (148),  $s$ -t (150) adja meg. Most megmutatjuk, hogy ha energiaáramsűrűségnek az

$$\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{H})$$

*Poynting-vektort* tekintjük, akkor a mérlegegyenlet a Maxwell-egyenletek következményeként mindig teljesül. Valóban,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \vec{E} \cdot \frac{\partial \epsilon_0 \vec{E}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \mu_0 \vec{H}}{\partial t} = (114), (112) = \\ &= \vec{E} \cdot (\text{rot } \vec{H} - \vec{J}) - \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} = (28) = -\text{div} (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{E} \cdot \vec{J}, \end{aligned}$$

ami éppen az igazolandó mérlegegyenlet.

48.Feladat: Számítsuk ki a síkhullám átlagos energiasűrűségét és Poynting-vektorát.

Megoldás: Célszerű (132) valós alakját használni:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{\mathcal{E}} \cos(kz - \omega t) \\ \vec{H} &= \vec{\mathcal{H}} \cos(kz - \omega t) = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}}) \cdot \cos(kz - \omega t) \\ \mathcal{H} &= \frac{k}{\mu_0 \omega} \mathcal{E} = \frac{1}{\mu_0 c} \mathcal{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \mathcal{E}. \end{aligned}$$



Az időben átlagolt mennyiségekre nem vezetünk be új jelölést, így

$$\begin{aligned} w &= \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mathcal{H}^2 \right) \overline{\cos^2(kz - \omega t)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \mathcal{H}^2 \right) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2 \\ \vec{S} &= (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) \overline{\cos^2(kz - \omega t)} = \frac{1}{2} (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) = \frac{1}{2\mu_0\omega} (\vec{\mathcal{E}} \times (\vec{k} \times \vec{\mathcal{E}})) = \\ &= \frac{\mathcal{E}^2}{2\mu_0\omega} \vec{k} = \frac{\mathcal{E}^2 k}{2\mu_0\omega} \vec{n} = \frac{k}{\epsilon_0\mu_0\omega} \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathcal{E}^2 \vec{n} = \frac{k}{\epsilon_0\mu_0\omega} w \vec{n} = cw \cdot \vec{n}. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy  $\vec{S} = cw \cdot \vec{n}$ , ami azt fejezi ki, hogy az energia  $c$  sebességgel áramlik a hullámvektor irányában.♣

49. Feladat: Határozzuk meg az  $R$  sugarú  $q$  töltésű fémgömb terében felhalmozott energiát.

Megoldás:

$$W(R) = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \int_R^\infty \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 d\Omega = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot 4\pi \int_R^\infty \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}. \clubsuit$$

### 2.33 A térenergia mint erőfüggvény

Az elektrosztatikai feladatokban a  $W$  teljes térenergia az erőfüggvény szerepét tölti be. Nyugvó töltéseknél  $W$  a töltések  $\vec{r}_\alpha$  helyzetvektorainak a függvénye. Ha ezeket gondolatban  $d\vec{r}_\alpha$ -val megváltoztatjuk, a térenergia  $dW$ -vel megnő. A  $d\vec{r}_\alpha$  elmozdulásnál az elektrosztatikai erők  $dA$  munkát végeznek a töltéseken, amelynek az energiamegmaradás következtében meg kell egyeznie a térenergia csökkenésével:

$$dA = -dW \tag{151}$$

$$\sum_\alpha (F_{\alpha x} dx_\alpha + F_{\alpha y} dy_\alpha + F_{\alpha z} dz_\alpha) = -dW,$$

ahonnan

$$\vec{F}_\alpha = (F_{\alpha x}, F_{\alpha y}, F_{\alpha z}) = \left( -\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}, -\frac{\partial W}{\partial y_\alpha}, -\frac{\partial W}{\partial z_\alpha} \right).$$

Pontosan ugyanilyen képlet segítségével számítható ki az  $\alpha$ -ik ponttöltésre ható erő az  $U$  erőfüggvényből, ezért  $W$  jogosan azonosítható  $U$ -val. Ennek a felfogásnak az alapján a potenciális energia nem azért létezik, mert a töltések "a távolból" érzékelik egymást, hanem az elektromos mezőben felhalmozott térenergiáról ad számot: amikor két azonos előjelű töltést lassan közelítünk egymáshoz, a munkánkkal a térenergiát növeljük (a saját belső energiánk rovására).

Hol használtuk ki, hogy elektrosztatikai feladatról van szó? Abban a feltevésben, hogy az elektrosztatikus térenergia megváltozása *teljes egészében* munkavégzésre fordítódik. Látni fogjuk, hogy ha a töltések gyorsulnak, az energia egy része sugárzás

formájában távozik és a gondolatmenet érvényét veszti. Sokszor azonban a sugárzás elhanyagolhatóan kicsi és az erő jól közelíthető a térenergia negatív gradiensevel.

A fenti gondolatmenet alapján két ponttöltés

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (152)$$

potenciális energiájának — additív konstans erejéig — meg kell egyeznie a ponttöltések terében felhalmozott  $W$  térenergiával.

Igazolás:

Az 1.töltés töltéssűrűsége  $q_1 \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$ -el egyenlő, ezért az 1.töltés által az  $\vec{r}$  "futó pontban" létrehozott  $\vec{E}_1(\vec{r})$  térerősség eleget tesz a

$$\text{div } \vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{q_1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$$

Maxwell-egyenletnek. Ezért ha  $U$ -t az

$$U = \int d\Omega \cdot \frac{q_1}{\epsilon_0} \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \frac{q_2}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_2|}$$

alakban írjuk, ami nyilván ekvivalens (152)-vel, az integrandus első tényezőjét helyettesíthetjük  $\text{div } \vec{E}_1(\vec{r})$ -el:

$$U = \int d\Omega \cdot \text{div } \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \frac{q_2}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_2|}. \quad (153)$$

A  $q_2$  által az  $\vec{r}$  pontban létrehozott potenciál

$$\Phi_2(\vec{r}) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_2|}.$$

Ha ezt (153) integrandusába beírjuk, az

$$U = \epsilon_0 \int d\Omega \cdot \text{div } \vec{E}_1(\vec{r}) \cdot \Phi_2(\vec{r})$$

képletre jutunk. A (29) alapján térbeli parciális integrálással ez a képlet az

$$U = \epsilon_0 \int \Phi_2(\vec{E}_1 \cdot d\vec{\Sigma}) - \epsilon_0 \int d\Omega (\vec{E}_1 \cdot \text{grad } \Phi_2)$$

alakra hozható. Az első integrál az *egész teret* határoló felületre terjed ki. Ezt a felületet tekinthetjük  $R$  sugarú gömbnek, végtelenhez tartó  $R$ -el. A gömb felszíne  $R^2$ -el, a  $\Phi_2$   $1/R$ -el, az  $\vec{E}_1$   $1/R^2$ -el arányos, ezért a felületi integrál  $R \rightarrow \infty$ -nél  $1/R$ -ként nullához tart. A második integrálban  $-\text{grad } \Phi_2 = \vec{E}_2$  a 2.töltés által létrehozott térerősség  $\vec{r}$ -ben. Így

$$U = \epsilon_0 \int d\Omega (\vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) = \int d\Omega \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 - \int d\Omega \frac{\epsilon_0}{2} E_1^2 - \int d\Omega \frac{\epsilon_0}{2} E_2^2.$$

Az első integrálban  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}$  a töltések által létrehozott mező, ezért ez az integrandus  $w$ -vel, az integrál pedig  $W$ -vel egyenlő. A második integrál integrandusa  $w_1$ , az *izolált*  $q_1$  töltés térenergia sűrűsége, az integrál maga pedig az izolált  $q_1$  töltés  $W_1$  térenergiaja. Hasonlóan, a harmadik integrál az izolált  $q_2$  töltés  $W_2$  térenergiaja. Egy izolált töltés térenergiaja azonban független a töltés helyétől, ezért  $W_1$  és  $W_2$  konstansok, és így

$$U = W + \text{konstans},$$

a várakozásunknak megfelelően.

50.Feladat: Számítsuk ki a 49.feladat fémgömbjére ható nyomást.

Megoldás: A felületre ható teljes radiális erő

$$F = -\frac{dW(R)}{dR} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R^2},$$

a nyomás pedig

$$p = \frac{F}{4\pi R^2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0},$$

ahol  $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$  a felületi töltéssűrűség. Ugyanezt a nyomást kapjuk a Maxwell-feszültség segítségével is (ld. a 2.fejezetet), a Maxwell-feszültség képletére azonban nem adtunk bizonyítást.♣

A következő két feladat elemi jellegű és végeredményük jól ismert. Azt a lépést akarjuk megvilágítani a segítségükkel, amikor a térenergiát erőfüggvényként értelmezzük át.

51.Feladat: Számítsuk ki a végtelen síkkondenzátor lemezeire ható erősűrűséget, ha a töltéssűrűség  $\sigma$ , a lemeztávolság  $a$  és a lemezek között vákuum van.

Megoldás: Az *erősűrűség* kiszámítása szempontjából nyilván az egységnyi lemezfelületre vett térenergia-sűrűséget kell erőfüggvénynek tekinteni. Most ezt jelöljük  $W$ -vel:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \cdot a = (65) = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \cdot a.$$

A lemezek legyenek a  $z = z_1$ ,  $z = z_2$  síkban:  $z_2 - z_1 = a$ . Így

$$W = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} (z_2 - z_1).$$

Ez az a lépés, amely a térenergiát erőfüggvénnyé teszi: azoknak az objektumoknak a koordinátáján keresztül kell őt megadni, amelyekre ható erőt ki akarjuk számítani. Ezeket a koordinátákat kívül csak olyan mennyiségek maradhatnak a képletben, amelyek a (151)-ben kifejezett infinitesimalis elmozdulás során szigorúan változatlanok maradnak.

A lemezekre ható erősűrűség

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{\partial W}{\partial z_1} = +\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \\ f_2 &= -\frac{\partial W}{\partial z_2} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Az előjelek ( $f_1 > 0$ ,  $f_2 < 0$ ) megfelelnek a lemezek elhelyezkedésének ( $z_2 > z_1$ ).♣

52.Feladat: Ugyanaz, mint előbb, csak a töltéssűrűség helyett a  $V$  feszültségkülönbség legyen adva.

Megoldás: A

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \cdot a$$

-t most  $\sigma$  helyett  $V$ -n keresztül kell kifejezni. A (19) szerint  $E = \frac{V}{a}$ , így

$$W = \frac{\epsilon_0 V^2}{2a} = \frac{\epsilon_0 V^2}{2(z_2 - z_1)}. \quad (154)$$

Ha ennek a  $W$ -nek az alapján kiszámítjuk az erősűrűséget, az 1.lemezre ható erősűrűségekre negatív értéket kapunk, ami nyilván rossz. A hiba eredete az, hogy az állandó feszültségkülönbség biztosítása érdekében a lemezek a lemeztávolság megváltoztatása közben állandóan a feszültségforrásra vannak kapcsolva, és a feszültségforrás is végez munkát. Ha a lemeztávolság  $da$  megnövekedésekor a lemezek a töltéssűrűség  $d\sigma$ -val megváltozik, akkor a feszültségforrás  $V \cdot d\sigma$  munkát végez, és ezért (151) helyett a

$$dA = -dW + Vd\sigma = -d(W - V\sigma)$$

képlet érvényes. Ez a képlet mutatja, hogy az erőfüggvény szerepét nem  $W$ , hanem a  $(W - V\sigma)$  különbség játssza. Ebben  $\sigma$ -t a  $V$ -n keresztül kell kifejezni, ugyanis a  $da$  elmozdulásnál  $V$  az, ami állandó. A  $\sigma = \epsilon_0 E = \epsilon_0 \frac{V}{a}$  képlet és (154) alapján

$$W - V\sigma = \frac{\epsilon_0 V^2}{2a} - V \cdot \epsilon_0 \frac{V}{a} = -\frac{\epsilon_0 V^2}{2a} = -W,$$

vagyis a térenergia(sűrűség) *negatívja* tekintendő erőfüggvénynek. Eszerint

$$\begin{aligned} f'_1 &= -\frac{\partial(-W)}{\partial z_1} = +\frac{\epsilon_0 V^2}{2a^2} \\ f'_2 &= -\frac{\partial(-W)}{\partial z_2} = -\frac{\epsilon_0 V^2}{2a^2}. \quad \clubsuit \end{aligned}$$

Megjegyzés: Mind az  $f_i$  mind az  $f'_i$  ( $i = 1, 2$ ) erősűrűség ugyanannak az  $f_C = \pm \frac{1}{2} \sigma E$  Coulomb-erősűrűségnek a kifejezései különböző változókon keresztül:  $f_i$ -t úgy

kapjuk, hogy  $E$  helyébe  $\sigma/\epsilon_0$ -t,  $f'_i$ -t pedig úgy, hogy  $\sigma$  helyébe  $\epsilon_0 E$ -t, majd  $E$  helyébe  $V/a$ -t írunk. Az  $f_C$  kifejezésében azonban az  $1/2$  faktor fölöslegesnek tűnik, hiszen a Coulomb-erő a töltés és az elektromos mező szorzatával egyenlő extra faktor nélkül.

Az  $1/2$  tényező oka az, hogy azon a vékony rétegen belül, amelyet a töltések elfoglalnak, a térerősség  $E$ -ről nullára csökken és az  $1/2 \cdot E$  átlagos térerősség az, ami a töltésekre hat. Ennek az állításnak az igazolására induljunk ki abból, hogy — mondjuk — a  $z = z_1$  lemezen a töltéssűrűség valójában véges vastagságú és ezért az egységnyi felületre ható Coulomb-erőt az

$$f_C = \int_{z_1-b}^{z_1+b} dz \cdot \rho(z) \cdot E(z)$$

integrál határozza meg. A  $b$  értéke olyan, hogy a  $z = z_1 \pm b$  síkokban már nincs töltés.

Mivel  $\rho(z) = \text{div } \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \frac{dE}{dz}$ , ezért nyilván

$$\begin{aligned} f_C &= \epsilon_0 \int_{z_1-b}^{z_1+b} dz \cdot \frac{dE(z)}{dz} \cdot E(z) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_{z_1-b}^{z_1+b} dE^2(z) = \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 [E^2(z_1 + b) - E^2(z_1 - b)] = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \end{aligned}$$

ugyanis  $E(z_1 + b) = E$ , míg  $E(z_1 - b) = 0$ .

A térenergia-sűrűség (148) képlete vákuumra vonatkozik. Polarizálható közegben nagyon hasonló képlet érvényes:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}). \quad (155)$$

Ez az energia a tulajdonképpeni térenergia mellett a közegben a polarizált állapot következtében felhalmozott polarizációs energiát is tartalmazza. Így pl. az  $\frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \chi E^2$  kifejezésben a második tag a polarizációs energia. Az energiaáram-sűrűség képlete azonban változatlanul  $(\vec{E} \times \vec{H})$ , amint azt a képlet levezetése mutatja. Fogadjuk el (155)-t bizonyítás nélkül és alkalmazzuk a következő feladat megoldásánál:

53. Feladat: Határozzuk meg a 30. feladatban a dielektrikumra ható  $x$ -irányú erőt.

Megoldás: A (69) felhasználásával a térenergia

$$\begin{aligned} W &= \left[ \frac{1}{2} \epsilon \xi c d + \frac{1}{2} \epsilon_0 (b - \xi) d \right] \cdot \frac{q^2}{c^2 [\epsilon \xi + \epsilon_0 (b - \xi)]^2} = \frac{d \cdot q^2}{2c [\epsilon \xi + \epsilon_0 (b - \xi)]} \\ F &= - \frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{d \cdot q^2 (\epsilon - \epsilon_0)}{2c [\epsilon \xi + \epsilon_0 (b - \xi)]^2}. \end{aligned}$$

Az erő pozitív irányú (a kondenzátor belsejébe mutat) és  $\xi$  növekedtével csökken.♣

54.Feladat: Ugyanaz, mint előbb, csak  $q$  helyett a lemezek  $V$  feszültségkülönbsége adott.

Megoldás: Az előző feladat  $F$ -jét fejezzük ki ez elektromos mezőn keresztül

$$F = \frac{1}{2}cd(\epsilon - \epsilon_0)\mathcal{E}^2.$$

Ebben a formában a képlet  $q_s = konstans$  és  $V = konstans$  esetén egyaránt érvényes, de ez utóbbi esetben célszerű  $V$ -n keresztül kifejezni. Helyettesítsük  $\mathcal{E}$ -t  $V/d$ -vel:

$$F = \frac{c(\epsilon - \epsilon_0)V^2}{2d}.$$

Ez szintén pozitív, de független  $\xi$ -től.♣

## 2.34 A térimpulzus

Ha a tér egy  $P$  pontjában az elektromos mező  $\vec{E}$ , a mágneses mező  $\vec{H}$ , akkor a  $P$  körüli  $d\Omega$  térfogatban  $\vec{g} \cdot d\Omega$  térimpulzus van tárolva, ahol

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2}\vec{S} = \frac{1}{c^2}(\vec{E} \times \vec{H}) = (\epsilon_0\vec{E} \times \mu_0\vec{H}) \quad (156)$$

az elektromágneses mező *impulzussűrűsége*. A (156)-ra sem adunk általános bizonyítást, de példákkal illusztráljuk, hogyan lehet meggyőződni az érvényességéről.

Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a (156) szerint statikus térnek is lehet impulzussűrűsége, ami meglepő, mert az impulzust a mozgással szoktuk társítani.

55.Feladat: Hengerkondenzátort a tengelyével párhuzamos homogén mágneses térben függesztünk fel és  $q$  töltést viszünk rá. Számítsuk ki a hengeres lemezek között felhalmozott impulzussűrűség impulzusnyomatékát a szálhoz képest.

Megoldás: A belső henger sugara legyen  $a$ , a külsőé  $b$ . A tengelytől  $r$  távolságban ( $a < r < b$ ) az elektromos mező nagysága a (32) alapján

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot 2\pi Lr},$$

ahol  $L$  a kondenzátor hossza (magassága). Feltettük, hogy  $L \gg b$ , ezért a széleffektustól eltekinthetünk. Ha a pozitív töltés a belső hengeren van, az  $\vec{E}$  radiálisan kifelé mutat, a  $\vec{H}$  tengelyirányú,  $\vec{g}$  érinti az  $r$  sugarú kört, és ha  $\vec{H}$ -val szembe nézünk, az óramutató járásának az irányba mutat. A  $\vec{g}$  nagysága

$$g = \frac{1}{c^2}EH = \frac{q \cdot \mu_0 H}{2\pi Lr}.$$

Az  $r$  sugáron lévő pontok impulzusnyomaték-sűrűsége

$$rg = \frac{q \cdot \mu_0 H}{2\pi L},$$

független  $r$ -től. Ezért a teljes térimpulzusnyomaték  $-z$  irányba mutat és nagysága

$$J = rg \cdot \Omega = \frac{q \cdot \mu_0 H}{2\pi L} \Omega,$$

ahol  $\Omega$  a kondenzátorlemezek közötti térfogat.

Hogyan lehet meggyőződni ennek az impulzusnyomatéknak a létéről? úgy, hogy a kondenzátort óvatosan kisütjük és megfigyeljük azt a torziós lengést, ami annak következtében jön létre, hogy az impulzusmomentum megmarad: miközben megszűnik a mezőben, átáramlik a kondenzátor szerkezeti anyagába. A kondenzátor "visszalökődése" természetesen a Lorentz-erő hatására következik be, ami a kisülés folyamán hat. Ezt azonban nehéz kiszámítani, de globális hatása megkapható az erő részletes analízise nélkül az impulzusmomentum-mérleg alapján.♣

A közelhatás elve megköveteli, hogy az impulzus változása — az energiához hasonlóan, — mérlegegyenleteknek tegyen eleget. A többesszámot az indokolja, hogy *három* mennyiségről van szó: a  $\vec{g}$  komponenseiről.

A  $g_x, g_y, g_z$  sűrűségekhez tartozó áramsűrűségeket rendre  $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$ -vel jelölve a mérlegegyenletek a következők:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_x}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\sigma}_x &= s_x \\ \frac{\partial g_y}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\sigma}_y &= s_y \\ \frac{\partial g_z}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\sigma}_z &= s_z. \end{aligned}$$

Mi a forrassűrűség fizikai jelentése ezekben az egyenletekben? A mező a Lorentz-erőn keresztül hat a töltésekre és megváltoztatja azok impulzusát. Az impulzusmegmaradás törvénye azt követeli, hogy a töltések impulzusának és a térimpulzusnak az összege állandó maradjon. Ebből következik, hogy  $s_x \cdot d\Omega$  pl. a  $d\Omega$ -ban ható Lorentz-erő  $x$ -komponensének a negatívjával egyezik meg, mivel a Lorentz-erő — mint az erő általában — nem más, mint az impulzusváltozás sebessége. Az  $s_y, s_z$  interpretációja természetesen hasonló, így

$$\vec{s} = -\vec{f},$$

ahol  $\vec{f}$  a Lorentz-erő sűrűsége. A  $\vec{\sigma}_i$  vektorokkal, amelyek kilenc komponense alkotja az un. feszültségtenzort, nincs módunkban foglalkozni.

56.Feladat: Számítsuk ki a síkhullám átlagos impulzussűrűségét.

Megoldás: A 49.feladat szerint a Poynting-vektor átlaga  $cw \cdot \vec{n}$ , ezért az impulzussűrűség átlaga  $\frac{1}{c}w \cdot \vec{n}$ -el egyenlő.♣

57.Feladat: Határozzuk meg a kapcsolatot egy hullámcsomag energiája és impulzusa között.

Megoldás: A hullámcsomag fogalmát a síkhullámokkal kapcsolatban vezettük be: a hullámcsomag olyan véges hosszúságú hullámvonulat, amely praktikusán síkhullámnak tekinthető (a széleffektusok elhanyagolhatók). A véges hosszúság a terjedési irány mentén értendő, hiszen egy síkhullám az erre merőleges irányban végtelen kiterjedésű.

A jelen feladatban a hullámcsomag általánosabb esetére gondolunk: olyan *minden irányban véges* kiterjedésű nagyméretű hullámvonulatra, amely praktikusán  $\vec{n}$  irányba haladó monokromatikus síkhullám, és a lecsengése minden irányban olyan lassú, hogy a monokromatikuság sérülésétől el lehet tekinteni. Ha a csomag effektív térfogata  $\Omega$ , akkor a 48. és az 56.feladat alapján a csomag teljes energiája  $W = w\Omega$ -val, teljes impulzusa pedig  $\vec{G} = \frac{1}{c}w\Omega \cdot \vec{n}$ -el egyenlő. A  $W$  és a  $G = |\vec{G}|$  között tehát a

$$W = cG \quad (157)$$

kapcsolat áll fenn.♣

Ha a fenti egyenletet  $G = c \cdot \frac{W}{c^2}$  alakra írjuk át és az impulzusra megszokott sebesség×tömegként interpretáljuk, akkor a hullámcsomag tömegét  $W/c^2$ -nek kell tekintenünk. Ez az összefüggés a nevezetes  $E = mc^2$  formula speciális esete. A relativitáselméletben látni fogjuk, hogy az energia mindig tömeggel, a tömeg mindig energiával jár együtt az  $E = mc^2$  képlet szerint.

58.Feladat: Hullámcsomag esik a terjedési irányra merőleges lapra. Számítsuk ki a lapra gyakorolt nyomást, amikor a csomag visszaverődik és amikor elnyelődik.

Megoldás: Elnyelésnél  $\Delta P = G$ , visszaverődésnél  $\Delta P = 2G$  impulzus adódik át a lapnak.

$$G = \frac{1}{c}w \cdot \Omega = \frac{1}{c}wA \cdot L,$$

ahol  $A$  a hullámcsomag keresztmetszete,  $L$  pedig a hossza. Ez az impulzusfelvétel  $\Delta t = L/c$  idő alatt történik, ezért pl. visszaverődésnél a lap egységnyi felülete által egységnyi idő alatt felvett impulzus, ami nem más, mint a keresett nyomás,

$$p = \frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta P}{\Delta t} = 2w$$

-vel egyenlő. Elnyelésnél  $p = w$ . A nyomást természetesen a Lorentz-erőn keresztül fejti ki a hullám, de az impulzusmegmaradás tétele segítségével sokkal könnyebb kiszámítani, mint a Lorentz-erő képlete alapján.♣

\*\*\*

Új témakörre térünk át, az elektromágneses hullámok *kisugárzásának* a tárgyalására.



### 2.35 A sugárzási tér számítása

A  $\Phi$ ,  $\vec{A}$  potenciálokat általános esetben a (81), (103) egyenleteken keresztül vezetjük be:

$$\mu_0 \vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad (158)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi. \quad (159)$$

A 17.fejezetben láttuk, hogy még külön meg kell adnunk  $\text{div } \vec{A}$ -t, és a

$$\text{div } \vec{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (160)$$

feltételt róttuk ki rá. Ott ez  $\text{div } \vec{A} = 0$ -ra redukálódott. A sugárzási feladatok azonban nem sztatikusak, ezért a jobboldal nem nulla.

Ha (158)-t és (159)-t behelyettesítjük a Maxwell -egyenletekbe, akkor (112) és (107) azonosan teljesül (ezért jók a potenciálok), a másik két egyenlet pedig (160) felhasználásával egymástól független *inhomogén hullámegyenletek* alakjára hozható (ezért jó a (160) feltétel):

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (161)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}. \quad (162)$$

Ez négy azonos struktúrájú egyenlet, amelyek mindegyike (126) alakú azzal a különbséggel, hogy a jobboldal nem nulla, hanem a tér forrásait tartalmazza. A vizsgálandó egyenlet-típus tehát:

$$\nabla^2 f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = u(t) \cdot \delta(\vec{r}). \quad (163)$$

Feltettük, hogy a forrás az origó közelében van, pontforrásnak tekinthető és időben tetszőlegesen változik.

Azt várjuk, hogy a sugárzást leíró megoldás a következő alakú:

$$f = \frac{1}{r} g(t - r/c), \quad (164)$$

amelyben a  $g$  egyváltozós függvényt az argumentum  $(t - r/c)$  értékénél vettük fel. A  $g$  konkrét függvényalakját (163)-ból kell meghatározni.

Soroljuk fel azokat az indokokat, amelyek alapján ilyen alakú megoldást várunk:

**a)** A konstans fázisú gömbök egyenlete  $t - r/c = \text{konstans}$ , sugaruk  $t$  növekedésével  $c$  sebességgel növekszik. A (164) tehát *kifutó gömbhullámokat* ír le, amelyben feltehetően energia terjed radiális irányban.

**b)** Gömbhullámoknál a térbeli szétterülés miatt várható az amplitúdó csökkenése. Ezt veszi figyelembe az  $1/r$  faktor.

c) A 45. feladat sugallja, hogy egy (164) alakú függvény *lehet* megoldás. A (164) megoldás helyességét úgy *bizonyítjuk*, hogy behelyettesítjük (163)-ba. Az

$$(u \cdot v)'' = u'' \cdot v + 2u' \cdot v' + u \cdot v''$$

képlethez hasonlóan

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} g(t - r/c) \right) = \left( \nabla^2 \frac{1}{r} \right) g(t - r/c) + 2 \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r} \cdot \vec{\nabla} g(t - r/c) \right) + \frac{1}{r} \nabla^2 g(t - r/c). \quad (165)$$

A jobboldalon sorban minden tagot tovább alakítunk:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = (24) = -4\pi \delta(\vec{r}),$$

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} \cdot \vec{\nabla} g(t - r/c) = \left( -\frac{1}{r^2} \vec{n} \right) \cdot \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial g}{\partial t} \vec{n} \right) = \frac{1}{cr^2} \frac{\partial g}{\partial t} \quad \left( \vec{n} = \frac{1}{r} \vec{r} \right)$$

A  $\nabla^2 g(t - r/c)$  átalakításához először  $g$  gradiensét számoljuk:

$$\text{grad } g(t - r/c) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial g(t - r/c)}{\partial t} \frac{1}{r} \vec{r}.$$

A  $\nabla^2 \equiv \text{div grad}$  azonosság alapján ennek a kifejezésnek a divergenciáját kell venni. Látjuk, hogy  $\text{grad } g$  egy  $S \cdot \vec{V}$  alakú szorzat, ezért (27) felhasználásával

$$\nabla^2 g(t - r/c) = \left( -\frac{1}{c} \right)^2 \frac{\partial^2 g(t - r/c)}{\partial t^2} - \frac{2}{cr} \frac{\partial g(t - r/c)}{\partial t}.$$

Az átalakított kifejezéseket visszahelyettesítjük (165) jobboldalába, az egész kifejezést pedig (163)-ba a  $\nabla^2$ -t tartalmazó tag helyébe. Összevonás után a

$$-4\pi g(t) \cdot \delta(\vec{r}) = u(t) \cdot \delta(\vec{r})$$

egyenlőségre jutunk, ahonnan

$$g(t) = -\frac{1}{4\pi} u(t),$$

tehát a (163) egyenlet megoldása

$$f = -\frac{1}{4\pi r} u(t - r/c). \quad (166)$$

Látjuk, hogy a hullámzó mennyiség a forrástól  $r$  távolságban  $r/c$  időkéssel követi a forrás időbeli változásait. Az  $r/c$  késési időt *retardálási időnek* nevezzük. A retardálás újabb megnyilvánulása annak, hogy vákuumban a jelterjedés sebessége  $c$ .

## 2.36 A dipólsugárzás

Térjünk most vissza a (161), (162) egyenletekhez. Tegyük fel, hogy a forrás egy pontszerű dipól, amelynek dipólnyomatéka időben tetszőlegesen előírt módon változik.

Az origóban nyugvó pontszerű dipól dipólsűrűsége

$$\vec{P}(t) = \vec{p}(t) \cdot \delta(\vec{r}),$$

Ehhez

$$\rho = -\text{div } \vec{P}(t)$$

töltéssűrűség és

$$\vec{J}(t) = (119) = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \dot{\vec{p}} \cdot \delta(\vec{r})$$

áramsűrűség tartozik.

Ha ez utóbbi áramsűrűséget (162)-be beírjuk,  $\vec{A}$  mindhárom komponensére (163) típusú egyenletet kapunk, amelynek megoldása az előző fejezet diszkussziója alapján

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}}(t - r/c). \quad (167)$$

A (161) jobboldalán az  $\frac{1}{\epsilon_0} \vec{p}(t) \cdot \delta(\vec{r})$  függvény *divergenciája* áll, ezért a megoldás az előző fejezetben diszkutált megoldás-típus divergenciája:

$$\Phi(\vec{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \text{div} \left[ \frac{1}{r} \vec{p}(t - r/c) \right], \quad (168)$$

A (167), (168) birtokában (158) és (159) segítségével kiszámíthatjuk a pontszerű dipól sugárzási terét. Ezt találjuk:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) = & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \left[ \vec{n} \times (\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}(t')) \right] + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot \frac{1}{r^2} \left[ 3(\vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}(t')) \vec{n} - \dot{\vec{p}}(t') \right] + \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \left[ 3(\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}(t')) \vec{n} - \ddot{\vec{p}}(t') \right] \end{aligned} \quad (169)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}, t) = & -\frac{1}{4\pi c} \cdot \frac{1}{r} (\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}(t')) - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^2} (\vec{n} \times \dot{\vec{p}}(t')) \\ & \vec{n} = \frac{1}{r} \vec{r} \quad t' = t - r/c. \end{aligned} \quad (170)$$

A  $t'$  neve: retardált idő.

59.Feladat: Igazoljuk (169) első tagját, valamint(170)-t.

A (169) első tagját írjuk

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} (-\ddot{\vec{p}}(t') + (\vec{n} \cdot \ddot{\vec{p}}(t')) \vec{n})$$

alakban. A két tag (159) két tagjának felel meg.

Az első tag a  $\left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$   $\ddot{\vec{p}}$ -t tartalmazó tagja, amely (167) szerint, (133) figyelembe vételével

$$-\frac{\mu_0}{4\pi r} \ddot{\vec{p}}(t') = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r} \ddot{\vec{p}}(t').$$

A második tag a  $(-\vec{\nabla}\Phi)$   $\ddot{\vec{p}}$ -t tartalmazó tagja, amelyet (168)-ből kell meghatározni. Ez két lépésben történik. Először meghatározzuk magának  $\Phi$ -nek a  $\ddot{\vec{p}}$ -t tartalmazó tagját, amely a következő:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{p}(t-r/c) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial p_x(t-r/c)}{\partial x} + \frac{\partial p_y(t-r/c)}{\partial y} + \frac{\partial p_z(t-r/c)}{\partial z} \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \left[ \dot{p}_x(t') \cdot \left(-\frac{x}{cr}\right) + \dot{p}_y(t') \cdot \left(-\frac{y}{cr}\right) + \dot{p}_z(t') \cdot \left(-\frac{z}{cr}\right) \right] = \\ &= +\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot \frac{1}{r^2} (\vec{r} \cdot \dot{\vec{p}}(t-r/c)). \end{aligned}$$

A  $-\vec{\nabla}\Phi$   $\ddot{\vec{p}}$ -t tartalmazó tagja innen a következő:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \cdot \frac{1}{r^2} (\vec{r} \cdot \ddot{\vec{p}}(t')) \cdot (-\vec{\nabla}(r/c)) &= \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{r^3} (\vec{r} \cdot \ddot{\vec{p}}(t')) \vec{r} \end{aligned}$$

és ez  $\vec{n} = \vec{r}/r$  következtében valóban az igazolandó második taggal egyenlő.

A (170) igazolása:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \left( \frac{1}{r} \dot{\vec{p}}(t-r/c) \right) \\ \operatorname{rot} S \vec{V} &= \operatorname{grad} S \times \vec{V} + S \operatorname{rot} \vec{V} \\ \vec{H} &= \frac{1}{4\pi} \left[ -\frac{1}{r^2} (\vec{n} \times \dot{\vec{p}}) + \frac{1}{r} \operatorname{rot} \dot{\vec{p}}(t-r/c) \right]. \end{aligned}$$

Célszerű a rotáció komponensét számítani:

$$\operatorname{rot}_x \dot{\vec{p}}(t-r/c) = \frac{\partial \dot{p}_z(t-r/c)}{\partial y} - \frac{\partial \dot{p}_y(t-r/c)}{\partial z} = \frac{1}{cr} (\ddot{p}_y z - \ddot{p}_z y) = -\frac{1}{c} (\vec{n} \times \ddot{\vec{p}})_x,$$

ahonnan

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{p}}(t - r/c) = -\frac{1}{r} (\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}) \cdot \clubsuit$$

Analizáljuk azt a folyamatot, amikor  $t < 0$ -nál  $\vec{p}(t) = \vec{p}_1 = \text{konstans}$ , és  $t > T > 0$ -nál  $\vec{p}(t) = \vec{p}_2 = \text{konstans}$ . A  $0 \leq t \leq T$  időintervallumban a dipólnyomaték valamilyen nem specifikált törvény szerint változik  $\vec{p}_1$ -ről  $\vec{p}_2$ -re. Ezt a változást "jeladásnak" tekinthetjük.

Rögzítsük az  $\vec{r}$  megfigyelési pontot. Az  $r/c$  időpont előtt ( $t < r/c$ )  $\vec{r}$ -ben a  $\vec{p}_1$  dipólnyomaték statikus dipólterét észleljük. A (169)-ben és (170)-ben ekkor  $t' = t - r/c < 0$ , ezért  $\vec{p}(t') = \vec{p}_1$ ,  $\dot{\vec{p}}(t') = \ddot{\vec{p}}(t') = 0$ , és  $\vec{E}$ -t a (169) harmadik tagja írja le, ami éppen a  $\vec{p}_1$  dipólnyomatékú statikus dipól tere. A jel ekkor még nem érkezett meg  $\vec{r}$ -be.

Az  $(r/c+T)$  időpont után ( $t > r/c+T$ ) ugyanebben a pontban a  $\vec{p}_2$  dipólnyomaték statikus dipólterét figyelhetjük meg, mivel ekkor  $t' = t - r/c > T$ , és így  $\vec{p}(t') = \vec{p}_2$ ,  $\dot{\vec{p}}(t') = \ddot{\vec{p}}(t') = 0$ . A jel már túlhaladt  $\vec{r}$ -n.

Az a változás tehát, amely az origóban a  $(0, T)$  intervallumban megy végbe, a retardálás következtében  $\vec{r}$ -ben az  $(r/c, r/c + T)$  intervallumban jelentkezik. Ez a konklúzió összhangban van azzal, amit már korábban megállapítottunk az impulzusok terjedési sebességéről vákuumban.

### 2.37 A kisugárzott energia

A Poynting-vektor négy tag összege, amelyek abban különböznek egymástól, hogy  $r$  növekedtével  $r$  más és más hatványa szerint csökkennek. A leglassabban csökkenő tag  $1/r^2$ -el arányos és (169), (170) első tagjainak vektorszorzatával egyenlő. Jelöljük a Poynting-vektornak ezt a tagját  $\vec{S}'$ -vel:

$$\vec{S}' = S' \vec{n} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} [\ddot{\vec{p}}(t')]^2 \cdot \vec{n}, \quad (171)$$

ahol  $\vartheta$  a  $\ddot{\vec{p}}(t')$  és az  $\vec{n}$  által bezárt szög.

Megjegyzés: A képletben nem hagyhatjuk el a vektorjelet  $\ddot{\vec{p}}$ -ről, mert a  $\vec{p}$  2.időderivált-vektorának a hossza általában nem egyenlő a  $\vec{p}$  hosszának 2.időderiváltjával.

60.Feladat: Igazoljuk (171)-t.

Igazolás: Legyen ideiglenesen  $\vec{n} \times \ddot{\vec{p}}(t') \equiv \vec{v}$ . Akkor

$$\begin{aligned} \vec{S}' &= -\frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{1}{r^2} \left( (\vec{n} \times \vec{v}) \times \vec{v} \right) = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{1}{r^2} \left( \vec{v} \times (\vec{n} \times \vec{v}) \right) = \\ &= \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{1}{r^2} (v^2 \vec{n} - (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{v}) = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \cdot (\ddot{\vec{p}}(t'))^2 \vec{n}, \end{aligned}$$

ugyanis  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  és  $v^2 = \sin^2 \vartheta \cdot (\ddot{\vec{p}}(t'))^2 \cdot \clubsuit$

A teljes kisugárzott teljesítményt úgy kapjuk, hogy a Poynting-vektort az  $r$ -sugarú gömb felületére integráljuk. A  $z$ -tengelyt célszerű a  $\vec{p}$ -val párhuzamosnak választani, mert ekkor  $\vartheta$  a polárszög:

$$\begin{aligned} P(t) &= \int S_r \cdot r^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi = \int (S'_r + \dots) r^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta \cdot d\varphi = \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^3} (\ddot{\vec{p}}(t'))^2 \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \cdot d\vartheta + \dots = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} (\ddot{\vec{p}}(t'))^2 + \dots \end{aligned}$$

Az  $S'_r$ -ből származó explicite kiírt tagból az  $r$ -sugarú gömb felületére vett integrálásnál  $r$  kiesett, ezért ez a teljesítmény a gömb sugarának a növelésekor állandó marad. A pontok a Poynting-vektor  $\frac{1}{r^2}$ -nél gyorsabban eltűnő járulékait jelölik. Ezeket azért nem írtuk ki, mert az integrálás után  $r$  valamilyen pozitív egész hatványa megmarad a nevezőjükben és ezért zérushoz tartanak, amikor a gömb sugarát növeljük. Ezek a tagok azt a lokális energiaáramlást írják le, amelyek a statikus dipóltér energiasűrűségének a dipólnyomaték változása miatt bekövetkező átrendeződését kísérik. Az  $r$ -tól független tag ezzel szemben a térenergia azon részének az áramlását írja le, amely egyszersmindenkorra leszakadt a dipólról: ez a *kisugárzott energia* (teljesítmény). A (169), (170)  $1/r$ -el arányos részét, amelyek együttesen hordozzák a kisugárzott energiát, *sugárzási térnek* nevezzük.

Azt a teljesítményt, ami a  $t$  pillanatban az  $r$  sugarú gömbön halad át, a dipól a  $t - r/c$  retardált időpillanatban sugározta ki. Ezért megállapíthatjuk, hogy az időben változó dipólus által a  $t$  pillanatban kisugárzott teljesítményt a

$$P(t) = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} (\ddot{\vec{p}}(t))^2 \quad (172)$$

formula alapján számolhatjuk.

61. Feladat: Mutassuk meg, hogy a távoli megfigyelő a sugárzási teret síkhullámnak látja.

Igazolás: A fázisgömbök véges kis darabjai fázisíkokként jelennek meg a számára. A (169), (170) első tagja merőleges egymásra és az  $\vec{n}$  terjedési irányra, és teljesül a  $H = E/\mu_0 c$  reláció is. ♣

## 2.38 A ponttöltés sugárzása

Tekintsünk egy  $q$  ponttöltést, amely egy kiválasztott  $t$  pillanatban az origóban van és a gyorsulása  $\vec{a}(t)$ . Mekkora teljesítményt sugároz ki a ponttöltés ebben a pillanatban?

Helyezzünk el az origóban egy  $-q$  ponttöltést, amely ott *nyugszik* — ettől a kisugárzott teljesítmény nem változik meg. A töltéspárra alkalmazhatjuk (172)-t, amelyben  $\vec{p} = q \cdot \vec{a}$ :

$$P = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} a^2. \quad (173)$$

Ez a képlet (*Larmor-formula*) adja meg a ponttöltés által kisugárzott teljesítményt.

Csak a gyorsulást kíséri kisugárzás, az egyenletes egyenesvonalú mozgást nem. Logikus feltenni, hogy mozgáson az *inerciarendszerekhez* viszonyított mozgás értendő. Ha az egyenletes egyenesvonalú mozgást végző töltés is sugározna a sebességétől függő mértékben, ez ellentmondana a relativitás elvének, amely szerint csak a gyorsulás az ami abszolút, a sebesség nem. Mivel a Maxwell-egyenletek alapján azt találtuk, hogy csak gyorsuló mozgást végző töltések sugároznak, a Maxwell-egyenletek *ebből a szempontból* összhangban vannak a relativitás elvével (ld.a Mechanika-jegyzet 1.24 fejezetét).

## 2.39 Periódikus mozgást végző rendszer dipólsugárzása

### 1) Lineáris dipól harmónikus rezgése.

Tegyük fel, hogy a dipólnyomaték iránya állandó, nagysága pedig harmonikusan változik:

$$\vec{p}(t) = \vec{p} \cdot \cos \omega t \quad (\vec{p} = konst).$$

A kisugárzott teljesítmény (172) szerint

$$P(t) = \frac{\omega^4 p^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \cdot \cos^2 \omega t.$$

A periódusra átlagolt teljesítmény

$$\bar{P} = \frac{\omega^4 p^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (174)$$

A kisugárzott teljesítmény irány szerinti eloszlását (*szögeloszlás*) a (171) képlet  $\sin^2 \vartheta$  tényezője határozza meg. Az adott esetben  $\vec{p}(t)$  és  $\vec{p}$  párhuzamos egymással, ezért  $\vartheta$  a  $\vec{p}$  és az  $\vec{n}$  megfigyelési irány közötti szög. A kisugárzott teljesítmény a  $\vec{p}$ -re merőleges irányokban a legnagyobb, a  $\vec{p}$ -vel párhuzamos irányban zérus.

### 2) Síkban forgó dipól.

Tegyük fel most, hogy a dipólnyomaték egy síkban forog  $\omega$  szögsebességgel, miközben a nagysága állandó.

Legyen az  $xy$  sík a forgás síkja:

$$\vec{p}(t) = (p_x(t), p_y(t), p_z(t)) = (p \cos \omega t, p \sin \omega t, 0)$$

$$\ddot{\vec{p}}(t) = (-\omega^2 p \cos \omega t, -\omega^2 p \sin \omega t, 0)$$

$$(\ddot{\vec{p}})^2 = \omega^4 p^2.$$

A kisugárzott teljesítmény

$$P = \frac{\omega^4 p^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}, \quad (175)$$

nem függ  $t$ -től ( $\bar{P} = P$ ) és kétszer akkora, mint az előző esetben: a kisugárzott energia szempontjából a síkban forgó dipól két független lineárisan rezgő dipóllal ekvivalens.

A kisugárzott teljesítmény szögeloszlását a  $z$ -tengelyhez célszerű viszonyítani. Legyen  $\alpha$  a megfigyelés  $\vec{n}$  iránya és a  $z$ -tengely által bezárt szög és a megfigyelés iránya fekszen az  $xz$  síkban:

$$\vec{n} = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha).$$

A  $\vec{p}(t)$  irányába mutató egységvektor

$$\vec{e} = (-\cos \omega t, -\sin \omega t, 0).$$

E két egységvektor által bezárt szög legyen  $\vartheta$ :

$$\sin^2 \vartheta = (\vec{n} \times \vec{e})^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \omega t.$$

átlagolás után

$$\overline{\sin^2 \vartheta} = \cos^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \alpha),$$

ahonnan (169) alapján a dipóltól  $r$  távolságra a dipól forgására átlagolt  $\vec{n}$  irányú energiaáramsűrűség

$$\bar{S} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \alpha) \omega^4 p^2. \quad (176)$$

A sugárzás a forgási síkra merőleges irányban kétszer akkora, mint a forgási síkba eső irányokba: a kisugárzott átlagteljesítmény szempontjából a két lineárisan rezgő dipól két független sugárzó rendszernek tekinthető.

A (175), (176) írja le a hidrogénatom planetáris modelljében a körpályán keringő elektron sugárzását.

### 3) Lineáris dipól periódikus rezgése.

Ha a rezgés periódikus ( $T$  periódusidővel), de nem harmónikus, akkor az  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  alapfrekvencia  $2\omega, 3\omega, \dots$  *felharmonikusait* is tartalmazza. A határozottság kedvéért a dipól mutasson  $z$ -irányba:  $\vec{p}(t) = (0, 0, p(t))$ , és a  $p(t)$  függvény legyen szimmetrikus a  $t = 0$  időpontra nézve:  $p(-t) = p(t)$ . Ekkor  $p(t)$  a Fourier-sorok elmélete szerint koszinuszos Fourier-sorba fejthető:

$$p(t) = p_0 + p_1 \cos \omega t + p_2 \cos 2\omega t + \dots \quad (177)$$

A  $p_i$  Fourier-koefficienseket könnyen meghatározhatjuk a

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos m\omega t \cdot \cos n\omega t = \frac{T}{2} \delta_{mn} \quad m \text{ és/vagy } n \neq 0 \quad (178)$$



integrál felhasználásával, amelynek a helyességét nagyon könnyű látni a

$$\cos m\omega t \cdot \cos n\omega t = \frac{1}{2}[\cos(m+n)\omega t + \cos(m-n)\omega t]$$

képlet segítségével.

Szorozzuk végig (177)-t — mondjuk —  $\cos n\omega t$ -vel, és tagonként integráljuk a  $(-T/2, +T/2)$  intervallumra. A (178) következtében a jobboldalon mindegyik integrál zérus az  $n$ -ik kivételével, amely  $\frac{T}{2}p_n$ -el egyenlő, ezért  $n \neq 0$ -nál

$$p_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) \cdot \cos n\omega t \cdot dt.$$

Mint könnyen beláthatjuk,  $n = 0$ -nál hasonló képlet érvényes azzal a különbséggel, hogy a  $\frac{2}{T}$  szorzófaktorban a 2-s helyén 1 áll.

A kisugárzott teljesítmény számítására (177)-t (172)-be kell írni:

$$\ddot{p}(t) = -\omega^2[1^2 \cdot p_1 \cos \omega t + 2^2 \cdot p_2 \cos \omega t + 3^2 \cdot p_3 \cos \omega t + \dots].$$

Ennek a kifejezésnek a négyzete  $\cos k\omega t \cdot \cos l\omega t$  típusú tagokból áll, amelyek időátlagja (178) szerint

$$\overline{\cos k\omega t \cdot \cos l\omega t} = \delta_{kl} \overline{\cos^2 k\omega t} = \frac{1}{2} \delta_{kl}.$$

Így

$$\overline{(\ddot{p}(t))^2} = \frac{1}{2} \omega^4 (1^4 p_1^2 + 2^4 p_2^2 + 3^4 p_3^2 \dots) \quad (179)$$

$$\bar{P} = \frac{\omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} (1^4 p_1^2 + 2^4 p_2^2 + 3^4 p_3^2 \dots) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} P_n$$

$$P_n = \frac{\omega^4 n^4}{12\pi\epsilon_0 c^3} p_n^2. \quad (180)$$

Mint látjuk, a kisugárzott átlagteljesítmény szempontjából az egyes felharmónikusok önálló forrásként viselkednek.

Ezzel a képlettel kapcsolatos a *sugárzási spektrum* a fogalma. Ha prizmával vagy bármilyen más módon a sugárzást frekvenciák szerinti összetevőire bontjuk (spektrális felbontás), akkor meg tudjuk mérni, hogy az  $(\omega, \omega + d\omega)$  frekvenciatartományban mekkora a kisugárzott teljesítmény. Ezt a függvényt nevezzük (teljesítmény)spektrumnak.

A (180) szerint az általános lineáris periódikus mozgást végző dipólnál sugárzás csak az  $\omega, 2\omega, 3\omega \dots$  frekvencián található (*vonalas spektrum*) és az  $n\omega$  frekvencián kisugárzott teljesítmény a (180) által adott  $P_n$ -el egyenlő. Amikor a sugárzás egy egész frekvencia-tartományban oszlik meg, a spektrumot *folytonosnak* nevezzük.

A  $P_n$  az  $n$  növekedésével általában csökken, mert a  $p_n$  Fourier-koefficiensek az  $n$  valamilyen inverz hatványa szerint csökkennek ( $n \gg 1$ -nél  $p_n \sim 1/n^k$ ). A Bronstein-Szemengyájev megfelelő táblázatának tanulmányozása a következő szabályszerűsége utal: a  $k$  annál nagyobb egész szám, minél "símább" a  $p(t)$  függvény. Ha ugrás van benne, akkor  $k = 1$ , ha folytonos, de törlik, akkor  $k = 2$ , ha csak az első deriváltja törlik, akkor  $k = 3$  s i.t. A reálisan megvalósuló mozgásokban a dipólnyomaték símán változik, ezért  $P_n$  (180) képletében a  $p_n^2$  tényező csökkenése általában bőven kompenzálja az  $n^4$  tényező növelő hatását.

Látjuk, hogy a sugárzás spektruma ugyanazokat a felharmónikusokat tartalmazza, mint a sugárzó rendszer mozgása. Ezt a fontos — és csaknem nyilvánvaló — következtetést a *spektrális hasonlóság elvének* nevezhetjük. Ez az elv kiemelkedő szerepet fog játszani a kvantumelmélet tárgyalásánál.

62.Feladat: Milyen frekvenciákat tartalmaz a hidrogénatom planetáris modelljében az ellipszis pályán keringő elektron sugárzása?

Megoldás: A hidrogénatom planetáris modelljében a proton körül keringő elektron Kepler-mozgást végez, amelynek az erőfüggvényét úgy kapjuk meg a gravitációs Kepler-probléma erőfüggvényéből, hogy ez utóbbiban a  $\gamma m_1 m_2$  szorzatot  $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ -val helyettesítjük (a proton töltése  $e$ , az elektroné  $-e$ ). Történjen a keringés az  $xy$  síkban. A 2)pont alapján a mozgás felfogható egy  $x$  és egy  $y$  irányú periódikus mozgás szuperpozíciójának, amelyek a teljes kisugárzott energia szempontjából függetlennek tekinthetők. Mindkét mozgás periódusideje ugyanaz a  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  keringési idő. Ezek a mozgások azonban nem harmónikusak, mert a keringő test a 2.Kepler-törvény szerint nem mozog egyenletes sebességgel, ezért a spektrum az összes felharmonikus tartalmazza csökkenő súllyal.

A tapasztalat azonban mást mutat. A hidrogénatom tapasztalati spektrumát az un. Balmer-formula írja le, amely szerint a spektrumban található frekvenciák nem egy közös alapharmonikus felharmonikusai. Mint látni fogjuk, a spektrális hasonlóság elvének sérülése a mikrofizikában fontos szerepet játszott a kvantummechanika kialakulásában.♣

## 2.40 A sugárzási visszahatás

Az energiamegmaradás törvénye megköveteli, hogy a ponttöltés gyorsulása következtében létrejövő elektromágneses mező olyan Lorentz-erővel hasson vissza magára a ponttöltésre, amely a ponttöltés mozgási energiáját csökkenti. Ez a fékező erő a *sugárzási visszahatás* vagy *sugársúrlódás* (ld. még a kérdést a 2.2 fejezet végén).

Az elektromágneses mező kiszámítása magának a sugárzó töltésnek a helyén nehéz matematikai feladat. Erre nem vállalkozhatunk, és a Lorentz-erő helyett az energiamegmaradás tételét használjuk fel a sugársúrlódás hatásának a vizsgálatára.

A Mechanika-jegyzet 1.22 fejezetében vizsgáltuk a csillapított harmónikus oszcil-

látort, amelynek mozgásegyenlete

$$m\ddot{x} = -Dx - \beta\dot{x}.$$

A jobboldalon az első tag a rugalmas visszatérítő erő, a második a súrlódási erő.

Legyen a rezgő test  $q$  nagyságú ponttöltés. Kérdés: milyen  $\beta$  felel meg a sugársúrlódásnak?

A mechanikában láttuk, hogy az energiadisszipációt a  $\beta$  koefficiens szabja meg:

$$\dot{E} = -\beta\dot{x}^2 \longrightarrow -\beta\omega^2 A^2 \overline{\sin^2 \omega t} = -\frac{1}{2}\beta\omega^2 A^2.$$

A nyíl időbeli átlagolást jelöl a  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  periódusra.

Az energiamegmaradás tétele megköveteli, hogy az oszcillátor átlagos energiadisszipációjának a sebessége legyen egyenlő a  $T$  periódusra átlagolt kisugárzott teljesítménnyel:

$$\dot{E} = -P. \quad (181)$$

A (173) Larmor-képlet alapján

$$P = m\tau_r \ddot{x}^2 \longrightarrow m\tau_r \omega^4 A^2 \overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}m\tau_r \omega^4 A^2,$$

ahol

$$\tau_r = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m}$$

a sugárzó ponttöltésre jellemző idő dimenziójú paraméter.

Írjuk be az átlagolt  $\dot{E}$ -t és  $P$ -t (181)-be. Egyszerűsítés után megkapjuk a keresett  $\beta$ -t:

$$\beta = m\tau_r \omega^2.$$

A mechanikában  $\beta$  helyett a  $\kappa = \frac{\beta}{2m}$  paramétert használtuk, amely most

$$\kappa = \frac{\tau_r}{2}\omega^2.$$

A gyenge csillapítás feltétele a  $\kappa \ll \omega_0 \approx \omega$  egyenlőtlenség volt, amely esetünkben  $\tau_r \omega \ll 2$ -re, vagy — ami ugyanaz, —  $\tau_r \ll \frac{T}{\pi}$ -re redukálódik. A gyenge csillapítás feltétele tehát az, hogy a  $\tau_r$  paraméter legyen sokkal kisebb a periódusidőnél.

Ez a feltétel mindig teljesül. A természetben előforduló objektumok közül ugyanis az elektron  $\tau_r$ -je a legnagyobb, értéke  $6,26 \cdot 10^{-24} s$ , és ez még mikrofizikai skálán is rendkívül rövid idő.

Az oszcillátor mozgása természetesen gyenge csillapításnál is lassul. A sugársúrlódás hatása egy periódus alatt észrevehetően kicsi, de nagyon sok periódus alatt

ez a hatás végül is felhalmozódik és a mozgás megszűnéséhez vezet. Amikor azonban nem periódikus, “egyszeri” mozgást vizsgálunk, a sugársúrlódástól nyugodtan el lehet tekinteni.

**63.Feladat:** Tekintsünk a hidrogénatom planetáris modelljében körpályán keringő elektront és vizsgáljuk a sugársúrlódás hatását az elektron mozgására.

Megoldás: A  $-e$  töltésű elektron az  $e$  töltésű atommag (proton) körül a Kepler-törvényeknek megfelelően mozog, mivel a potenciális energiát a Kepler-probléma potenciális energiájából  $\gamma m_1 m_2 \rightarrow \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$  helyettesítéssel kapjuk. A mechanikában látjuk, hogy a Föld körül keringő szputnyik a súrlódás hatására gyorsul és egyre kisebb sugárú pályán mozog. Nyilván ugyanez történik az elektronnal a hidrogénatomban. A mozgás körfrekvenciája fokozatosan nőni fog, de a súrlódási erő gyengesége miatt  $\omega$  értéke a mozgás nem túl hosszú szakaszain konstansnak tekinthető. Vajon mennyi idő alatt zuhan bele az elektron az atommagba?

Amikor a körfrekvencia  $\omega$ -val, a sugár  $r$ -el egyenlő, a (175) szerint a kisugárzott teljesítmény

$$P = \frac{\omega^4 e^2 r^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

(felhasználtuk, hogy  $p = -er$ ).

Az energiamegmaradás tétele alapján  $P = -\dot{E}$ . Ha a jobboldalt is ki tudjuk fejezni az  $E$  energián keresztül,  $E$ -re differenciálegyenletet nyerünk.

A  $P$ -ben szereplő  $\omega^4 r^2$ -t írjuk  $(\omega r)^4 \left(\frac{1}{r}\right)^2$  alakban, és alakítsuk át mindkét tényezőt:

$$\begin{aligned} (\omega r)^2 = v^2 &= \frac{2K}{m} = -\frac{2E}{m} \\ \frac{1}{r} &= \frac{4\pi\epsilon_0 U}{e^2} = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot 2E}{e^2}. \end{aligned}$$

Az átalakításokban felhasználtuk, hogy a Kepler-mozgásban — és így a hidrogénatomban is, — körpályákra  $K = -E$  és  $U = 2E$ . Összevonás után azt találjuk, hogy

$$P = \gamma E^4,$$

ahol

$$\gamma = \frac{128\pi\epsilon_0}{3m^2 c^3 e^2} = \frac{64}{9(mc^2)^3 \tau_r}.$$

Az energia időbeli változását eszerint az

$$\dot{E} = -\gamma E^4$$

differenciálegyenlet írja le, amely a változók szeparálásával könnyen integrálható. Ha  $t = 0$ -ban az energia  $E_0$  volt, a megoldás

$$E(t) = \frac{E_0}{\sqrt[3]{1 + 3\gamma t E_0^3}}.$$

Az  $E_0$  kezdeti energia negatív mennyiség (a mozgás korlátos), ezért ez a megoldás

$$E(t) = -\frac{|E_0|}{\sqrt[3]{1 - 3\gamma t|E_0|^3}}$$

alakban is írható, amelyből látszik, hogy  $t$  növekedésével  $E(t) \rightarrow -\infty$ ,  $U(t) = 2E(t) \rightarrow -\infty$ ,  $r \rightarrow 0$ , tehát az elektron valóban “bespirálozik a centrumba”. A centrumba esés ideje véges, azzal a  $t_c$  idővel egyenlő, amikor  $E(t)$  minusz végtelenné válik:

$$t_c = \frac{1}{3\gamma|E_0|^3} = \left(\frac{mc^2}{4|E_0|}\right)^3 \cdot \tau. \quad (182)$$

Elektronra  $mc^2 \approx 5.10^5 \text{ eV}$ ,  $\tau \approx 10^{-24} \text{ s}$ , hidrogénatomra  $|E_0| \approx 1 \text{ eV}$ , így  $t_c \approx 10^{-9} \text{ s}$ .

A kvantumelmélet tárgyalásánál a (182) képletnek fontos szerepe lesz.

\*\*\*

A sugárzás tárgyalását lezárjuk és áttérünk a relativitás-elmélet tárgyalásának az előkészítésére.

## 2.41 A Galilei-féle relativitási elv az elektrodinamikában

Az elv eredeti formájában<sup>24</sup> azt mondja ki, hogy a *mechanikai jelenségek* minden inerciarendszerben azonos módon játszódnak le. érvényes-e hasonló kijelentés az elektrodinamikai jelenségekre is?

Nyilvánvalónak látszik, hogy nem. A Maxwell-egyenletek szerint vákuumban a fény (az elektromágneses hullámok) minden irányban ugyanazzal a  $c$  sebességgel terjed (a terjedés *izotróp*) és ez nem lehet igaz egyszerre két egymáshoz képest  $\vec{V}$  sebességgel mozgó  $\mathcal{K}$  és  $\mathcal{K}'$  inerciarendszerben.

Az igazolás érdekében tegyük fel, hogy a  $\mathcal{K}' = O'X'Y'Z'$  inerciarendszer  $O'$  origója  $\vec{V} = (V, 0, 0)$  sebességgel mozog a  $\mathcal{K} = OXYZ$  inerciarendszer  $O$  origójához képest. A megfelelő tengelyek irányát válasszuk párhuzamosnak. Akkor az  $O$  sebessége  $O'$ -höz képest  $-\vec{V} = (-V, 0, 0)$ , és nem szükséges külön jelölni, melyik koordinátarendszer tengelyeire vonatkoztatjuk a komponenseket (mindkettőre ugyanazok). Tegyük fel azt is, hogy az  $O$  és az  $O'$  a  $t = 0$  pillanatban egybeesik, a koordinátarendszerek ekkor pontosan fedik egymást.

Ezután tételezzük fel, hogy  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyítva a fény terjedése izotróp és mutassuk meg, hogy  $\mathcal{K}'$ -höz képest nem lehet az.

Vegyünk fel  $\mathcal{K}$ -ban két pontot az  $O$ -tól  $l$  távolságban, az  $A$ -pontot az  $X$ -tengelyen, a  $B$ -t a  $Z$ -tengelyen:

$$\begin{aligned} A &= (A_x, A_y, A_z) = (l, 0, 0) \\ B &= (B_x, B_y, B_z) = (0, 0, l). \end{aligned}$$

<sup>24</sup>Mechanika jegyzet 24§.

Mivel feltevés szerint a fény  $\mathcal{K}$ -ban minden irányban  $c$  sebességgel terjed, ezért az  $OA$  és az  $OB$  utat azonos idő alatt teszi meg:

$$t_{OA} = t_{OB} = \frac{l}{c}.$$

Vegyünk fel  $\mathcal{K}'$ -ben is két pontot,  $A'$ -t és  $B'$ -t, amelyek  $\mathcal{K}'$ -höz képest ugyanolyan helyzetűek, mint az  $A$  és a  $B$   $\mathcal{K}$ -hoz képest:

$$\begin{aligned} A' &= (A'_{x'}, A'_{y'}, A'_{z'}) = (l, 0, 0) \\ B' &= (B'_{x'}, B'_{y'}, B'_{z'}) = (0, 0, l). \end{aligned}$$

Mennyi idő alatt jut el a fény  $O'$ -ből  $A'$ -be és  $B'$ -be?

Mivel  $A'_{x'} = l > 0$ , az  $A'$  az  $OX'$  tengely pozitív féltengelyén van, ezért az  $A'$ -be küldendő fényjelet ebbe az irányba kell elindítani. Legyen a határozottság kedvéért  $V > 0$ , ekkor  $\mathcal{K}'$  ugyanilyen irányban mozog  $\mathcal{K}$ -hoz képest. A fény terjedési sebessége ebben az irányban  $(c - V)$ -vel egyenlő, ezért a fényjel  $A'$ -be érkezésének ideje

$$t_{O'A'} = \frac{l}{c - V} = \frac{\frac{l}{c}}{1 - \frac{V}{c}}. \quad (183)$$

A fordított irányban,  $A'$ -ből  $O'$ -be történő terjedés ideje a (183)-ból  $V \rightarrow -V$  helyettesítéssel kapható:

$$t_{A'O'} = \frac{l}{c + V} = \frac{\frac{l}{c}}{1 + \frac{V}{c}}. \quad (184)$$

Amikor  $O'$ -ből  $B'$ -be akarunk fényjelet küldeni, a jelet nem az  $O'Z'$  tengellyel párhuzamosan kell indítani, mert figyelembe kell venni, hogy a jel haladása közben a  $B'$  pont elmozdul, a (még ismeretlen)  $t_{O'B'}$  haladási idő alatt  $t_{O'B'} \cdot V$  utat tesz meg  $+X'$  irányban. A Pitagorasz-tétel alapján a fény  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyítva ezalatt  $\sqrt{l^2 + t_{O'B'}^2 \cdot V^2}$  utat tesz meg, és mivel  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyítva a fénysebesség minden irányban  $c$ , az ehhez szükséges idő

$$t_{O'B'} = \frac{\sqrt{l^2 + t_{O'B'}^2 \cdot V^2}}{c}.$$

Ez egyenlet az ismeretlen  $t_{O'B'}$ -re, amelyet megoldva a

$$t_{O'B'} = \frac{l}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{\frac{l}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (185)$$

időt kapjuk eredményül.

Világos, hogy ezeknek az időknak csak akkor van értelmük, ha a fény valóban *eljut* az  $A'$  és a  $B'$  pontba, azaz ha  $V < c$ . Ezt feltételezve látjuk, hogy

$$t_{A'O'} \leq t_{O'B'} \leq t_{O'A'}, \quad (186)$$

amelyben egyenlőség csak  $V = 0$ -nál áll fenn. Ez az egyenlőtlenség bizonyítja, hogy a  $\mathcal{K}'$ -hez viszonyított fénysebesség a különböző irányokban általában különbözik egymástól (anizotróp).

64.Feladat: Igazoljuk (186)-t.♣

A kísérlet azonban nem igazolja ezt a konklúziót. A nevezetes Michelson-Morley kísérlet szerint ugyanis a fénysebesség minden inerciarendszerben izotróp, éles ellentmondásban azzal az — egyszerűsége miatt — megtámadhatatlannak látszó megfontolással, amelyet ebben a fejezetben ismertettünk.

## 2.42 A Michelson-Morley kísérlet

Egy  $l$  hosszúságú rúd egyik végére erősítsünk vakut, a másikra tükröt, és próbáljuk meg kiszámítani, mennyi idő telik el, mialatt a fényfelvillanás megteszi az utat a tükrőig és vissza a vakuhoz. A válasz nyilván attól függ, milyen  $\vec{V}$  sebességgel mozog a rúd ahhoz a  $\mathcal{K}$  vonatkoztatási rendszerhez képest, amelyben a fénysebesség izotróp (abszolút vonatkoztatási rendszer), és hogyan van orientálva a  $\vec{V}$ -hez viszonyítva.

Legyen  $\mathcal{K}'$  a rúd nyugalmi rendszere, amely a  $\mathcal{K}$ -hoz képest az előző fejezetben leírt módon mozog. A vaku legyen az  $O'$ , a tükrő a  $T'$  pontban. Amikor  $O'P' \parallel \vec{V}$ , a visszatérési idő<sup>25</sup>

$$t_{\parallel} = t_{O'A'} + t_{A'O'} = \frac{l}{c-V} + \frac{l}{c+V} = \frac{2\frac{l}{c}}{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

amikor pedig  $O'P' \perp \vec{V}$ , akkor<sup>26</sup>

$$t_{\perp} = 2t_{O'B'} = \frac{2\frac{l}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Nyilván

$$t_{\perp} \leq t_{\parallel},$$

és egyenlőség csak  $V = 0$ -nál áll fenn.

<sup>25</sup>Ld. a (183)-t és (184)-t.

<sup>26</sup>Ld. a (185)-t.

Ha a visszatérési időt meg lehetne mérni különféle helyzetű rudakkal, akkor meg lehetne állapítani, milyen sebességgel mozog a mérés időpontjában a mérőeszköz az abszolút vonatkoztatási rendszerhez képest.

Reális  $l$  távolságoknál azonban a  $t_{\parallel}$  és a  $t_{\perp}$  különbsége túl kicsi ahhoz, hogy meg lehessen mérni. A  $V/c$ -ben kvadrátikus pontossággal ugyanis<sup>27</sup>

$$t_{\parallel} - t_{\perp} = 2 \cdot \frac{l}{c} \cdot \left[ \left( 1 + \frac{V^2}{c^2} \right) - \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{V^2}{c^2} \right) \right] = \frac{l}{c} \cdot \frac{V^2}{c^2}.$$

Ha — mondjuk —  $l = 3 \cdot 10^3 \text{ m}$ , akkor  $l/c = 10^{-5} \text{ s}$ . Mekkora lehet  $V$ ? A földi tárgyak résztvesznek a Föld keringésében, ezért lesz olyan időszak az évnél, amikor  $V$  sebességük legalább akkora, mint a Föld keringési sebessége, azaz kb.  $3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ <sup>28</sup>. Eszerint  $V^2/c^2 \approx 10^{-8}$ , és így  $t_{\parallel} - t_{\perp} \approx 10^{-13} \text{ s}$ . Ma már lehet mérni ilyen kis időkülönbséget, de a múlt század végén, amikor Michelson és Morley a kísérletét elvégezte (1887), erre gondolni sem lehetett.

Michelson azt találta ki, hogy a  $t_{\parallel} - t_{\perp}$  időkülönbség meghatározását a  $\Delta s = c \cdot (t_{\parallel} - t_{\perp})$  optikai útkülönbség mérésével helyettesíti. A méréshez speciális spektrométert tervezett, amelyet ma Michelson-féle spektrométer néven ismerünk. Az eszköz néhány méteres karhosszúsággal készíthető el, ezért  $\Delta s \approx 10^{-7} - 10^{-8} \text{ m}$ . Ilyen kis távolság mérését az interferencia-módszer teszi lehetővé, amellyel megbízhatóan ki lehet mutatni a fény hullámhosszával összemérhető útkülönbségeket is.

A mérés konklúziója az volt, hogy — a várakozásokkal ellentétben — a  $t_{\perp}$  és a  $t_{\parallel}$  az év minden szakában (minden olyan  $\vec{V}$ -nél, amely az év során előfordul) *egyenlő egymással*. Valahol tehát hibásan okoskodtunk, amikor az előző fejezet képleteit felhasználva arra a következtetésre jutottunk, hogy a két idő csak  $V = 0$ -nál egyezhet meg egymással. Meggondolásainkban azonban csak a legalapvetőbb fizikai fogalmainkat használtuk fel, ezért a hibát csak ezeknek a fogalmaknak az analízise útján tárhatjuk fel.

## 2.43 A Galilei-transzformáció

Mindenekelőtt arra a kérdésre keressük a választ, hogy ha egy időben és térben pontszerű esemény időpontja és koordinátái  $\mathcal{K}$ -ban a  $t, x, y, z$  számok, akkor a  $\mathcal{K}'$  és a  $\mathcal{K}$  relatív mozgásának (sebességének) az ismeretében ezekből az adatokból milyen képlet segítségével számíthatjuk ki ugyanezen esemény  $\mathcal{K}'$ -beli időpontját ( $t'$ -t) és koordinátáit ( $x'$ -t,  $y'$ -t és  $z'$ -t).

Nyilvánvalónak látszik, hogy a választ erre a kérdésre a

$$\left. \begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - Vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \right\} \quad (187)$$

<sup>27</sup>Mint a képlet mutatja, a  $V/c$ -ben lineáris pontossággal a különbség zérus.

<sup>28</sup>A Föld forgásából származó sebesség emellett elhanyagolható.



*Galilei-transzformáció* adja meg. A képlet szerint  $t = 0$ -ban minden esemény vesszős és vesszőtlen koordinátája ugyanaz, ami összhangban van azzal a követelményünkkel, hogy a két koordinátarendszer origója  $t = 0$ -ban éppen fedje egymást és a megfelelő tengelyek legyenek párhuzamosak. Az első egyenlet következtében ugyanezt a  $\mathcal{K}'$ -beli  $t'$  időre vonatkoztatva is elmondhatjuk (ezt az 1. egyenletet valójában annyira nyilvánvalónak érezzük, hogy bevétele a Galilei-transzformáció egyenletei közé szükségtelen pedantériának tűnhet). A második egyenlet összevetése a harmadikkal és a negyedikkel mutatja, hogy  $\mathcal{K}'$  a közös  $x$ -tengely mentén mozog  $\mathcal{K}$ -hoz képest  $V$  sebességgel, ami szintén megfelel a feltevéseinknek.

A sebesség átszámításának ("sebességösszeadásnak") az a kézenfekvő módszere, amelynek alapján a (183), a (184) és a (185) képleteket felírtuk, a Galilei-transzformáció következménye. Valóban, legyen  $x, y, z$  és  $x', y', z'$  egy mozgó pont ( $t$ -től függő) koordinátái a  $\mathcal{K}$ -hoz, ill. a  $\mathcal{K}'$ -höz képest. A (187)-t az idő szerint deriválva a

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= v_x - V \\ v'_y &= v_y \\ v'_z &= v_z \end{aligned} \right\} \quad (188)$$

képletre jutunk, amelynek az igazsága teljesen nyilvánvalónak látszik. Az előző fejezetben ezeket a képleteket használtuk a fény sebességének az átszámítására a különböző koordinátarendszerek között.

Lehet-e egyáltalán bírálat tárgyává tenni ilyen nyilvánvaló összefüggéseket? Igen, lehet. Einstein éppen a Galilei-transzformáció tartalmának a gondos analízisének keresztül jutott el a relativitás-elmülethez. Ebben a fejezetben ennek az analízisnek a lépéseit ismertetjük.

Fogalmazzuk meg a feladatot: Az események átszámítási törvényét az inerciarendszerek között írjuk a

$$\begin{aligned} t' &= f(t, x, y, z; V) \\ x' &= g(t, x, y, z; V) \\ y' &= h(t, x, y, z; V) \\ z' &= k(t, x, y, z; V) \end{aligned}$$

általános alakban, amelyben  $f, g, h, k$  egyenlőre ismeretlen függvények. Vajon milyen hallgatóságos feltevések eredményeképpen lett ebből az általános transzformációs törvényből Galilei-transzformáció?

Valójában elegendő egy kevésbé általános feladattal foglalkozni: a  $\vec{V}$ -re merőleges  $y$  és  $z$  koordinátáról tegyük fel, hogy a  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$  transzformációban játszott szerepüket a (187) helyesen tükrözi. Más szavakkal: eleve feltesszük, hogy  $h = y, k = z$  és ez a két változó az  $f$  és a  $g$  függvényben nem fordul elő. Ezzel a feladatunkat jelentősen egyszerűsítettük, mert csak az  $f(t, x; V)$  és a  $g(t, x; V)$  függvényt kell meghatároznunk. Ha a feladatnak ez a szűkítése túl korlátozóznak bizonyulna, később visszatérhetünk az általános problémához. Erre azonban nem lesz szükség.

Az analizálandó transzformációs törvény tehát

$$\left. \begin{aligned} t' &= f(t, x; V) \\ x' &= g(t, x; V) \end{aligned} \right\} \quad (189)$$

alakú.

Most megfogalmazzunk egy sor követelményt, amelyeknek teljesülniük kell, ha (189) olyan *inerciarendszerek* közötti transzformációt fejez ki, amelyek a  $t' = t = 0$  pillanatban éppen fedik egymást, és relatív sebességük  $x$ -irányú és  $V$  nagyságú.

### 1.követelmény.

Amikor  $V = 0$  a két vonatkoztatási rendszer folyamatosan fedi egymást, és (189)-nek  $t' = t$ -re és  $x' = x$ -re kell redukálnia. Ehhez az szükséges, hogy  $f$  és  $g$  tegyen eleget az

$$\left. \begin{aligned} f(t, x; 0) &= t \\ g(t, x; 0) &= x \end{aligned} \right\} \quad (190)$$

feltételeknek.

### 2.követelmény.

A transzformációnak *inerciarendszerek* között kell kapcsolatot létesítenie, ezért egyenletes egyenesvonalú mozgást egyenletes egyenesvonalú mozgásba kell átvinnie (megváltozott sebességgel).

Mozogjon egy tömegpont a  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyítva  $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  konstans sebességgel úgy, hogy  $t = 0$ -ban éppen az origón halad keresztül. Nyilván

$$v_x = \frac{x}{t} \quad v_y = \frac{y}{t} \quad v_z = \frac{z}{t}. \quad (191)$$

A  $\mathcal{K}$  és  $\mathcal{K}'$  origója  $t = 0$ -ban egybeesik, ezért a  $\mathcal{K}'$ -höz viszonyított mozgás is olyan, hogy keresztülhalad az origón. Mivel — feltevés szerint — a  $\mathcal{K}'$ -beli sebesség is konstans, ennek a komponenseire is érvényes egy (191) alakú képlet:

$$v'_x = \frac{x'}{t'} \quad v'_y = \frac{y'}{t'} \quad v'_z = \frac{z'}{t'}. \quad (192)$$

Helyettesítsük az első egyenlet jobboldalába (189)-t:

$$v'_x = \frac{f(t, x; V)}{g(t, x; V)},$$

ami (191) alapján a

$$v'_x = \frac{f(t, v_x t; V)}{g(t, v_x t; V)} \quad (193)$$

alakot veszi fel.

Az  $f$  és a  $g$  függvénynek olyannak kell lennie, hogy konstans  $v_x$  mellett  $v'_x$  se függjön  $t$ -től: a jobboldalon a  $t$  változónak egyszerűsödnie kell. Ez csak akkor következik

be, ha  $f$  és  $g$  az  $x$ ,  $t$  változóknak homogén  $n$ -d fokú függvényei (ugyanazzal az  $n$ -nel)<sup>29</sup>.

A homogén függvények speciális esetei a homogén polinómok. Az  $x$ ,  $t$  változópár homogén  $n$ -d fokú polinómján olyan  $(n+1)$  tagú polinómot értünk, amelynek minden tagjában az  $x$  és a  $t$  hatványainak az összege  $n$ -el egyenlő. Ha pl.  $n = 2$ , akkor

$$\begin{aligned} f(t, x; V) &= \alpha(V)x^2 + \beta(V)xt + \gamma(V)t^2 \\ g(t, x; V) &= \delta(V)x^2 + \epsilon(V)xt + \zeta(V)t^2. \end{aligned}$$

Ha ezeket a polinómokat (193) jobboldalába helyettesítjük, a  $t$  valóban kiegyes-  
erősödik, mert a számláló és a nevező minden tagja  $t^2$  formájában fogja tartalmazni.

A képletekben a hat görög betű a  $V$  specializálatlan függvényeit jelöli. A probléma az  $f$ -nek és a  $g$ -nek ezzel a kifejezésével az, hogy a hat darab  $V$  függvényt sehog-  
y sem lehet úgy megválasztani bennük, hogy (190) teljesüljön és nyilván ugyanez lesz a helyzet minden 1-nél nagyobb  $n$ -el. Ezért az egyedüli lehetőség az  $n = 1$  választás, amely szerint

$$\left. \begin{aligned} f(t, x; V) &= \alpha(V)x + \beta(V)t \\ g(t, x; V) &= \gamma(V)x + \delta(V)t, \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

amelyben  $\alpha(V)$ ,  $\beta(V)$ ,  $\gamma(V)$  és  $\delta(V)$  a  $V$  függvényei, amelyeknek alakját meg kell határoznunk (a továbbiakban a  $V$  argumentumot nem mindig írjuk ki). Egyenlőre csak azt tudjuk róluk, hogy (190) miatt

$$\alpha(0) = \delta(0) = 0 \quad \beta(0) = \gamma(0) = 1. \quad (195)$$

Ezzel biztosítottuk, hogy konstans  $\vec{v}$ -hez konstans  $v'_x$  tartozik:

$$v'_x = \frac{\gamma v_x + \delta}{\alpha v_x + \beta},$$

de egyúttal azt is elértük, hogy a  $v'_y$ ,  $v'_z$  komponensek is konstansok. Például

$$v'_y = \frac{y'}{t'} = \frac{y}{\alpha x + \beta t} = \frac{v_y t}{\alpha v_x t + \beta t} = \frac{v_y}{\alpha v_x + \beta}$$

valóban független  $t$ -től.

Foglaljuk össze külön a tömegpont sebességének a transzformációját leíró ké-  
pleteket, amelyeket összefoglalóan a *sebességösszeadás törvényének* szokás nevezni:

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= \frac{\gamma v_x + \delta}{\alpha v_x + \beta} \\ v'_y &= \frac{v_y}{\alpha v_x + \beta} \\ v'_z &= \frac{v_z}{\alpha v_x + \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

<sup>29</sup>A homogén  $n$ -d fokú függvényekről ld. a Mechanika-jegyzet 1.16 fejezetét.

### 3.követelmény.

A (189)-nek olyan transzformációt kell kifejeznie, amely két egymáshoz képest  $V$  sebességgel mozgó rendszer között történik. Ezt a követelményt a sebességösszeadás törvényének a felhasználásával fogalmazhatjuk meg a legegyszerűbben.

A sebességösszeadás törvénye természetesen akkor is érvényes, amikor a tömegpont a  $\mathcal{K}'$  origójában nyugszik. Ekkor  $(v'_x, v'_y, v'_z) = (0, 0, 0)$  és —mivel  $\mathcal{K}'$   $V$  sebességgel mozog  $\mathcal{K}$ -hoz képest, —  $(v_x, v_y, v_z) = (V, 0, 0)$ . Ha ezeket (196)-be írjuk, a  $0 = \gamma V + \delta$  feltételre jutunk.

Amikor — megfordítva, — a tömegpont  $\mathcal{K}$  origójában nyugszik, azaz  $(v_x, v_y, v_z) = (0, 0, 0)$  és  $(v'_x, v'_y, v'_z) = (-V, 0, 0)$ , a (196) szerint  $-V = \delta/\beta$ .

A két feltétel a

$$\begin{aligned}\beta &= \gamma \\ \delta &= -\gamma V\end{aligned}$$

formában is felírható. Ennek felhasználásával a (194) transzformációs törvény és a sebességösszeadás törvénye a következő alakot ölti:

$$\left. \begin{aligned}t' &= \alpha x + \gamma t \\ x' &= \gamma(x - Vt)\end{aligned} \right\} \quad (197)$$

$$\left. \begin{aligned}v'_x &= \frac{\gamma(V)(v_x - V)}{\alpha(V)v_x + \gamma(V)} \\ v'_y &= \frac{v_y}{\alpha(V)v_x + \gamma(V)} \\ v'_z &= \frac{v_z}{\alpha(V)v_x + \gamma(V)}\end{aligned} \right\} \quad (198)$$

### 4.követelmény.

A  $\mathcal{K}$  és a  $\mathcal{K}'$  relatív orientációjára és mozgására vonatkozó eddigi megállapodásaink nem rögzítik egyértelműen a két koordinátarendszer orientációját. Ha pl. az  $O$  és az  $O'$  origók mozgását változatlanul hagyjuk, de mindkét rendszert a saját  $z$ -tengelye körül  $180^\circ$ -al elforgatjuk, újra a megállapodásainknak megfelelő helyzethez jutunk. Nyilvánvaló, hogy a keresett transzformációs törvény nem tehet különbséget a kétfajta orientáció között.

Amikor a jelzett  $180^\circ$ -os forgatásokat elvégezzük, a sebességösszeadás törvényében szereplő  $v_x$  és  $v_y$ , valamint  $v'_x$  és  $v'_y$  sebességkomponensek — amelyek valamilyen mozgó tömegpont sebességkomponensei, — előjelet váltanak, és előjelet vált a képletben szereplő  $V$  is. A  $v_z$  és a  $v'_z$  azonban változatlan marad. A (198) csak akkor fér össze ezekkel a változásokkal, ha a  $\gamma(V)$  függvény, valamint a nevező — amely mindhárom képletben azonos, — változatlan marad, azaz ha

$$\gamma(-V) = \gamma(V) \quad \alpha(-V) = -\alpha(V). \quad (199)$$

Látjuk, hogy a  $\gamma(V)$  függvénynek páros, az  $\alpha(V)$ -nek páratlan függvénynek kell lennie (ez a követelmény összefér (195)-el).

**5.követelmény.**

Mivel  $\mathcal{K}$  és  $\mathcal{K}'$  két egyenértékű inerciarendszer, a  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$  áttérés szabályának meg kell egyeznie a  $\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}$  áttérés szabályával, ha a  $V$  előjelét megváltoztatjuk benne.

A  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$  áttérés szabályát (197) rögzíti:

$$\left. \begin{aligned} t' &= \alpha(V)x + \gamma(V)t \\ x' &= \gamma(V)(x - Vt). \end{aligned} \right\} \quad (200)$$

A  $\mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}$  áttérés szabálya akkor lesz *ugyanaz*, ha

$$\begin{aligned} t &= \alpha(-V)x' + \gamma(-V)t' \\ x &= \gamma(-V)(x' + Vt'), \end{aligned}$$

amely a (199) következtében a

$$\left. \begin{aligned} t &= -\alpha(V)x' + \gamma(V)t' \\ x &= \gamma(V)(x' + Vt') \end{aligned} \right\} \quad (201)$$

formában is írható.

Ha azonban a (200)-t megoldjuk  $t$ -re és  $x$ -re, csak akkor kapjuk megoldásként (201)-t, ha az egyenlet determinánsa 1-el egyenlő:

$$\gamma^2 + \alpha\gamma V = 1.$$

Ebből az egyenletből kifejezhetjük  $\alpha$ -t a  $\gamma$ -n keresztül:

$$\alpha = \frac{1 - \gamma^2}{V \cdot \gamma}.$$

Ennek következtében a (197) transzformációs törvény és a sebességösszeadás (198) törvénye a következő alakot veszi fel:

$$\left. \begin{aligned} t' &= \frac{1}{V \cdot \gamma} [(1 - \gamma^2)x + V\gamma^2 t] \\ x' &= \gamma \cdot (x - Vt) \end{aligned} \right\} \quad (202)$$

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= \frac{(v_x - V) \cdot V \cdot \gamma^2}{v_x + (V - v_x) \cdot \gamma^2} \\ v'_y &= \frac{v_y \cdot V \cdot \gamma}{v_x + (V - v_x) \cdot \gamma^2} \\ v'_z &= \frac{v_z \cdot V \cdot \gamma}{v_x + (V - v_x) \cdot \gamma^2} \end{aligned} \right\} \quad (203)$$

### 6.követelmény.

Használjuk ki végül azt a nyilvánvalónak látszó tényt, hogy az egyidejűség Galilei-invariáns. Ezen azt értjük, hogy ha két esemény egyidejű  $\mathcal{K}$ -ban, akkor  $\mathcal{K}'$ -ben is az.

Történjen az  $E_1$  és az  $E_2$  esemény a  $\mathcal{K}$   $x_1, y_1, z_1$ , illetve  $x_2, y_2, z_2$  pontjában a  $t_1, t_2$  pillanatban. Az  $E_1$  és az  $E_2$   $\mathcal{K}'$ -beli időpontját (202) első egyenlete segítségével határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned}t'_1 &= \frac{1}{V \cdot \gamma} [(1 - \gamma^2)x_1 + V\gamma^2 t_1] \\t'_2 &= \frac{1}{V \cdot \gamma} [(1 - \gamma^2)x_2 + V\gamma^2 t_2],\end{aligned}$$

ahonnan

$$t'_1 - t'_2 = \frac{1}{V \cdot \gamma} [(1 - \gamma^2)(x_1 - x_2) + V\gamma^2(t_1 - t_2)]. \quad (204)$$

Ha  $\mathcal{K}$  -ban a két esemény egyidejű ( $t_1 = t_2$ ), akkor a  $\mathcal{K}'$ -beli egyidejűség ( $t'_1 = t'_2$ ) feltétele nyilván a  $\gamma^2 = 1$  egyenlőség teljesülése, amely (195) következtében  $\gamma = +1$ -el ekvivalens. Ezt (202)-be és (203)-ba írva kapjuk meg a Galilei-transzformáció (187) képleteit, valamint a sebességösszeadás törvényének (188) formáját, amely a Galilei-transzformációnak felel meg.

A (188) alakja indokolja a sebességösszeadás elnevezést a sebesség transzformációs törvényére. Szavakban így fogalmazható meg: egy tömegpont  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyított sebessége a  $\mathcal{K}'$   $\mathcal{K}$ -hoz viszonyított sebességének és a tömegpont  $\mathcal{K}'$ -höz viszonyított sebességének algebrai összege.

Vegyük észre, hogy az egyidejűség invarianciájának a megkövetelése nemcsak abban jelentkezik, hogy a transzformáció első sora az ennek megfelelő  $t' = t$  egyszerű alakot veszi fel, hanem befolyásolja a második sort, a koordináta transzformációs törvényét is. Amikor az  $x' = x - Vt$  képletet "kapásból" felírjuk, bizonyosan nem adunk magunknak számot arról, hogy ezzel hallgatólagosan az egyidejűség invarianciáját is kihasználtuk.

## 2.44 A relativitáselmélet két posztulátuma

Amikor a 2.41 fejezetben arra a következtetésre jutottunk, hogy a fény sebessége általában irányfüggő (csak az inerciarendszerek egyikében lehet izotróp), a sebességösszeadás (Galilei-transzformációhoz tartozó) törvényére támaszkodtunk. A (183) levezetésénél pl. úgy okoskodtunk, hogy ha a fénysebesség  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyítva  $c$  ( $v_x = c, v_y = v_z = 0$ ), akkor  $\mathcal{K}'$ -hez viszonyítva  $c - V$  ( $v'_x = c - V, v'_y = v'_z = 0$ ). Pontosan ezt kapjuk (188) alapján, ha a fényre alkalmazzuk.

A Michelson-Morley kísérlet szerint azonban a fény sebessége minden inerciarendszerben minden irányban  $c$ , vagyis ha  $v_x = c, v_y = v_z = 0$ , akkor  $v'_x = c, v'_y = v'_z = 0$ . Ez nyilván súlyosan ellentmond (188)-nak.

Einstein gondolt először arra, hogy változtatni kellene a Galilei-transzformációra vezető követelményeken úgy, hogy a megváltozott transzformációs törvényhez, amit így kapunk, olyan új sebességösszeadási törvény tartozzon, amely a Michelson-Morley kísérlet eredményével összefér<sup>30</sup>. Természetesen az új transzformációs és sebességösszeadási törvény nem mondhat ellent a régieknek ott, ahol azokat a tapasztalat kellően igazolta.

Ha az előző fejezet hat követelményét sorra vesszük, azt találjuk, hogy az első ötöt semmiképpen sem változtathatjuk meg, hiszen ezek annak a transzformációnak a *fogalmából* következnek, amely a vizsgálat tárgyát képezi. A 6.követelmény természete azonban nem ilyen: ha *csak ezt* a követelményt adjuk fel, a transzformációnk még mindig inerciarendszerek közötti átmenetet ír le (2.követelmény), amelyek  $V$ , ill.  $-V$  sebességgel mozognak egymáshoz képest (3.követelmény) és a  $t = t' = 0$  pillanatban fedik egymást (1.követelmény), térbeli orientációjuk nem játszik szerepet a transzformációs törvényben (4.követelmény), és — végül — ugyanaz a törvény írja le a koordinátarendszerek közötti átmenetet mindkét irányban (5.követelmény).

A keresett transzformációs törvény *fogalma* tehát megengedi, hogy az egyidejűség invarianciáját feladjuk. A következő fejezetben megmutatjuk, hogy a tapasztalat sem követeli a fenntartását. Ezért logikus, hogy a Michelson-Morley kísérlet értelmezését úgy kíséreljük meg, hogy az egyidejűség invarianciája helyett a *fénysebesség invarianciáját* követeljük meg, és ebből határozzuk meg a még ismeretlen  $\gamma(V)$  függvényt.

A fénysebesség invarianciája azt jelenti, hogy ha a (203) sebességösszeadási törvényben, amelyben  $\gamma$   $V$ -függése még nincs rögzítve, a jobboldalon  $v_x = c-t$  írunk, akkor a baloldalon minden  $V$ -nél  $v'_x = c-t$  kell kapnunk eredményül:

$$c = \frac{(c - V) \cdot V \cdot \gamma^2}{c + (V - c) \cdot \gamma^2},$$

ahonnan (195) felhasználásával

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (205)$$

Ezt (202)-be írva kapjuk a *Lorentz-transzformáció* képletét, amelyben újra feltün-

---

<sup>30</sup>A történeti hűség kedvéért megjegyezzük, hogy a relativitáselmélet megalkotásában a Michelson-Morley kísérletnek nem volt olyan meghatározó szerepe, mint a jelen tárgyalásban. Einstein a Michelson-Morley kísérlettől független megfontolások alapján jutott arra a következtetésre, hogy a fénysebesség minden inerciarendszerben izotróp.

tetjük az  $y$  és a  $z$  koordináta transzformációját is:

$$\left. \begin{aligned} t' &= \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z. \end{aligned} \right\} \quad (206)$$

A sebességösszeadás ennek megfelelő (*relativisztikus*) törvényét a (203)-ból kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \\ v'_y &= \frac{v_y \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \\ v'_z &= \frac{v_z \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (207)$$

Az inverz transzformációkat a vesszős és a vesszőtlen mennyiségek felcserélésével és a  $V$  előjelének a megváltoztatásával kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ x &= \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \right\} \quad (208)$$



$$\left. \begin{aligned}
v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \\
v_y &= \frac{v'_y \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \\
v_z &= \frac{v'_z \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}.
\end{aligned} \right\} \quad (209)$$

A relativitáselmélet 1.posztulátuma azt mondja ki, hogy a *Galilei-féle relativitási elv minden fizikai folyamatra érvényes* (a fény terjedésére is). A posztulátumba beleértendő, hogy amikor az események térkoordinátáit és időpontját az egyik inerciarendszertől a másikba számítjuk át, nem a Galilei-transzformáció, hanem a Lorentz-transzformáció képleteit kell használni. Ennek megfelelően a sebességek átszámításánál a relativisztikus sebességösszeadási törvény alkalmazandó.

A 2.posztulátum szerint *a természetben előforduló maximális sebesség a fénysebesség*. Ennek a posztulátumnak a diszkussziójára később térünk ki.

65.Feladat: Igazoljuk, hogy ha az előforduló sebességek sokkal kisebbek, mint a fénysebesség, a Lorentz-transzformáció képlete és a relativisztikus sebességösszeadási törvény a megfelelő Galilei-féle formulákba megy át.

Igazolás: A relativisztikus képletek csupa olyan tagban különböznek a Galilei-féléktől, amelyek két sebesség szorzatának (vagy az egyik négyzetének) és a fénysebesség négyzetének a hányadosai. Ebből az észrevételből már következik az állítás. A hiba, amit a Galilei-féle képletek alkalmazásával elkövetünk (sebesség/c)<sup>2</sup> rendű, tehát pl. a Föld keringésének a tárgyalásánál  $\approx 10^{-8}$ . Ezért lehetett a relativitáselmélet előtt is nagy pontossággal tárgyalni a Naprendszer bolygóinak mozgását.♣

66.Feladat: Két űrhajó egymással ellentétes irányban repül az irányítóközponthoz képest (amely inerciarendszer)  $c/2$  sebességgel. Számítsuk ki a relatív sebességüket mind a Galilei-féle, mind pedig a relativisztikus sebességösszeadási képlet segítségével.

Megoldás: Mozogjon az 1.űrhajó pozitív irányban és legyen ő a  $\mathcal{K}'$  rendszer. Akkor  $V = c/2$ . A 2.űrhajó sebessége  $\mathcal{K}$ -ban (az irányító inerciarendszerében)  $v_x = -c/2$ . A relatív sebesség a 2.űrhajó  $\mathcal{K}'$ -beli sebessége:

$$v_{x'} = \begin{cases} v_x - V = -c & \text{Galilei} \\ \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} = -\frac{4}{5}c & \text{relativisztikus.} \end{cases}$$

A valódi relatív sebesség kisebb, mint a fénysebesség. ♣

67.Feladat: A  $\mathcal{K}'$  origójában teleszkópot helyezünk el, amely egy nagyon távoli csillagra van irányítva. A csillag a  $\mathcal{K}$ -ban nyugszik, a fénye a  $z$ -tengely irányából, azzal párhuzamosan érkezik. Milyen irányban látja az  $O'$  megfigyelő a csillagot?

Megoldás: A csillag fényének sebességkomponensei  $\mathcal{K}$ -ban  $(v_x, v_y, v_z) = (0, 0, -c)$ . A  $\mathcal{K}'$ -beli komponensek

$$\begin{aligned} v_{x'} &= -V \\ v_{y'} &= 0 & (\text{Galilei}) \\ v_{z'} &= -c, \\ v_{x'} &= -V \\ v_{y'} &= 0 \\ v_{z'} &= -c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. & (\text{relativisztikus}) \end{aligned}$$

A távcső tengelyének párhuzamosnak kell lennie a csillag fényének a sebességével, ezért a  $\mathcal{K}'$ -ben a csillagra irányított távcső olyan  $\alpha$  szöget zár be a  $z'$  tengellyel, amelynek tangense

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{x'}}{v_{z'}} = \begin{cases} \frac{V}{c} & \text{Galilei} \\ \frac{V}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & \text{relativisztikus.} \end{cases}$$

Látjuk, hogy ha  $(V/c)^2 \ll 1$ , mindkét módon ugyanazt a szöget kapjuk, ami azért nagyon jó, mert már kb. 200 éve ismeretes, hogy a Föld keringésének a következtében minden csillag egy év alatt egy kis ellipszist tesz meg — látszólag — az égen (*aberráció*), amelynek nyílásszöge a keringési sebesség és a fénysebesség hányadosa. ♣

68.Feladat: Az  $O'$  megfigyelő  $V = c/4$  sebességgel mozog  $O$ -hoz képest ( $\mathcal{K}$  és  $\mathcal{K}'$  relatív helyzete a szokásos). Amikor az  $x = a$  pontba ér,  $3/4 \cdot c$  sebességű lövedéket indít  $O$  felé. Határozzuk meg a lövedék pályáját  $\mathcal{K}$ -ban.

Megoldás: Mindenekelőtt megjegyezzük, hogy a “lövedék sebessége ennyi meg ennyi” kifejezés mindig az ágyúhoz viszonyított sebességet jelenti<sup>31</sup>.

<sup>31</sup>Ha lövedék helyett fény kibocsátásáról lenne szó, akkor erre a megjegyzésre természetesen nem lenne szükség, mert a fénysebesség mindenkihez képest ugyanaz.

A keresett pályaegyenlet

$$x = a + v_x(t - t_l), \quad (t \geq t_l)$$

ahol  $t_l = a/V = 4a/c$  a kilövés időpontja  $\mathcal{K}$ -ban. A feladat szerint  $v_{x'} = -3/4 \cdot c$ , ezért

$$v_x = \frac{v_{x'} + V}{1 + \frac{v_{x'} V}{c^2}} = -\frac{8}{13}c,$$

tehát

$$x = \frac{33}{13}a - \frac{8}{13}ct \quad (t \geq \frac{4a}{c}). \clubsuit$$

69.Feladat: Határozzuk meg az előző feladatban a lövedék pályáját  $\mathcal{K}'$ -hez képest.

Megoldás:

$$x' = v_{x'}(t' - t_l) = -\frac{3}{4}c(t' - t_l) \quad (t' \geq t_l'),$$

ahol  $t_l'$  a kilövés  $\mathcal{K}'$ -beli időpontja:

$$t_l' = \frac{t_l - \frac{V}{c^2}a}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{a}{V} \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{a}{c}.$$

Így

$$x' = \frac{3\sqrt{15}}{8}a - \frac{3}{4}ct' \quad \left(t' \geq \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{a}{c}\right). \clubsuit$$

70.Feladat: A  $\mathcal{K}$  és a  $\mathcal{K}'$  relatív mozgása a szokásos,  $V < c$ .  $O$  és  $O'$  ugyanannak az objektumnak a mozgását figyelik, amelynek a sebességét — pályájának egy adott pontján —  $O$   $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ -nek,  $O'$  pedig  $v' = \sqrt{v_{x'}^2 + v_{y'}^2 + v_{z'}^2}$ -nek találja. Mutassuk meg, hogy

$$v' \begin{cases} < c & ha & v < c \\ = c & ha & v = c \\ > c & ha & v > c. \end{cases}$$

Igazolás:

$$\begin{aligned}
v'^2 &= \frac{1}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)^2} \left[ v^2 - 2v_x V + V^2 \left(1 - \frac{v_y^2 + v_z^2}{c^2}\right) \right] = \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)^2} \left[ v^2 - 2v_x V + V^2 \left(1 - \frac{v^2 - v_x^2}{c^2}\right) \right] = \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)^2} \left[ c^2 \left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)^2 - (c^2 - v^2) \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \right] = \\
&= c^2 - (c^2 - v^2) \cdot \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v_x V}{c^2}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Az utolsó tagban a tört pozitív szám és ebből következik az állítás.♣

Megjegyzések:

1) Látjuk, hogy a fénysebesség minden megfigyelő számára ugyanaz, *függetlenül a fénynyaláb irányától*<sup>32</sup>. Ezzel nyer magyarázatot a Michelson-Morley kísérlet negatív eredménye.

2) Ha léteznének féynél nagyobb sebességű objektumok (*tachionok*), akkor azok minden vonatkoztatási rendszerben a féynél gyorsabban mozognának. A 2. posztulátum kizárja ilyen objektumok létezését.

3) Egy objektum (rakéta) nem gyorsítható fel fénysebességre. Tegyük fel, hogy a rakéta a  $\mathcal{K}$ -ban nyugvó bázisról elindulva már megközelítette a fénysebességet. Szemlélhetjük azonban a rakétát egy olyan  $\mathcal{K}'$ -ből is, amelyhez képest éppen nyugszik. Mivel  $\mathcal{K}$  és  $\mathcal{K}'$  két egyenértékű inerciarendszer és a fény sebessége mindkettőben ugyanakkora, ezért a rakéta még pontosan ugyanolyan "messze van" a fénysebességtől, mint amikor elindult.

4) Ha az  $O$  és az  $O'$  megfigyelő valaha is lehetett — vagy a későbbiekben majd lehet — egymáshoz képest nyugalomban (amit felteszünk), akkor relatív sebességük az előző pont alapján a fénysebességnél bizonyosan kisebb. Ez indokolja a feladatban — és a további hasonló esetekben — a  $V < c$  kikötést.

---

<sup>32</sup>A 2.45 fejezetben a fényterjedés iránya speciális volt, megegyezett a  $\mathcal{K}'$  sebességének az irányával.

## 2.45 Az egyidejűség analízise

Egy  $l$  hosszúságú vonat közepéről indított fényjel segítségével egy-egy petárdát robbantunk fel a vonat elején és végén. Milyenek találják a robbanások időbeli sorrendjét a vonaton utazók és a pályaudvaron várakozók?

Természetesen feltesszük, hogy a pálya nyílegyenes, a vonat sebessége egyenletes és  $V$  nagyságú, ezért rögzíthető hozzá egy inerciarendszer, amely a  $\mathcal{K}'$  lesz. A  $\mathcal{K}$  inerciarendszer szerepét a pályaudvar (a sínpálya) játssza.

A robbanások riadalmat keltenek, és az utasok közül sokan összeszaladnak a vonaton is és a pályaudvaron is. A robbanások sorrendjére vonatkozóan nem tudnak dűlőre jutni. A vonaton pl. az, aki a vonat végéhez közel tartózkodott, azt állítja, hogy a robbanás a vonat végén történt először, aki azonban a vonat elejéhez volt közel, pont fordítva észlelte.

Végül valakinek eszébe jut, hogy a hang véges terjedési sebessége okozza a zavart. Szerencsére az egyik utas a robbanás pillanatában éppen a vonat végén tartózkodott, és ideálisan pontos órája segítségével megállapította a robbanás pontos idejét. Hasonló véletlen folytán a vonat elején történt robbanás időpontját is megállapította valaki. Kiderült, hogy a két óra pontosan ugyanazt az időt mutatta a robbanások időpontjában, a robbanások tehát egyidejűek voltak.

A várakozók is felismerik a hangterjedés torzító hatását. Szerencsére a vonat eleje a robbanás pillanatában éppen az egyik várakozó orra előtt haladt el, aki a szintén ideálisan pontos órájára rápillantva rögzítette az időpontot. Egy másik várakozó ugyanilyen módon megállapította a vonat végén bekövetkezett robbanás időpontját és az időpontjaikat összehasonlítva azt találták, hogy a vonat végén a robbanás előbb történt, mint az elején.

Ez a tapasztalat a fényterjedés Einstein előtti felfogásával sehogyan sem egyeztethető össze. Egy akkori fizikus így okoskodott volna:

“Sajnos nem tudom, melyik az az inerciarendszer, amelyikben a fény minden irányban azonos módon terjed. Tegyük fel, hogy az állomáshoz rögzített  $\mathcal{K}$  az, ezért célszerűnek látszik, hogy a robbanások időpontjait a pályaudvaron várakozók szemszögéből számítsam ki.

Legyen  $t_v$  az az idő, ami alatt a fényjel a vonat közepéről a végére ért. Ezalatt a fényjel és a vonat vége összesen  $l/2$  utat tett meg, azaz

$$ct_v + Vt_v = \frac{l}{2},$$

ahonnan

$$t_v = \frac{l}{2(c + V)}.$$

Teljesen hasonló módon, az ugyanakkor indított másik fényjel

$$t_e = \frac{l}{2(c - V)}$$

idő alatt ért a vonat elejére. Látszik, hogy  $t_v < t_e$ , pontosan úgy, ahogy a várakozók megállapították.

De a vonaton utazóknak ugyanezt kellett volna kapniuk! A vonathoz képest a fénysebesség ugyanis nem izotróp, a vége irányába  $c_v = c + V$ , az eleje irányába pedig  $c_e = c - V$ . Ebből nyilvánvaló, hogy a vonat végén az  $\frac{l}{2c_v}$ , az elején pedig az  $\frac{l}{2c_e}$  időpontban következtek be a robbanások, tehát ugyanabban a két időpillanatban, amit a várakozók megállapítottak.

Természetesen lehet, hogy nem a pályaudvar az az inerciarendszer, amiben a fénysebesség izotróp, és ez bizonytalanná teszi az események sorrendjének a kiszámítását. Az azonban egészen bizonyos, hogy *az utazók és a várakozók által tapasztalt időpontok nem különbözhetnek egymástól*. Ehhez nincs is szükség külön számításra, hiszen a Galilei-transzformáció szerint  $t'_v = t_v$ ,  $t'_e = t_e$ .

A relativitáselmélet szerint az események interpretációja egyszerűbb, mert egyértelmű: a fény sebessége az utasokhoz képest is, a várakozókhoz képest is minden irányban  $c$ -vel egyenlő. Az utasok által kapott eredmény nyilvánvalóan helyes, míg a  $t_v$ ,  $t_e$  időpontok a robbanások a  $\mathcal{K}'$ -beli helye és időpontja alapján a (208) Lorentz-transzformáció segítségével számíthatók ki.

A  $\mathcal{K}'$ -ben mindkét robbanás  $t'$  időpontja  $l/2c$ , míg a vonat végén történő robbanás  $x'$  koordinátája  $-l/2$ , a vonat elején bekövetkező robbanásé pedig  $+l/2$ . Ezeknek az adatoknak az alapján a (208) szerint

$$t_v = \frac{\frac{l}{2c} - \frac{V}{c^2} \cdot \frac{l}{2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{l \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{2(c + V)},$$

$$t_e = \frac{\frac{l}{2c} + \frac{V}{c^2} \cdot \frac{l}{2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{l \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{2(c - V)}.$$

Nem okozhat meglepetést, hogy a robbanások egyidejűsége csak az egyik inerciarendszerben áll fenn: a fénysebesség invarianciájáért az egyidejűség invarianciáját adtuk cserébe.

Természetesen általános formában is belátható, hogy *az egyidejűség nem Lorentz-invariáns*. Írjuk be  $\gamma$  (205)-beli kifejezését (204)-be:

$$t'_1 - t'_2 = -\frac{\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \cdot (x_1 - x_2) + \frac{t_1 - t_2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (210)$$

Ha  $E_1$  és  $E_2$   $\mathcal{K}$ -ban egyidejű ( $t_1 = t_2$ ), akkor  $\mathcal{K}'$ -ben csak  $x_1 = x_2$ -nél lesz egyidejű, általában azonban nem.

A vonatós példa világosan mutatja, hogy az egyidejűség invarianciáját nem lehet megkövetelni se a tapasztalatra, se elvi okokra hivatkozva. A tapasztalatra azért nem lehet hivatkozni, mert — mint látjuk, — a relativitáselmélet előtti és a relativisztikus képletek csupán egy a  $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$  faktorban különböznek egymástól, és ez a különbség a földi kísérletekben realizálható  $V$ -k kicsisége miatt nem mutatható ki. Elvi ok pedig azért nincs, mert az események időpontjait  $\mathcal{K}$ -ban és  $\mathcal{K}'$ -ben két különböző órapár segítségével határozzuk meg, és nincs logikai ellentmondás abban, ha két adott eseménynél az egyik pár egyidejűséget, a másik időkülönbséget mutat.

Ennek a példának a tanúsága alapján akkor járunk el helyesen, ha úgy képzeljük, hogy minden inerciarendszer sűrűn “tele van hintve” az adott inerciarendszerben nyugvó tökéletesen azonos szerkezetű ideális órákkal, és betartjuk a következő szabályt: *Egy esemény időpontját minden inerciarendszerben annak az órának a mutatóállása alapján kell megállapítani, amely az esemény helyén tartózkodik.* Az órák szinkronizálása (összeigazítása) minden inerciarendszerben azonos recept szerint történik (hiszen az inerciarendszerek minden szempontból egyenértékűek), pl. úgy, hogy egy standard órát nagyon lassan végigviszünk a szétszórt órák mellett és mindegyiken a standard óra idejét állítjuk be. A  $\mathcal{K}$ -ban nyugvó órákat ezután már nem igazíthatjuk össze a  $\mathcal{K}'$ -ben nyugvó órákkal is. Csak annyit tehetünk, hogy a különböző inerciarendszerek origóbéli óráit a találkozásuk pillanatában állítjuk nulla időpontra, és az egyes inerciarendszereken belüli órák szinkronizálását csak ezután végezzük el. *A Lorentz-transzformáció képletei ennek az elképzelt legtermészetesebb szinkronizálási eljárásnak felelnek meg*<sup>33</sup> : ha valamilyen más szinkronizálási eljárást követnénk, a Lorentz-transzformáció képleteit megfelelően meg kellene változtatni.

Az ismertetett eljárással minden óra mutatóállását egyértelműen rögzítjük és semmi okunk sincs azt várni, hogy az egyik inerciarendszer valamelyik kiválasztott órája állandóan szinkronban legyen a többi inerciarendszer azon óráival, amelyek mellett sorban végighalad. A következő fejezetben meglátjuk, hogy nincs is velük szinkronban (késik hozzájuk képest).

## 2.46 Az idődilatáció

71. Feladat: Mennyi idő telik el a  $\mathcal{K}'$  origójában nyugvó  $\mathcal{O}'_o$  órán, mialatt a  $\mathcal{K}$  rendszer  $OX$  tengelyén az  $x = a$  ponttól az  $x = b > a$  pontba ér?

Megoldás: A  $\mathcal{K}$ -ban “szétszórt” órák közül legyen  $\mathcal{O}_a$  az, amely az  $x = a$ -ban,  $\mathcal{O}_b$  pedig az, amelyik az  $x = b$ -ben nyugszik. Az  $\mathcal{O}'_o$  találkozása az  $\mathcal{O}_a$ -val és az  $\mathcal{O}_b$ -vel legyen az  $E_a$  és az  $E_b$  esemény.

1.gondolatmenet: A keresett időkülönbség

<sup>33</sup>A relativitáselmélet megjelenése előtt ugyanehhez a szinkronizálási eljáráshoz a Galilei-transzformációt rendelték hozzá.

$$\Delta t' \equiv t'_b - t'_a = \frac{t_b - t_a}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{\frac{V}{c^2} \cdot (x_b - x_a)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (211)$$

A jobboldalon

$$x_b - x_a = b - a = V \cdot (t_b - t_a) \equiv V \cdot \Delta t,$$

ezért

$$\Delta t' = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \cdot \Delta t < \Delta t. \quad (212)$$

2.gondolatmenet: Induljunk ki (211) inverzéből:

$$\Delta t \equiv t_b - t_a = \frac{t'_b - t'_a}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + \frac{\frac{V}{c^2} \cdot (x'_b - x'_a)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (213)$$

Mivel  $E_a$  és  $E_b$   $\mathcal{K}$ -ben azonos helyen történik ( $x'_b = x'_a = 0$ ), azonnal megkapjuk (212)-t.

Konklúzió: A  $\mathcal{K}'$  origójában nyugvó óra késik a  $\mathcal{K}$ -ban nyugvó órákhoz képest, amelyek mellett elhalad, vagy — ami ugyanaz —, amelyek mellett elhaladnak mellette.♣

72.Feladat: Mennyi idő telik el a  $\mathcal{K}$  origójában nyugvó  $\mathcal{O}_o$  órán, miközben a  $\mathcal{K}'$   $\mathcal{O}'X'$  tengelyén az  $x' = b$  pontban, majd az  $x' = a < b$  pontban nyugvó óra elhalad mellette?

Megoldás: A szóban forgó két óra legyen  $\mathcal{O}'_a$  és  $\mathcal{O}'_b$ , a két találkozási esemény pedig  $E'_a$  és  $E'_b$ . Mivel  $x_a = x_b = 0$ , ezért

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > \Delta t. \quad (214)$$

Konklúzió: A  $\mathcal{K}$  origójában nyugvó óra késik a  $\mathcal{K}'$ -ben nyugvó órákhoz képest, amelyek mellett elhaladnak mellette, vagy — ami ugyanaz —, amelyek mellett elhalad.♣

A két előző feladat eredménye így foglalható egybe: Ha az egyik inerciarendszer egy meghatározott  $\mathcal{O}$  óráját egy másik inerciarendszer azon óráival hasonlítjuk össze, amelyekkel találkozik, azt találjuk, hogy  $\mathcal{O}$  késik.

1.Következmény: Két esemény között abban a vonatkoztatási rendszerben telik el a legrövidebb idő, amelyben mindkét esemény időpontja ugyanazon az órán olvasható le, azaz, amelyben az események azonos helyen történnek. Ezt a legrövidebb időt nevezzük a két esemény *sajátidő-különbségének*. A sajátidő-különbséget  $\Delta\tau$ -val jelöljük.



2.Következmény: A mozgás következtében *minden* folyamat lelassul (*idődilatáció*).

Indoklás: Képzeljünk el egy vonaton egyenletes  $V$  sebességgel utazó embert. Két egymás utáni állomás órája mellett elhaladva az utas regisztrálja, hogy az órák szerint  $\Delta t$  idő telt el, a saját óráján azonban csak  $\Delta\tau = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < \Delta t$  idő múlt el (természetesen minden óra ideálisan pontos). A vonat inerciarendszer, amelyben minden jelenség ugyanúgy megy végbe, mint az utas megszokott otthonában, amely szintén inerciarendszer. Így pl. az utasunk szíve a vonaton a  $\Delta\tau$ -nak megfelelő számú dobban, ennek az időtartamnak megfelelően éhez meg, stb. A földön nyugvó órák szerint azonban eközben hosszabb idő telt el mint  $\Delta\tau$ , ezért a földi megfigyelők számára utasunk órájával együtt az életritmusa is lelassult, és nyilván ugyanez a helyzet minden elképzelhető folyamattal. Ezért mondhatjuk, hogy a vonatban *maga az idő* folyik lassabban, mint a földön.

Az idődilatació nem sérti az inerciarendszerek ekvivalenciáját, ugyanis bármely konkrét állomás órája lassabban jár, mint a vonaton elhelyezett összeszinkronizált órák, csak ezt nehéz észrevenni, mert a vonat nem elég hosszú (rendszerint sokkal rövidebb, mint két állomás távolsága): ezt a lelassulást ugyanis csak a vonat elején és végén elhelyett két darab óra alapján lehet megállapítani. Ha a vonat elég hosszú volna, azt is meg lehetne figyelni, hogy az állomásfőnök életritmusa lassabb, mint a vonaton ülőké.

Nem tudunk azonban egyelőre válaszolni arra a kérdésre, hogy ki öregszik lassabban, kiszemelt utasunk vagy a kiszemelt állomás főnöke. Az összehasonlításhoz ugyanis legalább kétszer kellene találkozniuk, de ez lehetetlen, mert a vonat, amelyben az utas nyugszik, inerciarendszer, és a sebessége állandó. Az *Ikerparadoxon* c. fejezetben visszatérünk a kérdésre.

73.Feladat: A  $\mu$ -mezon radioaktív, magától elektronra és neutrínóra bomlik. A nyugvó mezin élettartama  $\approx 10^{-6}$  s. Milyen hosszú a  $V = 0.9998c$  sebességgel repülő mezon  $\Delta t$  élettartama?

Válasz:

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - 0.9998^2}} \approx 50 \cdot \Delta\tau.$$

A  $\Delta t$  alatt megtett út  $\approx c \cdot 50 \cdot \Delta\tau \approx 15$  km, de ha nem lenne idődilatació, a megtett távolság csak kb. 300 m volna.

Az idődilatació teszi lehetővé, hogy a kozmikus sugárzás hatására a magaslégkörben keletkező mezonok jelentő része lejut a földfelszínre.♣

74.Feladat: A  $\mathcal{K}$  origójában nyugvó  $O$  megfigyelő  $\nu = 1/T$  frekvenciájú fényimpulzusokat bocsát ki, amelyeket az  $O$  felé  $V$  sebességgel közeledő  $O'$   $\nu' = 1/T'$  frekvenciájúnak talál. Határozzuk meg  $\nu$  és  $\nu'$  kapcsolatát (Doppler effektus).

Megoldás:A relativitáselmélet-előtti tárgyalást azzal kell kezdeni, hogy megállapítjuk, milyen inerciarendszerben izotróp a fényterjedés. Legyen ez — mondjuk

— a  $\mathcal{K}$ , amelynek  $O$  origójában történnek a fényfelvillanások, amelyeknek az ábrán az  $F_1, F_2, F_3, \dots$  pontok felelnek meg. A párhuzamos folytonos vonalak a fényjelek pályái, az  $O'$  pályáját az  $x = a - Vt$  vonal mutatja. Az  $E_1, E_2, E_3, \dots$  pontok az észlelési események.

Két egymás utáni észlelés időkülönbségét  $\mathcal{T}$ -vel jelöljük. Világos, hogy  $\mathcal{T} < T$ . Az  $\overline{AF_2} = \overline{E_1B} + \overline{BC}$  egyenlőségben  $\overline{AF_2} = cT$ ,  $\overline{E_1B} = VT$  és  $\overline{BC} = c\mathcal{T}$ , ezért

$$\mathcal{T} = \frac{T}{1 + \frac{V}{c}}. \quad (215)$$

A Galilei-felfogásban két esemény időkülönbsége minden inerciarendszerben ugyanaz, ezért

$$\left. \begin{aligned} T' &= \mathcal{T} = \frac{T}{1 + \frac{V}{c}} \\ \nu' &= \frac{1}{T'} = \nu \left(1 + \frac{V}{c}\right) \end{aligned} \right\} \text{(Galilei).}$$

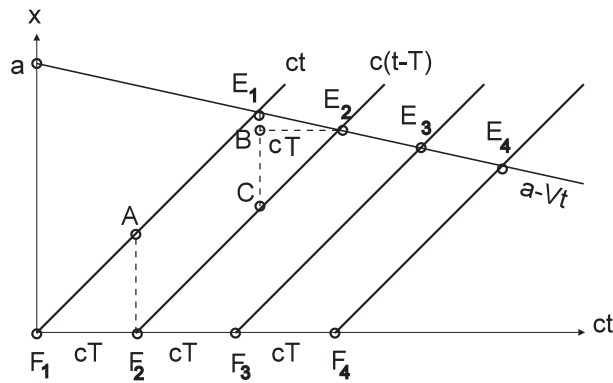


Figure 9:

A relativitáselmélet szerint a fényterjedés minden inerciarendszerben — és így  $\mathcal{K}$ -ban is — izotróp és a (215)-beli  $\mathcal{T}$  két észlelési esemény között eltelt idő  $\mathcal{K}$ -ban. Az észlelési események  $\mathcal{K}'$ -beli időkülönbsége az ennek megfelelő sajátidő-különbség,

ugyanis az észlelési események  $\mathcal{K}'$ -ben történnek ugyanazon a helyen. Ezért

$$\left. \begin{aligned} T' &= T \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = T \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c}} = T \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}} \\ \nu' &= \nu \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}} \end{aligned} \right\} \text{(relativisztikus). (216)}$$

Ez a képlet akkor érvényes, amikor a fényforrás és az észlelő közelednek egymáshoz. A távolodásnál érvényes képletet  $V \rightarrow -V$  helyettesítéssel kapjuk.

A felvillanási események  $\mathcal{K}$ -ban történnek ugyanazon a helyen, ezért  $T$  a sajátidő-különbségük. Két ilyen esemény időkülönbsége  $\mathcal{K}'$ -ből nézve

$$\Delta t'_F = \begin{cases} T & \text{(Galilei)} \\ \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & \text{(relativisztikus.)} \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy  $\mathcal{K}'$ -ben az összes észlelési esemény időpontját ugyanazon az órán, a felvillanási események mindegyikének az időpontját más-más órán olvassuk le. ♣

75. Feladat: Egy mozgó vonat hosszát úgy lehet megmérni, hogy a pálya mentén órákkal ellátott segédek helyezünk el, és azt az utasítást adjuk nekik, hogy az előre rögzített  $t_0$  pillanatban emelje fel a kezét közülük az a kettő, aki ebben a pillanatban éppen a vonat elejét, illetve a végét látja maga előtt elhaladni. Nyilvánvaló, hogy e két segéd közötti  $a$  távolság a vonat hossza<sup>34</sup>. Számítsuk ki  $a$ -t, ha a vonat sebessége  $V$  és a vonattal együtt utazók a vonat hosszát  $l$ -nek találják.

Megoldás: A sínpályához rögzített rendszer  $\mathcal{K}$ , a vonathoz rögzített pedig  $\mathcal{K}'$ . Az  $E_e$  és az  $E_v$  az az esemény, amikor a vonat elejének ill. végének elhaladtát észlelő segéd felemeli a kezét. A  $\mathcal{K}$ -ban az  $E_e$  az  $x_e$  helyen a  $t_e = t_0$  pillanatban, az  $E_v$  az  $x_v$  helyen a  $t_v = t_0$  pillanatban történik, és  $x_e - x_v = a$ . A  $\mathcal{K}'$ -ben ugyanezen két esemény koordinátája  $x'_e$  és  $x'_v$ , és  $x'_e - x'_v = l$ . A Lorentz-transzformáció szerint

$$l = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}},$$

<sup>34</sup>Ha a kézfelemelés nem azonos időpontban történne, a két segéd közötti távolság a vonat hosszánál nagyobb vagy kisebb volna.

azaz

$$a = l\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

tehát a mozgásban lévő tárgy mozgásirányú mérete megrövidül (*Lorentz-kontrakció*). A nyugvó tárgy hossza (a példában az  $l$ ) a *nyugalmi hossz*.♣

## 2.47 Az ikerparadoxon

Folyamodjunk megint a vonat példához. A vonathoz rögzített vonatkoztatási rendszer a  $\mathcal{K}'$ , a pályaudvarhoz (sínpályához) rögzített rendszer a  $\mathcal{K}$ . Amikor a vonat áll a pályaudvaron, a rajta lévő  $\mathcal{O}'$  óra (koordinátája  $x' = 0$ ) szinkronban jár a vele praktikusan azonos helyen lévő  $\mathcal{O}$  pályaudvari órával (koordinátája  $x = 0$ ). A vonat a  $t = t' = 0$  pillanatban elindul, majd amikor a pályaudvari óra  $T$  időt mutat, visszaérkezik az eredeti helyére. Mekkora  $T'$  időt mutat a visszaérkezés pillanatában az  $\mathcal{O}'$  óra, amely végig a vonaton nyugodott?

A vonat egy pontjának — mondjuk az  $\mathcal{O}'$  órának — a pályáját (mozgását) az  $x = f(t)$  függvénnyel írhatjuk le a  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyítva ( $f(0) = f(T) = 0$ ). Válasszunk a  $(0, T)$  időintervallumban két infinteimálisan közeli  $t, t + dt$  időpillanatot. Legyen  $E_1$  az az esemény, hogy a vonat a  $t$  pillanatban az  $x(t)$  pontban van,  $E_2$  pedig az, hogy a  $t + dt$  pillanatban az  $x(t + dt)$ -ben van. A két esemény  $\mathcal{K}'$  ugyanazon pontjában (a  $\mathcal{K}'$  origójában) történt, ezért az  $\mathcal{O}'$ -n a két esemény között

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{V^2(t)}{c^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{df}{dt}\right)^2}$$

idő telt el. A képlet felírásánál felhasználtuk, hogy a két infinteimálisan közeli esemény között a vonat a konstansnak tekinthető  $V(t)$  sebességgel mozgott. A keresett  $T'$ -t ennek a képletnek az integrálásával kapjuk:

$$T' = \int_0^T d\tau = \int_0^T dt\sqrt{1 - \frac{V^2(t)}{c^2}} = \int_0^T dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{df}{dt}\right)^2}. \quad (217)$$

Mivel  $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \leq 1$ ,

$$T' \leq \int_0^T dt = T.$$

A vonaton rövidebb idő telik el, mint a pályaudvaron, az utas az állomásfőnökhöz képest fiatalabb lesz. Miért nem fordítva? Azért, mert  $\mathcal{K}$  inerciarendszer,  $\mathcal{K}'$  azonban nem, hiszen a vonatnak valahol gyorsulnia kellett ahhoz, hogy visszatérhessen. Ha egy ikerpár két tagja közül két találkozás között az egyik végig inerciarendszerben nyugodott, a másik azonban gyorsult és jelentős sebességre tett szert az előzőhöz képest (pl. űrutazásban vett részt), akkor ez utóbbi kevesebbet öregszik a találkozások között

— ez a példa sugallja az *ikerparadoxon* elnevezést. Ha a találkozások között mindkét testvér gyorsult, a (217)-beli integrál kiszámítása után lehet csak megmondani, melyik mennyivel fiatalodott a másikhoz képest.

## 2.48 A négyestávolság-négyzet

Legyen  $E_1$  és  $E_2$  két esemény, amelyek időkülönbsége és koordinátakülönbsége  $\mathcal{K}$ -ban  $\Delta t$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ . A két esemény négyestávolság-négyzetén a

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \quad (218)$$

kifejezést értjük. Ugyanezen eseménypár négyestávolság-négyzete  $\mathcal{K}'$ -ben természetesen

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2.$$

állítás: A négyestávolság Lorentz-invariáns, azaz

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2. \quad (219)$$

76.Feladat: A Lorentz-transzformáció segítségével igazoljuk (219)-t.♣

A négyestávolságnégyzetkifejezésben a *négyzet* félrevezető, mert azt sugallja, hogy  $\Delta s^2$  nem lehet negatív. A (218) definíció azonban mutatja, hogy a négyestávolságnégyzet nulla is, negatív is lehet. Ennek alapján az eseménypárokat három osztályba sorolhatjuk.

1) Ha  $\Delta s^2 = 0$ , az eseménypárt *fényszerűnek* nevezzük, mert a két eseményt össze lehet kötni fényjellel. Ha pl.  $\Delta t \equiv t_2 - t_1 > 0$  és  $E_1$  egy lámpa felvillanása, akkor az  $E_2$  lehet a fényjel észlelése, u.i.  $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 = 0$  következtében<sup>35</sup>  $\Delta t = \Delta l/c$ .

2) Ha  $\Delta s^2 > 0$ , akkor  $E_1$  és  $E_2$  *időszerű* eseménypár. Az időszerű eseménypárra (és csakis erre) igaz, hogy van olyan inerciarendszer, amelyben ugyanazon a helyen történnek (*nyugalmi rendszer*). Ez az a  $\mathcal{K}'$ , amelyik  $V = \Delta l/\Delta t$  sebességgel mozog  $\mathcal{K}$ -hoz képest. Ilyen inerciarendszer azért van, mert  $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta l^2 > 0$  következtében  $V < c$ . Mivel a négyestávolságnégyzet a  $\mathcal{K}'$  nyugalmi rendszerben is kiszámítható, látjuk, hogy időszerű eseménypárra  $\Delta s^2 = c^2 \Delta \tau^2$ .

3) Ha  $\Delta s^2 < 0$ , akkor az eseménypár *térszerű*. Található olyan  $\mathcal{K}'$ , amelyben egy ilyen eseménypár egyidejű. Legyen az egyszerűség kedvéért  $\Delta y = \Delta z = 0$ , és a  $\mathcal{K}'$  sebességét válasszuk  $V = c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x}$ -nek. Mivel  $\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 < 0$ ,  $V < c$ , és a Lorentz-transzformáció szerint

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2} \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = 0,$$

<sup>35</sup>Természetesen  $\Delta l^2 \equiv \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ .

tehát az eseménypár valóban egyidejű.

Ha  $V > c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x}$ , akkor  $\Delta t' < 0$ , tehát  $\mathcal{K}'$ -ben  $E_2$  előbb történik mint  $E_1$ , ha viszont  $V < c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x}$ , akkor  $\mathcal{K}'$ -ben az események sorrendje fordított. Ezért *egy térszerű eseménypár időbeli sorrendje nem invariáns*, függ attól, melyik inerciarendszerből figyeljük meg őket.

77.Feladat: Mutassuk meg, hogy egy fényszerű, vagy időszerű eseménypár időbeli sorrendje Lorentz-invariáns, azaz minden inerciarendszerben ugyanaz.

Igazolás: Legyen megint az egyszerűség kedvéért  $\Delta y = \Delta z = 0$ .

Ha az eseménypár fényszerű, akkor  $\Delta x = \pm c\Delta t$ , ezért

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1 \mp \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \cdot \Delta t.$$

A  $\Delta t$ -t szorzó tört bizonyosan pozitív, ezért  $\Delta t'$  előjele megegyezik  $\Delta t$  előjével.

Ha az eseménypár időszerű, akkor a  $\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$  képlet következtében —

amelyben  $V$  a nyugalmi rendszer sebessége  $\mathcal{K}$ -ban —, időbeli sorrendjük minden inerciarendszerben megegyezik a nyugalmi rendszerben érvényes időbeli sorrenddel.♣

## 2.49 A kauzalitási paradoxon és a 2.posztulátum

78.Feladat: Egy ágyú  $v$  sebességgel lövi ki a lövedéket (a  $v$  az ágyúhoz viszonyított sebesség). Tegyük fel, hogy  $O$  és  $O'$  egyaránt rendelkezik ilyen ágyúval. A  $\mathcal{K}$  és a  $\mathcal{K}'$  a szokásos,  $V < v$ . Az  $O$  a  $t = t_1$  pillanatban lövedéket lő ki  $O'$  felé, amelyet  $O'$  a becsapódás pillanatában viszonzoz. Számítsuk ki azt a  $t_2$  időpontot, amikor a válaszlövedék becsapódik  $O$ -ba.

Megoldás:

Az  $O'$  a  $\mathcal{K}$   $x = Vt$  trajektóriáján mozog. Az  $O$  által kilőtt lövedék trajektóriája  $\mathcal{K}$ -ban  $x = v(t - t_1)$ . Az  $O'$ -be történő becsapódás  $t_{O'}$  pillanatát a

$$Vt_{O'} = v(t_{O'} - t_1)$$

egyenlet határozza meg, amelyből

$$t_{O'} = \frac{v}{v - V}t_1. \quad (220)$$

Az  $O'$  ekkor a  $\mathcal{K}$

$$a = Vt_{O'} = \frac{Vv}{v - V}t_1 \quad (221)$$

koordinátájú pontjában van. Az általa kilőtt válaszlövedék sebessége  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyítva legyen  $u$ . A sebességösszeadás törvénye alapján

$$u = \frac{V - v}{1 - \frac{Vv}{c^2}}, \quad (222)$$

és a válaszlövedék trajektóriája  $\mathcal{K}$ -ban

$$x = a + u(t - t_{O'}).$$

Az  $O$ -ba érés  $t_2$  pillanatát a

$$0 = a + u(t_2 - t_{O'})$$

egyenlet határozza meg, amelyből

$$t_2 = t_{O'} - \frac{a}{u}.$$

A (220), (221), (222) behelyettesítése és némi átalakítás után kapjuk a végeredményt:

$$t_2 = \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V}{v}\right)^2} \cdot t_1. \clubsuit$$

A kauzalitási paradoxon: Ha  $v$  elég nagy, akkor a nevező  $\approx 1$  és  $t_2 < t_1$ , tehát a válaszlövedék azelőtt csapódik be  $O$ -ba, mielőtt még az a kezdő lövést leadta volna. Ha  $O'$  jól célzott, szétlőtte  $O$  ágyúját. De akkor  $O$  nem lőhetett,  $O'$ -nek nem volt mire válaszolni, az ágyúját nem sütötte el, ezért  $O$  ágyúja épen maradt, amivel  $t_1$ -ben mégis leadta a lövését  $O'$  felé, amire az válaszolt, stb, stb. Mint látjuk, *logikai ellentmondásra* jutottunk, mert ugyanazokat a tényeket állítjuk is, tagadjuk is.

A leírt szituáció analíziséhez vezessünk be jelöléseket az egyes eseményekre. Legyen  $E_1$  és  $E_2$  az  $O$ -ban eldördült lövés, ill. a válaszlövés becsapódása,  $E_v$  pedig a válaszlövés eldördülése. A  $\mathcal{K}$ -ban  $E_v$  később történik, mint  $E_1$ , a  $\mathcal{K}'$ -ben pedig  $E_2$  később történik, mint  $E_v$ .

Ha  $v < c$ , akkor ezek az eseménypárok időszerűek, és az eseményeknek ez a sorrendje invariáns. Így pl. az  $E_2$  a  $\mathcal{K}$ -ban is később történik, mint  $E_v$ , és ezért  $E_2$  — amely az  $E_1$ -el időszerű párt alkot, hiszen  $\mathcal{K}$ -ban azonos helyen történnek —, bizonyosan  $E_1$  után következik be. Ebben az esetben tehát  $t_2 > t_1$ .

A helyzet azonban változhat, ha megengedjük, hogy  $v$  legyen nagyobb a fénysebességnél. Ekkor az  $E_1$ ,  $E_v$ , valamint az  $E_2$ ,  $E_v$  térszerű párok, és ezért lehetséges, hogy  $\mathcal{K}$ -ban  $E_2$  időben megelőzze  $E_v$ -t annak ellenére, hogy  $\mathcal{K}'$ -ben természetesen  $E_v$  történik előbb. Ebben az esetben bekövetkezhet a  $t_2 < t_1$  kauzalitási paradoxon. Ha pl.  $t_1 = 75$  s,  $V = c/2$ ,  $v = 8c$ , akkor  $t_2 = 64$  s  $< t_1$ .

Amikor ez a helyzet, a (222) alapján számított  $u$  sebesség pozitívnak adódik. Ez azonban — a látszat ellenére — nem jelenti azt, hogy a válaszlövedék nem az  $O$  felé, hanem éppen az ellenkező irányban halad. Az  $u$  előjele ugyanis csak akkor egyezik meg a repülési irány előjelével, ha  $dt > 0$ . A példánkban azonban a paramétereket úgy választottuk, hogy a lövedék a  $\mathcal{K}$ -beli idő szerint előbb ér célba, mint amikor elindult, ezért a mozgása során  $t$  csökken, azaz  $dt < 0$ . Mivel az  $O$   $x$ -koordinátája az  $O'$ -énél kisebb, a lövedék akkor repül  $O$  felé, ha  $dx < 0$ , azaz, ha  $u = \frac{dx}{dt}$  pozitív.

A példa mutatja, hogy ha félynél nagyobb sebességű objektumokat vagy jeleket (*tachionokat*) tudnánk kelteni és észlelni, akkor az ok és az okozat sorrendje nem lenne mindig minden inerciarendszerben ugyanaz, és ez kauzalitási paradoxonokat tenne lehetővé. A paradoxon abban áll, hogy egy *időszerű* eseménypáron belül (a példában ez az  $E_1$  és az  $E_2$ ) az ok és az okozat sorrendje felcserélődik. Mint láttuk, ez annak a következménye, hogy a térszerű eseménypárok időbeli sorrendje nem invariáns. A problémát nem lehet azzal elintézni, hogy oknak mindig tekintsük azt az eseményt, amelyik előbb történik, mert az okot és az okozatot (a lövést és a detonációt) nem egyedül az különbözteti meg, hogy melyik történik előbb. Ezért a kauzalitási paradoxonok elkerülésének legegyszerűbb módja a 2. posztulátum elfogadása mindaddig, amíg tachionok létezését nem lehet kísérletekkel bebizonyítani.

## 2.50 A gyorsulás transzformációja

A  $\mathcal{K}$  és a  $\mathcal{K}'$  a szokásos. Mozogjon egy tömegpont változó, a  $\mathcal{K}$ -ból nézve  $v(t)$ , a  $\mathcal{K}'$ -ből nézve  $v'(t')$  sebességgel. A gyorsulás  $\mathcal{K}$ -ban  $a = \frac{dv(t)}{dt}$ ,  $\mathcal{K}'$ -ben  $a' = \frac{dv'(t')}{dt'}$ . Keressük  $a$  és  $a'$  kapcsolatát.

A sebességösszeadás törvénye alapján

$$dv' = d \frac{v - V}{1 - \frac{vV}{c^2}} = \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{vV}{c^2}\right)^2} \cdot dv,$$

míg

$$dt' = \frac{dt - \frac{V}{c^2} \cdot dx}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{Vv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \cdot dt.$$

Mindkét esetben a  $df(u) = \frac{df(u)}{du} \cdot du$  ( $u = v$  vagy  $t$ ) képletet használtuk és a deriválásnál figyelembe vettük, hogy  $V$  konstans.

A felső egyenletet az alsóval osztva kapjuk a keresett összefüggést:



$$a' = \frac{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{3/2}}{\left(1 - \frac{vV}{c^2}\right)^3} \cdot a. \quad (223)$$

Látjuk, hogy  $a = 0$ -nál  $a'$  is zérus. Ennek így is kell lennie, hiszen a 2.követelmény szerint egyenletes egyenesvonalú mozgásnak ugyanilyenbe kell átmennie. A nemrelativisztikus határesetben ( $v, V \ll c$ ) a képletünk  $a' = a$ -t ad, ami korrekt, mert a Galilei-transzformációval szemben a gyorsulás invariáns.

## 2.51 A relativisztikus mozgásegyenlet

A tömegpont relativisztikus mozgásegyenletének eleget kell tennie annak a követelménynek, hogy kis sebességeknél menjen át a Newton-egyenletekbe. Ugyanakkor a Lorentz-transzformációval is összhangban kell lennie. Ezt a két feltételt a legegyszerűbben úgy biztosíthatjuk, hogy mozgásegyenletként a Newton-egyenleteket posztuláljuk *ahhoz a  $\mathcal{K}'$  inerciarendszerhez képest, amelyben a tömegpont éppen nyugszik (pillanatnyi nyugalmi rendszer)*, és ennek a transzformáltját tekintjük mozgásegyenletnek  $\mathcal{K}$ -ban.

Elegendő lesz, ha az egydimenziós mozgásra korlátozódunk (az erő és a sebesség iránya ugyanaz). Mozogjon a tömegpont az adott pillanatban  $\mathcal{K}$ -hoz viszonyítva  $v$  sebességgel — mondjuk —  $x$ -irányba. Akkor a pillanatnyi nyugalmi rendszer az a  $\mathcal{K}'$  inerciarendszer, amely  $x$ -irányban  $v$  sebességgel mozog. Feltevés szerint  $\mathcal{K}'$ -ben a mozgásegyenlet megegyezik a Newton-egyenlettel:

$$ma' = F'.$$

A  $\mathcal{K}$ -beli mozgásegyenletet úgy kapjuk, hogy ebben az egyenletben a vesszős mennyiségeket vesszőtlen mennyiségeken keresztül fejezzük ki a Lorentz-transzformáció segítségével. A tömeget — mint látjuk, — nem transzformáljuk, vagyis explicite feltételezzük, hogy a nagysága ugyanakkora akár nyugszik, akár  $v$  sebességgel mozog. Ezért teljesen tarthatatlan az a széles körben elterjedt vélekedés, amely szerint a mozgó test tömege nagyobb, mint a nyugvóé (az  $m = m_0/\sqrt{1 - V^2/c^2}$  formula).

Amikor a tömegpont  $v$  sebessége és a  $\mathcal{K}'$ -rendszer  $V$  sebessége azonos irányú, az  $a$  és az  $a'$  közötti kapcsolatot (223) határozza meg. Abban a speciális esetben, amikor  $\mathcal{K}'$  a pillanatnyi nyugalmi rendszer, az egyenletbe  $V = v$  helyettesítendő, tehát

$$a' = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot a,$$

ami átalakítható így:

$$a' = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

A  $\mathcal{K}$ -ban érvényes mozgásegyenlet tehát a newtoni

$$\dot{p} = F \quad (224)$$

alakban írható, amelyben azonban az impulzus nem a megszokott  $mv$  szorzat, hanem a

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (225)$$

kifejezés,  $F$  pedig a  $\mathcal{K}$ -beli adatokon keresztül kifejezett  $F'$  erő. Amikor  $v \ll c$ , visszakapjuk az impulzus megszokott  $p = mv$  képletét.

A legfontosabb esetben, amikor a tömegpont töltött és az erő a Lorentz-erő, az  $F$  felírása a  $\mathcal{K}$ -beli adatokon keresztül nagyon egyszerű. A Lorentz-erőt ugyanis minden inerciarendszerben ugyanaz a jól ismert formula fejezi ki, hacsak  $\vec{E}$ -n és  $\vec{H}$ -n — természetes módon —, az *adott* inerciarendszerben érvényes tereket értjük<sup>36</sup>. Így speciálisan  $x$ -irányú elektromos térben egy  $q$  töltésű tömegpont relativisztikus mozgásegyenlete a következő:

$$\frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = qE(x), \quad (226)$$

amelyben természetesen  $v = \frac{dx}{dt}$ .

Ez az egyenlet a Newton-egyenlettől a nevezőbeli négyzetgyökben különbözik. Ha ezt a négyzetgyököt a tömeg részének tekintjük, akkor azt mondhatjuk, hogy az egyenlet egy olyan ponttöltés mozgását írja le, amelynek tehetetlen tömege a sebesség növekedtével nő. Ennek négyzetgyöknek az a következménye, hogy ugyanaz az erő annál kevésbé gyorsít, minél nagyobb a sebesség, és a ponttöltés sebessége legfeljebb megközelítheti  $c$ -t, de soha el nem érheti.

79.Feladat:  $x$ -irányú  $E = konst$  elektromos térben  $q$  töltésű tömegpont mozog. Határozzuk meg a mozgás trajektóriáját.

Megoldás:

$$\frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = qE$$

<sup>36</sup>Később látni fogjuk, hogy — a legtöbb fizikai mennyiséghez hasonlóan —, a terek is változnak, amikor egyik inerciarendszerről egy másikra térünk át.

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = qEt$$

$$v = \frac{\frac{qE}{m}t}{\sqrt{1 + \left(\frac{qE}{mc}t\right)^2}}.$$

Látjuk, hogy  $t \rightarrow \infty$ -nél  $v \rightarrow c$ .

Az utolsó egyenletet könnyű újra integrálni  $t$ -szerint. Az integrációs állandót válasszuk úgy, hogy  $t = 0$ -nál legyen  $x = 0$ :

$$x = \frac{mc^2}{qE} \left[ \sqrt{1 + \left(\frac{qE}{mc}t\right)^2} - 1 \right].$$

Amikor  $t$  olyan kicsi, hogy  $\left(\frac{qE}{mc}t\right)^2 \ll 1$ , ez a megoldás az  $x = \frac{qE}{2m}t^2$  korrekt newtoni alakba megy át. ♣

## 2.52 Az energia

Ugyanazt a gondolatmenetet fogjuk követni, amellyel a Mechanika jegyzet 1.7 fejezetében vezettük be az energiát. Szorozzuk meg a (224) mindkét oldalát  $v$ -vel. A jobboldalon az erőt kifejezhetjük az  $U$  potenciális energia negatív deriváltjaként, ezért

$$vF = -\frac{dU}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{dU}{dt}.$$

A baloldalon

$$v\dot{p} = v \cdot \frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + U \right] = 0.$$

Ez a képlet fejezi ki a  $K$  mozgási és az  $U$  potenciális energia összegének a megmaradását a relativisztikus mechanikában. A képlet alapján ez a megmaradó energia maga a következő:

$$W = K + U = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + U + \text{konstans}.$$

Nulla sebességnél a kinetikus energia definíció szerint nullával egyenlő. A konstans értékét ez a feltétel egyértelműen  $-mc^2$ -nek rögzíti, ezért a kinetikus energia képlete a relativitáselméletben a következő:

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2. \quad (227)$$

A  $v \ll c$  határesetben

$$K \approx \frac{mv^2}{2} \quad \text{ha } v \ll c,$$

ahogy lennie kell.

A testeknek a mozgási és a potenciális energiájukon kívül még valamekkora  $E_0$  *belső (vagy nyugalmi) energiájuk* is van. Ez az energia a termodinamikában játszik alapvető szerepet (ott majd  $U$ -val fogjuk jelölni). A relativitáselmélet megszületése előtt a mechanikában praktikusán csak olyan feladatokkal foglalkoztak, amelyek során a testek *belső energiája* végig változatlan maradt. Ez a helyzet gyökeresen megváltozott, amikor Einstein felismerte, hogy a mechanika egyik legfontosabb alaplényisége, a tömeg, szigorúan arányos a test *belső energiájával*:  $m = E_0/c^2$ . Amikor pl. egy testet melegítve a *belső energiáját*  $\Delta E_0$ -lal megnöveljük, a tömege  $\Delta m = \Delta E_0/c^2$ -tel megnő.

Einstein a következő gondolatkísérlettel jutott erre a teljesen váratlan következtetésre. Tekintsünk egy  $m$  tömegű testet, amely egy  $\mathcal{K}$  inerciarendszerhez rögzített Descartes-rendszer origójában nyugszik. A  $+z$  és a  $-z$  tengely irányából egy-egy tökéletesen egyforma fényimpulzus (hullámcsomag) esik a testre, amelyeket a test teljes egészükben elnyel. A hullámcsomagok energiája legyen  $\epsilon$ , impulzusuk  $\vec{g} = (0, 0, \pm g)$ . A két mennyiség között fennáll az  $\epsilon = cg$  reláció (ld. az 56.feladatot).

A hullámcsomagok abszorpciója következtében a test energiája  $\Delta E_0 = 2\epsilon$ -nal nő, de  $\vec{p}$  impulzusa nem változik: a test az abszorpció előtt és után egyaránt nyugalomban van és impulzusa végig  $\vec{p} = 0$  (ezért az  $E_0$  *belső energia* az, ami megváltozott).

Szemléljük most *ugyanazt a folyamatot* egy olyan  $\mathcal{K}'$  inerciarendszerből, amely  $\mathcal{K}$ -hoz képest a  $-x$  tengely irányába mozog tetszőlegesen kis  $V$  sebességgel. Mivel a hullámcsomagok sebessége  $c$ ,  $x$ -irányú impulzuskomponensük  $\mathcal{K}'$ -ben  $V \ll c$ -nél  $+\frac{V}{c}g$ -vel egyenlő.

A gondolatmenet lényeges pontja, hogy az objektum  $\mathcal{K}'$ -beli sebessége az abszorpció előtt és után egyaránt  $V$  nagyságú és  $+x$  irányú. Ez egyenes következménye annak, hogy az objektum az egész folyamat során végig nyugszik  $\mathcal{K}$ -ban. Az impulzusa azonban az abszorpció következtében  $+x$  irányban  $\Delta p' = 2\frac{V}{c}g$ -vel megnő, ami csak úgy lehetséges, hogy az  $m$  tömeg  $\Delta m = \frac{2g}{c}$  növekményt kap. A  $\mathcal{K}'$ -ben ugyanis — a  $V$  kicsisége miatt —, a test impulzusa tömeg $\times$ sebesség alakú, tehát

$\Delta p' = \Delta m \cdot V$ . A  $g$ -t helyettesíthetjük  $\frac{1}{c}$ -nal, ahonnan  $\Delta m = \frac{2\epsilon}{c^2}$ ; ennyivel nő az objektum tömege a fényimpulzusok elnyelése következtében. De — mint már tudjuk —,  $2\epsilon$  a test belső energiájának  $\Delta E_0$  megnövekedésével egyenlő. A tömeg és a belső energia megnövekedése tehát arányos egymással és az arányossági tényező a fénysebesség négyzete.

A levezetés mutatja, hogy a tömeg-energia reláció kizárólag az  $E_0$  belső energiára érvényes. A kinetikus energiához pl. nem tartozik  $K/c^2$  tömeg. Ezt azért fontos hangsúlyozni, mert gyakran állítják tévesen azt, hogy minden energia fajtához rendelhető tömeg, a tömeg és az energia általában ekvivalens egymással.

A tömeg-energia reláció arra vezet, hogy a kötési energiát tömegméréssel (súlyméréssel) is meg tudjuk határozni. Emlékeztetünk rá, hogy pl. egy két tömegpontból összetett kötött rendszer kötési energiáján azt a *minimális*  $\Delta E_0$  energiát értjük, amit be kell fektetni ahhoz, hogy a rendszert a két összetevőjére bontsuk fel: ez az az energia, amelynek hatására a kötött rendszer két egymástól távol *nyugvó* összetevőre szakad szét. A  $\Delta E_0$  energia befektetésekor azonban a rendszer tömegét  $\Delta E_0/c^2$ -tel növeljük meg, így válik a rendszer tömege egyenlővé a szabad összetevők tömegeinek az összegével. De akkor a kötött rendszer tömege ugyanennyivel *kevesebb*, mint a két szabad összetevő tömegének az összege (*tömegdefektus*):

$$m_{\text{kötött rendszer}} = m_{1.\text{összetevő}} + m_{2.\text{összetevő}} - \frac{\Delta E_0}{c^2}.$$

Ez a következtetés élesen ellentmond a newtoni mechanika felfogásának, amely szerint egy összetett rendszer tömege az összetevők tömegeinek az összegével egyenlő.

A kémiai kötésnél fellépő kötési energiák túl kicsik ahhoz, hogy a tömeget észrevehetően megváltoztassák — ezért nem derült ki már régen *tapasztalati alapon*, hogy a newtoni mechanikában használt energia-képletből hiányzik egy fontos tag. Ezek a tagok ugyanis hiába nagyok, csak a megváltozásuk észlelhető. Az atommagokban azonban a neutronok és a protonok kötési energiája nagyságrendileg a kémiai kötés milliószorosa. Amikor a magfizika vizsgálni kezdte a magerőket, a relativitáselmélet már létezett, és a kötés nagyságát éppen az atomsúlyok alapján lehetett először megbecsülni.

A kémiai és a nukleáris energia egyaránt a kötési energiából származik: amikor olyan kémiai vagy nukleáris átalakulás történik, amelynek a során a kötési energia nő, az energiakülönbség alkalmas berendezés segítségével kinyerhető. Ez a kémiai energiára is érvényes, de a tömegdefektus csak az atommagokban elég nagy ahhoz, hogy súlyméréssel is észlelhető legyen.

A relativisztikus mechanika képletei lehetővé teszik, hogy az energia- és impulzusmegmaradás törvényének a felhasználásával olyan feladatokat is analizáljunk, amelyekben különböző tömegű objektumok — atommagok és elemi részecskék — alakulnak át egymásba. Az ilyen feladatoknál előnyösebb, ha  $W$  helyett a belső energiát is

tartalmazó

$$\mathcal{W} = W + E_0 = K + E_0 + U = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + U$$

energiával dolgozunk. A továbbiakban azonban csak szabadon mozgó részecskékkel fogunk foglalkozni, ezért az  $U$ -t mindenütt elhagyjuk (nullának vesszük).

Az energiát sokszor célszerűbb a sebesség helyett az impulzuson keresztül kifejezni. A (225) és a (227) segítségével könnyen belátható, hogy a keresett formula a következő:

$$\mathcal{W} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}. \quad (228)$$

Amikor  $p \ll mc$ , ez a képlet a

$$\mathcal{W} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m} = E_0 + \frac{p^2}{2m}$$

relációra vezet, ami a belső energiának és a newtoni kinetikus energia impulzust tartalmazó alakjának az összege.

Tekintsük most az alfa-bomlás folyamatát, amelyben egy nyugvó  $A$  atommag bomlik el egy  $B$  atommagra és egy  $\alpha$ -részecskére:

$$A \longrightarrow B + \alpha.$$

A tömegek legyenek  $m_A, m_B, m_\alpha$ . Az impulzusmegmaradást a  $\vec{p}_B + \vec{p}_\alpha = 0$  egyenlet fejezi ki, amelyből következik az impulzusok abszolút értékeinek az egyenlősége:

$$p_B = p_\alpha.$$

A bomlás előtt az energia a nyugvó  $A$ -atommag energiájával,  $m_Ac^2$ -el egyenlő. A bomlás után, mikor a bomlástermékek már olyan messze vannak egymástól, hogy Coulomb-kölcsönhatásuk elhanyagolható, az energia a szabad  $B$ -mag és a szabad  $\alpha$ -részecske energiáinak az összege. Az energiamegmaradás tétele tehát:

$$m_Ac^2 = c\sqrt{p_B^2 + m_B^2c^2} + c\sqrt{p_\alpha^2 + m_\alpha^2c^2}.$$

A két egyenletből a két impulzus meghatározható, az impulzusokból kiszámíthatjuk a  $\mathcal{W}_B$  és a  $\mathcal{W}_\alpha$  energiákat, végül a

$$v = \frac{c^2 p}{\mathcal{W}} \quad (229)$$

képlet segítségével, amely (225) és (227) direkt következménye, megkaphatjuk a sebességek nagyságát.

### 2.53 Nulla tömegű részecskék

A newtoni világképben nincs helye olyan objektumoknak, amelyeknek véges energiája és impulzusa van és a tömegük zérus: a  $K = \frac{p^2}{2m}$  képlet szerint ilyen tárgyak nem létezhetnek. A relativitáselméletbe azonban a legtermészetesebb módon illenek bele a nulla tömegű részecskék.

A (228), (229) relativisztikus képletek ugyanis minden további nélkül alkalmazhatók  $m = 0$  esetében is:

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= cp \\ v &= c. \end{aligned} \tag{230}$$

Egy zérus tömegű részecske tehát mindig fénysebességgel mozog, és energiája az impulzusának  $c$ -szerezésével egyezik meg.

Mivel egy zérus tömegű részecskének nincs nyugalmi rendszere (a sebessége mindig  $c$ ), ezért a nyugalmi (belső) energia fogalma nem alkalmazható rá. Ha még szabadon is mozog ( $U = 0$ ), akkor (230) baloldalán  $\mathcal{W}$ -n valójában kinetikus energiát kell érteni.

### 2.54 Az energia és az impulzus transzformációja

Legyen egy  $m$  tömegű objektum energiája és impulzusa  $\mathcal{K}$ -ban  $\mathcal{W}$  és  $\vec{p}$ . Milyen  $\mathcal{W}'$  és  $\vec{p}'$  energiát és impulzust tapasztal a  $\mathcal{K}$ -hoz képest  $\vec{V}$  sebességgel mozgó  $\mathcal{K}'$  megfigyelő?

Abból indulunk ki, hogy a tömeg a megfigyelő mozgásától független állandó (relativisztikus invariáns), tehát (228) alapján

$$\mathcal{W}^2 - c^2 p_x^2 - c^2 p_y^2 - c^2 p_z^2 = \mathcal{W}'^2 - c^2 p_x'^2 - c^2 p_y'^2 - c^2 p_z'^2,$$

vagyis az

$$\frac{1}{c^2} \mathcal{W}^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 \tag{231}$$

kvadratikus kombináció minden vonatkoztatási rendszerben ugyanaz a szám. A (231) strukturális megegyezése a (218)-beli négyestávolságnégyzet invariánssal nyilvánvaló. A négyestávolságnégyzet invarianciája a (206) Lorentz-transzformációból következik és ez plauzibilissé teszi, hogy az energiát és az impulzust is a Lorentz-transzformáció segítségével számíthatjuk át egyik inerciarendszerről a másikba<sup>37</sup>, hacsak végrehajtjuk (206)-ban a

$$\Delta t \rightarrow \frac{1}{c^2} \mathcal{W} \quad \Delta x \rightarrow p_x \quad \Delta y \rightarrow p_y \quad \Delta z \rightarrow p_z$$

<sup>37</sup>Ha valaki kételkedne, a (227), (225), valamint a sebességösszeadás törvénye alapján ellenőrizheti, hogy korrekt transzformációs törvényre jutunk.

helyettesítéseket:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{W}' &= \frac{\mathcal{W} - V p_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ p_x' &= \frac{p_x - \frac{V}{c^2} \mathcal{W}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ p_y' &= p_y \\ p_z' &= p_z \end{aligned} \right\} \quad (232)$$

80.Feladat: Egy nulla tömegű részecske energiája  $\mathcal{K}$ -ban legyen  $\mathcal{W}$ . Határozzuk meg  $\mathcal{W}'$  energiáját abban a  $\mathcal{K}'$  vonatkoztatási rendszerben, amely  $V$  sebességgel mozog a részecskével szemben.

Megoldás: A részecske mozogjon  $\mathcal{K}$ -ban az  $x$  tengely mentén negatív irányban. Impulzusa ekkor a következő:

$$\vec{p} = (-p, 0, 0) = (-\mathcal{W}/c, 0, 0).$$

A (232) első egyenletéből ezért

$$\mathcal{W}' = \frac{1 + \frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \cdot \mathcal{W} = \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}} \cdot \mathcal{W}. \clubsuit \quad (233)$$

A (233) transzformációs törvény szerint egy nulla tömegű részecske energiáját annál nagyobbak látjuk, minél gyorsabban mozgunk vele szembe. Vajon mi okozhatja ezt az energianövekedést, mikor a részecske sebessége  $\mathcal{K}$ -ban is,  $\mathcal{K}'$ -ben is ugyanaz? Mi az, ami egy mindenkihez képest  $c$ -sebességgel mozgó objektumban változik, amikor különböző inerciarendszerekből figyeljük meg?

A magyarázathoz a (233)-t és a (216)-t kell összevetnünk, amiből az derül ki, hogy *a nulla tömegű részecske energiája ugyanolyan törvény szerint transzformálódik, mint egy  $c$  fázissebességű hullám frekvenciája*. Ezért ha egy nulla tömegű részecskének van *frekvenciája*, ez lehet az a tulajdonsága, ami az energiáját meghatározza: az egyik inerciarendszerből a másikba történő áttérésnél ugyanis a  $\mathcal{W}$  és a  $\nu$  ugyanazzal a tényezővel szorozódik meg, ezért *arányuk* minden inerciarendszerben ugyanaz (invariáns).

Nagy kérdés, hogy a Természet *él-e* ezzel a relativitáselmélet adta lehetőséggel? Igen, él vele, a tapasztalat szerint a fény részecskeszerű kvantumokból, fotonokból



áll, amelyek — mivel fénysebességgel mozognak —, nulla tömegűek és az energiájuk szigorúan arányos a frekvenciájukkal:

$$\mathcal{W} = h\nu = \hbar\omega. \quad (234)$$

A  $h$ , vagy a manapság szívesebben használt  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  univerzális konstans a *Planck-állandó*.

A (230) következtében hasonló képlet áll fenn a foton impulzusa a hullámvektor között:

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}. \quad (235)$$

A (230) képlet az 57.példában tárgyalt hullámcsomagokra is érvényes ( $G \equiv p$ ), ezért egy hullámcsomagra is igaz, hogy energiájának és frekvenciájának az aránya minden inerciarendszerben ugyanaz a szám. A Maxwell-féle elektrodinamikában azonban ez az arányossági tényező tetszőleges lehet, hullámcsomagról hullámcsomagra változhat, egyáltalán nem kell univerzális állandónak lennie, hiszen nem a frekvencia, hanem az  $\mathcal{E}$  amplitúdó az, ami a csomag energiáját meghatározza (ld. a 48.feladatot). Ezért az a tény, hogy az egyes atomok által kibocsátott fényimpulzusok — a fotonok — energiáját a *frekvenciájuk* határozza meg a  $\mathcal{W} = h\nu$  képlet szerint, tökéletesen idegen a Maxwell-féle elektrodinamikától, de a klasszikus fizika egészétől is, és a fizika egy új felfogásának, a kvantumfizikának vetette meg az alapját.

## 2.55 A frekvencia, a hullámvektor és a fázis transzformációja

A címben felsorolt mennyiségek közül a frekvenciának a transzformációs törvényéről már volt szó, legalább is fényhullámok esetében (Doppler effektus, 74.feladat). Gondoljuk át újra ezt a feladatot a következő változtatásokkal:

a) Ne korlátozódjunk fényhullámra, engedjük meg, hogy a fázissebesség tetszőleges  $v$  lehessen.

b) Az  $O'$  az  $x$ -tengely mentén mozogjon a megszokott módon pozitív irányban (a 67.feladatban ellenkező irányban mozgott).

c) A  $\nu$  helyett dolgozzunk  $\omega$ -val.

A (215)-ben ennek megfelelően el kell végezni a  $c \rightarrow v$ ,  $V \rightarrow -V$  helyettesítést, ezért a (216) relativisztikus képletek így módosulnak:

$$\left. \begin{aligned}
 T' &= \mathcal{T} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = T \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{v}} \\
 \omega' &= \omega \frac{1 - \frac{v}{v}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}
 \end{aligned} \right\} \text{(relativisztikus)}. \quad (236)$$

A 2.27 fejezet szerint azonban  $\frac{\omega}{v} = k$ , ezért az utolsó képlet az

$$\omega' = \frac{\omega - V k}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (237)$$

alakban is írható.

De mekkora lesz a hullámvektor nagysága  $\mathcal{K}'$ -ben? Nyilván  $k' = \frac{\omega'}{v'}$ , amelyben  $\omega'$ -t (236)-ból (vagy (237)-ből) vehetjük,  $v'$ -t pedig a sebességösszeadás törvénye alapján kell kiszámítanunk:

$$\begin{aligned}
 k' &= \frac{\omega'}{v'} = \frac{\omega \left(1 - \frac{v}{v}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \cdot \frac{1 - \frac{vV}{c^2}}{v - V} = \\
 &= \frac{\omega}{v} \cdot \frac{1 - \frac{vV}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\frac{\omega}{v} - \frac{V}{c^2} \omega}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{k - \frac{V}{c^2} \omega}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.
 \end{aligned}$$

Ez a képlet a (237)-tel együtt mutatja, hogy az  $\omega$ ,  $k$  párt a  $\mathcal{W}$ ,  $p_x$  párhoz hasonló recept szerint kell átszámítani a  $\mathcal{K}$ -ból a  $\mathcal{K}'$ -be. Ha figyelembe vesszük, hogy  $k$  a

hullámvektor  $x$ -komponense, a transzformációs törvényt így írhatjuk fel:

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \frac{\omega - V \cdot k_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ k'_x &= \frac{k_x - \frac{V}{c^2} \omega}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ k'_y &= k_y \\ k'_z &= k_z. \end{aligned} \right\} \quad (238)$$

81. Feladat: Igazoljuk, hogy a  $\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$  fázis Lorentz invariáns.

Igazolás: Ha a

$$\varphi' = k'_x \cdot x' + k'_y \cdot y' + k'_z \cdot z' - \omega' \cdot t'$$

kifejezésben a vesszős mennyiségeket vesszőtleneken keresztül fejezzük ki, a

$$k_x \cdot x + k_y \cdot y + k_z \cdot z - \omega \cdot t = \varphi$$

kifejezésre jutunk, tehát  $\varphi' = \varphi$ . ♣

Azt találtuk, hogy a  $\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}'$  átmenetnél az energiából és az impulzusból álló 4-komponensű mennyiség, valamint a körfrekvenciából és a hullámvektorból álló 4-komponensű mennyiség egy és ugyanazon törvény szerint transzformálódik.<sup>38</sup> Ez az egybeesés megengedi, hogy a (234) és a (235) összefüggés fennállhasson *minden* részecskére (elektronra, protonra, neutronra, sőt egy futballabdára is), ne csak olyanokra, amelyek nulla tömegűek. De míg a foton esetében valójában az a természetes, hogy rendelkezik frekvenciával — hiszen az elektromágneses *hullámok* kvantumja —, és az a váratlan, hogy *részecske*, addig például az elektronnál semmi okot sem látunk arra, hogy bármiféle hullámjelenséggel hozzuk kapcsolatba. Enélkül pedig nyilván nincs sok értelme arról beszélni, hogy egy  $\mathcal{W}$  energiájú elektron “körfrekvenciája”  $\mathcal{W}/\hbar$ -val egyenlő (speciálisan nyugvó elektronnál ez a körfrekvencia  $mc^2/\hbar$ ), “hullámvektora” pedig  $\vec{p}/\hbar$ .

A Természet azonban ebben az általánosabb esetben is él a részecske-hullám megfeleltetés relativitáselmélet által nyújtott lehetőségével: a kvantumelméletben látni fogjuk, hogy a részecskék mozgását *hullámfüggvény* segítségével lehet a tapasztalatnak megfelelő módon leírni, amely azonban nem *erőtér*, mint az elektromágneses mező, hanem valószínűségi természetű.

<sup>38</sup>Az ilyen 4-komponensű mennyiségeket nevezik *négyesvektornak*. Az események  $ct$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  ( $c$ -szeres) időpontja és koordinátái is négyesvektort alkotnak.

## 2.56 Az elektromágneses mező transzformációja

Mozogjon megint a  $\mathcal{K}'$  inerciarendszer  $\mathcal{K}$ -hoz képest  $V$  sebességgel a közös  $x$ -tengely mentén. Tegyük fel, hogy a  $\mathcal{K}$ -beli megfigyelő  $\vec{H}$  homogén mágneses mezőt észlel, amely az  $x$ -iránnyal valamilyen nemnulla szöveget zár be.

A  $\mathcal{K}'$ -beli megfigyelő nem pontosan ugyanezt fogja tapasztalni. Ezt a következő gondolatmenettel lehet belátni: Nyugodjon egy  $q$  töltés  $\mathcal{K}$ -ban. Ez egy lehetséges állapot, hiszen  $\mathcal{K}$ -ban nincs elektromos mező, ami a töltést gyorsítani kezdené. A  $\mathcal{K}'$ -beli megfigyelő tehát azt látja, hogy a töltés a negatív  $x$ -tengely irányában mozog egyenletes  $V$  sebességgel. De akkor neki a mágneses mező mellett elektromos mezőt is kell észlelnie, éspedig olyan konfigurációban, hogy a  $\vec{V} = (-V, 0, 0)$  sebességgel mozgó töltésre ható Lorentz-erőben a mágneses mező járulékát az elektromos mező Coulomb-erőhatása éppen kompenzálja.

Ennek a gondolatmenetnek az alapján várható, hogy a mezők általában változni fognak, amikor egyik inerciarendszerről egy másikra térünk át. A relativitáselmélet szerint a mezők transzformációs törvénye a következő:

$$\left. \begin{aligned} E_{x'} &= E_x; & E_{y'} &= \frac{E_y - VB_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; & E_{z'} &= \frac{E_z + VB_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ B_{x'} &= B_x; & B_{y'} &= \frac{B_y + \frac{V}{c^2}E_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; & B_{z'} &= \frac{B_z - \frac{V}{c^2}E_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (239)$$

A legfőbb érv emellett a transzformációs törvény mellett az, hogy ha a  $\mathcal{K}$ -ban a vesszőtlen koordináták segítségével felírt Maxwell-egyenletekben egyrészt a Lorentz-transzformáció segítségével a vesszőtlen koordinátákat vesszős koordinátákra cseréljük fel, másrészt a térmennyiségeket a (239) inverze alapján vesszős komponensű térmennyiségekkel helyettesítjük, akkor a két változtatás pontosan kompenzálja egymást, és a Maxwell-egyenletek alakja  $\mathcal{K}$ -ben ugyanolyan lesz, mint amilyen  $\mathcal{K}$ -ban volt.

Ez a tulajdonság fejezi ki matematikailag azt, hogy az elektrodinamika törvényei minden inerciarendszerben változatlan formában érvényesek. Ez a kijelentés nem más, mint az 1. posztulátum (az elektrodinamikára alkalmazva), amit a relativitáselmélet tárgyalásának a kiindulópontjába állítottunk. Valójában azonban eddig az 1. posztulátumnak csak egy speciális aspektusát használtuk ki, azt, hogy a fénysebesség legyen minden inerciarendszerben ugyanaz. Csak most, a Maxwell-egyenletek invarianciájának a megállapítása után lehetünk biztosak abban, hogy az első posztulátum az elektrodinamika egészére teljesül.