Planck és Einstein

Hraskó Péter
PTE Elméleti Fizika tanszék

A cím félrevezető, mert csak egyetlen nézőpontból szándékozunk a két tudós teljesítményét összehasonlítani egymással. A kérdés ugyanis, amelyre megpróbálunk válaszolni, a következő: Jogos-e Einsteint tekinteni a tömeg-energia reláció egyedüli felfedezőjének, vagy inkább azt kell mondanunk, hogy 1905-ben Einstein csak *megsejtette* ezt a relációt, amelynek szigorú *bizonyítását* két évvel később Planck adta meg. Ez utóbbi nézetet képviseli például *A fizika kultúrtörténete* című impozáns kötetében *Simonyi Károly*, aki szerint „... a tétel általános kijelentése itt [Einsteinnél] még csak egy zseniális sejtés, amely még pontos megfogalmazásra és bizonyításra vár," és majd csak Planck vezeti le 1907-ben általános formában[1].

Mint ismeretes, 1905-ben Einstein két dolgozatot publikált a relativitáselméletről. Már az első (júniusi) dolgozatban elemzi az elmélet szinte minden lényeges aspektusát, de a tömeg-energia relációról ebben a munkájában még egyáltalán nem esik szó. Ezt a rendkívüli jelentőségű tételt csak három hónappal később publikálja lakonikus (szeptemberi) közleményében[2]. Első feladatunk ennek a munkának az elemzése.

1 A szeptemberi dolgozat

Képzeljünk el egy m tömegű testet, amely a $\mathcal{K}$ inerciarendszerben nyugszik és egy adott pillanatban kibocsát két teljesen egyforma elektromágneses hullámcsomagot (gondolhatunk klasszikus fényjelre vagy fotonra is, egyremegy), amelyek pontosan egymással ellentétes irányban haladnak. A két csomag energiája egyenként legyen $\epsilon/2$. 1905-ben már lehetett tudni, hogy a két hullámcsomagnak impulzusa is van, amely az energiájuk c-ed része: $p = \epsilon/2c$. Mivel azonban a két csomag $\mathcal{K}$-ban pontosan ellenkező irányban mozog, a test impulzusát meghagyják nullának, az E_0 *belső (vagy nyugalmi) energiáját* azonban ϵ-nal lecsökkentik. Ha az emisszió utáni mennyiségeket felülvonással különböztetjük meg az emisszió előttiektől, akkor az energiamegmaradás tételét $\mathcal{K}$-ban az

$$E_0 = \bar{E}_0 + \epsilon \tag{1}$$

képlet fejezi ki.

Szemléljük most *ugyanezt a folyamatot* $\mathcal{K}$ x-tengelye mentén v sebességgel pozitív irányban mozgó $\mathcal{K}$' koordinátarendszerből! Ehhez a koordinátarendszerhez viszonyítva a test az emissziós folyamat előtt $-v$ sebességgel mozog,

[1] Ld. a könyv első, 1978-as kiadásának 350-351-edik oldalát.

[2] A szeptemberi cikk magyar fordítása megtalálható az *Albert Einstein válogatott írásai* (Typotex 2010) gyűjtemény 104. oldalán. A kötet sajnos a júniusi dolgozatnak csak az első felét tartalmazza.

ezért az energiája — a változatlanul E_0-al egyenlő belső energia mellett — még valamekkora K mozgási energiát is tartalmaz, amely a test sebességének (pontosabban a sebesség abszolút értékének) és tömegének a függvénye: $K = K(v, m)$. Az emissziót megelőzően tehát a test teljes energiája $\mathcal{K}$'-ben

$$E' = E_0 + K(v, m). \tag{2}$$

A hullámcsomagok emissziója után a test $\mathcal{K}$-ban nyugalomban marad, ennek következtében a $\mathcal{K}$'-ben megtartja eredeti $-v$ sebességét. A tömege azonban az emisszió következtében megváltozhatott, ezért $\mathcal{K}$'-beli energiája az emissziót után a következő:

$$\bar{E}' = \bar{E}_0 + K(v, \bar{m}). \tag{3}$$

Ahhoz, hogy $\mathcal{K}$'-ben is felírhassuk az energiamegmaradás egyenletét, át kell tudnunk számítani a két hullámcsomag $\mathcal{K}$-beli ϵ összenergiáját $\mathcal{K}$'-be. Tegyük fel, hogy $\mathcal{K}$-ban az egyik csomag φ szöget zár be az x-tengellyel (a másik csomag szöge ekkor $\varphi + \pi$). Ezt a feladatot Einstein már a júniusi cikkben megoldotta és egy $\mathcal{K}$-ban ε energiájú, az x-tengellyel φ szöget bezáró csomag $\mathcal{K}$'-beli energiájára az

$$\varepsilon' = \varepsilon \frac{1 - (v/c)\cos\varphi}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{4}$$

képletet kapta. Esetünkben mindkét csomagra $\varepsilon = \epsilon/2$, de a terjedési irányuk ellentétessége miatt a számláló koszinuszos tagjának előjelében különböznek egymástól. A két csomag $\mathcal{K}$'-beli energiájának összegéből ezért a koszinuszos tag kiesik, és ennek következtében ez az összeg $\epsilon/\sqrt{1 - v^2/c^2}$-vel egyenlő.

A $\mathcal{K}$'-ben tehát az energia megmaradását az

$$E_0 + K(v, m) = \bar{E}_0 + K(v, \bar{m}) + \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

képlet fejezi ki, amely (1) felhasználásával a

$$K(v, m) - K(v, \bar{m}) = \epsilon \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \tag{5}$$

alakba írható át.

Ebben a képletben a v-t tetszőlegesen választhatjuk meg, és ami bennünket érdekel, az a v-től független konstans m és $\bar{m}$ kapcsolata. Olyan v-t kell tehát választanunk, amely az (5) alapján a két konstans tömeg összefüggésének a legegyszerűbb meghatározását teszi lehetővé. Elég nyilvánvaló, hogy erre a célra az *infinitezimálisan kis* v — pontosabban a $v \ll c$ határeset — a legalkalmasabb.

Az (5) jobboldala „a negyed- és magasabb rendű mennyiségek" elhanyagolása után $\epsilon \times \dfrac{v^2}{2c^2}$-tel egyenlő. A baloldalon a mozgási energia relativisztikus alakját

Einstein vehette volna a júniusi dolgozat 10. paragrafusából, de a $v \to 0$ határesetben erre nem volt szüksége. Abból az általános követelményből kiindulva ugyanis, hogy ebben a határesetben a relativitáselmélet a newtoni mechanikába megy át, jogosan használhatta a $K = mv^2/2$ képletet. Eszerint

$$\frac{v^2}{2}\,(m - \bar{m}) = \epsilon \times \frac{v^2}{2c^2}, \tag{6}$$

ahonnan $v^2/2$-vel történő osztás és (1) kihasználása után megkapjuk a tömeg-energia relációt az

$$m - \bar{m} = (E_0 - \bar{E}_0)/c^2$$

alakban: A belső energia megváltozása a tömeg megváltozásának c^2-szeresével egyenlő.

Biztos, hogy ugyanezt az eredményt kapnánk akkor is, ha tetszőleges (c-nél kisebb) v-t választanánk az $\bar{m}$ és az m kapcsolatának a meghatározására? Mivel a tömeg és a belső energia fogalmukból következően a koordinátarendszer választásától független invariáns mennyiségek, ezért ha a relativitáselmélet követelménye alapján Lorentz-transzformációval térünk át a v sebességgel mozgó koordinátarendszerre, a kölcsönös kapcsolatukra minden v-nél ugyanazt az összefüggést kell kapnunk. Erről egyébként könnyen meg lehet győződni, ha (5)-ben a kinetikus energiára a júniusi cikkben levezetett

$$K(v, m) = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \tag{7}$$

képletet használjuk az $mv^2/2$ határeset helyett.

Mint látjuk, Einstein nem az $E_0 = mc^2$ relációt, hanem az ennél gyengébb $\Delta E_0 = \Delta m \cdot c^2$ törvényt bizonyította be. Ez a korlátozás annak következménye, hogy a bizonyítás az energia (és az impulzus) megmaradásán alapul, és megengedi, hogy a testek tömegének legyen olyan része, amely — a newtoni fizika tömegfogalmához hasonlóan — egyáltalán nem függ össze a belső energiával. De minden jel szerint bizonyosra vette, hogy az *egész tömeg* a belső energiához kötődik.

A bizonyítással szemben az a bírálat is elhangzott, hogy a törvény csak arra a speciális emissziós folyamatra érvényes, amely a bizonyítás alapja. Ez a kritika azonban nem állja meg a helyét, mert egy izolált test termodinamikai állapotát belső energiájának megváltozása határozza meg az energia közlési módjától függetlenül; ha dQ hőt közlünk egy testtel, a tömege dQ/c^2-tel megnő.

Erre az ellenvetésre Einsten ki is tér a közleménye végén:

> Nyilvánvalóan lényegtelen, hogy a testtől elvett energia éppen sugárzási energiává alakul át, úgyhogy az alábbi általánosabb következtetésre jutunk:
>
> A testek tömege energiatartalmuknak a mértéke[3]; ha az energiájuk ϵ-nal változik, tömegük ugyanolyan értelemben $\epsilon/9 \cdot 10^{16}$-nal

[3] Ez a megfogalmazás megalapozatlan, mert a bizonyítatlan $E_0 = mc^2$ relációt fejezi ki. Tény azonban, hogy a későbbi fejlemények igazolták Einsteint.

változik, ha az energiát joule-ban, a tömeget pedig kg-ban mérjük[4].

Einstein bizonyításával szemben a *Fizika kultúrtörténetében* megfogalmazott bizalmatlanság azonban egy sokkal súlyosabb állításon alapul: azon, hogy a szeptemberi cikk bizonyítása logikailag elfogadhatatlan, mert *körkörös.*

2 A körkörösség vádja

A könyv idézett helyén ugyanis ezt olvassuk:

> A hivatásszerűen fizikatörténettel foglalkozó kutatók színre lépésével, mint ahogy ezt már több ízben láttuk, sok régi fizikatörténeti közhely átértékelése szükségessé vált. Igen sokszor az átértékelés ellenére is a közhely közhely maradt. 1951-ben ugyanis H. E. Ives kimutatta, hogy az Einstein fenti [szeptemberi] cikkében adott levezetés alapvetően hibás; a bizonyítás elején Einstein plauzibilis feltevéseket vezet be, amelyek segítségével jut el azután a tömeg és az energia közötti kapcsolathoz. Ives éppen azt mutatja be, hogy a kiinduló feltételekben burkoltan benne van a levezetni kívánt kapcsolat: bizonyításánál tehát a petitio principiinek nevezett logikai hibát követi el. (akkor esünk a petitio principii hibájába, ha a bizonyítás kiinduló feltételeibe — nyíltan vagy burkoltan — belecsempésszük azt az állítást, amelyet éppen bizonyítani akarunk.).

Vegyük hát elő Ives[5] dolgozatát[6] és nézzünk bele. Az Enstein-féle bizonyítás kritikáját a Függelékben találjuk meg.

Ives bírálatának a középpontjában a (2), (3) képlet áll, amelyeknek a korrekt formája szerinte a következő:

$$E' = E_0 + \frac{\epsilon}{(m-\bar{m})c^2}K(v,m) \tag{2'}$$

$$\bar{E}' = \bar{E}_0 + \frac{\epsilon}{(m-\bar{m})c^2}K(v,\bar{m}). \tag{3'}$$

Azzal, hogy ezek helyett Einstein a gondolatmenetének kiindulópontjába a (2), (3) képleteket állította, hallgatólagosan feltételezte, hogy az $\epsilon/(m-\bar{m})c^2$ faktor 1-gyel egyenlő. De ezzel éppen a bizonyítandó $\epsilon = (m-\bar{m})c^2$ állítást előlegezte meg, ezért körkörös a bizonyítása.

[4] A jelölést és az egységeket megváltoztattam.

[5] *Herbert Eugene Ives* (1882-1953) a 20. század első felében az elektro-optikai kutatásokat irányította az AT&T Bell-laboratóriumában. A húszas években rövid ideig az Amerikai Optikai Társaság elnöke. A fizikában az 1938-ban publikált Ives-Stilwell kísérlet tette a nevét ismertté, amelyben először nyert kísérleti igazolást a tranzverzális Doppler-effektus. Ez a jelenség az idődilatáció egyenes következménye, ezért az Ives-Stilwell kísérlet az idődilatáció kísérleti igazolásának is tekinthető. A Wikipédia szócikke szerint azonban Ives nem fogadta el a relativitáselméletet és a kísérlet eredményét másképpen interpretálta.

[6] H. E. Ives, J. Opt. Soc. Am. **42**, 540 (1952)

Ives tehát kétségbe vonja, hogy egy szabadon mozgó test teljes energiája mozgási a belső energiájának az egyszerű összegével lenne egyenlő. Az egyszerű összeg helyett javasolt (2') és (3') azonban fizikailag aligha értelmezhető. A (2') például azt állítja, hogy a szabadon mozgó test teljes energiája *már a hullámcsomagok kibocsátása előtt* függ ezek ϵ energiájától és a visszamaradt test $\bar{m}$ tömegétől.

De hogyan jutott erre a — szerintünk képtelen — gondolatra?

A Függelék Einstein gondolatmenetének a reprodukálásával kezdődik, és tartalmazza az

$$(E' - E_0) - (\bar{E}' - \bar{E}_0) = \epsilon \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \tag{8}$$

képletet, amely (5)-ből kapható (2) és (3) figyelembe vételével, és szerepel Einstein dolgozatában is. Ives ezután alkalmazza a két kinetikus energiára a pontos (7) formulát:

$$K(v, m) = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

$$K(v, \bar{m}) = \bar{m}c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right),$$

ahonnan

$$K(v, m) - K(v, \bar{m}) = (m - \bar{m})c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).$$

Az $\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$ kifejezést innen behelyettesíti (8)-ba:

$$(E' - E_0) - (\bar{E}' - \bar{E}_0) = \frac{\epsilon}{(m - \bar{m})c^2} \left(K(v, m) - K(v, \bar{m}) \right), \tag{9}$$

és ebből vonja le azt a következtetést, hogy nem (2) és (3), hanem (2') és (3') a teljes energia helyes felbontása belső és mozgási energiára. De ez a konklúziója hibás, mert az $a + b = c + d$ egyenlőségből nem következik $a = b$ és $c = d$. A (9)-ből a (2) és a (3) alapján a helyes következtetés az, hogy $\epsilon/(m - \bar{m})c^2 = 1$, vagyis a tömeg-energia reláció.

3 Planck 1907-es dolgozata

A tömeg-energia relációval összefüggésben Planck 1907-ben publikált dolgozatára szoktak hivatkozni, amelynek nem túl jó minőségű angol fordítása megtalálható a neten[7]. A cikk egy hosszú bevezetőből és 19 fejezetből áll. A tömeg-energia relációról a 16. fejezetben van szó.

A 19 fejezetből 18-at Planck a következő feladat megoldásának szenteli: Mozogjon egy makroszkopikus test konstans v sebességgel p nyomású, T hőmérsékletű környezetben. A mozgás legyen adiabatikus, azaz minden pillanatban álljon fenn termikus és mechanikai egyensúly a testen és a környezetet képező közegen belül, valamint a test és a környezete között. A megválaszolandó kérdés a következő: Milyen képlet segítségével lehet megadni a mozgó test (teljes) energiáját, nyomását, entrópiáját a p, a T és a test V térfogatának a függvényében, amelyek mind a *közeghez képest nyugvó* rendszerre vonatkoznak.

Planck általános eljárást dolgozott ki az ilyen típusú kérdések megválaszolására, de csak egy konkrét feladatra alkalmazta: Az olyan üres súlytalan edényre (üregre), amely csak hőmérsékleti sugárzást tartalmaz (a nyomáskiegyenlítés biztosításához merev falú üreg helyett valójában egy dugattyú belsejére kell gondolnunk). A múlt század tízes éveiben ezzel a problémával többen is foglalkoztak, mert azt remélték, hogy mind mechanikai, mind elektrodinamikai szempontból végigszámolható, és bepillantást enged a mozgó testek elektrodinamikájába (amiben azonban Einstein sokkal radikálisabb megközelítési módja bizonyult végül sikeresnek). Planck szisztematikus vizsgálata megerősítette az üreg energiájára és impulzusára nem sokkal korábban egyik tanítványa által levezetett képleteket:

$$E = \frac{1 + v^2/3c^2}{(1 - v^2/c^2)^3} aT^4 V, \qquad G = \frac{v}{c^2}(E + pV). \tag{10}$$

A dolgozat bevezetőjében Planck hangsúlyozza, hogy ezek a képletek azért is fontosak, mert kivétel nélkül minden test tartalmaz hősugárzást, amely bizonyos körülmények között nem is elhanyagolható a szokásos módon értelmezett belső energiához képest. A példája azonban ugyancsak egy súlytalan edénybe zárt ideális gáz, ezúttal persze molekuláris. A mechanika igazán fontos objektumairól, a szilárd testekről nem beszél. Az olyan elemi részecskékre pedig, mint az elektron, amelynek mozgását 1907-ben már javában tanulmányozták, Planck indoklása nyilván egyáltalán nem alkalmazható.

Ahhoz, hogy egy kicsit jobban belelássunk a (10) képletek természetébe, helyettesítsük bennük a *a közeg* nyugalmi rendszerében érvényes T, p, V változókat *az üreg* nyugalmi rendszerére vonatkozó T_0, p_0, V_0-al. Planck dolgozatának természetesen fontos része a kapcsolat tisztázása a változók e két fajtája között. A következő eredményre jut:

$$V = V_0\sqrt{1 - v^2/c^2}, \qquad T = T_0\sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad \text{valamint} \quad p = p_0. \tag{11}$$

Az első ezek közül a Lorentz-kontrakció, amely elvben empirikusan is ellenőrizhető, mert tudjuk, hogyan lehet egy mozgásban lévő test hosszát megmérni. A hőmérséklettel azonban más a helyzet, mert csak T_0-t tudjuk mérni a testhez

[7] https://en.wikisource.org/wiki/ . Ugyanitt található meg Planck később szóba kerülő 1906-os közleményének, valamint Einstein júniusi cikkének angol fordítása is.

rögzített hőmérővel. A gyakorlatban ez nem okoz gondot, mert a reális feladatokban (például áramló közegekben) hőmérsékleten mindig a lokálisan együttmozgó rendszerben mért hőmérsékletet értjük, de bizonytalanságban hagy a T fizikai jelentését (és jelentőségét) illetően.

A (11) segítségével E-re és G-re a következő képleteket kapjuk[8]

$$E = \frac{E_0 + \dfrac{v^2}{c^2} p_0 V_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{12}$$

$$G = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \frac{E_0 + p_0 V_0}{c^2}, \tag{13}$$

amelyekben a Stefan-Boltzmann törvény alapján

$$E_0 = a T_0^4 V_0.$$

Planck a tömeg-energia relációt (13)-ból dedukálja a tömeg

$$m = \left(\frac{G}{v} \right)_{v=0} \tag{14}$$

definíciója alapján. Így kapjuk a cikk

$$m = \frac{E_0 + p_0 V_0}{c^2}. \tag{15}$$

(48)-as képletét, amely a tömeg-energia reláció Planck értelmezésében[9]. De ez a képlet bizonyosan hibás: Az $E_0 + p_0 V_0$ *entalpia* megváltozása ugyanis azt a hőt is tartalmazza, amely a testnek a konstans nyomású környezeten végzett munkáját fedezi. A helyes képlet az $m = E_0/c^2$, amelyet azonban Planck nem ír fel.

De annak a kérdésnek a szempontjából, amelynek megválaszolására Planck dolgozatát elővettük, ez a probléma nem túl lényeges; végül is merev falú üregre vonatkozóan, amikor nyomáskiegyenlítődést a környezettel nem követelünk meg, a (15) jobboldalán a $p_0 V_0$ tag nem lép fel, és a képlet valóban a tömeg-energia relációt szolgáltatja. Az igazán fontos kérdés a következő: Einstein úgy jutott el a tömeg-energia relációhoz, hogy egy alkalmasan megválasztott fizikai folyamatra alkalmazta az energia és az impulzus megmaradási tételét két egymáshoz képest mozgó vonatkoztatási rendszerben. Mi lehet az, ami Planck tárgyalásában ezt a gondolatmenetet látszólag automatikusan helyettesíti?

Planck dolgozata nehéz olvasmány; nem is lehetek biztos benne, hogy minden részletét jól megértettem. A módszere két alapelv kombinációjára épül. Az

[8] A jobboldalt egy harmadik alakban is felírhatjuk, ha kihasználjuk a fekete sugárzás $p_0 V_0 = E_0/3$ állapotegyenletét is.

[9] Emlékeztetünk rá, hogy ez a képlet csak hőmérsékleti sugárzást tartalmazó üres súlytalan edényre vonatkozik. Planck *akkori* felfogása szerint általánosabb érvényességre azért tarthat igényt, mert minden test tartalmaz fekete sugárzást.

első a mechanika $\delta \int Ldt = 0$ variációs elvének és a belőle következő Lagrange-egyenleteknek az általánosítása arra az esetre, amikor a test p, T nyomású és hőmérsékletű környezetben mozog. Az $L(v)$ Lagrange-függvény szerepét betöltő $H(v, V, T)$ függvényt Planck Helmholtz-féle kinetikus potenciálnak hívja. A második alapelv a relativitáselmélet a Lorentz-transzformációval.

A matematikai bonyolultság fő forrása a környezeti változók kezelése, ezért ha kizárólag a tömeg-energia reláció státuszát kívánjuk tisztázni, elég, ha az izolált test határesetére korlátozódunk, amelyet Planck már egy korábbi, 1906-os közleményében megvizsgált (és a 19. fejezetben hivatkozik is rá). Ebben a dolgozatában Planck megmutatja, hogy a ponttöltés relativisztikus mozgásegyenletét akkor kaphatjuk meg, ha a szabad (töltött vagy töltetlen) tömegpont Lagrange-függvényét

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + konst \qquad \left(v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\right) \tag{16}$$

-nak választjuk. A továbbiakban a jobboldalon álló látszólag ártalmatlan szabadon választható konstansra koncentrálunk[10].

A szabad mozgáshoz tartozó Lagrange-függvény helyes megválasztásának egyedüli kritériuma az, hogy a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = F_x, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = F_y, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = F_z$$

egyenletek egyezzenek meg az általában már korábban ismert korrekt mozgásegyenletekkel. Mivel ezekből az egyenletekből az L-ben szereplő additív konstans kiesik, ezért *ebből a szempontból* ezt a konstansot szabadon választhatjuk. A test *energiáját* meghatározó

$$\mathcal{E} = \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - konst \tag{17}$$

képletben azonban (negatív előjellel) benne marad.

Planck az 1906-os közleményében a (17) lagrange-i energiaformulát ugyan felírta, de nem rendelkezett a konstans megválasztásáról. Pedig meg kellett volna tennie, mert enélkül az energia nincs definiálva. Két indokolható választása is lett volna. Bármely szabadon mozgó test energiája két részből áll: mozgási energiából és belső (vagy nyugalmi) energiából. Ebből csak az első tartozik a mechanikára, mert a belső energia az anyagszerkezet és a termodinamika tárgyát képezi. Ezért megalapozottan érvelhetünk amellett, hogy a mechanikában egy izolált test energiáján a mozgási energiát kell érteni, amely $v = 0$-nál definíció szerint nullával egyenlő. Ez a feltétel akkor teljesül, ha (17)-ben a konstansot mc^2-nek választjuk, mert ekkor

$$\mathcal{E} \equiv K = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right), \tag{18}$$

[10] Ld. a *Relativitáselmélet* könyvem 2. bővített kiadásának (Typotex 2016) 2.6 szakaszát.

és ez $v = 0$-nál valóban eltűnik. Mint a (7)-ben már láttuk, az 1905 júniusi dolgozatában Einstein ugyanerre a mozgási energia formulára jutott annak a meghatározásnak az alapján, hogy a v sebességű test mozgási energiája azzal a munkával egyenlő, amelyet be kell fektetni ahhoz, hogy a nyugvó testet v sebességre gyorsítsuk fel.

De Plancknak nem kellett volna itt megállnia. Einstein szeptemberi közleményére hivatkozva rámutathatott volna, hogy az $E_0 = mc^2$ reláció következtében célszerű lehet a belső energia „beemelése” a mechanikába, hiszen ez a belső energia konkrét fizikai természetétől függetlenül egy tipikus mechanikai paraméteren, a tömegen keresztül fejezhető ki. Érdemes ezért az $\mathcal{E}$ Lagrange-energián a mozgási és a belső energia *összegét* érteni:

$$\mathcal{E} = K + E_0 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (19)$$

A (17)-tel való összehasonlítás mutatja, hogy ez az értelmezés a $konst = 0$ választásnak felel meg[11].

A (19) tartalmazza a tömeg-energia relációt, mert $v \to 0$-nál ebbe megy át. De világos, hogy ezt a relációt *nem* a $konst = 0$ választással *igazoltuk*, hanem Einstein bizonyítását használtuk fel annak demonstrálására, hogy a $konst = 0$ választásnak mély fizikai értelme van.

Mint említettük, az 1906-os közleményében Planck a Lagrange-függvény additív konstansának a megválasztásával nem foglalkozott. Az 1907-es cikkben a Lagrange-függvény szerepét a Helmholtz-féle kinetikus potenciál játssza, és — mint Planck hangsúlyozza, — a mozgásegyenletek ezt is csak egy additív konstans erejéig rögzítik. A 9. fejezet végén Planck ennek a konstansnak az értékét „az egyszerűség kedvéért” nullának választja. A cikkének (10)-es formulája alapján ezzel pontosan ugyanúgy befolyásolja az energia képletét, ahogy az előbb a Lagrange-elmélet kapcsán elemeztük. Ezzel a lépéssel építette bele az elméletéből számítható energiába, hogy $v = 0$-nál legyen egyenlő mc^2-tel, ezért jöhetett ki az elméletéből a tömeg-energia reláció. De ez nem a tömeg-energia képlet *bizonyítása*, hanem annak igazolása, hogy a tömeg-energia reláció *következtében* a konstansot nullának választva értelmes elméletre jutunk.

***

Köszönetemet fejezem ki a cikkem bírálójának, aki egy súlyos tévedésre mutatott rá az eredeti kéziratban.

[11] Ma már nyilvánvaló, hogy a Lagrange-energiának ez a választása a legcélszerűbb. A gyorsítók ugyan a K kinetikus energiát növelik, de a felgyorsított részecskék által kiváltott folyamatokban a teljes $E = K + E_0$ energia résztvesz. A radioaktív bomlási folyamatokban csak az E marad meg, a K és a részecskék belső energiája (tömege) külön-külön nem. Matematikai szempontból pedig az E óriási előnye a K-val szemben, hogy az impulzussal együtt négyesvektort alkot.

Függelék. Az energia additív állandójáról

Az energiát általában csak egy önkényes állandó erejéig szokták megadni. Ezt többnyire azzal indokolják, hogy mindig energia különbségeket mérünk. De adhatunk ennél tartalmasabb, a lényegre jobban rávilágító magyarázatot is. Tekintsünk egy mozgó testet. Az energiája a mozgási és a belső (nyugalmi) energia összege. A mozgási energia maga nem tartalmaz önkényes állandót, mert definíció szerint nullával egyenlő, amikor a test nyugalomban van. A belső energia jelenti az igazi problémát. Gondoljuk csak meg: A testet részecskék alkotják, amelyek mindegyikének van (1) (a nyugvó testhez viszonyított) mozgási energiája, (2) kölcsönhatási energiája és (3) saját belső energiája. Első lépésben logikus a molekulákat tekinteni a test alkotórészeinek. De ezek maguk is összetett objektumok, amelyeknek van (a kölcsönhatásuk által befolyásolt) belső energiája. Ezt a belső energiát a következő, mélyebb szinten a saját alkototórészeik mozgási, kölcsönhatási és belső energiája határozza meg. Nyilvánvaló azonban, hogy ezen a szinten sem állhatunk meg, mert pl. az atommagok belső energiájára ugyanez a séma alkalmazandó.

Azonban minél „mélyebbre” hatolunk be a test szerkezetébe, annál bizonytalanabbá válnak az ismereteink. Szerencsére egy adott fizikai folyamatban csak a felsőbb szinteken rendeződik át az energia (a kémiában pl. az atomok alkotórészeit már változatlannak tekinthetjük), ezért — ha nagyon precizek akarunk lenni, — a változatlan szintek energiáját egy ismeretlen állandóban foglalhatjuk össze.

A tömeg-energia reláció gyökeresen változtat ezen a helyzeten, mert a tömeg egyértelműen meghatározza a test belső energiáját, akármi legyen is annak konkrét fizikai természete. De ez a lehetőség csak akkor használható ki hatékonyan, amikor a tömeg megváltozása mérhető nagyságú. A radioaktív bomlásoknál például ez a helyzet, de a newtoni fizikában olyan kis energiaváltozásokkal van dolgunk, hogy a hozzájuk tartozó tömegváltozás az $E_0 = mc^2$-ben fellépő c^2 tényező következtében mindig mérhetetlenül kicsi. Ez az oka (és magyarázata) annak, hogy a newtoni fizikában (és a nemrelativisztikus kvantumelméletben is) érvényesnek tekintjük a tömegmegmaradás törvényét. Ezt a közelítést ma is nagyon széles körben alkalmazzuk, és amikor ezt tesszük, újra érvényessé válik az a meggondolás, amely figyelmeztet rá, hogy az energiát csak additív állandó erejéig ismerhetjük. A mondottak alapján azonban ezt az állandót inkább ismeretlennek, mint önkényesnek (tetszőlegesnek) kell neveznünk.

De feltehetjük a kérdést, hogy tulajdonképpen mi is az a kritérium, amely a belső energiát egyértelműen meghatározza. A választ az általános relativitáselméletben találjuk meg, amely szerint a téridő görbület forrása az energia, ezért lényegében a görbület hiánya az, ami az energia nulla szintjét rögzíti. Ezért nem igazán meglepő, hogy az $E_0 = mc^2$ törvény csak az általános relativitáselméletben igazolható[12]. A speciális relativitáselméleti bizonyításból csak a $\Delta E_0 = \Delta m \cdot c^2$ képlet következik, és ez a képlet még összefér azzal, hogy az energia csak egy ismeretlen konstans erejéig van definiálva.

[12] Ld. a *Relativitáselmélet* könyvem már idézett szakaszát.

Látszólag az energiában általában fellépő U potenciális energiára való utalás is elég ahhoz, hogy az energiát csak egy önkényes állandó erejéig tekintsük meghatározottnak. Ez a felfogás azonban a potenciális energia két, elvileg különböző aspektusának összemosásából származik. A mozgásegyenletek szempontjából ugyanis a potenciális energia valójában *erőfüggvény*, amelyet az a követelmény határoz meg, hogy az erő legyen egyenlő a negatív gradiensével. Ebből nyilvánvaló, hogy az erőfüggvény csak egy *önkényes* additív állandó erejéig van rögzítve. Amikor azonban potenciális energián valóban *energiát* értünk, akkor ez a mennyiség abban a fizikai mezőben felhalmozott energiával kapcsolatos, amely a kölcsönhatást közvetíti, és nullával egyenlő, amikor a mező mindenütt nulla.

Tekintsünk például két elektromosan töltött testet[13]. Ekkor $U = e_1 e_2 / 4\pi\epsilon_0 r_{12}$, amelynek negatív gradiense a Coulomb-erő. Energiaként azonban az $\epsilon_0 \mathbf{E}^2/2 = \epsilon_0(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2/2$ elektromos térenergia-sűrűség integráljának azzal a tagjával egyenlő, amely az $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$ skalárszorzatot tartalmazza. Önkényes állandó hozzáadására ekkor nincs lehetőség, az energia nulla szintjét az $\mathbf{E} = 0$ (természetesen a $\mathbf{B} = 0$-val együtt) egyértelműen rögzíti.

Ezt az észrevételt érdemes egy kicsit tovább gondolni. Ha létezne olyan fizikai objektum, amely kizárólagosan elektromágneses mezőből áll, és *mégis van nyugalmi rendszere*, akkor az ilyen objektumra vonatkozó tömeg-energia reláció *delták nélküli* levezetéséhez az energia null-szintjét az $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ feltétel rögzítené. Ilyen objektum a nem létező (tömeg nélküli), mégis ideálisan tükröző falak közé zárt hőmérsékleti sugárzás, amely természetesen a valóságtól nagyon távoleső absztrakció. Ezt vizsgálta Planck az 1907-es dolgozatában.

1907-ben az üreg nyugalmi rendszerében a sugárzási energiát a Stefan-Boltzmann törvényből már jól ismerték, a sugárzást klasszikus elektromágneses mezőnek tekintették, amelyet a Maxwell-egyenletek írnak le. A sugárzási tér statisztikus tárgyalását az $\epsilon = h\nu \cdot n$ kvantumfeltétellel együtt Planck alapozta meg. Az elektromágneses mező relativisztikus transzformációjának az ismeretében pedig lehetővé vált a konstans sebességgel mozgó, tömeg nélküli falak közé zárt hőmérsékleti sugárzás G impulzusának meghatározása, ebből pedig (14) alapján ki lehetett számítani ennek a merőben hipotetikus objektumnak a tömegét. A Maxwell-egyenletek relativisztikus invarianciája következtében a korrekt számítás eredménye nem lehetett más , mint az $m = E_0/c^2$ képlet, amelyet azonban csak annak a mesterkélt felfogásnak az alapján lehetett általános érvényűnek tekinteni, hogy minden makroszkópikus test tartalmaz hőmérsékleti sugárzást. Ezért semmiképpen sem indokolt az a széles körben elfogadott nézet, hogy a tömeg-energia reláció korrekt levezetése Planck érdeme.

Az azonban teljes mértékben lehetséges, hogy a Helmholtz-féle potenciálból származó energia képletében a konstans nullának választásban Planckot az is motiválhatta, hogy a térenergia nullával egyenlő, amikor az elektromágneses mező mindenütt eltűnik. A tömeg nélküli edénybe zárt hőmérsékleti sugárzás esetében ez a feltétel nemcsak természetes, hanem ugyanakkor speciális esete is annak az általános követelménynek, amire fentebb már utaltunk: ahol nincs

[13] Ld. itt a honlapomon az *Elektrodinamika* jegyzet 2.33 szakaszát.

téridő görbület, ott az energia (pontosabban az energia-impulzus tenzor) nullával egyenlő. Planck 1907-es cikkének megjelenésekor azonban az általános relativitáselmélet még csírájában sem létezett.