# Ekvivalens-e egymással a tömeg és az energia?

Hraskó Péter, Pécsi Tudományegyetem Elméleti Fizika tanszék

## 1 A probléma

Az $E = mc^2$ képlet a relativitáselmélet talán legnagyobb horderejű összefüggése, amely joggal vált az elmélet szimbólumává. A képlet három olyan mennyiség között állapít meg nagyon szoros kapcsolatot, amelyek már a relativitáselmélet előtt is fontos szerepet játszottak a fizikában.

Arról, hogy a fénynek lehet sebessége, már legalább Galilei óta töprengtek a természetkutatók[1]. A fénysebesség számértékére először Römer Olaf dán csillagász következtetett 1675-ben a Jupiter legbelső holdjának a mozgásában tapasztalható anomáliából. 1865-ben mutatta meg Maxwell az elektromágneses mezőt leíró differenciálegyenletek alapján, hogy a fény elektromágneses hullám amelynek terjedési sebessége (mai jelölésben) $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$-al egyenlő.

A tömeg Newton mozgásegyenleteiben nyert pontos fizikai jelentést mint a tehetetlenség mértéke, amely az egyenletekben a gyorsulást szorozza. De a tömeg a súlyerő képletében is megjelent a gravitációs gyorsulás szorzófaktoraként. Abban a gondolatmenetben, amellyel Einstein 1905 szeptemberében eljutott az $E = mc^2$ képlethez, az $m$ a gyorsulást szorzó *tehetetlen tömeg* volt. Tíz évvel később az általános relativitáselmélet megalkotásával azonban azt is megmutatta, hogy ennek az új gravitáció-elméletnek a fényében a súlyerő a tömeg és a gyorsulás szorzatát tartalmazó tagból ered és ennek következtében a $g$-t szorzó *súlyos tömeg* azonos a tehetetlen tömeggel. Ezért ma már nem különböztetjük meg egymástól ezt kétfajta tömeget és mindkettőt egyszerűen tömegnek hívjuk. Ez az a tömeg, amely az $E = mc^2$ képletben a fénysebesség négyzetét szorozza és amelyet mikrorészecskékre a táblázatok tartalmaznak.

A képletben szereplő három mennyiség közül az energia a legkésőbbi, a mechanikai mozgásokra a XIX. század első évtizedeiben fogalmazódott meg. Max von Laue "A fizika története" című könyvében (Gondolat, 1960) olvasható, hogy az "energia" szót 1807-ben Thomas Young, a "munka" szót 1826-ban J. V. Poncelet, a "potenciális energia" kifejezést pedig 1847-ben Hermann von Helmholtz használta először.

Az $E = mc^2$ képletben azonban *nem* ez a mechanikai energia szerepel. Csak a XIX. század végére vált világossá, hogy a testek a mechanikai — mozgási és potenciális — energián kívül más természetű energiákkal is rendelkeznek, amelyeket közös néven *belső energiának* nevezünk. A belső energia leguniverzálisabb formája a hőenergia. Amikor egy testet meghatározott körülmények között melegítünk, energiát közlünk vele. A hő mechanikai egyenértékének ismeretében pontosan kiszámíthatjuk, hogy a belső energia megnövekedése milyen mennyiségű mechanikai energiának felel meg. A belső energia egy másik jól ismert formája az elektromosan töltött objektumok elektrosztatikai energiája, amely a testet körülvevő elektromos mező energiájával egyenlő. Természetesen a mágnesezett testek belső energiája is tartalmaz olyan járulékot, amely a mágneses mező térenergiájából származik.

A belső energiával szorosan összefüggő fogalom a *kötési energia*, amit legegyszerűbben a mikrorészecskék — molekulák, atomok, atommagok — példáján lehet megérteni. A nehézhidrogén atommagja (a deuteron) egy proton és egy neutron kötött állapota és a tapasztalat szerint ahhoz, hogy ezt a két alkotórészt elválasszuk egymástól, minimálisan $3,561 \cdot 10^{-13}$ J (2,226 MeV) energiát kell befektetnünk — ennyi a proton és a neutron kötési energiája a deuteronban. Ha például a deuteront úgy bontjuk szét, hogy $\alpha$-részecskével bombázzuk, akkor a $d + \alpha \longrightarrow p + n + \alpha$ magreakció végállapotában a három részecske kinetikus energiájának az összege a kötési energiá-

[1] Galilei: *Matematikai érvelések és bizonyítások*, (Európa 1986), 55-57 oldal.

[2] Ezek a részecskék (a neutron kivételével) elektromosan töltöttek, ezért a potenciális energiájukat is figyelembe kell venni.

val lesz kisebb a bombázó $\alpha$-részecske és a deuteron kinetikus energiájánál[2]. Az energia azonban megmarad, ezért fel kell tételeznünk, hogy a proton és a neutron belső energiája együttesen a kötési energia értékével nagyobb, mint a deuteron belső energiája.

Egy test belső energiája (vagy más néven *nyugalmi energiája*) tehát az az energia, ami a kinetikus és a potenciális energia levonása után még megmarad. Ez a belső energia az, amely az $E = mc^2$ képlet baloldalán szerepel. Mint látjuk, a három mennyiségnek az értelme, amelyet a képlet összekapcsol egymással, már a relativitáselmélet előtt kikristályosodott és semmi sem utalt rá, hogy bármiféle közvetlen kapcsolat lenne közöttük — erről magunk is meggyőződhetünk, ha még egyszer sorra vesszük a belső energia, a tömeg és a fénysebesség fizikai jelentését, ahogy azok legkésőbb a XIX. század végére megállapítást nyertek. Ezek a fizikai fogalmak ma sem jelentenek mást mint akkor, mert azon, hogy *mit értünk* belső energián, tömegen és fénysebességen a relativitáselmélet mit sem változtatott. Amit tett, az "csupán" annyi, hogy — teljesen váratlanul — rendkívül szoros kapcsolatot tárt fel közöttük.

Mindebből elég nyilvánvaló, hogy az $E = mc^2$ képlet csak olyan objektumokról állít valami fontosat, amelyek belső energiával is, tömeggel is rendelkeznek. A fizikában persze foglalkozunk olyan objektumokkal is, amelyeknek nincs tömege. Ez nem azt jelenti, hogy a tömegük nulla, hanem azt, hogy egyáltalán nem jellemezhetők tömeggel, mert nem alkalmazhatók rájuk a Newton-egyenletek (energiája azonban minden objektumnak van). Ilyen tömeg nélküli objektum például egy rövid rádiójel, amely mondjuk egy űrszonda és a földi irányító központ között terjed. Noha az elektromágneses mezőnek — és így a jelnek is — van energiája, az $E = mc^2$ képlet mégsem alkalmazható rá, mert "nincs neki $m$-je".

Bármennyire logikus is ez a következtetés, valószínűleg sokan tiltakoznának ellene mondván, hogy bizony a rádiójelnek is van tömege, amely $E/c^2$-el egyenlő, mert az $E = mc^2$ összefüggés a tömeg és az energia *ekvivalenciáját* fejezi ki.

Most pontosabban meg tudom fogalmazni a címben feltett kérdést. Úgy látszik, hogy az $E = mc^2$ képletnek két egymástól különböző értelmezése lehetséges. Az első szerint a képlet három olyan mennyiség között állapít meg kapcsolatot, amelyek elvben tőle függetlenül is meghatározhatók. A másik szerint a képlet a tömeg *definícióját* adja meg az energián keresztül[3]. A kérdés az, hogy melyik felfogásmód a helyes.

Amikor olyan objektumokról van szó, amelyeknek hagyományos értelemben van tömegük is, belső energiájuk is, a két értelmezés között nincs objektív választási lehetőség, hiszen csak beszédmódban különböznek egymástól. De ha a szóbanforgó objektumnak nincs olyan paramétere, amely a tömeg funkcióját tölti be a mozgásegyenletekben, akkor a második megfogalmazás tartalmatlanná válik, hiszen az objektum mozgásában *semmilyen tömeg*, így $E/c^2$ sem játszik szerepet[4]. Ebben az esetben csupán arról van szó, hogy $E/c^2$-t elkezdjük *tömegnek hívni* és ezzel valójában félrevezetjük önmagunkat, mert az adott esetben ez a név nem implikál semmi olyat, amit a tömegtől elvárhatunk.

Meggyőződésem, hogy ragaszkodnunk kell az $E = mc^2$ reláció első értelmezéséhez, amely biztosítja a reláció tapasztalati ellenőrizhetőségét és prediktív erejét: A magreakcióban mért kötési energia alapján a deuteron tömegének $3,561 \cdot 10^{-13}/c^2$-el, azaz $3,962 \cdot 10^{-30}$ kilogrammal *kell* kisebbnek lennie a proton és a neutron tömegének az összegénél. Az adott esetben ez elég nagy különbség ahhoz, hogy súlyméréssel lehessen ellenőrizni. Ezért gondolom azt, hogy bármennyire elfogadott is a tömeg és az energia ekvivalenciájáról beszélni (Einstein maga is mindig ekvivalenciaként jellemezte a két mennyiség közötti viszonyt), jobb lenne tartózkodni ettől a szóhasználattól, mert mechanikus alkalmazása túl könnyen elvezet a tömeg nélküli objektumok tömegének önellentmondó fogalmához.

Az alábbiakban az első felfogás helyességét

Azonban a reakció kezdetén és végén, amikor még vagy már messze vannak egymástól, a potenciális energiájuk nullával egyenlő.

[3]Fordítva is mondhatnánk, de mivel minden fizikai objektum rendelkezik energiával, a rádiójel esetéjez hasonlóan mindig a tömeget vezetik vissza energiára.

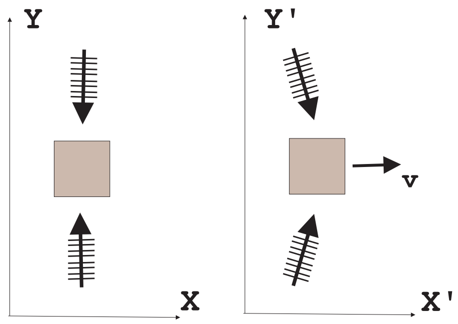
[4]A tudományfilozófia terminológiáját használva: Az az állítás, hogy egy $E$ energiájú rádiójel tömege $E/c^2$-el egyenlő, nem falszifikálható.

próbálom meg különböző nézőpontokból megindokolni. Szerintem már a képlet levezetési módja is az első felfogás mellett szól, ezért a következő pontban azt a gondolatmenetet idézem fel, amellyel Einstein eljutott az $E = mc^2$ képlethez.

## 2 Hogyan vezette le Einstein az $E = mc^2$ képletet

Einstein relativitáselméletről szóló nevezetes közleménye "A mozgó testek elektrodinamikájához" címmel 1905 júniusában jelent meg és az elmélet minden lényeges aspektusát tartalmazta egyetlen kivétellel: az $E = mc^2$ képlet nem szerepelt benne. A képletet Einstein még ugyanazon év szeptemberében publikálta egy rövid cikkben, amely a "Függ-e a testek tehetetlensége az energiatartalmuktól" címet viselte[5]. A gondolatmenetet azonban Einstein még hosszú ideig csiszolta. Alább az 1946-ban publikált változatot elevenítjük fel.

Képzeljünk el egy $m$ tömegű testet, amely az $XYZ$ inerciarendszerben nyugszik. Figyeljük ezt a testet egyidejűleg egy másik, $X'Y'Z'$ vonatkoztatási rendszerből is, amelynek tengelyei párhuzamosak az $XYZ$ tengelyeivel és tetszőlegesen kis $v$ sebességgel mozog a közös $X$-tengely mentén *negatív* irányba. A vesszős koordinátarendszerhez képest a test természetesen $v$ sebességgel fog mozogni az $X'$ tengely pozitív irányába (ld. az ábrát).




Képzeljük most el, hogy két teljesen egyforma elektromágneses hullámcsomag esik rá a testre, amelyeket a test teljes egészében abszorbeál. Tegyük fel, hogy a két csomag a vesszőtlen rendszerben pontosan az $Y$ tengellyel párhuzamosan érkezik egymással ellentétes irányból. A klasszikus elektrodinamika szerint az ilyen hullámcsomagoknak van valamekkora energiája ($\epsilon$) és impulzusa ($p$), amelyek között fennáll az $\epsilon = cp$ reláció.

Az energiamegmaradás tétele következtében a hullámcsomagok elnyelése után a test energiája $2\epsilon$-nal megnő. Ez a növekmény azonban kizárólag a *belső energiát* növeli meg, hiszen a test továbbra is nyugalomban marad: Az impulzusok, amelyeket a test a két hullámcsomagtól vesz át, pontosan kompenzálják egymást.

A fénysugár az egymáshoz képest mozgó rendszerekből nézve különböző beesési szögben látszik (aberráció). Az aberráció szöge az $Y'$ iránnyal bezárt $\alpha$ szög. Ha $v \ll c$, akkor ez a szög a relativisztikus és a nemrelativisztikus fizika szerint egyaránt $v/c$ radiánnal egyenlő. Erről könnyen meggyőződhetünk a sebességek vektordiagramja alapján. A két csomag impulzusa most nem kompenzálja egymást, hanem $2p\sin\alpha = 2p\sin\frac{v}{c} \approx 2p\frac{v}{c}$ $X$-irányú impulzus adódik át a testnek.

A test sebessége azonban nem változik meg, hiszen a vesszőtlen rendszerben nyugalomban maradt, ezért a vesszős rendszerben továbbra is $v$ sebességgel fog mozogni $X'$ pozitív irányába. Hogyan változhat meg akkor az impulzusa? Csak úgy, hogy a tömege megnő valamilyen $\Delta m$ értékkel.

Mivel $v$-t nagyon kicsinek választottuk (elvben $v \longrightarrow 0$), ezért az impulzus még a speciális relativitáselmélet szerint is $mv$-vel egyenlő. A csomagok elnyelése után tehát az impulzusmegmaradás tétele következtében teljesülnie kell a $2p\frac{v}{c} = \Delta m \cdot v$ relációnak, amelyből a $\Delta m = \frac{2p}{c}$ képletet kapjuk a tömegnövekedésre. Azonban, mint mondottuk, a hullámcsomag energiája és impulzusa között fennáll a $p = \epsilon/c$ reláció, így $\Delta m = 2\epsilon/c^2$. De $2\epsilon$ a test belső energiájának $\Delta E$ megnövekedésével egyenlő, ezért végül $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$.

Ez a bizonyítás az energia és az impulzus megmaradásán alapul, ezért természetesen az energia és a tömeg *megváltozását* kapcsolja össze egymással. Ez tökéletesen elegendő, hiszen a képlet alkalmazásainál

[5] Az eredeti német cím a következő: Trägheit eines Körpers von Seinem Energieenhalt abhängig?

is csak energiaváltozásokról lehet szó — emlékezzünk a deuteronos példára. Az $E = mc^2$ képletet akkor kapjuk meg, ha külön feltesszük, hogy az olyan testeknek, amelyeknek a tömege nulla, a belső energiája is nulla (mechanikai energiájuk azonban lehet!).

## 3 A relativisztikus tömegnövekedés

Ebben a pontban azt mutatjuk meg, hogy a relativisztikus tömegnövekedés néven ismert jelenségnek nincs köze az $E = mc^2$ képlethez.

A Newton-egyenletek relativisztikus általánosításánál az 1905 júniusi cikkében Einstein abból indult ki, hogy a fénysebességnél sokkal lassabban mozgó testekre nézve ezeknek az egyenleteknek eredeti alakjukban kell érvényben maradniuk.

Legyen a vesszős koordinátarendszer a test pályájának egy adott pontjához tartozó pillanatnyi nyugalmi rendszer, amelyben feltevés szerint fennállnak az $m\mathbf{a}' = \mathbf{F}'$ Newton-egyenletek. Legyen a vesszőtlen rendszer tetszőleges inerciarendszer. Az ebben érvényes mozgásegyenleteket úgy kapjuk, hogy az $m\mathbf{a}' = \mathbf{F}'$ egyenletben $\mathbf{a}'$-t és $\mathbf{F}'$-t a vesszőtlen rendszerre vonatkozó mennyiségeken keresztül fejezzük ki.

Válasszuk a vesszőtlen koordinátarendszert úgy, hogy a pálya adott pontjában a test éppen $X$ irányba mozogjon $v$ sebességgel. Akkor a vesszős koordinátarendszer éppen ezzel a sebességgel mozog a vesszőtlenhez képest. A Függelékben a Lorentz-transzformáció és a relativisztikus sebességösszeadás segítségével megmutatjuk, hogy a két koordinátarendszerhez viszonyított gyorsulás a következő kapcsolatban van egymással:

$$\begin{aligned} a'_x &= \frac{a_x}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}, \\ a'_y &= \frac{a_y}{1 - v^2/c^2}, \\ a'_z &= \frac{a_z}{1 - v^2/c^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

A vesszőtlen rendszerben tehát a mozgásegyenletek a következők:

$$\begin{aligned} m\frac{a_x}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} &= F_x, \\ m\frac{a_y}{1 - v^2/c^2} &= F_y, \\ m\frac{a_z}{1 - v^2/c^2} &= F_z. \end{aligned} \tag{2}$$

A jobboldalon mindegyik $\mathbf{F}$ komponens az $\mathbf{F}'$ megfelelő komponensének a vesszőtlen rendszer mennyiségein keresztül kifejezett alakja. A kétféle komponens közötti kapcsolatot nem lehet univerzális képlettel megadni, mert függ az erőtér konkrét természetétől. A Függelékben a ponttöltés példáján megmutatjuk, milyen egyszerű a (2) alapján felírni a mozgásegyenletet.

Az $x$ irány a pillanatnyi sebesség iránya, az $y$ és a $z$ pedig a sebességre merőleges. Ezeket longitudinális és tranzverzális iránynak szokás nevezni. A relativisztikusan általánosított Newton-egyenletek szerint tehát longitudinális és tranzverzális irányban két különböző tömeg, az $m_\parallel$ longitudinális és az $m_\perp$ tranzverzális tömeg szolgál a tehetetlenség mértékéül:

$$m_\parallel = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}}, \qquad m_\perp = \frac{m}{1 - v^2/c^2}.$$

Amikor a test sebessége a fénysebességhez közelít, mindkettő végtelenhez tart. Ez a relativisztikus tömegnövekedés, amely biztosítja, hogy a testeket ne lehessen fénysebességre felgyorsítani. Mint látjuk, a jelenség tárgyalásához egyáltalán nincs szükség az $E = mc^2$ képletre.

A (2) képletek birtokában Einstein a kinetikus energia képletének az általánosítására tér át. A $K$ kinetikus energiát a

$$\frac{dK}{dt} = P \tag{3}$$

képlet definiálja, ahol $P = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F})$ az erő teljesítménye. Más szavakkal: A mozgó testnek azt a jellemzőjét tekintjük kinetikus energiának, amelynek megváltozása egyenlő az erők munkájával (mechanikai feladatról lévén szó a belső energiát konstansnak tekintjük). A newtoni mechanikában a $K = mv^2/2$ mennyiség tesz eleget ennek a feltételnek.

A relativitáselméletben is (3) alapján kell a kinetikus energiát definiálnunk. Ennek érdekében szorozzuk (2)-t skalárisan $\mathbf{v}$-vel. Mivel a választott koordinátarendszerben $\mathbf{v}$-nek csak $x$-komponense van, ezért csak az első egyenlet ad járulékot a skalárszorzathoz:

$$\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}) = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}). \quad (4)$$

A jobboldal nyilván $P$-vel egyenlő. Ahhoz, hogy a baloldalt időderiváltként írjuk fel, mindkét tényezőt átalakítjuk:

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}) = \left(\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = \frac{1}{2}\frac{d\mathbf{v}^2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt},$$

$$\frac{1}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = 2c^2\frac{d}{dv^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

Ha ezeket (4)-be helyettesítjük, a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = P \quad (5)$$

egyenletet kapjuk, amely (3) alakú. A kinetikus energiára tehát a

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + konstans$$

képletet nyerjük. Mivel a kinetikus energiának nulla sebességnél el kell tűnnie, ezért a konstansot $(-mc^2)$-nek kell választani:

$$K = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right). \quad (6)$$

A $v \ll c$ határesetben ez a $K$ átmegy a newtoni kinetikus energia $mv^2/2$ képletébe.

A (6) képlet szerepel Einstein júniusi cikkében. Három hónappal később megértette, hogy az $mc^2$ kifejezés a test belső energiája, tehát az $mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$ mennyiség, amelyet a továbbiakban $W$-vel fogunk jelölni, a kinetikus és a belső energia összege.

Rendelhető-e fizikailag tartalmas módon tömeg ehhez az energiához a $W/c^2$ képlet segítségével? Az előző pont alapján nyilvánvaló, hogy ez nem lehetséges, mert $W$ nem belső energia. Ezért semmiképpen sem indokolt, hogy az $E = mc^2$ relációra hivatkozva az $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ mennyiséget tömegnek tekintsük és elnevezzük *mozgási tömegnek* (és ezzel párhuzamosan $m$-t *nyugalmi tömegnek* kereszteljük el). A mozgási tömeg elnevezés használata valamivel indokoltabb az impulzus szempontjából, mert az impulzus relativisztikus kifejezését formálisan úgy kaphatjuk meg a newtoni mechanika $m\mathbf{v}$ kifejezéséből, hogy a tömeget a mozgási tömeggel helyettesítjük (ld. a Függeléket).

A magam részéről azonban azt tartanám a legszerencsésebbnek, ha az $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ kombinációnak nem adnánk külön nevet, vagyis lemondanánk a mozgási és a nyugalmi tömeg elnevezés használatáról, mert valójában sehol sincs rájuk szükség és csak félreértésekre adnak alkalmat. Elég gyakran lehet találkozni például azzal a tévhittel, hogy a Newton-egyenletekről úgy lehet áttérni a relativisztikus mozgásegyenletekre, hogy a gyorsulást nem a nyugalmi tömeggel, hanem a mozgási tömeggel szorozzuk[6]: A nyugalmi tömeg hajlamos rá, hogy kitúrja a longitudinális és tranzverzális tömeget az őket megillető helyről.

## 4 Fényelhajlás, vöröseltolódás

A nulla tömegű részecskék példáján lehet talán a legvilágosabban megfigyelni, milyen veszélyekkel jár, ha a tömeg és az energia ekvivalenciáját dogmatikusan, betű szerint értelmezzük.

Mint ismeretes, a relativisztikus mechanika megengedi nulla tömegű részecskék létezését, mert az energia és a sebesség impulzuson keresztül kifejezett alakjában ($W = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$, $v = c^2p/W$) az $m \longrightarrow 0$ helyettesítés simán elvégezhető: Nulla tömegű részecskékre $W = cp$, $v = c$. A fotonok ebbe a kategóriába tartoznak. Az $\omega$ körfrekvenciájú fény fotonjainak energiája $\hbar\omega$-val, impulzusa $\hbar\omega/c$-vel egyenlő.

Ha a tömeg és az energia kapcsolatát szigorú értelemben vett ekvivalenciaként fogjuk fel, akkor azt kell mondanunk, hogy a fotonnak véges, $W/c^2$ =

[6]Ezt a hibát követi el E. Szabó László "A nyitott jövő problémája" c. könyvében (Typotex, 2002) a 22-23. oldalon.

$\hbar\omega/c^2$ nagyságú tömege van és ezt a "tényt" különböző módon szokták felhasználni arra, hogy a klasszikus mechanika fogalmaival interpretálják a fény viselkedését az általános relativitáselmélet görbült téridejében.

Ennek az elméletnek az egyik nevezetes következménye az, hogy a fénysugarak elhajlanak az olyan nagy tömegű objektumok közelében, mint a csillagok és a Nap. Ezt a jelenséget gyakran magyarázzák úgy, hogy mivel a fénysugárban terjedő fotonoknak $\hbar\omega/c^2$ nagyságú tömege van, a Nap éppúgy vonzza őket, mint mondjuk a hiperbola pályán mozgó üstökösöket.

Ez a "magyarázat" azonban két okból is súlyosan félrevezető. Egyrészt az általános relativitáselmélet lényege az, hogy a gravitációs mozgást a gravitációs erő fogalma nélkül, a téridő görbületével magyarázza, ezért az üstökösök *sem* azért térülnek el a Nap közelében, mert az általános tömegvonzás hat rájuk. A fényelhajlást inkább a fénytöréshez lehet hasonlítani, mert a Nap által "deformált" téridő görbülete a fénysugarakra nézve a törésmutató szerepét játssza, amely az $n \approx 1 + 2GM/c^2r$ képlet szerint függ a radiális koordinátától ($G$ a gravitációs állandó, $M$ a naptömeg). Természetesen ez a magyarázat is leegyszerűsít (kénytelen rá, mert a téridő görbesége nem tehető szemléletessé), de elég közel van a valósághoz és nincs olyan súlyos ellentmondásban a ma elfogadott fizikai világképpel, mint a zérustól különböző fotontömeg.

A másik ok az, hogy a fotontömegen alapuló értelmezés az elhajlás szögére hibás értéket ad. Érdekes módon a Nap által okozott fényelhajlás szögét már kétszáz évvel ezelőtt kiszámította J. G. von Soldner német természetkutató a fény korpuszkuláris elmélete alapján. A fényrészecskék tömegéről Soldner természetesen semmit sem tudott, de nem is volt rá szüksége, mert a gravitációs mozgás Newton-egyenleteiből a tömeg kiesik. Soldner kiszámította a fényelhajlás szögét, és fele akkora értéket kapott, mint amekkora bő száz évvel később a relativitáselméletből jött ki. Ez a számítás vonatkozik arra az esetre is, amikor a fényt $\hbar\omega/c^2$ tömegű fotonokból állónak képzeljük és mutatja, hogy csak a tömeg léte számít, a nagysága nem.

De ha nem vagyunk hajlandók elfogadni, hogy a fotonnak $\hbar\omega/c^2$ nagyságú tömege van, akkor ezzel tulajdonképpen érvénytelennek nyilvánítjuk az $E = mc^2$ képletet nulla tömegű részecskékre? Egyáltalán nem, a képlet ekkor is érvényes és azt fejezi ki, hogy a nulla tömeg nulla belső energiával jár együtt. Kinetikus energia azonban van, amely a fotonok esetében $\hbar\omega$-val egyenlő.

A másik jelenség, amit szintén gyakran interpretálnak a fotontömeg alapján a gravitációs vöröseltolódás. A 60-s években ezt úgy mutatták ki, hogy egy toronyban a földszinti $A$ laboratóriumból monokromatikus fénysugarat irányítottak a kb. $h = 20$ méter magasan lévő $B$ emeleti laboratóriumba. A földszinten végzett mérések alapján az alkalmazott fényforrás körfrekvenciája $\omega_A$ volt, de az emeletre érkező fény frekvenciáját az ottani mérés $\omega_A$-nál kisebb $\omega_B$ nagyságúnak mutatta. Ezt a jelenséget nevezik gravitációs vöröseltolódásnak[7]. A frekvenciák különbsége rendkívül kicsi, az elmélet (és a mérések) szerint a relatív frekvenciaeltoódás nagysága

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_A} \equiv \frac{\omega_A - \omega_B}{\omega_A} = \frac{\Delta\Phi}{c^2}, \tag{7}$$

ahol $\Delta\Phi = gh$ az emeleti laboratórium gravitációs potenciálja. 20 méteres úton a relatív frekvenciaeltolódás (7) szerint kb. $10^{-15}$-tel egyenlő.

A jelenség fotontömeggel történő interpretációjának a sémája nagyjából a következő: A földszinti laboratóriumban a foton gravitációs potenciálja zérus, $\hbar\omega_A$ energiája ezért tisztán kinetikus energia. Az emeletre érkezve $\hbar\omega_A/c^2$ tömege következtében a potenciális energiája $(\hbar\omega_A/c^2)$ $gh$-ra nő meg, ennek következtében a kinetikus energiája $\hbar\omega_A(1 - gh/c^2)$-re csökken. Ez a kinetikus energia az emeleten megfigyelt $\omega_B$ frekvencia $\hbar$-szorosa, ezért $\omega_B = \omega_A(1 - gh/c^2)$ a (7) képlettel összhangban.

Ezzel a gondolatmenettel szemben két ugyanolyan jellegű kifogás emelhető, mint a fényelhajlásnál: A gondolatmenet egyrészt meghamisítja a jelenség valódi természetét, másrészt numerikusan hibás eredményre vezet.

Kezdjük ezúttal a második problémával. A $\Delta\Phi = gh$ képlet csak a földfelszín közvetlen közelében adja

[7] Az emeletről a földszintre irányított fenysugár természetesen ellentétes, "kékeltolódást" szenved.

meg a gravitációs potenciált, amikor $h \ll R$ ($R$ a földsugár). A fotontömegen alapuló gondolatmenet azonban minden további nélkül alkalmazható akkor is, amikor a két laboratórium messze van egymástól. Ebben az esetben természetesen

$$\Delta\Phi = \left(-\frac{GM}{R+h}\right) - \left(-\frac{GM}{R}\right) = gh\frac{R}{R+h}$$

(kihasználtuk, hogy $g = GM/R^2$). A foton potenciális energiája tehát $(\hbar\omega_A/c^2)\dfrac{ghR}{R+h}$-ra nő meg, kinetikus energiája pedig $\hbar\omega_A(1 - \dfrac{gh}{c^2}\cdot\dfrac{R}{R+h})$-ra csökken. A gondolatmenet szerint ez utóbbi mennyiség $\hbar\omega_B$-vel egyenlő, ezért

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_A} = \frac{gh}{c^2}\cdot\frac{R}{R+h}.$$

Az általános relativitáselmélet szerint azonban a helyes képlet a következő:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_A} = \sqrt{\frac{(1+h/R)(1-2gR/c^2)}{1+h/R-2gR/c^2}} - 1.$$

Amikor $h \ll R$ mindkét képlet visszaadja (7)-t, de az általános esetben különböznek egymástól.

Térjünk át az értelmezés kérdésére. Az általános relativitáselmélet szerint a jelenség lényege az, hogy az $A$ és a $B$ pontban nyugvó lokális vonatkoztatási rendszerekben végzett mérés a fény frekvenciáját sajátidőben adja meg, és a sajátidő a két pontban nem egyforma mértékben tér el a koordinátaidőtől, amelyben a fény frekvenciája a terjedés során állandó[8]. Ezért ha pl. fénysugár helyett géppuska-sorozatot lőnek fel az alsó laboratóriumból a felsőbe, az is "vöröseltolódást" szenved: A $\nu_A$ tüzelési és a $\nu_B$ becsapódási frekvencia aránya ugyanaz, mint a fénysugárra az $\omega_A/\omega_B$ arány. Teljesen nyilvánvaló, hogy hiába csökken le a lövedékek kinetikus energiája mire az emeletre érnek, ennek a csökkenésnek semmi köze a $\nu_A/\nu_B$ arányhoz.

Nem a függőleges hajítás, hanem a Doppler-effektus világít rá a gravitációs vöröseltolódás valódi természetére. Amikor egy inerciarendszerben pozitív $x$ irányba $\omega$ körfrekvenciájú sugárzás terjed, akkor a relativitáselmélet előtti fizika szerint azt egy $v$ sebességgel szembe haladó megfigyelő $\omega(1+v/c)$ frekvenciájúnak találja. A relativitáselmélet szerint azonban a mozgó megfigyelő a frekvenciát sajátidőben méri, ezért ez az érték még korrekcióra szorul: Figyelembe kell venni, hogy a mozgó megfigyelő órái $\sqrt{1-v^2/c^2}$-szer lassabban járnak, mint a nyugvó megfigyelőé és ezért a periódusidőt $\sqrt{1-v^2/c^2}$-szer kisebbnek, a frekvenciát $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ szer nagyobbnak mutatják. Ha ezt számításba vesszük azt találjuk, hogy a mozgó megfigyelő a sugárzást $\omega(1+v/c)/\sqrt{1-v^2/c^2} = \omega\sqrt{(1+v/c)/(1-v/c)}$ frekvenciájúnak észleli. Nyilvánvaló, hogy a Doppler-effektus képletei a géppuska-sorozatra is érvényesek. A sajátidő szerepe itt nagyon hasonló ahhoz, amit ez a mennyiség a gravitációs vöröseltolódásban játszik.

## Függelék

Mozogjon a vesszős koordinátarendszer $V$ sebességgel a vesszőtlenhez képest a közös $X$-tengely pozitív irányába. Tekintsünk egy tömegpontot, amely a trajektóriája egy adott pontjában a vesszőtlen koordinátarendszerhez képest $\mathbf{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$, a vesszőshöz képest $\mathbf{v}' = (v'_x,\ v'_y,\ v'_z)$ sebességgel mozog. A két sebesség között a sebességösszeadás törvénye létesít kapcsolatot:

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}, \\ v'_y &= \frac{v_y\sqrt{1-V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}, \\ v'_z &= \frac{v_z\sqrt{1-V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}. \end{aligned} \tag{8}$$

A gyorsulások

$$\mathbf{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z) = \left(\frac{dv_x}{dt},\ \frac{dv_y}{dt},\ \frac{dv_z}{dt}\right)$$

$$\mathbf{a}' = (a'_x,\ a'_y,\ a'_z) = \left(\frac{dv'_x}{dt'},\ \frac{dv'_y}{dt'},\ \frac{dv'_z}{dt'}\right)$$

[8] Ezt a magyarázatot természetesen csak az általános relativitáselmélet alapjainak az ismeretében lehet pontosan megérteni.

kifejezésében $dt$ és $dt'$ a Lorentz-transzformáció segítségével számítható át egymásba:

$$dt' = \frac{dt - (V/c^2)\,dx}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = \frac{1 - Vv_x/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\,dt. \qquad (9)$$

A (8) első egyenlete szerint

$$dv'_x = \frac{d}{dv_x}\left(\frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}\right) dv_x = \frac{1 - V^2/c^2}{(1 - v_x V/c^2)^2}\,dv_x,$$

ezért

$$\frac{dv'_x}{dt'} = \frac{(1-V^2/c^2)^{3/2}}{(1 - v_x V/c^2)^3}\,\frac{dv_x}{dt},$$

vagyis

$$a'_x = \frac{(1-V^2/c^2)^{3/2}}{(1 - v_x V/c^2)^3}\,a_x.$$

Tegyük fel, hogy a vesszős rendszer pont a nyugalmi rendszer, azaz

$$v_x = v, \qquad v_y = v_z = 0, \qquad \text{és} \qquad V = v. \qquad (10)$$

Ekkor

$$a'_x = \frac{a_x}{(1-v^2/c^2)^{3/2}},$$

ami éppen (1) első egyenlete.

A (8) második egyenletének a differenciálja a következő:

$$dv'_y = \frac{\partial}{\partial v_x}\left(\frac{v_y\sqrt{1-V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}\right) dv_x + \\ + \frac{\partial}{\partial v_y}\left(\frac{v_y\sqrt{1-V^2/c^2}}{1 - v_x V/c^2}\right) dv_y.$$

A deriválások elvégzése után

$$dv'_y = v_y\sqrt{1-V^2/c^2}\cdot\frac{(-V/c^2)}{(1-v_xV/c^2)^2}\,dv_x + \\ + \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1-v_xV/c^2}\,dv_y.$$

A (9) segítségével megint áttérünk gyorsulásokra:

$$a'_y = -\frac{v_y V}{c^2}\cdot\frac{1-V^2/c^2}{(1-v_xV/c^2)^3}\,a_x + \frac{1-V^2/c^2}{(1-v_xV/c^2)^2}\,a_y.$$

Ide (10)-t beírva az

$$a'_y = \frac{a_y}{1-v^2/c^2}$$

képletre jutunk, ami (1) második összefüggése. Ugyanígy kapható meg a harmadik összefüggés is.

Írjuk fel példaként a (2) egyenleteket elektromágneses mezőben mozgó ponttöltésre. A pillanatnyi nyugalmi rendszerben a ponttöltésre $\mathbf{F}' = e\mathbf{E}'$ erő hat, az $\mathbf{F}$ ezzel az erővel egyenlő a vesszőtlen rendszer mennyiségein keresztül kifejezve. A szükséges összefüggéseket az elektromágneses mező relativisztikus transzformációja szolgáltatja:

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

A mozgásegyenletek (2)-ben felírt formája tehát az adott esetben a következő[9]:

$$\begin{aligned} m\frac{a_x}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} &= eE_x, \\ m\frac{a_y}{1-v^2/c^2} &= e\frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ m\frac{a_z}{1-v^2/c^2} &= e\frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{aligned} \qquad (11)$$

Ezek az egyenletek alkalmasan orientált koordinátarendszerben érvényesek, de könnyen átírhatók vektoriális alakba, ahol ilyen korlátozás már nincs:

$$\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,\mathbf{a} = e[\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{v}\times\mathbf{B})]. \qquad (12)$$

Ebből az egyenletből matematikai átalakítással meg lehet kapni a Lorentz-erőt tartalmazó

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathbf{E} + e(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

[9] Ha a második és a harmadik egyenletet $\sqrt{1-v^2/c^2}$-tel megszorozzuk, a gyorsulás szorzótényezőjeként az $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ hányados jelenik meg. Amikor ponttöltések elektromágneses térben történő mozgását vizsgáljuk, ezt a mennyiséget célszerű tranzverzális tömegnek tekinteni.

egyenletet, amelyben $\mathbf{p} = m\mathbf{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

A (2) baloldalán a gyorsulás komponenseit a longitudinális illetve a tranzverzális tömeg szorozza. A nevezőjükben az $(1 - v^2/c^2)$ hatványai biztosítják, hogy a testet ne lehessen fénysebességre felgyorsítani. A (11) azonban mutatja, hogy ilyen faktorok a jobboldal nevezőjében is felléphetnek és ha elég magas hatvánnyal szerepelnek, kompenzálhatják a baloldaliakat. A (11)-ben nem történik ilyen kompenzáció, mert az első egyenletben, amely a sebesség nagyságát változtatja, egyáltalán nem jelenik meg $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ a jobboldalon. Ponttöltést ezért nem lehet fénysebességre felgyorsítani. Más erőterek esetében azonban az első egyenletben is felléphet a nevezőben $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ tetszőlegesen magas hatványa, a relativitáselmélet alapelvei ezt a lehetőséget egyáltalán nem zárják ki. "Relativitáselmélet" könyvemben (Typotex, 2002) a 8. jegyzetben található egy ilyen példa. Ez a matematikai lehetőség figyelmeztet rá, hogy a fénysebesség átjárhatatlanságát a transzformációs törvények önmagukban még nem garantálják.