Előadások a speciális relativitáselmélet alapjairól

ELTE Doktori Iskola 2013

Hraskó Péter

Tartalomjegyzék

Ebben a kurzusban a speciális relativitáselméletről lesz szó, az általános relativitáselmélettel nem foglalkozunk. Most — bátorításként — azzal kellene folytatnom, hogy csak az általános relativitáselmélet az, ami nehéz, a speciális relativitáselmélet egyáltalán nem az, de ez igazi átverés volna. A speciális relativitáselméletnek csak a *matematikája* egyszerű, a fogalmi alapjait tekintve azonban *kifejezetten nehéz diszciplina.* Csak nagyon komoly gondolati és képzeleti erőfeszítés árán lehet valóban megérteni. Az előadásokban természetesen minden tőlem telhetőt meg fogok tenni, hogy érthető legyek, de a Ti erőfeszítések nélkül semmire se fogunk jutni.

1. A fénysebesség állandóságáról

1865 mérföldkő volt a fizika történetében: Ebben az évben publikálta *J. C. Maxwell* az elektromágneses mező egyenleteit. Maxwell arra a kérdésre kereste a választ, hogy hogyan lehet számítással meghatározni az elektromosan töltött testek és az elektromos áramok által létrehozott elektromos és mágneses mezőt. Az egyenleteinek azonban volt egy olyan következménye is, amelyre valószínűleg előre nem számított: Elektromos és mágneses mező akkor is létezhet, amikor se töltések, se áramok nincsenek jelen a térben, de ezek a mezők nem statikusak, hanem hullámszerűen terjednek pontosan az akkor már kétszáz éve ismert fénysebességgel. Mai (SI) jelölésekben ezt az eredményt kapta:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{1}$$

Lényeges természetesen, hogy a jobboldalon szereplő mennyiségeket a fény terjedésétől teljesen független kísérletekből is meg lehet határozni.

Ez nagyszerű eredmény volt, de nem volt teljesen precedens célkül a fizikában. A hang terjedési sebességét a *Principiában* már Newton kiszámította, ami 1687-ben igazán rendkívüli teljesítmény volt[1]. Abból a feltevésből indult ki, hogy a hang „nyomás-löket". Ezt a képletet kapta a hangsebességre:

$$c_h = \sqrt{\frac{p_1 - p_0}{\rho_1 - \rho_0}}. \tag{2}$$

A képletben p_0 és ρ_0 a közeg normális nyomása és sűrűsége, a p_1 és a ρ_1 pedig ezek megváltozott értéke a „löketben". Newton ismerte a Boyle-törvényt, amely szerint *konstans hőmérsékleten* a sűrűség arányos a nyomással (és megfordítva). Az (2) alkalmazásához tehát nem kell ismerni se p_1-et, se ρ_1-t, mert a hangsebesség nem más, mint ennek a Boyle-törvényben szereplő arányossági tényezőnek a négyzetgyöke. Az arányossági tényezőt a levegőre Newton empirikusan határozta meg. A hangsebességre vonatkozóan akkor már léteztek mérési eredmények (*M. Mersenne*, 1640). Az (1) képlet ezekkel nagyságrendileg megegyezett, de kb. 15%-kal alatta maradt a mért hangsebességnek. A hiba azonban — érdekes módon — nem a képletben van, hanem Newton ott követte el, hogy az arányt állandó hőmérséklet mellett határozta meg. A hang azonban gyors folyamat, inkább adiabatikus, mint izoterm. Ha ezt figyelembe vesszük, a képlet korrektnek bizonyul.

Az (1) és a (2) képlet strukturális különbözőségén persze nem csodálkozunk, hiszen gyökeresen különböző természetű folyamatokra vonatkoznak. Van azonban egy olyan különbség is közöttük, amelynek nem kellene lennie. A (2) esetében világos, hogy *nyugvó közegre* vonatkozik és a kísérleti ellenőrzésénél ezt lehet is biztosítani (pl. ne fújjon erős szél). Azt a közeget azonban (az étert), amelyben a fény terjed, egyáltalán nem érzékeljük, ezért nem is tudhatjuk, hogy amikor fénysebességet mérünk, nyugszik-e vagy mozog ez a közeg hozzánk képest. Michelson kitalált ugyan egy módszert az éterszél mérésére, de a nevezetes Michelson-Morley kísérlet arra a paradoxális következtetésre vezetett, hogy az éter mindenkihez képest nyugalomban van: Akármilyen mozgást végzett Michelson és Morley interferométere, éterszelet sohasem észlelt.

A történetet mindenki jól ismeri, ezért át is ugrom azt a kb. negyedszázadot, amelyben Lorentz és mások megkísérelték összeegyeztetni az éter létét a Michelson-Morley kísérlet negatív eredményével. 1905-ben Einsteinnek az a gondolata támadt (a Michelson-Morley kísérlettől egyébként függetlenül), hogy hátha a fény tényleg ugyanazzal a c sebességgel terjed minden vonatkoztatási rendszerhez (testhez) képest, akármilyen sebességgel mozogjon is az. Ezt a feltevést tette meg az elmélete egyik posztulátumává és hozzálátott, hogy egy erre a posztulátumra alapozott elméletet dolgozzon ki.

Amit eddig elmondtunk, lényegében megtalálható bármely relativitáselmélet könyv bevezetőjében. De most vegyünk egy nagy lélegzetet és játsszunk el a gondolattal, hogy Einstein tulajdonképpen eljárhatott volna másképp is: Nem

[1] Newton gondolatmenetéről ld. http://mathpages.com/home/kmath109/kmath109.htm

kezd rögtön elméletet építeni a posztulátumára, hanem a kísérleti fizikusokhoz fordul azzal a kéréssel, hogy legyetek már szívesek kísérletileg leellenőrizni, hogy tényleg ugyanaz-e a fénysebesség minden inerciarendszerben, mert hátha nincs is így, és akkor minek fárasszam magamat egy egészen új elmélet kidolgozásával.

Meggyőződésem — bár bizonyítani nem tudom —, hogy Einstein az 1905-ös cikkében azért nem tért ki a fénysebesség állandóságának közvetlen ellenőrzésére, mert triviális volt a számára, hogy egy ilyen mérésnek nincs elvi akadálya. Valószínűleg eszébe se jutott, hogy ezt hangsúlyozni kellene. Pedig jól tette volna, mert sok félreértésnek vette volna ezzel az elejét. Még ma is vannak ugyanis olyanok, akik úgy gondolják, hogy elvi okokból lehetetlen kísérletileg meggyőződni a fénysebesség állandóságáról[2], de valószínűleg még sokkal többen vannak, akik „csak" bizonytalanok. Valójában a posztulátum kísérleti ellenőrzésének csak az az akadálya, hogy még űrhajókkal se lehet olyan laboratóriumokat létrehozni, amelyek a fénysebességgel összemérhető sebességgel mozognak egymáshoz képest. Ha a technikai lehetőségek megvolnának, például így lehetne eljárni:

1) Mindenekelőtt meg kell győződnünk róla, hogy a laboratóriumunk (vonatkoztatási rendszerünk) valóban inerciarendszer. Ennek ellenőrzése nem igényel időmérést: A nyugvó izolált testeknek nyugalomban kell maradniuk, a giroszkópok tengelyének folyamatosan a fal ugyanazon pontjára kell mutatniuk.

2) Két *egymás mellett nyugvó* azonos szerkezetű ideális órát szinkronizálunk (a mutatóállásukat azonos állásba hozzuk), majd egy egyenes mentén pontosan ellenkező irányban szimmetrikus mozgással eltávolítjuk őket egymástól úgy, hogy az egyik a P, a másik a Q pontban álljon meg. A szimmetriát például a következő módszerrel biztosíthatjuk: Az órákat két azonos szerkezetű „holdjárón" helyezzük el, amelyek egyszerre indulnak el egymással ellenkező irányba és csak egyenesen tudnak haladni. A kocsik mozgását olyan belső program vezérli, amely mindkét járművön pontosan egyforma, és a végrehajtáshoz szükséges időjeleket maguk a járműveken elhelyezett (korábban szinkronizált) ideális órák szolgáltatják.

3) Ezután fényjeleket küldünk P-ből Q-ba, feljegyezzük az összetartozó indítási és érkezési időpontokat és kiszámítjuk a repülési idők T_{PQ} empirikus átlagát. A két pont L_{PQ} távolságát a „holdjárók" kerekeinek a kerületét ismerve abból számíthatjuk ki, hogy hány fordulatot tettek meg.

4) Az L_{PQ}/T_{PQ} hányados megadja a fénysebességet a tetszőlegesen megválasztott $P \to Q$ irányban. Ha Einstein posztulátuma igaz, akkor egy ilyen mérés*sorozatnak* azt kell mutatnia, hogy ez a sebesség minden inerciarendszerben minden irányban ugyanakkora.

Einstein nyilvánvalóan helyesen járt el, hogy közvetlen kísérleti bizonyíték nélkül posztulálta a fénysebesség állandóságát és izotrópiáját (valójában ez az elmélet 2. posztulátuma volt) és abban bízott, hogy az elmélet speciális következményeinek kísérleti igazolása egyben az elmélet posztulátumait is alátá-

[2]Ezt az álláspontot képviseli L. Szabó László *A nyitott jövő problémája* c.könyvében (Typotex 2002).

masztja majd. Emlékeztetek rá, hogy az 1. posztulátum az inerciarendszerek teljes egyenértékűségét mondja ki.

A szemlélet számára a fénysebesség állandósága képtelen feltevésnek tűnik: Hogy lehet valaminek a sebessége ugyanakkora különböző sebességgel mozgó tárgyakhoz képest? Ez a probléma akkor merül fel különös élességgel, amikor *egyetlen fényjel* sebességéről van szó különböző mogásállapotú vonatkoztatási rendszerekhez (pl. egy mozgó vonathoz és a vasúti töltéshez) képest. Einstein tudatában volt, hogy ez a feltevés csak akkor lehet igaz, ha *csak a fényre* érvényes, a lassan mozgó testekre nem. A sebességgel kapcsolatos fogalmaink ugyanis csak lassan mozgó testekre vonatkoznak. A feladata tehát kettős volt: (1) meg kellett mutatnia, hogy a fénysebesség állandósága nem tartalmaz *logikai* képtelenséget, és (2) az erre a feltevésre felépített mechanika kis sebességek esetén visszavezet a newtoni mechanikára és így nincs ellentmondásban a közvetlen tapasztalatainkkal.

2. Az egyidejűség relativitása

Einstein azzal kezdte, hogy rámutatott: A fénysebesség állandósága első látásra logikai képtelenségre vezet, *az egyidejűség relativitására.* Ez volt a híres vonatos gondolatkísérlet.

Legyen a vasútállomás (amelyen a vonat megállás nélkül halad keresztül) az egyik inerciarendszer, az egyenes pályán egyenletes sebességgel mozgó vonat a másik. Tegyük fel, hogy megmértük a fény terjedési sebességét az 1. fejezetben leírt eljárással az állomáson is, a mozgó vonaton is, és valóban azt találtuk, hogy mindkét esetben mindkét irányban ugyanazzal a c-vel egyenlő. Indítsunk fényjelet a vonat középpontjából, amely a vonat elején és végén elhelyezett tölteteket felrobbantja. Egyidejű-e ez a két robbanás? Erre a kérdésre nincs egyértelmű válasz — a két inerciarendszerhez viszonyítva a jelenséget eltérő konklúzióra jutunk. A vonat inerciarendszerében a robbanások egyidejűek, mert a fényfelvillanás a középpontban történt, és a fény sebessége mindkét irányban egyforma. A földi inerciarendszerben azonban a vonat végén a robbanás előbb következik be, mint az elején, mert a két fényjel *ehhez képest is* ugyanazzal a c sebességgel terjed mindkét irányban, de a vonat vége elébe megy a fényjelnek, az eleje pedig szalad előle.

De tényleg olyan abszurd-e ez a következtetés, ahogy első hallásra gondolnánk?

Mielőtt erre a kérdésre válaszolnánk, egy példa. Egyenes országúton 120-szal megy egy kocsi, utána egy másik 100-zal. Biztos, hogy egyirányba mennek? Hát nem. Mert ha egy olyan inerciarendszerből figyeljük meg őket, amelyik maga 110 km/s sebességgel mozog ugyanabba az irányba, mint a kocsik, akkor azt látjuk, hogy a kocsik különböző irányba haladnak: Az egyik jobbra megy 10 km/s-kel, a másik balra ugyanilyen sebességgel. Megint a két inerciarendszer egyenértékűsége miatt nem dönthető el, hogy ugyanabba az irányba mozognak-e vagy sem.

Két *távoli* esemény egyidejűségén töprengve, példákat analizálva arra a következtetésre jutunk, hogy akár létrehozni szándékozunk két egymástól távoli egyidejű eseményt, akár meg akarunk győződni két távoli esemény egyidejűségéről, az eljárást minden esetben *ugyanazon a helyen történő egyidejű eseményekre vezetjük vissza.* Az azonos helyen történő események egyidejűsége ugyanis abszolút. Ezt a vonatos példában is kihasználtuk: Akár a vasútállomáson, akár a vonaton állunk, abban megegyezünk, hogy a fényjelek *indítása* egyetlen pontból történt ugyanabban a pillanatban.

De gondoljunk csak a hétköznapokra. Ha az óránkról kiderül, hogy pontatlan, a rádió alapján állítjuk be. „A sípjel pontosan 12 órát jelez" — halljuk, és a mutatókat a 12-re állítjuk. Ha ugyanezt a város különböző pontjaiban A is, B is, C is megteszi, akkor *egyidőben* cselekednek. De ezt *csak onnan* tudjuk, hogy a rádióadó mindhármójuk felé egyidőben indított rádiójelet.

Ha két esemény ugyanabban a pontban (ugyanazon a helyen) történik, akkor az, hogy egyidejűek-e vagy sem, közvetlenül az események alapján állapítható meg anélkül, hogy szükség lenne máshonnan származó kiegészítő információra. A távoli események egyidejűségének az eldöntésénél ezzel szemben mindig szükség van kiegészítő információra.

Próbáljuk elképzelni ennek az ellenkezőjét. Két egymástól távoli rádiós időnként észlel egy-egy intenzív rádiójelet (impulzust). Tetszőleges módon analizálhatják a jeleket, azt is megállapíthatják, mennyi idő telik el két egymás utáni jel között. Csak egyet nem tehetnek: Azt, hogy az óráikat a központi rádióadáson keresztül szinkronizálják egymással, ahogy az előbb leírtuk. A beérkezés sorrendjében megszámozzák a jeleket, mindegyikhez odaírják az adott jel megfigyelt tulajdonságait, majd összejönnek valahol. Egymás mellé teszik a jegyzőkönyveiket, és egyikük felteszi a kérdést: Egyidejű volt-e az én általam megfigyelt 1. számú jel a te általad megfigyelt 1. számú (vagy akármelyik más) jellel? Ha erre a kérdésükre lehetne válaszolni, akkor az egyidejűség (vagy nemegyidejűség) az eseménypár *belső tulajdonsága* volna, és szó se lehetne arról, hogy az egyik inerciarendszerből nézve egyidejűek lehetnének, a másikból nem.

A Természet azonban a tapasztalataink szerint ilyen lehetőséget nem enged meg, ezért *ebből a szempontból* nem lehet kifogást támasztani az egyidejűség relativitása ellen, vagyis hogy a vonatos példában a robbanások az egyik inerciarendszerből nézve egyidőben, a másikból nézve különböző időben következzen be.

Mindenesetre Einstein világossá tette, hogy ha a fénysebesség minden inerciarendszerben minden irányban ugyanakkora, akkor ez nem is lehet másképpen.

De ha a távoli események egyidejűsége tényleg nem abszolút (nincs belekódolva magukba az eseményekbe), akkor ez felbolygatja az egész dinamikai világképünket.

Nézzünk például két égitestet, amelyek az űrben véletlenül egymás közelében haladnak el és a pályájuk a tömegvonzás következtében elhajlik. Newton elmélete szerint az elhajlás mértékét a GM_1M_2/r^2 gravitációs erő segítségével lehet kiszámítani. De amikor az 1. égitest éppen *itt* van, az r nagysága attól függ, hogy *ugyanabban a pillanatban* hol van a 2. számú. Vagyis a newtoni mozgásegyenlet tényleges alkalmazásánál ki kell tudnunk jelölni a két égitest pályáján az egyidejű pontokat (eseményeket). De ha az egyidejűség nem abszolút (nem állapítható meg magából a jelenségből), akkor ez a feladat teljesen értelmetlen.

A probléma ugyan súlyos, de a választ a korábbi meggondolásaink már tartalmazzák. A probléma csak akkor lenne összeegyeztethetetlen az egyidejűség relativitásával, ha a newtoni fizika azt állítaná, hogy az egyidejű pontokat a két égitest pályáján valóságosan meg is figyeljük. Erről azonban szó sincs, mert *az egyidejű pontok kijelölésére csak a számítások elvégzéséhez van szükség.* Amikor a számítás eredményét megfigyeléssel ellenőrizni akarjuk, akkor már nincs szó *távoli események* egyidejűségéről, hiszen például azt figyeljük meg, hogy egy adott időpillanatban az *obszervatóriumban* (ez egyetlen pont!) milyen irányból érkezik be a két égitestről a fénysugár.

Önmagában véve az tehát nem baj, hogy a mozgásegyenletek tényleges alkalmazásához mindig választani kell valamilyen inerciarendszert és az egyidejű eseménypárok kijelölése a különböző inerciarendszerekben más és más. A lényeges az, hogy a számítás az inerciarendszer megválasztásától független mennyiségekre (invariánsokra) mindig ugyanazt adja, akármilyen inerciarendszerhez viszonyítva végeztük is el.

Einstein nagy felismerése volt, hogy ez akkor lesz így, ha a mozgásegyenletek (a testeké is, meg az elektromos mezőé is) *invariánsak a Lorentz-transzformációval szemben.* Ezzel a nehéz feladattal ebben a kurzusban nem fogunk foglalkozni, de azt nem kerülhettük el, hogy a feladat szükségességét megvilágítsuk.

3. A koordinátaidő

Az idő mibenlétét (vagy legalább is a fizikai időét) korábban még sohase vizsgálták olyan mélyrehatóan, ahogy Einstein tette a relativitáselmélet megalkotásával. Kövessük őt tovább.

Az $s = f(t)$ képlet azt fejezi ki, hogy hogyan függ egy test által megtett út az időtől. Ha pl. a test súrlódásmentesen csúszik lefele egy α hajlásszögű lejtőn, akkor ez a képlet a következő:

$$s = \frac{g \sin \alpha}{2} t^2.$$

Mit jelent a t ebben a képletbe? Ha ilyen bátran és határozottan beírtuk a képletbe, meg is kell tudnunk magyarázni, hogy pontosan mit értünk rajta.

A választ a képlet *ideális körülmények között történő ellenőrzési módjának* a leírása tartalmazza. Az ideális körülmények miatt természetesen csak gondolatkísérletről lehet szó, de ha ezt a gondolatkísérletet nem fogalmazzuk meg a kellő részletességgel, akkor nem tudhatjuk, milyen ideálhoz kell közelítenünk a reális kísérleteinket.

Minél pontosabban kívánjuk ellenőrizni az $s = \frac{g \sin \alpha}{2} t^2$ képletet (vagy bármilyen hasonló jellegű $s = f(t)$ összefüggést), annál pontosabb órákra van szükségünk, annál sűrűbben kell őket elhelyezni a trajektória (a lejtő) mentén a kontrollálatlan késési idők kiküszöbölése érdekében, és annál pontosabban kell szinkronizálni őket egymással. Ennek alapján megállapíthatjuk, hogy az

$s = f(t)$ típusú képletekben szereplő t időt *a vonatkoztatási rendszerünkben sűrűn széthelyezett, helyesen szinkronizált, nyugvó ideális órák mutatnák, ha valóban ott volnának.* Ez a megfogalmazás fejezi ki, hogy mit is értünk a képleteinkben szereplő t-n. Az $s = f(t)$ képlet valóságos ellenőrzésénél arra kell törekednünk, hogy néhány elegendően pontos és többé-kevésbé jól szinkronizált óra segítségével minél jobban megközelítsük ezt az ideált.

Nem tudok róla, hogy a relativitáselmélet létrejötte előtt a fizikai t időnek ezt a fogalmát (definícióját) bárki írásba foglalta volna, de a „mulasztást" annak tudom be, hogy a természettudósok előtt az időnek ezek a tulajdonságai valószínűleg olyan természetesek voltak, mint a lélegzetvétel. Az explicit megfogalmazás csak akkor vált szükségessé, amikor Einstein rájött, hogy a helyes szinkronizálással, amely a fenti megfogalmazás fontos eleme, lehetnek problémák. Korábban nyilvánvalónak tekintették, hogy az órákat a széthelyezésük előtt egy közös helyen kell szinkronizálni egymással. Ez az eljárás azon a hallgatólagos feltételezésen alapult, hogy ideális esetben az órák szétvitele közben a szinkronizáltságuk nem romlik el. Egy ilyen feltételezést elvben tapasztalatilag is lehet ellenőrizni úgy, hogy a közös helyről az egyik órát elvisszük a számára kijelölt helyre, majd visszavisszük a közös kiindulópontba. Ha ezután még mindig szinkronizálva lesz a többi folyamatosan ott lévő órával, akkor ez a szinkronizálási eljárás korrekt. Ez a kritérium teljesen egyértelmű, mert nem igényli különböző helyen lévő órák előzetes szinkronizációját.

Erre a szinkronizációs eljárásra, amelyet házi használatra *newtoninak* nevezhetünk el, később még visszatérünk. Látni fogjuk, hogy a vázolt ellenőrzési eljáráson bizony elbukna. Az 1905-ös alapcikkében Einstein egyáltalán nem is foglalkozott vele, hanem egy olyan szinkronizációs eljárást javasolt, amelyben az órákat a szinkronizálásuk *után* már nem kell egyik helyről a másikra mozgatni.

A gondolat nagyon természetes. A t-időt mutató elképzelt tökéletesen pontos(ideális) órák tömegéből válasszuk ki az egyiket. Ez lesz az A óra, ezzel fogjuk összeszinkronizálni az összes többit (a B-ket). Válasszuk ki ez utóbbiak közül az egyiket. Indítsunk A-tól fényjelet B felé, amelyet a B mellett álló tükör azonnal visszaver az A irányába. Tegyük fel, hogy A a fényjel indításakor t_{Ai} időt, a fényjel visszaérkezésekor t_{Ae} időt mutatott, a B óránál pedig a visszatükröződés a t_B pillanatban történt. A 2. posztulátum szerint a fénysebesség minden inerciarendszerben minden irányban ugyanakkora, ezért a két órát akkor tekintjük helyesen szinkronizáltnak, ha az $A \to B$ úton eltelt $\overrightarrow{\Delta} t = t_B - t_{Ai}$ idő egyenlő az $A \leftarrow B$ úton eltelt $\overleftarrow{\Delta} t = t_{Ae} - t_B$ idővel:

$$\text{A helyes szinkronizáció feltétele:} \qquad \overrightarrow{\Delta} t = \overleftarrow{\Delta} t,$$

vagyis $t_B = \dfrac{1}{2}(t_{Ai} + t_{Ae})$. Ez a feltétel természetesen nem teljesül automatikusan, a

$$\delta t_B \equiv t_B - \frac{1}{2}(t_{Ai} + t_{Ae}) = \frac{1}{2}\big[(t_B - t_{Ai}) - (t_{Ae} - t_B)\big] = \frac{1}{2}\big(\overrightarrow{\Delta} t - \overleftarrow{\Delta} t\big) \qquad (3)$$

deszinkronizáltság általában nem lesz nulla. Amikor $\delta t_B > 0$, a B óra „előtte jár” a helyesen szinkronizált időnek, ezért δt_B-vel vissza kell állítani. A $\delta t_B < 0$

esetben természetesen előreállítást kell végezni. Vegyük észre, hogy az eljáráshoz nem kell ismerni a két óra közötti távolságot. A 6. fejezetben majd látunk fontos konkrét példát erre az eljárásra.

Ezt az *einsteini szinkronizálást* érdemes egy másik nézőpontból is megvilágítani. Az 1. fejezetben hangsúlyoztuk, hogy a Maxwell-egyenletek alapján *ki lehet számítani* a c fénysebesség értékét. Ezekben az egyenletekben persze szintén szerepel az a t, amelyről eddig csak a mechanikai mozgás kapcsán volt szó. De ha egyszer a Maxwell-egyenletekből az következik, hogy a fény minden irányban c sebességgel terjed, akkor ezzel automatikusan feltételezzük, hogy a t definíciójában szereplő szinkronizálás az einsteini. Vagyis röviden: *Az einsteini szinkronizálás az, amely mellett a Maxwell-egyenletek érvényesek.*

Most újra felidézem a képleteinkben szereplő t idő definícióját: Ezen azt az időt értjük, amelyet a vonatkoztatási rendszerünkben sűrűn széthelyezett, helyesen szinkronizált, nyugvó ideális órák mutatnák, ha valóban ott volnának. A helyes szinkronizációt már elintéztük. Most az utolsó mellékmondattal, a „ha ott volnának"-kal kell foglalkoznunk. Azt ugyanis senkise gondolja, hogy a laboratóriumunkat tényleg sűrűn telerakjuk helyesen szinkronizált órákkal. Ezek a t időt mutató órák *virtuálisak*, csak a képzeletünkben léteznek. Csak annyit realizálunk belőlük, amennyire éppen szükség van. Ha pl. az $s = \frac{g \sin\alpha}{2} t^2$ képlet helyességét akarjuk ellenőrizni, akkor kezdetnek elég egy-egy órát elhelyezni a lejtő tetejére és a végére. Csak ezt a kettőt kell ténylegesen szinkronizálni. És a relativitáselmélet szerint ezt nem úgy kell megtenni, hogy a két óra mutatóit még a raktárban azonos állásba hozzuk, hanem fényjelekkel kell szinkronizálni őket, amikor már a helyükön állnak. Vagy úgy, ahogy az előbb leírtuk, vagy pedig ha elég pontosan ismerjük a közöttük lévő távolságot és magát a fénysebességet, akkor úgy, hogy megmérjük velük a fénysebességet, és akkor tekintjük őket helyesen szinkronizáltnak, ha az ismert c-t kapjuk eredményül.

A tényleges kísérletek matematikai analíziséhez többnyire elkerülhetetlen, hogy koordinátarendszert is *odaképzeljünk* a laboratóriumba. Tényleg csak odaképzeljük, még akkor is, ha azt mondjuk, hogy „felvesszük" — gondoljunk csak a bolygómozgás számításánál használt koordinátarendszerre. A három térkoordinátával ebből a szempontból pontosan ugyanaz a helyzet, mint a t idővel: Ahhoz, hogy valamit kiszámíthassunk, oda kell képzelni koordinátavonalak sűrű hálózatát, benne a koordinátaidőt mutató nyugvó virtuális órák halmazával, mert csak így tudunk az eseményekhez számszerűen helyet és időpontot hozzárendelni, és a pályákat $x = f(t)$ képletekkel jellemezni.

A leglogikusabban akkor járunk el, ha a t-t éppenúgy koordinátának tekintjük, mint a három térkoordinátát. Ezek együtt alkotnak egy koordinátarendszert a *téridőben.* A virtuális órák ennek a koordinátarendszernek a tartozékai. Amikor az einsteini eljárással képzeljük szinkronizáltnak őket, akkor ezt a négydimenziós koordinátarendszert *Minkowski-koordinátarendszernek* hívjuk. Ha az XYZ koordinátarendszer origójában nyugvó órát választjuk A-nak, akkor az Einstein előírása szerint szinkronizált t időt *Minkowski-időnek* (is) nevezik.

Ez a felfogásmód az egyik oka annak, hogy a t-t, amelyről eddig beszéltünk, *koordinátaidőnek* hívják. A másik ok az, hogy amikor az $x = f(t)$ képlettel megadott pályát papíron ábrázoljuk, az egyik tengelyen az x-et, a másikon a t-t mérjük fel.

4. A sajátidő

Az előző fejezetben láttuk, hogy egy tömegpont pályája mentén a koordinátaidőt mindig más és más órán olvassuk le (gondolatban!), azon, amelyik mellett a test éppen elhalad. Az $x = f(t)$ képlet t koordinátaideje sok különböző (virtuális) óra mutatóállásából jön össze.

Amikor azt kérdezzük, mennyi idő alatt jut el egy test az egyik (mondjuk P) pontból a másikba (mondjuk Q-ba), az időn koordinátaidőt értünk. A kérdés hátterében ugyanis mindig az $x = f(t)$ képlet áll, ez határozza meg a $\Delta t = t_Q - t_P$ időkülönbséget az $x_P = f(t_P)$, $x_Q = f(t_Q)$ képletek alapján. Amikor arról van szó, hogy mennyi idő telt el két konkrét esemény között, ezen is mindig koordinátaidő különbséget értünk.

De teljesen elképzelhető, hogy egy mozgó test visz magával egy ideális órát. Az is mutat valamilyen időt. Tegyük fel, hogy a pálya egyik P pontjában a testhez rögzített óra mutatóállását a P-ben nyugvó koordinátaidőt mutató óra mutatóállásának megfelelően állítjuk be. Vajon a testhez rögzített óra a Q pontba érve ugyanazt az időt fogja mutatni, mint az a koordinátaidőt mutató óra, amelyik a Q pontban nyugszik?

Nem létezik semmiféle kényszerítő ok, ami ezt megkövetelné, ezért erre a kérdésre csak a tapasztalat vagy a fizikai elmélet (jelen esetben a relativitáselmélet) alapján adható válasz.

Mindenekelőtt azonban rögzítsük a terminológiát: Azt az időt, amit egy adott óra mutat, az *óra sajátidejének* hívjuk. Ez a fogalom kiterjeszthető az óra nélküli (pontszerűnek gondolható) testekre is, hiszen mindig elképzelhetünk egy testhez rögzített órát, amely *a test sajátidejét* mutatja[3]. A sajátidőt lehetőleg τ-val jelöljük, amelyet szükség esetén megfelelő indexekkel láthatunk el.

Amikor *időt* mondunk, ezen mindig *koordinátaidőt* értünk. A sajátidő helyett nem mondhatunk egyszerűen időt.

Most meg tudjuk fogalmazni a kérdésünket pontosabban. Tekintsünk egy tömegpontot, amely egyenletes V sebességgel mozog, és az egyenlete *Minkowski koordinátákban* $x = Vt + x_0$. Vegyük a pálya egy szakaszát, amelyen a Δt koordinátaidő intervallumhoz tartozik. Milyen kapcsolat van $\Delta\tau$ és a hozzá tartozó Δt között?

Egy speciális esetben nagyon könnyű válaszolni a kérdésre: amikor a test nyugszik ($V = 0$). Ekkor a testhez rögzített óra, amelynek a sajátidejére kíváncsiak vagyunk, nyugalomban van az éppen mellette lévő virtuális, koordinátaidőt

[3]Egy kiterjedt test minden pontjának „saját sajátideje” van, amelyet az ott nyugvó ideális óra mutat.

mutató órával együtt. Mivel mindkettő ideális, ezért tökéletesen egyforma ütemben járnak, bár általában nem mutatják ugyanazt az időt (nem gondoskodtunk a szinkronizálásukról). De ez nem baj, mert csak intervallumok közötti kapcsolatról érdeklődünk és erre a válasz most

$$\Delta t = \Delta\tau \qquad \text{amikor } V = 0. \tag{4}$$

Az általános esetben (amikor $V \neq 0$) a Δt és a $\Delta\tau$ között a kapcsolat lineáris marad. A $\Delta\tau$ ugyanis a Δt, a V és a c függvénye, ezért dimenziós alapon arányosnak kell lennie Δt-vel, az arányossági tényező pedig — amelyet γ-val fogunk jelölni, — a dimenziótlan V/c hányadostól függ:

$$\Delta t = \gamma(V/c)\Delta\tau. \qquad \gamma(0) = 1. \tag{5}$$

Hogyan lehet meghatározni az ismeretlen $\gamma(V/c)$ függvényt? Lehetne méréssel, de ez persze praktikus okokból szóba se jöhet. Egyedül a két posztulátum az, amire támaszkodhatunk. Több gondolatmenettel is megkaphatjuk a helyes választ, de egyik se nagyon egyszerű.

A legegyszerűbben talán az *optikai Doppler-effektus* segítségével érünk célhoz.

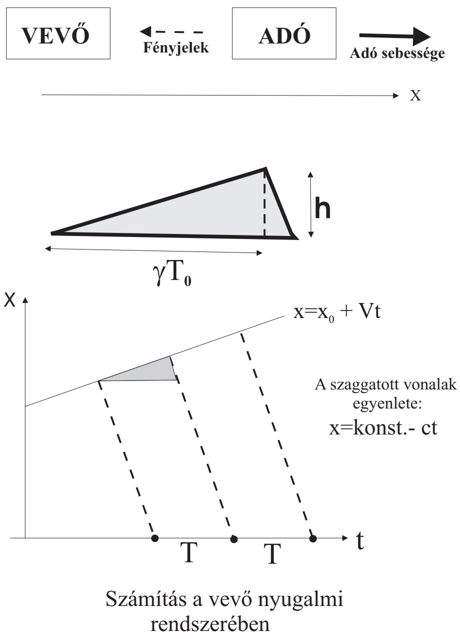
Képzeljünk el egy adóberendezést, amely szabályos időközönként rövid fényimpulzusokat generál, és egy vevőt, amely ezeket tudja észlelni. Amikor a vevő nyugszik az adóhoz képest, ugyanolyan időközönként észleli a jeleket, mint amilyennel az adó kibocsátja őket. Amikor azonban a vevő mozog, valamilyen más periódusidőt észlel. Ez a jelenség a *Doppler-effektus*. A periódusidő helyett természetesen beszélhetnénk frekvenciáról is, amely a periódusidő inverze.

Vezessünk be megfelelő jelöléseket. Az adó által emittált jelek közötti időtartamot általában T_0-al szokás jelölni. Ez az időtartam azonban *sajátidő intervallum*, mert az adó mellett nyugvó egyetlen órán olvasható le, ezért helyesebb lenne T_0 helyett a sajátidőre egyértelműen utaló $\Delta\tau_0$-lal jelölni. Az egyszerűség kedvéért mégis megtartjuk a megszokottabb T_0 jelölést. A megfelelő frekvencia természetesen $\nu_0 = 1/T_0$.

A vevő által észlelt jelek közötti időtartamot általában T-vel jelölik. Ez az idő is sajátidő intervallum, mert a vevővel együttmozgó egyetlen órán olvasható le, ezért T helyett $\Delta\tau$-val kellene jelölni. De most is megtartjuk inkább a T-t. A megfelelő frekvencia $\nu = 1/T$.

Tegyük fel, hogy a vevő és az adó a konstans V sebességgel távolodik egymástól. Ekkor az észlelt ν/ν_0 arány 1-nél kisebb konstans, és természetesen tökéletesen független attól, hogy az adót vagy a vevőt tekintjük nyugvónak. Hogyan lehet kiszámítani ezt az arányt?

Végezzük a számítást abban az inerciarendszerben, amelyben a vevő nyugszik (1. ábra). Az időtengelyen természetesen a koordinátaidőt mérjük fel, ezért a t jelölés korrekt. A rajzon feltüntettük az adó pályáját ($x = x_0 + Vt$), a fényjelek pályáit ($x = konst - ct$), a vevő pályája pedig maga a t-tengely. A koordinátaidő fogalmának megfelelően ezek a képletek is a koordinátaidőt tartalmazzák.



1. ábra.

A pályák metszéspontjai alapján azonosíthatjuk a fényjelek kibocsátásának és észlelésének megfelelő Δt_0 és Δt periódusidőket. Ezek az időtengely szakaszai, ezért maguk is koordináta idő intervallumok, amelyeket a

$$\Delta t_0 = \gamma(V/c)T_0, \qquad \Delta t = \gamma(0)T = T \tag{6}$$

képletek segítségével lehet a megfelelő sajátidő intervallumokon keresztül kifejezni. A második képletben kihasználtuk, hogy a vevő nyugszik, ezért a vevő által észlelt periódusideje koordinátaidőben és sajátidőben ugyanakkora.

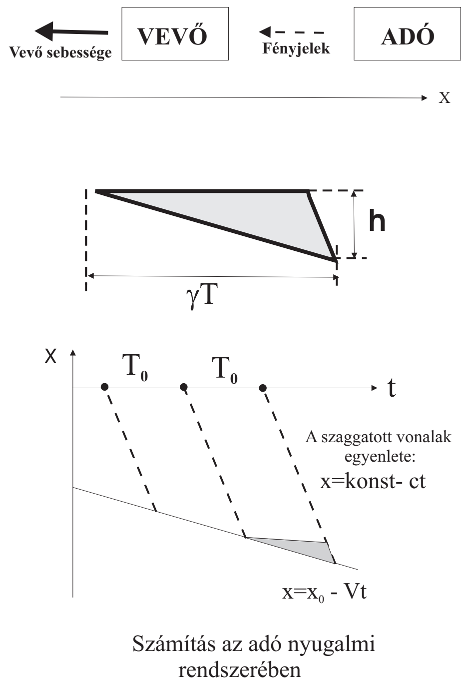
Az 1. ábrán a jelek kibocsátási és észlelési periódusait a sajátidő intervallumokon keresztül fejeztük ki. Milyen a kapcsolat a kettő között? Ezt úgy állapíthatjuk meg, hogy a külön is kirajzolt satírozott háromszög h magasságát kifejezzük mind az adó pályájának iránytangense segítségével, mind pedig a fénysugarak pályájának iránytangensén keresztül:

$$h = \gamma(V/c)T_0 \times V, \qquad h = \Big(T - \gamma(V)T_0\Big) \times c.$$

A két kifejezés egyenlítéséből kapjuk meg a keresett összefüggést a periódusidők között:

$$T/T_0 = \gamma(V/c)(1 + V/c). \tag{7}$$

Ismételjük meg most a számítást az *adó* nyugalmi rendszeréhez viszonyítva is (2. ábra).



2. ábra.

Amikor az adó nyugszik, az (6) helyett a

$$\Delta t = \gamma(V/c)T, \qquad \Delta t_0 = \gamma(0)T_0 = T_0 \tag{8}$$

képlet lép érvénybe, a T/T_0 hányados kiszámítása pedig a

$$h = \gamma(V/c)T \times V, \qquad h = \Big(\gamma(V/c)T - T_0\Big) \times c$$

képletek jobboldalainak egyenlítésével történik. Az eredmény:

$$T/T_0 = \frac{1}{\gamma(V/c)(1 - V/c)}. \tag{9}$$

Figyeljünk fel rá, hogy a relativitáselmélet 2. posztulátumának megfelelően feltettük, hogy a fény mind az adóhoz, mind a vevőhöz képest ugyanazzal a c sebességgel terjed. Megfelelő technika birtokában ezt — mint láttuk, — közvetlenül is lehet igazolni (vagy cáfolni).

De figyeljünk fel most arra is, hogy a két számítás eredménye nem ugyanaz: A (7) és a (9) két különböző formula a Doppler-effektust jellemző T/T_0 arányra. Márpedig akármilyen kísérleti eljárást gondoljunk is ki ennek az aránynak a mérésére, egyetlen jól meghatározott értéket fogunk kapni rá, mert a vizsgált jelenségben magában semmiféle utalás sincs arra vonatkozóan, hogy melyik inerciarendszert, az adó nyugalmi rendszerét-e vagy a vevőét tekintjük-e vonatkoztatási rendszernek.

Ez az a pont, ahol az 1. posztulátumhoz kell folyamodnunk, amely szerint mindkét vonatkoztatási rendszer tökéletesen egyenértékű, és ezért a (7) és a (9) képletnek *ugyanarra a megfigyelhető T/T_0 arányra kell vezetnie.*

Ez a feltétel egyértelműen rögzíti a $\gamma(V/c)$ függvényt. Ha ugyanis a (7) és a (9) baloldala egyenlő egymással, akkor a jobboldalak is egyenlők:

$$\gamma \cdot (1 + V/c) = \frac{1}{\gamma \cdot (1 - V/c)},$$

és innen

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{10}$$

Ezt most visszahelyettesíthetjük akár (7), akár (9) jobboldalába, ugyanazt az eredményt kapjuk:

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}}. \tag{11}$$

A frekvenciákon keresztül kifejezve:

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}. \tag{12}$$

Ennek a képletnek a helyességét gyorsan mozgó ionok sugárzási spektrumának a mérésével igazolták. Megjegyezzük még, hogy amikor a vevő és az adó *közeledik* egymáshoz, (11) és (12) érvényes marad, csak a sebesség előjelét kell bennük ellenkezőjére változtatni.

A képleteinkben fellépő $\sqrt{1 - V^2/c^2}$ négyzetgyök miatt fel kell tennünk, hogy a valóságos órák (testek) sebessége mindig kisebb a fénysebességnél. Az 1905-ös alapcikkében erről Einstein a következőt írja[4]:

> A fénynél nagyobb sebesség esetében fejtegetéseink értelmetlenné válnak; a következőkből egyébként is kitűnik majd, hogy elméletünkben a fénysebesség fizikailag a végtelen nagy sebesség szerepét játssza.
>
> (Nagy Imre fordítása)

Látni fogjuk, hogy a Newton-féle mozgásegyenlet relativisztikus általánosítása összhangban van ezzel a feltevéssel: A fénynél lassabban haladó töltéseket például nem lehet elektromágneses térben fénysebességre felgyorsítani. De nem

[4] *A mozgó testek elektrodinamikájához*, (Albert Einstein válogatott írásai, Typotex 2010, 98. oldal). A kötet sajnos Einstein cikkének csak a felét tartalmazza, amelyet a szerkesztők — úgy látszik, — nem vettek észre.

lehet minden konkrét gyorsítási lehetőséget előre megjósolni, és azt sem lehet kizárni, hogy bizonyos részecskék már eleve úgy keletkeznek, hogy a fénynél gyorsabban mozognak (tachionok). Ezért feltehetően akkor járunk el helyesen, ha ***posztuláljuk***, hogy a fénynél lassabban mozgó testeket nem lehet fénynél nagyobb sebességre (vagy akár csak fénysebességre) felgyorsítani, és ezért a $\sqrt{1-V^2/c^2}$-ben a gyök alatti kifejezés mindig pozitív. Ami pedig a tachionokat illeti, elég lesz akkor törődni velük, ha valóban léteznek.

Most válaszolhatunk az eredeti problémánkra, amely így hangzott: „Tekintsünk egy tömegpontot, amely egyenletes V sebességgel mozog, és az egyenlete *Minkowski koordinátákban* $x = Vt + x_0$. Vegyük a pálya egy szakaszát, amelyen a Δt koordinátaidő intervallumhoz tartozik. Milyen kapcsolat van $\Delta\tau$ és a hozzá tartozó Δt között?"

Azt találtuk, hogy a keresett kapcsolat $\Delta t = \gamma(V/c)\Delta\tau$, amelyben $\gamma(V/c)$-t (10) határozza meg. A képletet azonban gyakrabban szokták a $\Delta\tau$-ra megoldott alakban felírni:

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-V^2/c^2}. \tag{13}$$

A képlet jelentése nagyon egyszerű. Jelöljünk ki az inerciarendszerünkben egy A és egy B pontot és helyezzünk el mindkettőben egy-egy helyesen (fényjelekkel) szinkronizált ideális órát. Tekintsünk egy harmadik órát, amely egyenletes V sebességgel mozog úgy, hogy előbb az A, majd később a B ponton is áthalad. Tegyük fel, hogy az A pontban pontosan ugyanannyi időt mutat, mint az A-ban nyugvó óra. Mennyit mutat, amikor a B-be ér? *Kevesebbet*, mint az ott nyugvó, A-beli órával szinkronizált óra, mert az A-ból a B-be vezető úton a mozgó órán eltelt $\Delta\tau$ sajátidő kisebb, mint az inerciarendszerünkben eltelt megfelelő Δt koordinátaidő. A két időtartam arányát (13) adja meg. Ez a jelenség az ***idődilatáció***.

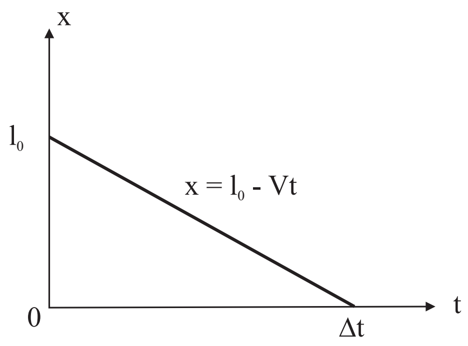
Idődilatáció nemcsak akkor lép fel, amikor az óra egyenletes egyenesvonalú mozgást végez, hiszen a görbevonalú mozgás minden infinitezimálisan kis szakasza egyenesvonalúnak tekinthető. A (13) képlet

$$d\tau = dt\sqrt{1-V(t)^2/c^2}. \tag{14}$$

változata azt mondja meg, hogy a $(t, t+dt)$ koordinátaidő intervallumban, amelyben a mozgó óra sebessége $V(t)$, mekkora $d\tau$ idő telik el rajta.

Ezek a képletek csak Minkowski-koordinátákban érvényesek, vagyis csak akkor, ha a koordinátaidőt fényjelek útján („helyesen") szinkronizált (virtuális) órák mutatják. A speciális relativitáselméletben azonban ezt mindig felteszik (hacsak az ellenkezőjét nem állítják explicite), ezért ezt a feltevést sem szükséges minden esetben külön kihangsúlyozni.

A fejezet végén kiemeljük a sajátidő és a koordinátaidő közötti alapvető különbséget:



3. ábra.

1) Egy testen (órán) történő két esemény között eltelt $\Delta\tau$ sajátidő *abszolút*, független a koordinátarendszer megválasztásától.

2) Két esemény Δt koordinátaidő különbsége *relatív*, különböző módon választott koordinátarendszerekhez képest más és más.

5. A Lorentz-kontrakció

Az egyidejűség relativitása a mozgó testek rövidülését idézi elő. Ezt megint egy mozgó vonattal illusztrálhatjuk. Egy mozgásban lévő vonat hossza az eleje és a végpontja közötti távolsággal egyenlő *ugyanabban az időpontban.* Nem meglepő, hogy az egyidejűség relativitása maga után vonja a hosszúság relativitását.

A mozgó vonat l hosszát úgy mérhetjük meg, hogy a töltésen állva egy stopperrel megmérjük, mennyi idő alatt haladt el mellettünk és a kapott időtartamot megszorozzuk a vonat sebességével. Az így kapott szám ugyanis azt mutatja meg, milyen messze van a vonat eleje a végétől *abban a pillanatban*, amikor a stoppert leállítjuk, tehát valóban a mozgó vonat hosszával egyenlő.

A koordinátaidő és a sajátidő világos megkülönböztetése alapján nagyon egyszerűen le lehet vezetni a Lorentz-kontrakció képletét.

Legyen a stopperen leolvasott időtartam $\Delta\tau$ (ez nyilván sajátidő, hiszen egy adott órán olvassuk le). A mozgásban lévő vonat hossza eszerint $l = V\Delta\tau$. Ennek a képletnek a jobboldalába kell valahogy becsempészni azt az l_0 hosszat, amilyennek a vonaton utazók találják a saját vonatukat. A vonatban ülők azt látják, hogy a menetiránnyal szemben elsuhan mellettük egy ember, akinek a pályáját a 3. ábra egyenese mutatja (az x tengely a vonaton menetirányba, balról jobbra mutat). Az egyenes egyenlete $x = l_0 - Vt$. Ebben az egyenletben a t természetesen koordinátaidő, amelyet a vonaton előzetesen szétrakott és fényjelekkel szinkronizált órák mutatnának, ha valóban ott lennének (a szemléletesség kedvéért gondolhatjuk úgy, hogy a vonat egyetlen hosszú kocsiból áll). A vonatban utazók, ha akarnák, megmérhetnék azt a Δt időt, amely alatt a stoppert tartó alak elsuhan mellettük, de a valóságban ezzel persze nem kell foglalkozniuk. Mi anélkül is tudjuk, hogy ez az idő l_0/V-vel egyenlő, és ugyanez a $\Delta t = l_0/V$ idő szerepel a $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - V^2/c^2}$összefüggés jobboldalán. Következésképpen

$$l = V \cdot \Delta\tau = V \cdot \Delta t\sqrt{1 - V^2/c^2} = l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}. \tag{15}$$

Ez a *Lorentz-kontrakció* képlete.

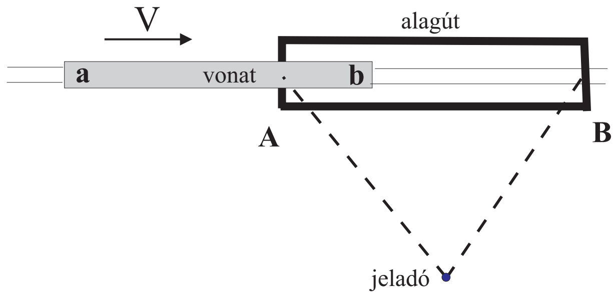
A Lorentz-kontrakció fontos jellegzetességét tudjuk megfogalmazni, ha abból az $\mathcal{I}_0$ *nyugalmi rendszerből* figyeljük meg a jelenséget amelyben a vonat nyugszik. Az $\mathcal{I}_0$-ban a nyugvó, l_0 hosszúságú vonat mellett állva látjuk, hogy különböző sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerek haladnak el mellettünk (ezeket is elképzelhetjük hosszú vonatoknak), bennük a nélkülözhetetlen megfigyelőkkel. Mindegyiket sorban felhívjuk telefonon, hogy mondják már meg, milyen hosszúnak találják a vonatunkat. Mindegyik rövidebbnek találja, mint az l_0 nyugalmi hossz, annál rövidebbnek, minél gyorsabban látják mozogni a vonatot magukhoz képest. *Eközben persze a vonattal nem történik semmi,* ott áll mellettünk, ügyet se vetve rá, ki és honnan nézve méri a hosszúságát. *Ebben az értelemben* mondhatjuk azt, hogy a kontrakció csupán *látszat*.

De ettől még a mozgó vonatkoztatási rendszerekben mért megrövidült hossz nagyon is valóságos, vagyis a vonat *tényleg* olyan hosszú, amilyennek *látszik*: A látszat ebben az esetben *nem* csal. Ez teljesen nyilvánvaló már abból, ahogyan a fejezet elején a kontrakciós képlet levezetésénél mozgó vonat hosszát értettük: egyenlőnek vettük a sebességnek és annak az időnek a szorzatával, amely alatt elhalad mellettünk. Mi lehetne ez a szorzat más, mint a vonat valóságos hossza? Ennek ellenére tanulságos lesz a kontrahált hossz realitását egy másik módon, a *pajta-rúd paradoxon* segítségével is demonstrálni, amelyet azonban a pajta és a rúd helyett egy másik történetbe illesztünk bele. De előbb rögzítjük a szóhasználatot:

Amikor egy mozgó test méretéről beszélünk, ezen mindig a *Lorentz-kontrahált méretet* értjük. Amikor a nyugalmi hosszra gondolunk, a „nyugalmi” jelzőt nem hagyhatjuk el.

A paradoxon: Egy rablóbanda elhatározza, hogy kirabol egy kincsszállító vonatot. A terv alapja az, hogy a vonat áthalad egy alagúton. A banda az alagút két bejáratára titokban erős, kapuszerű sorompót szerel fel, amelyeket rádiójellel lehet lezárni. Az egyik bandatag az alagút két végétől egyenlő távolságra lévő pontban helyezkedik el a jeladóval és a bandavezértől azt a parancsot kapja, hogy amikor a vonat eltűnik az alagútban, hozza működésbe a sorompókat (4. ábra). Az alagútban rekedt vonatot azután a banda többi tagja elfoglalja és kifosztja.

A bandavezér azonban váratlan üzenetet kap a szerelvény összeállításában segédkező egyik vasutastól, aki a bűntársa. Eszerint a szerelvény hosszabb, mint amire számítottak, véletlenül pont olyan hosszú, mint az alagút, ezért az akciót le kell fújni. A bandavezér azonban, aki főállásban elméleti fizikus, megnyugtatja



4. ábra.

az informátort: A Lorentz-kontrakció miatt a vonat teljes egészében el fog férni az alagútban, a terv tehát végrehajtható marad.

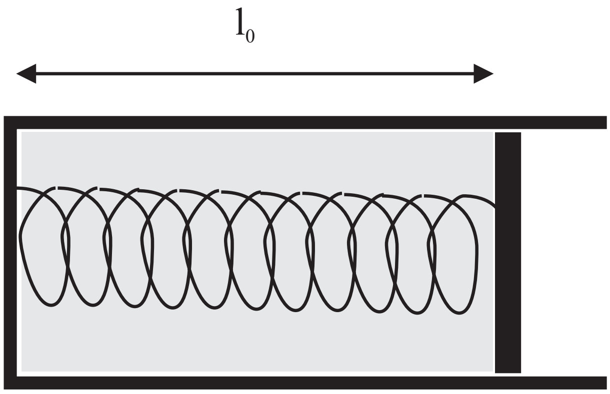
A vonat elindulása után a titkosszolgálat valahogy megneszeli a készülő rajtaütést és mobiltelefonon utasítja a vonatvezetőt, hogy azonnal állítsa le a vonatot. A vonatvezető azonban jó volt fizikából és megnyugtatja a titkosszolgálat emberét: Az alagút a vonathoz képest Lorentz-kontrakciót szenved, a vonatnak legalább az egyik vége biztosan ki fog lógni az alagútból, ezért a jeladónál figyelő bandatagnak nem lesz alkalma beindítani a sorompók működését.

Kinek van igaza, a bandavezérnek vagy a vonatvezetőnek? És miben tévedett a másik?

A magyarázat: A bandavezérnek van igaza. A jeladó szimmetrikus helyzetben nyugszik az alagút A és B végpontjához képest, ahol a sorompókat a banda felszerelte. Ennek következtében az alagút (vagyis a vasúti töltés) $\mathcal{I}$ nyugalmi rendszerében a sorompók zárása egyidőben történik. A vonat az $\mathcal{I}$-hez képest V sebességgel mozog, ezért Lorentz-kontrakciót szenved. A feladat szerint a nyugalmi hossza egyenlő az alagút nyugalmi hosszával, így a Lorentz-kontrakció következtében $\mathcal{I}$-ben rövidebb, mint az alagút: Amikor a vonat a vége eltűnik az alagút A bejáratánál, az eleje (a b pontja) még nem éri el az alagút B kijáratát. Ezért ha a jeladót ebben a pillanatban működésbe hozzák, a vonat valóban bent ragad az alagútban, és a banda megrohanhatja.

Természetesen jól fel kell szerelkezniük lángvágókkal, mert a B kijárati kapuba történő beleütközés következtében a szerelvény hossza még a mozgási hossznál is rövidebbre préselődik össze. A vonat elejének (a b pontnak) a hirtelen lefékeződésénél keletkező „löket” ugyanis legfeljebb fénysebességgel haladhat végig a vonaton, és ennek következtében a vonat vége (az a pont) egy ideig még mozgásban marad a vonat elejének hirtelen leállása után is.

Miben tévedett a vonatvezető? Abban teljesen igaza volt, hogy mivel a vonat nyugalmi rendszerében az alagút Lorentz-kontrakciót szenved, a vonatnak legalább az egyik vége mindig biztosan kilógna, *ha nem zárnák le az alagut kijáratát.* Azonban nem vette figyelembe az egyidejűség relativitását, amelynek következtében a vonat $\mathcal{I}'$ nyugalmi rendszerében a sorompók működése nem egyidőben történik, és azt sem, hogy a hatások még a hétköznapi értelemben szilárd anyagokban sem terjedhetnek a fénynél gyorsabban.



5. ábra.

A vonat $\mathcal{I}$ ' nyugalmi rendszeréből nézve az események lefolyása a következő. Mivel az alagút a vonathoz képest $-V$ irányban mozog, a jeladóból a B felé haladó rádiójel előbb zárja le a B sorompót, mint a másik rádiójel az A sorompót[5]. Amikor a B-beli sorompó beleütközik a *nyugvó* vonat b elejébe, a vonat vége (az a pont) az alagút Lorentz-kontrakciója következtében még kilóg az alagútból és a lökés véges terjedési sebessége következtében egy ideig még nyugalomban marad. Még akkor is nyugalomban lesz, amikor az A kapu áthalad rajta és az egész vonatot elnyeli az alagút. A vonat elejéből kiinduló lökés csak ezután éri el a vonat végét. Ettől a pillanattól kezdve hurcolja magával az alagút az egész összeroncsolt vonatot, amelynek a hossza a roncsolódás következtében még a mozgási hossznál is rövidebb, hiszen különben nem férne el a V sebességgel mozgó alagútban, amelynek mozgási hossza megegyezik a vonat $\mathcal{I}$-beli mozgási hosszával a leállás előtt.

Eddig nem volt szó a testek *gyorsításáról.* Legyen az $\mathcal{I}$ vonatkoztatási rendszerben nyugvó test hossza l_0. Kezdjük el gyorsítani, amíg el nem éri a V sebességet és azután hagyjuk, hogy ezzel a sebességgel mozogjon egyenletesen tovább. Milyen hosszúnak fogjuk látni továbbra is az $\mathcal{I}$-ből megfigyelve?

Érdemes egy nagyon egyszerű konkrét példával illusztrálni a feladatot (5. ábra). Az $\mathcal{I}$-ben nyugvó edényt lezáró mozgatható dugattyú helyzetét (az l_0 távolságot) a gáz nyomásának és a rugó húzóerejének az egyensúlya határozza meg. Ezt az edényt gyorsítjuk fel V sebességre. Gyorsítás közben a rugó hossza különféle változásokon mehet keresztül. Miután azonban a V végsebességgel egyenletesen halad, abban az $\mathcal{I}$ ' inerciarendszerben lesz nyugalomban, amelyik ezzel a sebességgel mozog $\mathcal{I}$-hez képest . A relativitáselmélet 1. posztulátuma szerint a két inerciarendszer egyenértékű egymással, ugyanazok a fizikai törvények érvényesek mindkettőben, ezért a nyomás és a rugó húzóereje $\mathcal{I}$ '-ben is ugyanazt az l_0 távolságot állítja be, mint $\mathcal{I}$-ben. De akkor a mozgó edény mé-

[5]Az alagúttal együtt a jeladó is mozog, de ennek nincs jelentősége, mert a rádiójelek sebessége független az adó mozgásától.

retét az eredeti $\mathcal{I}$-ből nézve kontraháltnak látjuk, l_0 helyett $l = l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$ méretet tapasztalunk.

Ez azonban csak abban az esetben lesz így, ha a gyorsítási szakaszban fellépő erők nem idéznek elő maradandó károsodást (pl. a rugóállandó megváltozását). Ennek az esetlegességnek az elkerülése érdekében feltesszük, hogy a gyorsítás mindig kíméletes (*adiabatikus*).

Ez a gondolatmenet nyilván érvényes minden olyan esetben, amikor a vizsgált hosszúságot (méretet) fizikai törvények állítják be. A vonatnál és a méterrúdnál[6] is ez a helyzet. Elképzelhetők azonban más típusú szituációk is. Tegyük fel, hogy két egymástól független motorkocsi áll az állomáson (az $\mathcal{I}$ inerciarendszerben) egymástól l_0 távolságra ugyanazon a sínpáron. A $t = 0$ pillanatban mindkettő elindul úgy, hogy azonos számítógép program által vezérelve egy bizonyos $t = T$ pillanatban elérik a V sebességet és azután ezzel a konstans sebességgel haladnak tovább. Mekkora távolság lesz ezután közöttük a pályatest nyugalmi rendszeréből ($\mathcal{I}$-ből) nézve?

Az ember az első pillanatban rávágja, hogy természetesen $l_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$, de ez tévedés, mert a távolság végig minden pillanatban l_0 marad. Ezt könnyű látni, ha felírjuk a két kocsi pályájának $x = f(t)$ egyenletét $\mathcal{I}$-ben:

$$x = \begin{cases} \xi(t) + l_0 & \text{az egyik motorkocsira,} \\ \xi(t) & \text{a másikra.} \end{cases}$$

Itt természetesen $t < 0$-nál $\xi(t) = 0$, $t > T$-nél pedig $\xi(t) = Vt + b$ valamilyen konstans b-vel, de ennek nincs különösebb jelentősége. A két kocsi távolságát $\mathcal{I}$-hez viszonyítva *bármely* t-ben úgy kapjuk meg, hogy a kocsik x koordinátáinak *egyidejű* különbségét képezzük:

$$[\xi(t) + l_0] - \xi(t) = l_0.$$

Kontrakció ebben az esetben azért nem lép fel, mert a két motorkocsi távolságát nem valamilyen természeti törvény „állítja” be, amely minden inerciarendszerben ugyanúgy működik. Miután a kocsik elindultak, a mozgásukat a mindkettőjübe betáplált azonos program vezérli. Egymástól teljesen függetlenül mozognak, nem úgy, mint mondjuk egy méterrúd két végpontja, vagy az 5. ábrán a rugó végpontjai.

[6] A speciális relativitáselmélet fogalmi rendszere megköveteli, hogy — legalábbis elvben — létezzenek ideális órák és méterrudak, amelyek semmilyen behatásra se változtatják meg a járásuk ütemét, illetve a hosszúságukat. Az elmélet órákra és méterrudakra vonatkozó állításai ilyen objektumokra vonatkoznak. A relativitáselmélet ezért csak akkor alkalmazható a valóságos világra, ha ilyen tulajdonságú mérőeszközök elvileg tetszőleges pontossággal realizálhatók. Már ebből az alapkövetelményből látható, hogy fontos szerepe van az olyan objektumoknak, amelyek az egyik inerciarendszerből a másikba felgyorsulva megőrzik a méretüket, tehát az eredetihez képest a $\sqrt{1 - v^2/c^2}$szeresükre csökkennek.

6. A deszinkronizáció

Nyugodjon egy vonat a pályatest $\mathcal{I}_0$ vonatkoztatási rendszerében, amelyben a Minkowski-féle (fényjelekkel szinkronizált) koordinátaidőt a sűrűn (így többek között a vonaton is) széthelyezett nyugvó virtuális (elképzelt) ideális órák mutatják. Tegyük fel, hogy ezek közül kettő valóságos óra, amelyek a vonathoz vannak rögzítve. A baloldali óra legyen az A, a jobboldali a B.

Képzeljük el, hogy egy nagyon rövid fényjel „cikázik" ide-oda az órák között. A két óra helyes szinkronizáltsága következtében az a $\overrightarrow{\Delta}t$ idő, ami alatt a jel az A-ból a B-be ér, pontosan megegyezik a visszaúton eltelt $\overleftarrow{\Delta}t$ idővel. Ha az órák közötti távolság l, akkor mindkét időtartam l/c-vel egyenlő. Az 1.táblázat példájában $\overrightarrow{\Delta}t = \overleftarrow{\Delta}t = 10$.

1.A nyugvó órák mutatóállása
a fényjelek visszatükrözésének pillanatában

Az A óra mutatóállása	10		30		50		70
A B óra mutatóállása		20		40		60	

.

Tegyük fel most, hogy a vonat elindul jobbra (ez lesz a pozitív irány), fokozatosan (adiabatikusan) gyorsulva eléri az U sebességet[7] és ezután ezzel a sebességgel halad tovább. A konstans U sebességű vonat inerciarendszer, amelyet $\mathcal{I}$-vel fogunk jelölni.

Az A és a B óra között eközben folyamatosan cikázik ide-oda a fényjel. Az oda- és a visszaút időtartama azonban változik. Az $\mathcal{I}_0$-ból (a töltésről) szemlélve a fényjel mozgását ezeket az időtartamokat a

$$c \cdot \overrightarrow{\Delta}t_0 = l_0 + U \cdot \overrightarrow{\Delta}t_0, \qquad c \cdot \overleftarrow{\Delta}t_0 = l_0 - U \cdot \overleftarrow{\Delta}t_0 \tag{16}$$

egyenletek határozzák meg, amelyekből

$$\overrightarrow{\Delta}t_0 = \frac{l_0}{c - U}, \qquad \overleftarrow{\Delta}t_0 = \frac{l_0}{c + U}.$$

A képlet felírásánál figyelembe vettük, hogy amikor a vonat mozog, a nulla index segítségével meg kell különböztetnünk az $\mathcal{I}_0$-ban mért mennyiségeket az $\mathcal{I}$-ben mért (index nélküli) mennyiségektől. Nekünk azonban a $\overrightarrow{\Delta}t$-t és a $\overleftarrow{\Delta}t$-t kifejező képletekre van szükségünk, amelyeknek a jobboldalán a mozgó vonaton mért l távolság szerepel[8].

Az (16) első egyenlete azt fejezi ki, hogy az A órától elinduló fényjel és a vele egyszerre U sebességgel induló B óra Δt_0 koordinátaidővel később találkozik egymással. A B órán ezalatt $\overrightarrow{\Delta}t_0\sqrt{1 - U^2/c^2}$ sajátidő telik el. Ezt az

[7] A sebességre azért használjuk a megszokottabb V helyett az U jelölést, hogy a lehető legjobban megkülönböztessük a vonathoz képest v sebességgel haladó test sebességétől, amelyről a fejezet végén lesz szó.

[8] Az előző fejezetben az 5. ábrához fűzött diszkusszió alapján feltesszük, hogy a két óra közötti távolság a gyorsítás során nem változik, hanem végig l marad. Vegyük észre, hogy l a két óra közötti szakasz nyugalmi, l_0-pedig a mozgási hossza.

időtartamot jelöljük $\overrightarrow{\Delta} t$-vel, vagyis $\overrightarrow{\Delta} t = \overrightarrow{\Delta} t_0 \sqrt{1 - U^2/c^2}$. Ez a sajátidő intervallum egyben koordinátaidő intervallum is, hiszen a B egyike azoknak az óráknak, amelyek a vonaton a t koordinátaidőt mutatják.

Teljesen hasonlóan látható be a $\overleftarrow{\Delta} t = \overleftarrow{\Delta} t_0 \sqrt{1 - U^2/c^2}$ képlet is, amely az A óra sajátidejét fejezi ki. Végül a két óra közötti l vonati távolság a töltésről nézve kontrakciót szenved, ezért $l_0 = l\sqrt{1 - U^2/c^2}$. Ha $\overset{\leftrightarrows}{\Delta} t_0$ képleteiben a nulla indexű mennyiségeket ezeknek a összefüggéseknek a segítségével index nélküli mennyiségekkel fejezzük ki, a

$$\overrightarrow{\Delta} t = \frac{l}{c}(1 + U/c)\,, \qquad \overleftarrow{\Delta} t = \frac{l}{c}(1 - U/c)$$

képletekre jutunk (a számpéldánkban az előbbi legyen mondjuk 12, az utóbbi pedig 8, ld. a 2.táblázatot).

2.A mozgó órák mutatóállása
a fényjelek visszatükrözésének pillanatában

Az A óra mutatóállása	10		30		50		70
A B óra mutatóállása		22		42		62	

.

Nyilvánvaló, hogy az U sebességgel mozgó vonat nyugalmi rendszerében — az $\mathcal{I}$ inerciarendszerben, — ez a két óra *nincs* helyesen szinkronizálva. Ha ugyanis az 1. fejezet legelején vázolt kísérlettel megmérnénk a vonaton a fénysebességet, mindkét irányban egyformán c-nek találnánk. Természetesen utólag szinkronizálhatnánk őket például úgy, hogy a B óra mutatóállását megfelelő mértékben (a számpéldában 2-vel) visszaállítjuk (vagy az A óráét ugyanennyivel előrevisszük). Ezt azonban most nem tesszük meg, mert azt akarjuk éppen tisztázni, hogy milyen következményei vannak a gyorsulásnak, ha az egyszer már helyesen szinkronizált (virtuális vagy valóságos) órákhoz többet már nem nyúlunk hozzá.

A koordinátaidőről szóló 3. fejezet (3) képlete szerint a deszinkronizáció mértékét a

$$\delta t_B = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\Delta} t - \overleftarrow{\Delta} t\right) = \frac{Ul}{c^2} \tag{17}$$

formula határozza meg. Ennyivel kellene visszaállítani a (gyorsulás irányába eső) B óra mutatóállását ahhoz, hogy helyesen legyen szinkronizálva A-val.

Vonjuk le a következtetést: Amikor egy inerciarendszert gyorsítunk, a hozzá rögzített helyesen szinkronizált órák *deszinkronizálódnak*[9]. A deszinkronizáció

[9] Lényeges pont, hogy ha a fénysebesség nem lenne *minden* inerciarendszerben ugyanaz minden irányban, akkor az ideális órák sohase deszinkronizálódnának . Tegyük fel egy pillanatra, hogy a relativitáselmélet téves, van elektromágneses éter, amely történetesen az $\mathcal{I}_0$-hoz (a töltéshez) képest nyugalomban van. A két táblázat ebben az esetben lényegében érvényben maradna (a $\overset{\rightleftarrows}{\Delta} t$ helyett a $\overset{\rightleftarrows}{\Delta} t_0$-t tartalmazná), mégsem fejezne ki deszinkronizációt. Az $\mathcal{I}$-beli fénysebesség ugyanis ilyen feltételek mellett ***valóban*** különbözne a két irányban, mert kizárólag ***a nyugvó éterben*** ($\mathcal{I}_0$-ban) lenne izotróp. A két táblázat adatai ezt a tényt fejeznék ki teljesen korrekt módon. A deszinkronizáció ezért a fénysebesség állandóságának — a relativitáselmélet 2. posztulátumának — egyenes következménye.

nem annak a következménye, hogy az órák szerkezetében a gyorsulás valamilyen változást okoz, hiszen ezek az órák ideális szerkezetűek, a külső behatásoktól teljesen függetlenül, a maguk monoton ritmusában járva a sajátidejüket mutatják. Ha az eredetileg nyugvó vonat padlóján állt egy labda, a vonat elindulásakor elkezd hátrafele mozogni, és amikor a vonat már egyenletesen halad U sebességgel, a labda folyamatosan gurul hozzá képest ugyanezzel a sebességgel visszafele (vagy legalábbis gurulna, ha a vonat elég hosszú volna). Ezt a mozgást nem az okozza, hogy valami hatott a labdára, hanem éppen ellenkezőleg: Azért gurul a labda visszafele, mert nem hatott rá semmi, ami arra kényszerítené, hogy átvegye a vonat sebességét.

A deszinkronizáció ugyanebbe a kategóriába tartozó *tehetetlenségi jelenség*. Az órák a mozgó vonaton is úgy járnak tovább, ahogy a pálya $\mathcal{I}_0$ inerciarendszerében szinkronizálták őket. Ez az inerciarendszer azonban „kiszaladt" alóluk, de ők nem vettek erről tudomást. Vagyis — szándékosan paradoxálisan fogalmazva, — a deszinkronizáció annak következménye, hogy az órákkal nem történt semmi. A deszinkronizáció mégis éppen olyan valóságos jelenség, mint a labda megindulása hátrafele. Ha a két órához megfelelő hardvert csatlakoztatunk, papírszalagon rögzíthetjük azokat a pillanatokat, amikor az órákhoz tartozó tükrök visszaverik a fényjelet. Az 1. és a 2. táblázat adatai ennek a papírcsíknak a két végén lesznek rajta: Amikor a vonat még nyugodott és amikor már egyenletes sebességgel halad. A különbéget akár sebességmérésre is felhasználhatnánk. A jelenség lényegét röviden úgy foglalhatjuk össze, hogy *a deszinkronizáció az egyik — talán legközvetlenebb — megfigyelhető aspektusa annak a ténynek, hogy a koordinátaidőt a különböző inerciarendszerekben különböző órasokaságok mutatják*[10].

Mielőtt továbbmennénk, foglaljuk össze a deszinkronizáció előjelszabályát:

Az órapár gyorsulás irányába eső tagja mindig siet, ezért reszinkronizációmál a (3)-nak megfelelő mértékben vissza kell állítani.

A deszinkronizáció egy fontos következményét a vonatos példa továbbgondolásával világítjuk meg. Képzeljük el a vonat egyik, mondjuk 60 méter hosszú, vasúti kocsiját, amelyben könnyen végig lehet sétálni, és méterenként faliórák találhatók rajta. Az utasok között van egy fizikus, aki már nagyon unja az utazást és elhatározza, hogy ellenőrizni fogja az idődilatációt.

— Szerencsére a karórám egészen különösen pontos szerkezet, csekély időeltérések mérésére is kiválóan alkalmas — gondolja elégedetten. — A faliórák is pontosak, és amikor felszálltam a vonatra, láttam, hogy a szerelők éppen fényjelekkel szinkronizálják őket.

Azzal elindul és menetirányban egyenletes sebességgel végigsétál a kocsi végétől az elejéig. Közben gondosan ügyel rá, hogy a faliórák alapján az útja

[10] A deszinkronizáció fogalma tudomásom szerint először a *Basic Relativity — an Introductory Essay* című könyvemben fordul elő (Springer 2011)

pontosan 1 percig tartson (Δt legyen 60 s), vagyis a sebessége legyen pontosan $v = 1$ m/s. A séta időtartamát a karóráján is leméri, és azt találja, hogy a séta közben 1 percnél rövidebb idő telt el rajta ($\Delta\tau < 60$ s).

— Igen, ez az idődilatáció — mondja magában, — a $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$ képlet szerint pont ennek kellett történnie.

De gyakorló fizikusként ismeri a szabályt, hogy egy mérés nem mérés, ezért megismétli a sétáját, ezúttal visszafelé úgy, hogy a faliórák szerint megint egy perc alatt érjen a kocsi egyik végéből a másikba. Meglepődve tapasztalja, hogy a karóráján ezúttal hosszabb idő telt el, mint az előbb. Természetesen először arra gyanakszik, hogy valami hibát követett el, de akárhányszor ismétli a kísérletet, a karóráján mindig ugyanazt a két különböző időtartamot olvassa le: A menetirányban a sajátidő kisebb, mint ellenkező irányban ($\overrightarrow{\Delta}\tau < \overleftarrow{\Delta}\tau$).

Némi töprengés után fizikusunknak eszébe jut a deszinkronizáció.

— Hogy is nem gondoltam rá azonnal? — csap a homlokára. — Hiszen épp nemrég olvastam róla egy cikket a Fizikai Szemlében. Az igaz, hogy a szerelők gondosan szinkronizálták a faliórákat. De ez még az álló vonaton történt, és a vonat elindulása után bekövetkezett a deszinkronizáció. Amikor előre megyek a faliórák által meghatározott sebességgel, akkor minden következő falióra többet mutat, mint ha helyesen lenne szinkronizálva az előzővel — 1 másodperc időkülönbséget jelez, pedig csak mondjuk 0.8 másodperccel kellene többet mutatnia. A visszaúton pont fordítva történik. Ezért van az, hogy a karórám mutatója az első esetben kevesebbet halad előre, mint a másodikban. Mindenesetre most jól megtanultam, hogy ilyen esetekben nem használhatom a $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$ képletet a sajátidő meghatározására, mert az mindkét irányú sétára ugyanazt a sajátidőt adja.

Elhatározza, hogy küld egy SMS-t az egyik kollégájának és megkéri, keresse már elő valahonnan a $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$ képletnek azt az általánosabb alakját, amelyik az ő jelenlegi helyzetében is alkalmazható. Ezeket az információkat közli vele:

- Indulás előtt a faliórákat korrekt módon fényjelekkel szinkronizálták és azóta senkise nyúlt hozzájuk.
- A vonat jelenleg egyenletesen halad U sebességgel.
- A faliórák meg vannak számozva 0-tól 60-ig. Az egymás utáni órák közötti távolság az indulás előtt és most, az egyenletes sebesség elérése után is pontosan 1 méter.
- Amikor a kocsin végigsétálok, az órák helye és mutatóállása alapján a sebességem egy konstans v érték (történetesen $v = 1\ m/s$ sebességet választottam, de a keresett képlet szempontjából ennek nincs jelentősége).
- A kérés az, hogy küldje el azt a képletet, amely megadja a $\Delta\tau$ és a Δt kapcsolatát ebben az esetben.

A kért képlet nemsokára megérkezett. A figyelmes kolléga $\Delta\tau$ és Δt helyett az infinitezimális $d\tau$ és dt növekményekre írta fel, mert ez akkor is alkalmazható, amikor a sétálás v sebessége nem konstans ($v = v(t)$):

$$d\tau = dt \times \sqrt{\left(1 - \frac{Uv}{c^2}\right)^2 - v^2/c^2}. \tag{18}$$

Ez a képlet pozitív v-nél menetirányba, negatív v-nél az ellentétes irányba történő sétálásra vonatkozik.

Napokkal később, amikor utazó fizikusunk a munkahelyén találkozik a kollégájával, megkéri őt, mutassa meg a képlet levezetését. A magyarázat a következő:

Nézzük mondjuk a pozitív irányú séta egy dl hosszúságú infinitezimálisan rövid $A \to B$ szakaszát, amely a deszinkronizált órák szerint dt ideig tartott. Az ennek megfelelő helyesen szinkronizált $d\bar{t}$ időtartam (17) szerint

$$d\bar{t} = dt - \frac{U dl}{c^2}, \tag{19}$$

az ezzel számolt sebesség pedig $\bar{v} = \dfrac{dl}{d\bar{t}}$. A korrigált (felülhúzott) mennyiségekre érvényes az eredeti $d\tau = d\bar{t}\sqrt{1 - \bar{v}^2/c^2}$ képlet. Mivel $\bar{v} = \dfrac{dt}{d\bar{t}}\dfrac{dl}{dt} = \dfrac{dt}{d\bar{t}}v$, ezt átírhatjuk a

$$d\tau = dt \cdot \frac{d\bar{t}}{dt}\sqrt{1 - \left(\frac{dt}{d\bar{t}}\right)^2 v^2/c^2} = dt\sqrt{\left(\frac{d\bar{t}}{dt}\right)^2 - v^2/c^2}$$

alakba, amelyben (19) alapján

$$\frac{d\bar{t}}{dt} = 1 - \frac{Uv}{c^2}.$$

. Ezt behelyettesítve kapjuk a bizonyítandó (18) összefüggést.

Fogalmazzuk meg a vonatos példánk tanulságát. Ha a vonat egész történetét tekintjük, a vesztéglését az indulás előtt, a gyorsulását és azután az egyenletes sebességű haladását, akkor nyilvánvaló, hogy a vonat óráit *nem lehetséges* úgy beállítani, hogy ebben *az egész időszakban* helyesen legyenek szinkronizálva. A példában úgy képzeltük, hogy az órákat még a nyugvó vonaton szinkronizálták fényjelekkel, de akkor az indulás után a deszinkronizáció következtében már nem lesznek helyesen szinkronizálva. Megtehettük volna azt is, hogy az állomáson nem fényjelekkel szinkronizáljuk őket, hanem mesterséges módon olyan beállítást választunk, hogy majd a deszinkronizáció következtében éppen jól legyenek szinkronizálva, amikor a vonat egyenletesen halad. De ekkor persze az állomáson lennének a fényjelek szempontjából rosszul szinkronizálva. De választhatnánk bármilyen más szinkronizációt, ha már a legtermészetesebb einsteini szinkronizáció ugysem hajtható következetesen végre.

A deszinkronizáció következtében tehát *Minkowski-koordinátarendszer csak inerciarendszerekhez rendelhető.* Az ilyen koordinátarendszerben ugyanis a koordinátaidő definíció szerint olyan, hogy a fénysebesség mindig, minden irányban ugyanazzal a c-vel egyenlő. Gyorsuló vonatkoztatási rendszerben azonban a folyamatos deszinkronizáció megakadályozza, hogy a nyugvó órák ilyen tulajdonságú koordinátaidőt határozzanak meg.

Felmerül a kérdés, hogy akkor a gyorsuló vonatkoztatási rendszerekben milyen eljárás (recept) alapján *kell* a koordinátaidőt megválasztani, vagyis milyen protokoll szerint kell a vonatkoztatási rendszerben nyugvó, koordinátaidőt mutató (virtuális) órákat szinkronizálni. A válasz az, hogy ilyen általános recept nem létezik, minden eset külön döntést igényel. Megjegyezzük, hogy inerciarendszerben sem kötelező a fényjelekkel szinkronizált Minkowski-koordinátaidő használata. A koordinátarendszer választásához hasonlóan a koordinátaidő megválasztása is nagymértékben önkényes. A választás főszempontja a vizsgálandó probléma tárgyalásának az egyszerűsítése. A Minkowski-koordinátaidő előnyei azonban ebből a nézőpontból annyira szembetűnőek, hogy inerciarendszerben gyakorlatilag minden esetben ezt a koordinátaidőt használjuk.

A $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ képlet csak inerciarendszerben érvényes, amikor a koordinátaidő Minkowski-féle. A képlet ekkor változó sebességű mozgásra is alkalmazható. Az analóg formula minden más esetben speciális levezetést igényel.

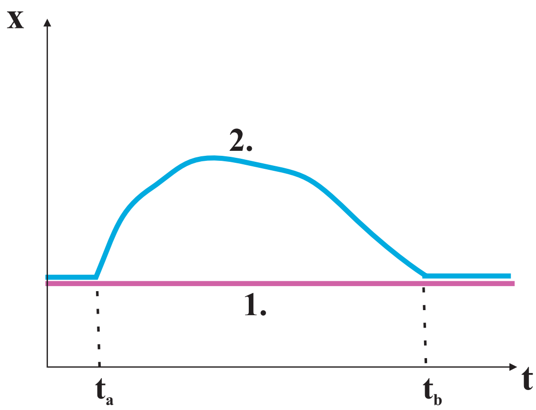
7. Az óraparadoxon

Két különböző pályán mozgó test két találkozása között nem ugyanannyi idő telik el az egyiken, mint a másikon — ez az óraparadoxonnak (vagy ikerparadoxonnak) nevezett jelenség. Az időkülönbség a megszokott, vagy a megszokottól nem nagyon eltérő körülmények között rendkívül kicsi, ezért az óraparadoxonnak jelenleg nincs semmiféle gyakorlati következménye. Elvi szempontból azonban a jelentősége nagyon nagy, mert a fizikai időfogalom alapjait érinti.

Két test mozgását vizsgáljuk az $\mathcal{I}$ inerciarendszerben felvett Minkowski-koordinátarendszer x-tengelye mentén. A két test egy ideig nyugalomban van az x-tengely egy pontjában (6.ábra). A t_a pillanatban azonban az egyikük — legyen ez a 2. számú test, — elindul pozitív irányba, majd visszatér a korábbi helyére és a továbbiakban ott marad nyugalomban a másik (az 1. számú) test mellett. Számítsuk ki, mennyi sajátidő telt el a két testen a $(t_a,\, t_b)$ koordinátaidő-intervallumban.

A nyugvó test sajátideje megegyezik a koordinátaidővel, ezért $\Delta\tau_1 = t_b - t_a$.

A 2. számú test pályája a $(t_a,\, t_b)$ intervallumban legyen $x = f(t)$, a sebessége pedig $v(t) = \dfrac{df(t)}{dt} \equiv \dot{x}(t)$. A (14) alapján a rajta eltelt sajátidő a következő



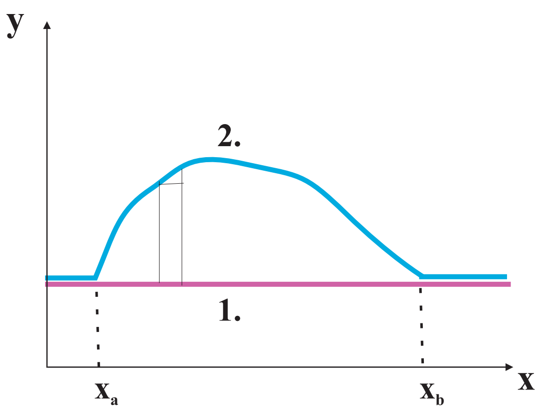
6. ábra.

integrállal egyenlő:

$$\Delta\tau_2 = \int_{t_a}^{t_b} d\tau = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - v(t)^2/c^2}\, dt = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - \dot{x}(t)^2/c^2}\, dt. \qquad (20)$$

Mivel $\sqrt{1 - v(t)^2/c^2} < 1$, ezért $\Delta\tau_2 < t_b - t_a = \Delta\tau_1$: A mozgó testen a két találkozás között kevesebb idő telt el, mint a nyugvón.

Ez a következtetés gyökeresen ellentmond a mindennapi — és a newtoni — időfogalomnak, ezért is olyan jelentős. A relativitáselmélet keretein belül azonban nagyon egyszerű és szemléletes állítás. Erről könnyen meggyőződhetünk a következő módon.



7. ábra.

A 7. ábra nagyon hasonlít a 6. ábrához, de semmi köze a relativitáselmélethez. Két görbét ábrázol az xy koordinátasíkon, amelyek az x-tengely (x_a, x_b) szakaszán különböznek egymástól. Az egyikük vízszintes egyenes, amelynek a hossza $\Delta L_1 = x_b - x_a$. A másik görbe egyenlete ezen a szakaszon $y = f(x)$. A hosszának a meghatározásához induljunk ki abból az infinitezimálisan kicsi derékszögű háromszögből, amely az ábrán a kék görbe alatt látszik. Ennek a dl hosszúságú átfogója a görbe egy infinitezimális darabja, ezért a keresett görbeszakasz hossza ennek a dl integráljával egyenlő:

$$\Delta L_2 = \int_{x_a}^{x_b} dl.$$

A kis derékszögű háromszög két befogója a dl átfogó két végpontjához tartozó dx és dy koordinátakülönbség, ezért

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dl\sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}.$$

Ha ezt behelyettesítjük az előző képletbe, a görbeszakasz hosszára a

$$\Delta L_2 = \int_{x_a}^{x_b} dl = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx. \tag{21}$$

képletet nyerjük.

A (20) és a (21) képlet nagyon hasonlít egymáshoz, noha az előbbi egy tömegpont időbeli pályájára, az utóbbi pedig egy xy síkbeli görbére vonatkozik. A formai hasonlóságon túl abban is megegyeznek, hogy adott végpontok mellett $\Delta\tau_{1,2}$ is, $\Delta L_{1,2}$ is független a koordinátarendszer megválasztásától (mindegyik invariáns). Ez a szoros analógia feljogosít arra, hogy a sajátidőt is egy pálya hosszának tekintsük, mégpedig egy tömegpont téridőbeli pályája szekundumban kifejezett „hosszúságának”.

A két képlet között azonban van egy fontos strukturális különbség a négyzetgyök alatti második tag előjelében, amelynek következtében az xy sík két adott pontja között az egyenes a *legrövidebb* út, *a téridőben* azonban egy tömegpont pályájának két pontja között az egyeneshez a *leghosszabb sajátidő* („út”) tartozik. Mivel az $x = f(t)$ pálya akkor egyenes, amikor a tömegpont gyorsulása nulla, ezért azt is mondhatjuk, hogy két adott $(x,\, t)$ koordinátákkal jellemzett eseményt összekötő pályák közül *azon a pályán telik el a leghosszabb sajátidő, amelyiken a tömegpont egyenletes sebességgel mozog*[11] *(vagy nyugszik).*

* * *

Az óraparadoxonnak fontos szerepe van a newtoni szinkronizáció kritikájában. A newtoni szinkronizációról a 3. fejezetben volt szó. Ezt írtuk róla:

[11] Ha a 6. ábrán felrajzolt pályákat egy egyenletes sebességgel mozgó inerciarendszerből szemléljük, akkor egy egyenletesen mozgó és egy tőle egy időre eltávolodó másik testet látunk. Mivel a találozásaik között eltelt sajátidő változatlan marad, ezért a konklúziónk az egyenletesen mozgó testre is érvényes.

Korábban nyilvánvalónak tekintették, hogy az órákat a széthelyezésük előtt egy közös helyen kell szinkronizálni egymással. Ez az eljárás azon a hallgatólagos feltételezésen alapult, hogy ideális esetben az órák szétvitele közben a szinkronizáltságuk nem romlik el. Egy ilyen feltételezést elvben tapasztalatilag is lehet ellenőrizni úgy, hogy a közös helyről az egyik órát elvisszük a számára kijelölt helyre, majd visszavisszük a közös kiindulópontba. Ha ezután még mindig szinkronizálva lesz a többi folyamatosan ott lévő órával, akkor ez a szinkronizálási eljárás korrekt. Ez a kritérium teljesen egyértelmű, mert nem igényli különböző helyen lévő órák előzetes szinkronizációját.

Erre a szinkronizációs eljárásra, amelyet házi használatra *newtoninak* nevezhetünk el, később még visszatérünk. Látni fogjuk, hogy a vázolt ellenőrzési eljáráson bizony elbukna.

Most tényleg látjuk, hogy az óraparadoxon következtében a visszavitt óra késni fog a többi ott lévő órához viszonyítva. Ez egyértelműen bizonyítja a newtoni szinkronizáció alkalmatlanságát.

8. Az óraparadoxon kapcsolata a deszinkronizációval

Induljunk ki az előző fejezet konklúziójából. Nyugodjon egy test az $\mathcal{I}$ inerciarendszer egy pontjában. Egy másik test úgy mozog, hogy kétszer találkozik az előzővel. Ehhez valahol biztosan kellett gyorsulnia. Ezért a két találkozás között az első testen hosszabb sajátidő telt el, mint a másodikon.

Ez a relativitáselmélet teljesen határozott állítása. Semmi okunk sincs rá, hogy az igazságát kétségbe vonjuk. Azért foglalkozunk vele mégis alaposabban ebben a fejezetben, mert amikor konkrét példákon részletesebben is meg szeretnénk vizsgálni ennek az általános tételnek a *működését*, könnyen zavarba jövünk.

A zavar kiindulópontja az *idődilatáció szimmetriája.* A gördülékenyebb előadásmód kedvéért a két órát a továbbiakban személyekhez kötjük, és az egyik óra tulajdonosát Incinek, a másikét Francinak fogjuk hívni. Az idődilatáció szimmetriáját ezután így foglalhatjuk össze röviden: Ha az Incihez képest V sebességgel mozgó Franci órája késik Inci órájához képest, akkor Inci órája is késik Franci órájához képest.

Ez így elég képtelenül hangzik, de nagyrészt annak következtében, hogy a megfogalmazás erősen hiányos. A pontos állítás a következő: Nyugodjon Inci az $\mathcal{I}_I$, Franci pedig az $\mathcal{I}_F$ inerciarendszerben (az egyik lehet mondjuk a vonatállomás, a másik az áthaladó vonat), és abban a pillanatban, amikor egymás mellett elhaladnak, az óráik mutassák ugyanazt az időpontot. Mindkét inerciarendszert gondolatban telerakjuk nyugvó, helyesen szinkronizált virtuális órákkal, amelyek a t_I, illetve a t_F koordinátaidőt mutatják. Az állítás az, hogy a találkozásuk után Inci órája késik a Franci $\mathcal{I}_F$ inerciarendszerében nyugvó azon $\mathcal{O}_F$ órához képest, amely mellett éppen elhalad, és fordítva, Franci órája is késik az

Inci $\mathcal{I}_I$ inerciarendszerében nyugvó azon $\mathcal{O}_I$ órához képest, amely mellett éppen elhalad.

Ez így már egyáltalán nem paradoxális, hanem „csak” figyelemre méltó. Hasonlítsuk ezt össze mondjuk azzal az állítással, hogy Franci határozottan magasabb, mint Inci, és ugyanakkor Inci is határozottan magasabb, mint Franci. Ez nyilván logikai képtelenség. De abban a kijelentésben, hogy Franci magasabb, mint Inci húga, és Inci is magasabb, mint Franci öccse, már nincs semmi kivetnivaló[12].

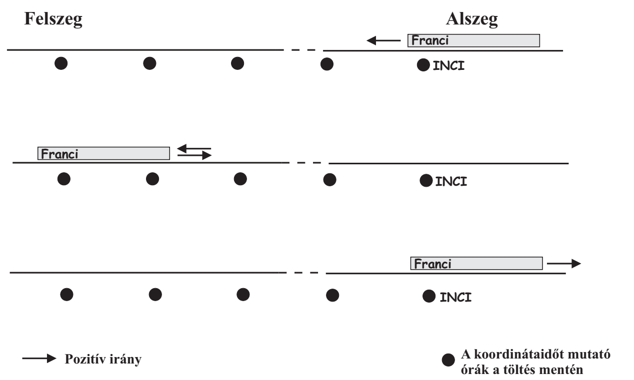
Na jó, de mit mondjunk a következő esetben: Inci a vasútállomáson a sín mellett áll, Franci az áthaladó vonaton ül. Amikor éppen egymás mellé kerülnek mindketten feljegyzik a saját órájuk mutatóállását. Aztán amikor a vonat jön visszafele Francival együtt, megint feljegyzik, mit mutat a karórájuk a találkozás pillanatában. Ezután egy kivonással mindketten megállapítják, mennyi idő telt el a saját karórájukon a két találkozás között. Mi lesz az eredmény? Az idődilatáció szimmetriája alapján azt várnánk, hogy Franci óráján kevesebb idő telt el, mint Inci óráján, de persze Inci óráján is kevesebb idő telt el, mint Francién. Ez azonban nyilván lehetetlen, ezért gondoljuk meg jobban a dolgot!

Inci a vasútállomáson áll (legyen az állomás neve mondjuk Alszeg), amelyet az egész vasúti pályával együtt inerciarendszernek tekinthetünk. Franci mondjuk Felszegre tartó vonata ehhez képest V sebességgel mozog, ezért az órája $\sqrt{1-V^2/c^2}$-szer lassabban jár, mint Incié. Ha a két találkozás között Inci óráján T_I sajátidő telt el, és Franci vonata elhanyagolhatóan rövid idő alatt váltott irányt Felszegen, akkor a Franci óráján eltelt sajátidő $T_F = T_I\sqrt{1-V^2/c^2}$-tel egyenlő, ami kevesebb T_I-nél. Ez alighanem vitathatatlan következtetés, amely összhangban van azzal a tételünkkel, hogy két találkozás között azon az órán telik el kevesebb sajátidő, amelyik a két találkozás között gyorsult. Márpedig Franci vonatának ahhoz, hogy visszamehessen Alszegre, meg kellett állnia és el kellett újra indulnia visszafele — vagyis valóban gyorsulnia kellett.

Másrészt azonban a két találkozás között Franci vonata is praktikusan végig inerciarendszer volt, hiszen Felszegen a vonat irányváltása feltevésünk szerint elhanyagolhatóan rövid idő alatt történt. A vonat csak ezalatt gyorsult, ezért odaúton is, visszaúton is végig inerciarendszer volt, amelyhez képest Inci V sebességgel mozgott, és az ő órájának ezalatt $\sqrt{1-V^2/c^2}$-szer lassabban kellett járnia, mint Franci órájának. Ennek következtében a két találkozás között az Inci óráján eltelt időre a $T_I = T_F\sqrt{1-V^2/c^2}$ értéket kapjuk, ami T_F-nél kisebb. Ez a következtetés pont az ellentéte annak, amit az előző bekezdésben kaptunk, és bizonyosan hibás, mert az általános tételünk alapján biztosak lehetünk benne, hogy Inci óráján telt el hosszabb idő. Hol követtük el a hibát, amikor az ezzel ellentétes következtetésre jutottunk?

Az első gondolatunk valószínűleg az, hogy a pillanatszerűnek tekintett irányváltás végtelen gyorsulást jelent, és Franci órája ezt már nem bírhatja ki. De ez komolytalan kritika. Az elméleti meggondolásokban ugyanis végig azt kell

[12] A megfeleltetés a következő: Franci órája $\longleftrightarrow$ Franci, Inci órája $\longleftrightarrow$ Inci, $\mathcal{O}_F \longleftrightarrow$ Franci öccse, $\mathcal{O}_I \longleftrightarrow$ Inci húga.



8. ábra.

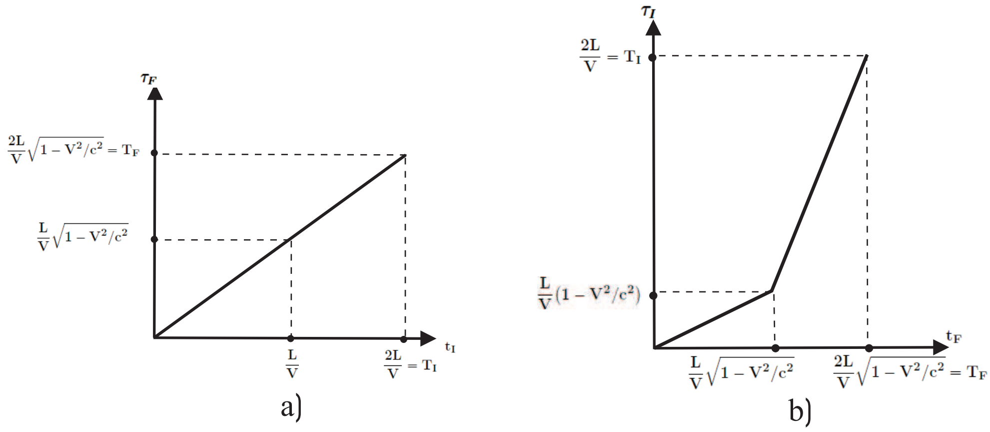
feltételeznünk, hogy az óráink ideálisak, vagyis meghibásodás nélkül vészelnek át bármilyen igénybevételt. Előbb, amikor arra a *korrekt* következtetésre jutottunk, hogy Franci órája késik az Inciéhez képest, hallgatólagosan így is jártunk el: Feltettük, hogy a pillanatszerű irányváltás Franci ideális órájának a járását egyáltalán nem befolyásolja. Ehhez végig tartani kell magunkat.

Csak egyet tehetünk: A lehető leggondosabban kielemezzük a gondolatmenet első részét, amikor helyes eredményre jutottunk, és lépésről lépésre ugyanúgy járunk el a másodikban is.

A számítást először az állomás és a vasúti töltés nyugalmi rendszerében végeztük el, amelyben Inci nyugszik. Ez inerciarendszer, de ez önmagában nem elég ahhoz, hogy az Inci és a Franci óráján eltelt időt a $d\tau = dt\sqrt{1 - V^2/c^2}$ képlet alapján lehessen összehasonlítani egymással. A relativitáselméletben ugyanis — a newtoni fizikában megszokott időfogalomtól eltérően — nincs egyszer s mindenkorra adott t idő, ezért ahhoz, hogy a τ és a t közötti kapcsolatról egyáltalán beszélhessünk, előbb meg kell mondanunk, hogyan választjuk meg a t koordinátaidőt. Mint a 4. fejezetben láttuk, a $d\tau = dt\sqrt{1 - V^2/c^2}$ képlet csak akkor érvényes, amikor a koordinátaidőt fényjelekkel helyesen szinkronizált órák mutatják (vagyis Minkowski-koordinátarendszerben kell dolgoznunk).

A 8. ábrán fel is tüntettünk néhány ilyen órát a pálya mentén. A szemléletesség kedvéért úgy is képzelhetjük, hogy ezek közbeeső állomások órái, ahol azonban Franci vonata nem áll meg. Ha fényjelekkel vannak helyesen szinkronizálva, akkor Franci azt fogja tapasztalni, hogy a saját órája, amelyik a τ_F sajátidőt mutatja, egyre jobban és jobban késik a t_I koordinátaidőt mutató órákhoz képest, amelyek mellett az oda-vissza úton egymás után elhalad.

Francinak ezt a tapasztalatát rajzoltuk fel a 9a. ábrán. A vízszintes tengelyen a t_I a koordinátaidő Inci inerciarendszerében. Az L az Alszeg-Felszeg távolság, ezért a vonat útja egy irányban L/V ideig tart, és így Inci óráján — amelyik szintén a t_I koordinátaidőt mutatja, — a két találkozás között $T_I = 2L/V$ idő telik el. Mivel Franci útjának minden egyes dt_I idejű szakaszán az órája csak

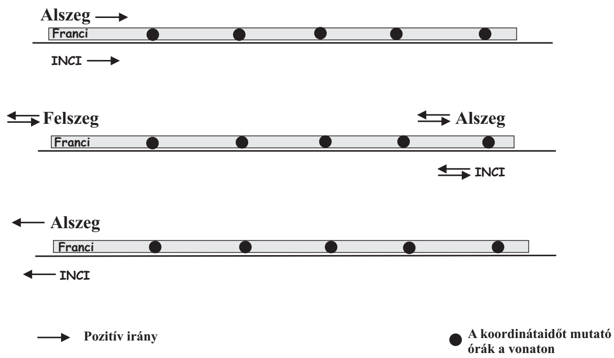


Az óraparadoxon létrejötte az állomás (a) és a vonat (b) nyugalmi rendszerében

9. ábra.

a $d\tau_F = dt_I\sqrt{1-V^2/c^2}$ sajátidővel megy előre, ezért az újbóli találkozáskor $\sqrt{1-V^2/c^2}$-szer kevesebb időt fog mutatni, mint Inci órája. A két találkozás között tehát Franci óráján csak $T_F = T_I\sqrt{1-V^2/c^2}$ idő telik el. Mint az ábrán is látható, feltételeztük, hogy az első találkozáskor mindkettőjük órája nulla időt mutatott.

Most áttérhetünk a gondolatmenet második részére, amelyben arra a hibás következtetésre jutottunk, hogy Inci óráján telik el kevesebb idő, hiszen úgy is felfoghatjuk a dolgot, hogy ő mozog V sebességgel Francihoz képest.



10. ábra.

Tekintsük tehát a vonatot nyugvónak, Incit pedig mozgónak hozzá képest (10. ábra). Incivel együtt persze az egész táj, Alszegestül Felszegestül mozgásban van. Vagyis nem Franci érkezik Felszegre, hanem Felszeg érkezik a nyugvó Francihoz. Kell hozzá némi idő, amíg az ember belehelyezkedik ebbe a felfogásba, de nincs benne semmi, amit kifogásolni lehetne.

Ahogy megállapodtunk, most pontosan ugyanúgy kell eljárnunk, mint az előző esetben, amelynek a legfontosabb tanulsága az volt, hogy *a minket érdeklő sajátidőket mindaddig nem tudjuk kiszámítani, amíg nem rögzítjük a koordinátaidőt.* A vonat — legalábbis a fordulás pillanatáig — inerciarendszer, ezért feltehetjük, hogy a t_F koordinátaidejét fényjelekkel helyesen szinkronizált órák mutatják. Ahhoz azonban, hogy Inci vonathoz viszonyított útjának minden pillanatában legyen a vonaton olyan óra[13], amelynek alapján koordinátaidőt rendelhetünk hozzá, a vonatnak legalább olyan hosszúnak kell lennie, mint az Alszeg-Felszeg távolság. Ezt nyugodtan megengedhetjük, hiszen a vonat valójában csak metafora, amely egy vonatkoztatási rendszert helyettesít.

Inci pályája a nyugvó vonathoz képest két részből áll: egy pozitív irányú odaútból, és egy negatív irányú visszaútból. Az út *hossza* mindkét esetben az Alszeg-Felszeg távolságnak (L-nek) a Lorentz kontraháltja, hiszen a mozgó vonaton azok a pontpárok, amelyek éppen Alszegen és Felszegen vannak, $L\sqrt{1-V^2/c^2}$ távolságra vannak egymástól. Inci odaútja tehát a vonat t_F koordinátaidejében mérve

$$\overrightarrow{\Delta} t_F = \left(L\sqrt{1-V^2/c^2}\right)/V$$

ideig tart. Az idődilatáció miatt Inci óráján ennél $\sqrt{1-V^2/c^2}$-szer kevesebb, azaz

$$\overrightarrow{\Delta}\tau_I = \overrightarrow{\Delta} t_F\sqrt{1-V^2/c^2} = \frac{L}{V}(1-V^2/c^2)$$

sajátidő telik el.

Mi lesz a visszaúton? A vonat koordinátaidejét mutató órák járását a vonat visszafordulása nem befolyásolja, ezért Inci visszaútja ugyanannyi koordinátaideig tart, mint az odaútja:

$$\overleftarrow{\Delta} t_F = \overrightarrow{\Delta} t_F = \left(L\sqrt{1-V^2/c^2}\right)/V.$$

Mennyit megy előre ezalatt Inci órája? A hibás válasz erre az volt, hogy $\sqrt{1-V^2/c^2}$-szer kevesebbet, hiszen most ő az, aki V sebességgel mozog a vonathoz képest. Inci pályájának ebben a második szakaszában azonban a vonat visszafordulása után vagyunk, amikor a vonati órák már deszinkronizálódtak. Ennek következtében a sajátidő és a koordinátaidő kapcsolatát már nem a $\overleftarrow{\Delta}\tau_I = \overleftarrow{\Delta} t_F\sqrt{1-V^2/c^2}$ képlet írja le helyesen, mert a $\sqrt{1-V^2/c^2}$ tényezőt (18)-cal kell helyettesíteni:

$$\overleftarrow{\Delta}\tau_I = \overleftarrow{\Delta} t_F\sqrt{\left(1-\frac{Uv}{c^2}\right)^2 - v^2/c^2}. \qquad (22)$$

[13]Ezek az órák felelnek meg az állomások óráinak az előző gondolatmenetben.

A jobboldal kiszámításához ki kell fejeznünk U-t és v-t a V-n keresztül. Az U definíció szerint a vonat végsebessége ahhoz az inerciarendszerhez viszonyítva, amelyben a gyorsulása előtt nyugalomban volt. Ennek az inerciarendszernek a sebessége esetünkben a vonat $-V$ kezdősebessége, ezért ha a newtoni fizika érvényes volna, az U sebesség $2V$-vel lenne egyenlő. A relativitáselmélet sebességösszeadási képlete ezt

$$U = \frac{2V}{1 + V^2/c^2} \tag{23}$$

-re módosítja. A v Inci sebessége a deszinkronizált órák szerint, amelyről egyszerűen belátható[14], hogy

$$v = -V \frac{1 + V^2/c^2}{1 - V^2/c^2}. \tag{24}$$

Amikor v-nek és U-nak ezeket a kifejezéseit (22)-be írjuk, rövid átalakítás után a

$$\overleftarrow{\Delta}\tau_I = \overleftarrow{\Delta}t_F \frac{1 + V^2/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{L}{V}(1 + V^2/c^2) \tag{25}$$

képletet kapjuk eredményül.

Mint látjuk, $\Delta\tau_I$-re, amely $\overrightarrow{\Delta}\tau_I$ és $\overleftarrow{\Delta}\tau_I$ összege, ugyanazt a $2L/V$ értéket kapjuk, mint amikor az állomás nyugalmi rendszerében végeztük el a számítást.

Érdemes felrajzolni a 9a. ábra analogonját a a vonat nyugalmi rendszerében végzett számításra (9b. ábra). Mint látjuk, a T_I értéke ugyanaz, mint a 9a. ábrán (és ugyanez igaz persze T_F-re is). Ez annak köszönhető, hogy a visszaútnak megfelelő egyenesszakasz iránytangense (25) szerint nagyobb 1-nél, vagyis Inci pályájának ezen a második részén — a pálya első felével ellentétben — a sajátidő nem lassabban, hanem gyorsabban telik, mint a koordinátaidő.

A deszinkronizáció alapján pontosan ez várható. Helyezkedjünk el ugyanis gondolatban a jobbról egyenletes sebességgel érkező vonaton. Ez természetesen inerciarendszer. A visszaforduláskor fellépő gyorsulás jobbra mutat, ezért bármely eredetileg helyesen szinkronizált A, B órapár A tagja, amelyik az új menetirányhoz viszonyítva a B mögött halad, *kevesebbet mutat*, mint ha helyesen lenne B-vel szinkronizálva. Ennek következtében egységnyi koordinátaidő

[14] Használjuk t_F helyett a t jelölést, és — ugyanúgy, mint a 6. fejezetben, — a helyesen szinkronizált koordinátaidő legyen $\bar{t}$. Akkor Inci t-ben és $\bar{t}$-ben kifejezett sebessége

$$\frac{dl}{dt} = v, \qquad \text{és} \qquad \frac{dl}{d\bar{t}} = -V.$$

A v-t ki kell fejeznünk V-n keresztül. Írjuk fel ezért (19)-et

$$\frac{dt}{d\bar{t}} = 1 + \frac{U}{c^2}\frac{dl}{d\bar{t}} = 1 - \frac{UV}{c^2}$$

alakban. Így

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{dl}{d\bar{t}} : \frac{dt}{d\bar{t}} = -V \frac{1}{1 - \frac{UV}{c^2}}.$$

Ha a nevezőben U-t kifejezzük V-n keresztül, valóban a (24) képletet kapjuk.

alatt a visszaúton Inci órája többet megy előre, mint az odaúton anélkül, hogy a koordinátaidőt mutató vonati órákhoz közben bárki hozzányúlt volna. Ez teszi lehetővé, hogy Inci órája a pályájának második szakaszában ledolgozza a hátrányát, és amikor újra találkozik Francival, az ő órája mutasson többet.

A legmeglepőbb az egészben az, hogy eközben Inci órája egyáltalán nem kezd el gyorsabban járni. Egyáltalán, a gondolatmenetben szereplő mindegyik óra (Incié, Francié és a koordinátaidőt mutató összes óra) a maga monoton ritmusában járva mutatja a sajátidejét: Ideális voltuk nem engedi meg, hogy lassítsanak vagy gyorsítsanak. Mint a 6. fejezetben láttuk, a relativitáselmélet 2. posztulátumával együtt az óráknak pont ez a befolyásolhatatlansága okozza a deszinkronizációjukat, amely az óraparadoxont megmagyarázza. A paradoxon feloldásának a lényege tehát az, hogy a deszinkronizáció fogalma segítségével explicite visszavezettük a fénysebesség állandóságára (a 2. posztulátumra). Magát ezt a posztulátumot azonban semmilyen trükkel se lehet szemléletessé tenni.

9. A gyorsulásdeficit

A newtoni fizikában a gyorsulás független az inerciarendszer megválasztásától. A gyorsulás ugyanis a

$$\frac{\mathbf{v}(t+dt)-\mathbf{v}(t)}{dt}$$

tört határértéke $dt \to 0$-nál. Amikor áttérünk egy $\mathbf{V}$ sebességgel mozgó másik inerciarendszerre, a számláló mindkét tagjából ki kell vonni $\mathbf{V}$-t, de a különbségükön ez nem változtat. A gyorsulás ezért ugyanaz marad.

A relativitáselméletben a helyzet bonyolultabb. A tárgyalás egyszerűsítése érdekében ezért korlátozódjunk egyenes vonalú (az x-tengellyel párhuzamos) mozgásokra.

Mozogjon egy tömegpont változó $v(t)$ sebességgel és változó $a(t) = \dot{v}(t)$ gyorsulással az $\mathcal{I}$ inerciarendszer x-tengelye mentén. Válasszunk ki gondolatban egy t_0 pillanatot és tekintsük azt az $\mathcal{I}_0$ inerciarendszert, amely a konstans $v(t_0)$ sebességgel mozog. Nyilvánvaló, hogy ehhez az inerciarendszerhez viszonyítva a tömegpont a $t = t_0$ pillanatban éppen nyugalomban van, ezért $\mathcal{I}_0$-t a t_0-hoz tartozó *pillanatnyi nyugalmi rendszernek* hívjuk.

A vizsgált test sebessége a pillanatnyi nyugalmi rendszerben definíció szerint nullával egyenlő, a gyorsulása azonban általában különbözni fog nullától. Jelöljük ezt a_0-lal. A newtoni fizika szerint — mint az előbb láttuk — $a = a_0$, a relativitáselméletben azonban

$$a = a_0 \times (1 - v^2/c^2)^{3/2}. \qquad (26)$$

Mindjárt megadjuk a képlet levezetését, de előbb fogalmazzuk meg a fizikai jelentését. Hasonlítsuk össze a newtoni $a = a_0$ képlettel. Mindkét képlet arra a kérdésre ad választ, hogy ha egy nyugvó test gyorsulása a_0, akkor milyen a-val gyorsul abból a vonatkoztatási rendszerből nézve[15], amelyben a sebessége v. A newtoni fizika szerint ugyanazzal az a_0-lal, de a relativitáselmélet szerint ennél kisebb gyorsulással, amelyet (26) határoz meg. Röviden ezt úgy fejezhetjük ki, hogy a relativitáselmélet szerint ***gyorsulásdeficit*** lép fel a newtoni fizikához képest.

A (26) bizonyításához írjuk fel a gyorsulásokat a sebesség időderiváltjaként:

$$a_0 = \frac{dv_0}{dt_0} \qquad \text{és} \qquad a = \frac{dv}{dt},$$

ahonnan

$$a_0 = \frac{dv_0}{dv} \times \frac{dt}{dt_0} \times \frac{dv}{dt} = \frac{dv_0}{dv} \cdot \frac{dt}{dt_0} \cdot a.$$

A dt_0 a nyugvó testen eltelt infinitezimálisan rövid időtartam, a dt az ennek megfelelő időtartam abban az inerciarendszerben, amelyben a test v sebességgel mozog. Elég nyilvánvaló, hogy a kettő ugyanúgy aránylik egymáshoz, mint az összetartozó sajátidő és koordinátaidő intervallumok. A (14) alapján tehát $dt = dt_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$, ezért

$$a_0 = \frac{dv_0}{dv} \cdot \frac{a}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

A dv_0/dv arányt a következő meggondolással számíthatjuk ki. A dt infinitezimális időintervallumban az a gyorsulás konstansnak tekinthető, ezért az $\mathcal{I}$-ben megtett út $\frac{a}{2}dt^2 + v \cdot dt$-vel egyenlő. A második tag nem függ a gyorsulástól, hanem csak a már meglévő sebesség következménye. Ezért a gyorsulással összefüggő utat dl-lel jelölve a

$$dl = \frac{a}{2}dt^2 = \frac{1}{2}dv \cdot dt$$

képletre jutunk. Az $\mathcal{I}_0$-ban ugyanez a gondolatmenet még egyszerűbb, mert ott csak a gyorsulás miatt van elmozdulás. Ennek következtében

$$dl_0 = \frac{a_0}{2}dt_0^2 = \frac{1}{2}dv_0 \cdot dt_0$$

E két képlet alapján

$$dv_0 : dv = \frac{dl_0}{dt_0} : \frac{dl}{dt} = \frac{dt}{dt_0} \times \frac{dl_0}{dl} = \frac{1}{1-v^2/c^2},$$

mert $dt_0 = dt\sqrt{1-v^2/c^2}$ és $dl = dl_0\sqrt{1-v^2/c^2}$. Ha ezt az a_0-ra kapott előbbi kifejezésbe írjuk, az

$$a_0 = \frac{a}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \tag{27}$$

képletre jutunk, amely a (26) átrendezett formája.

[15] Az a és az a_0 közötti különbséget legvilágosabban az űrhajó példáján mutathatjuk be: Amikor az űrhajó gyorsulása ahhoz az inerciarendszerhez képest, amelyben mozog, a-val egyenlő, az űrhajós (és műszerei) által érzékelt gyorsulás a_0.

10. A mozgásegyenlet

Einstein már az 1905-ös alapcikkében megmutatta, hogy a newtoni fizika $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ mozgásegyenletének relativisztikus általánosítása teljesen egyértelmű eljárás[16]. Abból kell kiindulni, hogy a newtoni mozgásegyenlet $v \ll c$-nél igen jó közelítés. Ezt úgy lehet pontosan megfogalmazni, hogy *nyugvó testre* (vagyis az $\mathcal{I}_0$ pillanatnyi nyugalmi rendszerben) változatlan formában teljesül: $m_0 a_0 = F_0$. Ezután már csak annyit kell tenni, hogy ebben az egyenletben a pillanatnyi nyugalmi rendszerre vonatkozó nulla-indexű mennyiségeket *kifejezzük* abban az $\mathcal{I}$-ben érvényes mennyiségeken keresztül, amelyben a test v sebességgel mozog.

A gyorsulás esetében ez annyit jelent, hogy az $m_0 a_0 = F_0$ képletben a_0 helyébe (27) jobboldalát helyettesítjük be:

$$m_0 \frac{a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = F_0.$$

A jobboldal megfelelő átírása függ attól, hogy milyen erőről van szó. Amikor pl. egy e töltésű test mozog E homogén elektromos térben, akkor az átírás véletlenül nagyon egyszerű: $eE_0 = eE$. Az általános esetben csak annyit tehetünk, hogy a nulla index elhagyásával jelezzük, hogy az $\mathcal{I}$-ben érvényes erőről van szó:

$$m_0 \frac{a}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = F.$$

Végül Einstein feltette, hogy a tömeg a relativitáselméletben éppenolyan mozgástól független, konstans paramétere a testeknek, mint a newtoni fizikában, vagyis[17]

$$m_0 = m.$$

Ha ezt is kihasználjuk, a relativitáselméletben érvényes mozgásegyenletre a

$$ma = (1 - v^2/c^2)^{3/2} F. \qquad (28)$$

képletet kapjuk.

A relativisztikus mozgásegyenlet jobboldalán a jellegzetes $(1 - v^2/c^2)^{3/2}$ tényező a gyorsulásdeficit egyenes következménye. Azt eredményezi, hogy *megadott erő annál kevésbé tud gyorsítani egy testet, minél közelebb van a sebessége a fénysebességhez.* A Lorentz-erő esetében például ez azzal a következménnyel jár, hogy a fénynél lassabban mozgó töltéseket nem lehet fénysebességre felgyorsítani (emlékezzünk az Einstein cikkéből vett idézetre fentebb a 4. fejezetben).

[16]Einstein ezt a háromdimenziós esetre mutatta meg, mi azonban az egyszerűség érdekében továbbra is az egyetlen x-dimenzióra korlátozódunk.

[17]Az elterjedt hibás felfogás szerint a tömeg az

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{(nem igaz)}$$

képletnek megfelelően annál nagyobb, minél nagyobb a test sebessége. Ha valóban ez lenne a helyzet, akkor a mozgásegyenletből a 3/2 hatványkitevő hiányozna (1 állna helyette). A tapasztalat — és egyébként a relativitáselmélet egész struktúrája — azonban (28)-t igazolja.

A közvetett deriválás szabálya alapján a (28) mozgásegyenlet $\frac{dp}{dt} = F$ alakban is felírható, amelyben

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \tag{29}$$

A relativitáselméletben ez a mennyiség tölti be a tömegpont ***impulzusának*** a szerepét, mert az impulzus definíció szerint az a mennyiség, amelynek időderiváltja az erő.

11. A mozgási energia

Egy v sebességű test K *mozgási energiája* azzal a munkával egyenlő, amit a testre ható erő végez, miközben a kezdetben nyugvó testet v sebességre gyorsítja fel. A gyorsulásdeficit növeli a mozgási energiát, mert az adott sebességet hosszabb úton lehet csak elérni, mint amikor a gyorsulásdeficit nulla. Ezért azt várjuk, hogy az adott v-hez tartozó mozgási energia a relativitáselméletben nagyobb, mint a newtoni fizikában. A számítás ezt igazolja is.

Ennek a definíciónak megfelelően a kinetikus energia megváltozása egy infinitezimális ds úton $dK = F \cdot ds = Fv \cdot dt$-vel egyenlő. A newtoni esetben az F helyébe $ma = m\frac{dv}{dt}$ kerül, a relativisztikus esetben pedig (28) szerint $ma(1 - v^2/c^2)^{-3/2} = m(1 - v^2/c^2)^{-3/2}\frac{dv}{dt}$. Amikor ezek bármelyikét a $dK = Fv \cdot dt$ képletbe beírjuk, a dt egyszerűsödik és az integrálást dv szerint kell elvégezni, ami jól simul a feladathoz.

Eszerint a newtoni esetben

$$K = m \int_0^v v \cdot dv = \frac{1}{2}mv^2, \tag{30}$$

ahogy vártuk. A relativisztikus esetben pedig

$$K = m \int_0^v \frac{v}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \cdot dv = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 \tag{31}$$

(a második esetben az integrálás helyességéről legegyszerűbben visszaderiválással győződhetünk meg). A v^2/c^2 szerinti sorfejtéssel könnyen igazolhatjuk, hogy a v^2/c^2 legalacsonyabb rendjében a (31) képlet a (30)-be megy át.

12. A nyugalmi energia

„*A mozgó testek elektrodinamikájához*” című 1905-ös alapcikkben megtalálható a (31) képlet (más jelölésben). Einstein nem fűzött megjegyzést ahhoz a furcsa tényhez, hogy a (30) newtoni energia-képlet rendkívüli egyszerűségével szemben a relativitáselmélet megfelelő formulája egy viszonylag bonyolult kéttagú kifejezés. Sehol sincs ugyanis megírva, hogy egy mennyiség képletének hány tagból kell állnia, és ha több tagból áll, akkor külön-külön minden tagnak meghatározott fizikai jelentéssel kell rendelkeznie. Azonban nyilván elgondolkozott a dolgon, mert három hónappal később egy rövid cikkben megmutatta, hogy a második tagnak egészen alapvető fizikai jelentése van. Azt fejezi ki, hogy egy nyugvó m tömegű testben

$$E_0 = mc^2 \tag{32}$$

mennyiségű energia van tárolva.

Az E_0-t *belső, vagy nyugalmi energiának* hívjuk. Ennek a fogalomnak e felhasználásával a (31) képletet

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = K + E_0 \tag{33}$$

alakban is felírhatjuk. Ez azt mutatja, hogy az $mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ tört, amelyet E-vel jelöltünk, a szabadon mozgó test *teljes energiájával* (vagyis a mozgási és a belső energia összegével) egyenlő.

Az $E_0 = mc^2$ képlet a relativitáselmélet talán legnagyobb horderejű összefüggése, amely joggal vált az elmélet szimbólumává. A képlet három olyan mennyiség között állapít meg nagyon szoros kapcsolatot, amelyek már a relativitáselmélet előtt is fontos szerepet játszottak a fizikában.

Arról, hogy a fénynek lehet sebessége, már legalább Galilei óta töprengtek a természetkutatók[18]. A fénysebesség számértékére először Römer Olaf dán csillagász következtetett 1675-ben a Jupiter legbelső holdjának a mozgásában tapasztalható anomáliából.

A tömeg Newton mozgásegyenleteiben nyert pontos fizikai jelentést mint a tehetetlenség mértéke, amely az egyenletekben a gyorsulást szorozza. De a tömeg a súlyerő képletében is megjelent a gravitációs gyorsulás szorzófaktoraként. Abban a gondolatmenetben, amellyel Einstein 1905 szeptemberében eljutott az $E_0 = mc^2$ képlethez, az m a gyorsulást szorzó *tehetetlen tömeg* volt. Tíz évvel később az általános relativitáselmélet megalkotásával azonban azt is megmutatta, hogy ennek az új gravitáció-elméletnek a fényében a súlyerő a tömeg és a gyorsulás szorzatát tartalmazó tagból ered és ennek következtében a g-t szorzó *súlyos tömeg* azonos a tehetetlen tömeggel. Ezért ma már nem különböztetjük meg egymástól ezt a kétfajta tömeget és mindkettőt egyszerűen tömegnek hívjuk. Ez az a tömeg, amely az $E_0 = mc^2$ képletben a fénysebesség négyzetét szorozza és amelyet mikrorészecskékre a táblázatok tartalmaznak.

A képletben szereplő három mennyiség közül az energia a legkésőbbi, a mechanikai mozgásokra a XIX. század első évtizedeiben fogalmazódott meg. Az $E_0 = mc^2$ képletben azonban *nem* ez a mechanikai energia szerepel. Csak a XIX. század végére vált világossá, hogy a testek a mechanikai — mozgási és potenciális — energián kívül más természetű energiákkal is rendelkeznek, amelyeket közös néven *belső energiának* nevezünk. A belső energia leguniverzálisabb

[18]Galilei: *Matematikai érvelések és bizonyítások*, (Európa 1986), 55-57. oldal.

formája a hőenergia. Amikor egy testet meghatározott körülmények között melegítünk, energiát közlünk vele. A hő mechanikai egyenértékének ismeretében pontosan kiszámíthatjuk, hogy a belső energia megnövekedése milyen mennyiségű mechanikai energiának felel meg. Az $E_0 = mc^2$ képletből következik, hogy melegítéskor nemcsak a test hőmérséklete, hanem a tömege is megnő. Einstein előtt erre senkise gondolt. A belső energia egy másik jól ismert formája az elektromosan töltött objektumok elektrosztatikai energiája, amely a testet körülvevő elektromos mező energiájával egyenlő. Természetesen a mágnesezett testek belső energiája is tartalmaz olyan járulékot, amely a mágneses mező térenergiájából származik.

Elég nyilvánvaló azonban, hogy a hőenergia vagy az elektromágneses energia semmiképpen sem meríti ki egy test teljes belső energiáját. Hiszen a testeket alkotó hőmozgást végző elektronoknak és atommagoknak maguknak is lehet — és bizonyosan van is — belső energiája. Azt hiszem, még a mai fizikai ismereteink sem elégségesek ahhoz, hogy ezek természetét kielégítően jellemezhessük. Ennek ellenére az $E_0 = mc^2$ képletből pontosan ismerjük ennek a bizonytalan természetű belső energiának az összmennyiségét: A test tömegének és a fénysebesség négyzetének a szorzatával egyenlő.

Az $E_0 = mc^2$ képlet csak olyan objektumokra vonatkozik, amelyek rendelkeznek tömeggel. A fizikában persze foglalkozunk olyan objektumokkal is, amelyeknek nincs tömege. Ez nem azt jelenti, hogy a tömegük nulla, hanem azt, hogy egyáltalán nem jellemezhetők tömeggel, mert nem alkalmazhatók rájuk a Newton-egyenletek (energiája azonban minden objektumnak van). Ilyen tömeg nélküli objektum például egy rövid rádiójel, amely mondjuk egy űrszonda és a földi irányító központ között terjed. Noha az elektromágneses mezőnek — és így a jelnek is — van energiája, az $E_0 = mc^2$ képlet mégsem alkalmazható rá, mert „nincs neki m-je". Az elektromágneses mező kvantumja, a foton is olyan objektum, amelynek energiája ugyan van, de tömege nincs, ezért az $E_0 = mc^2$ képlet nem vonatkozik rá.