Elmélkedés a Coriolis- és a centrifugális erőről

Egy tömegpont síkbeli mozgását többnyire Descartes-koordinátákban, de talán még gyakrabban polárkoordinátákban tárgyaljuk. A Descartes-koordinátákban érvényes

$$m\ddot{x} = F_x \qquad m\ddot{y} = F_y \tag{1}$$

egyenletekről az

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$

transzformációval térünk át polárkoordinátákra, de a koordinátákon kívül természetesen az erő Descartes-komponenseit is ki kell fejezni az F_r, F_φ poláris komponenseken keresztül. Az eljárás a jól ismert

$$m\ddot{r} = F_r + mr\dot{\varphi}^2 \tag{2}$$

$$mr\ddot{\varphi} = F_\varphi - 2m\dot{r}\dot{\varphi} \tag{3}$$

egyenletekre vezet.

Az egyenleteket úgy rendeztük, hogy — az (1)-hez hasonlóan — a baloldal most is csak a gyorsulással arányos tagot tartalmazza. Ennek azonban az lett a következménye, hogy a jobboldalon az erő megfelelő komponensén kívül egy-egy új tag is megjelent. Ezeket a jól ismert tagokat logikus ugyancsak erőnek tekinteni, elfogadott nevük is ezt a felfogást tükrözi: A (2) jobboldalán a második tagot centrifugális erőnek, a (3)-ban megjelenőt pedig Coriolis-erőnek hívjuk.

De álljunk meg itt egy pillanatra. Az eddigi egyenletek felírásánál automatikusan feltettük, hogy inerciarendszerben vagyunk, mert a Newton-egyenletben csak a valódi $\mathbf{F}$ erőt szerepeltettük, inerciaerőkről egyáltalán nem esett szó. A kiinduló Descartes-koordinátarendszerünk is és a belőle képzett polárkoordinátáink is inerciarendszert határoznak meg (inerciarendszerhez vannak rögzítve). Márpedig inerciarendszerben nem lép fel se centrifugális, se Coriolis-erő, hiszen ezek inerciaerők, amelyek csak forgó vonatkoztatási rendszerekben hatnak a bennük nyugvó és mozgó testekre.

Ezt a terminológiai kifogást nem lehet csak úgy félretolni. Egyet tehetünk: A (2) és a (3) jobboldalán megjelenő két fiktív erőtagra más, semleges elnevezést vezetünk be. Elfogadhatónak látszó elnevezés az, hogy ezek *geometriai erők*, mert utal rá, hogy tisztán geometriai úton, a t időt nem tartalmazó koordinátatranszformáció következtében jelentek meg.

De ettől még igaz marad, hogy ezek a geometriai erők *a matematikai alakjukat tekintve* pontosan megegyeznek a centrifugális és a Coriolis-erővel. Megmutatjuk, hogy *egy másik gondolatmenet alapján* valóban lehet őket *így is* értelmezni.

Kezdjük megint a kályhától. Képzeljük el a tömegpont valamelyik megvalósuló mozgását az (x, y) síkban, és vezessünk be új vesszős Descartes-koordinátákat úgy, hogy a vesszős és a vesszőtlen rendszer origója, valamint z-tengelye legyen közös, de a vesszős rendszer forogjon olymódon a közös z-tengely körül, hogy *a tömegpont maradjon rajta folyamatosan* az x' tengelyen. Hogyan fog kinézni a tömegpont mozgásegyenlete a vesszős Descartes-koordinátákban?

Most természetesen figyelembe kell venni az inerciaerőket is, amelyeknek a képlete

$$\mathbf{F}^* = -2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') - m\Big(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\Big) - m\big(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}\big).$$

A jobboldal első tagja az $\mathbf{F}^*_c$ Coriolis-erő, a második az $\mathbf{F}^*_{cf}$ centrifugális erő, és van egy harmadik tag is, amelyre, mivel tudomásom szerint nincs elfogadott neve, „szöggyorsulási erőként" fogok hivatkozni. Az $\boldsymbol{\omega}$ az a szögsebesség, amellyel a vesszős rendszer forog az inerciarendszerekhez képest.

Specializáljuk ezeket a mennyiségeket az (x', y') síkban történő mozgásra. A szögsebesség nyilván a következő:

$$\boldsymbol{\omega} = (\omega_{x'},\, \omega_{y'},\, \omega_{z'}) = (0,\, 0,\, \dot{\varphi}),$$

az erő pedig

$$\mathbf{F} = (F_{x'},\, F_{y'},\, F_{z'}) = (F_r,\, F_\varphi,\, 0).$$

A tömegpont helyzetvektorának, sebességének és gyorsulásának csak x' komponense van:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= (x',\, y',\, z') = (r,\, 0,\, 0)\\
\mathbf{v}' &= \big(\dot{x}',\, \dot{y}',\, \dot{z}'\big) = (\dot{r},\, 0,\, 0)\\
\mathbf{a}' &= \big(\ddot{x}',\, \ddot{y}',\, \ddot{z}'\big) = (\ddot{r},\, 0,\, 0).
\end{aligned}$$

A Coriolis-, a centrifugális erő, és a szöggyorsulási erő komponensei a következők:

$$\mathbf{F}^*_c = (0,\, -2m\dot{\varphi}\dot{r},\, 0), \qquad \mathbf{F}^*_{cf} = \big(mr\dot{\varphi}^2,\, 0,\, 0\big)$$

valamint

$$-m\big(\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}\big) = (0,\, -mr\ddot{\varphi},\, 0).$$

Természetesen a komponensek az inerciaerők képletében is a vesszős koordinátákra vonatkoznak.

Most már könnyen felírhatjuk az $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^*$ Newton-egyenlet x', y' komponenseit:

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= F_r + mr\dot{\varphi}^2 \\ 0 &= F_\varphi - 2m\dot{\varphi}\dot{r} - mr\ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

Ez az egyenletrendszer pontosan megegyezik (2)-vel és (3)-mal, a fiktív erők pedig valóban azonosak benne a Coriolis-erővel és a centrifugális erővel.

Ezzel beláttuk, hogy a vizsgált esetben a geometriai erők egyben inerciaerők is, de szerintem ebből nem szabad levonni azt a következtetést, hogy a két fogalom közül az egyik — a geometriai erő — fölösleges. Ezt a következtetésünket meg se tudtuk volna fogalmazni mindkét fogalom együttes használata nélkül. Különben is, a két fogalom biztosan nem esik egybe, mert a φ koordináta második időderiváltjával arányos tag inerciaerő, de nem geometriai erő. Más, összetettebb feladatokban pedig valószínűleg méginkább különböznek egymástól.

Még egy utolsó megjegyzés: Azt szoktuk mondani, hogy egy körpályán mozgó bolygó esetében, amikor $\ddot{r} = 0$, a centrifugális erő egyensúlyt tart a gravitációs vonzással ($F_r < 0, \quad F_\varphi = 0$). Mások meg éppen arra figyelmeztetnek, hogy ez félrevezető konklúzió, mert egyáltalán nem következik a (2)-(3) egyenletek levezetési módjából . Most látjuk, hogy a kijelentés korrekt, de nem az inerciarendszerhez rögzített szokásos polárkoordinátákra kell vonatkoztatni, hanem arra a vesszős Descartes-rendszerre, amely együtt forog a bolygóval.

Hraskó Péter